

ISSN 2618-0650 (Print)
ISSN 2664-1364 (Online)

Механіка



та математичні методи

**Mechanics
and Mathematical Methods**

**Науковий журнал
The scientific journal**

I/1/2019

УДК 531 : 51-7 (05)
М55

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

Науковий журнал



Засновник і видавець:

Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Том I
№1
2019**

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: Серія КВ №23478–13318 Р від 13.07.2018 р.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
Серія ДК №4515 від 01.04.2013 р.

М55 **Механіка та математичні методи** : науковий журнал. — Одеса : ОДАБА, 2019. — Том I. — Вип. №1. — 92 с.

В науковому журналі публікуються статті і огляди за галузями знань та спеціальностями:
– 11 Математика та статистика (Математика, Статистика, Прикладна математика);
– 12 Інформаційні технології (Інженерія програмного забезпечення, Комп'ютерні науки та інформаційні технології, Системний аналіз);
– 13 Механічна інженерія (Прикладна механіка, Авіаційна та ракетно-космічна техніка, Суднобудування).

Рекомендовано до друку Вченою радою Одеської державної академії будівництва та архітектури, протокол №7 від 28.02.2019 р.

Адреса: редакція журналу «Механіка та математичні методи»
 Одеська державна академія будівництва та архітектури
 вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029

Телефони: (048)723-23-10, (048)7323402, (048)7298626
E-mail: mmm@ogasa.org.ua
Web: mmm-journal.com.ua

УДК 531 : 51-7 (05)
М55

ISSN 2618-0650 (Print)
ISSN 2664-1364 (Online)

© Одеська державна академія
будівництва та архітектури, 2019

Склад редакційної колегії:

Головний редактор: Ковров А. В., к.т.н., проф., ректор Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Заступники головного редактора:

Крутий Ю. С., д.т.н., проф., проректор з науково-педагогічної роботи Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Сур'янінов М. Г., д.т.н., проф., завідувач кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Відповідальний секретар: Кіосак В. А., д.ф.-м.н., доц., професор кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

- Бербюк В. Є. д.ф.-м.н., проф., професор кафедри механіки та морських наук, Технічний університет Чалмерса, Гетеборг, Швеція;
- Вайсфельд Н. Д. д.ф.-м.н., проф., завідувачка кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна;
- Ватуля Г. Л., д.т.н., проф., професор кафедри будівельної механіки та гідравліки Українського державного університету залізничного транспорту, Харків, Україна;
- Горик О. В., д.т.н., проф., завідувач кафедри загальнотехнічних дисциплін Полтавської державної аграрної академії, Полтава, Україна;
- Куріазопоулос А., к.т.н., доц., професор кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Кода Е., д.т.н., проф., декан факультету будівництва та інженерії середовища Варшавського природничого університету, Варшава, Польща;
- Кононов Ю. М., д.ф.-м.н., проф., в.о. завідувача відділу теорії керуючих систем інституту прикладної математики та механіки НАН України, Слав'янск, Україна;
- Кривий О. Ф., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики Національного університету "Одеська морська академія", Одеса, Україна;
- Круглов В. Є., к.ф.-м.н., проф., декан факультету математики, фізики і інформаційних технологій Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна;
- Кучер М. К., д.т.н., проф., завідувач відділу конструкційних матеріалів інституту проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна;
- Лесечко О. В., к.ф.-м.н., доц., доцент кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Лещенко Д. Д., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри теоретичної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Ляшенко Т. В., д.т.н., проф., професорка кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Максимович О. В., д.т.н., проф., професорка кафедри зварювального виробництва, діагностики та відновлення металоконструкцій Національного університету "Львівська політехніка", Львів, Україна;
- Пастернак Я. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна;
- Пневматікос Н., к.т.н., доц., доцент кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Попов В. Г., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри вищої математики Національного університету "Одеська морська академія", Одеса, Україна;
- Савченко О. Г., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри прикладної математики та економічної кібернетики Херсонського державного аграрного університету, Херсон, Україна;
- Трач В. М., д.т.н., проф., завідувач кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування, Рівне, Україна;
- Шваб'юк В. І., д.т.н., проф., професор кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна.

Технічний редактор: Головата Злата Олександрівна

Лінгвістичний радник з англійської мови: Мар'яно Яніна Георгіївна, к.ф.н, доц.

ІТ підтримка: Вандинський Віктор Юрійович

The composition of the editorial board:

Chief Editor: Kovrov A., Ph.D., Professor, Rector of Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;

Deputy Chief Editor:

Krutii Yu., Doctor of Technical Science, Professor, Pro-rector for Research of Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;

Suryaninov M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Mechanics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;

Assistant Editor: Kiosak V., Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of Higher Mathematics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;

- Berbyuk V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor in Mechanical Systems, Division of Dynamics, Department of Mechanics and Maritime Sciences Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden;
- Vaiseld N., Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Mathematical Physics Methods, Odesa I. I. Mechnikov National University, Odesa, Ukraine;
- Vatulia G., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Structural Mechanics and Hydraulics Department, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine;
- Goryk O., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Basic Technical Disciplines Department, Poltava State Agrarian Academy, Poltava, Ukraine;
- Kyriazopoulos A., Ph.D., Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Koda E., Doctor of Technical Science, Professor, Dean of Construction and Environmental Engineering Faculty, University of Life Sciences, Warsaw, Poland;
- Kononov Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Control-system Theory Division, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Slavyansk, Ukraine;
- Kryvyi O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Department of Higher Mathematics Department, National University "Odesa Maritime Academy", Odesa, Ukraine;
- Kruglov V., Ph.D., Professor, Dean of Mathematics, Physics and Information Technology Faculty, Odesa I. I. Mechnikov National University, Odesa, Ukraine;
- Kucher M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Materials Division, G. S. Pisarenko Institute for Problems of Strength, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine;
- Lesechko O., Ph.D., Associate Professor, Associate Professor of Higher Mathematics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;
- Leshchenko D., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Mechanics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;
- Lyashenko T., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Information Technology and Applied Mathematics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;
- Maksymovych O., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Welding Engineering, Diagnostics and Rebuilding of Metal Structures, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine;
- Pasternak Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Applied Mathematics and Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine;
- Pnevmatikos N., Ph.D., Associate Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Popov V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Higher Mathematics Department, National University "Odesa Maritime Academy", Odesa, Ukraine;
- Savchenko O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Applied Mathematics and Economic Cybernetics Department, Kherson State Agrarian University, Kherson, Ukraine;
- Trach V., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Bridges and Tunnels, Strength of Materials and Structural Mechanics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine;
- Shvabyuk V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Engineering Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine.

Technical Editor: Holovata Zlata

Linguistic Adviser in English language: Maryanko Yanina, Ph.D., Associate Professor

IT Support: Vandynskyi Viktor

ЗМІСТ

Привітання ректора	6
Крутій Ю. С., Цубенко В. Л. Марко Григорович Крейн: видатний математик, людина, педагог.....	7
Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Палій К С. Рух твердого тіла, близького до динамічного сферичного, з порожниною, заповненою в'язкою рідиною.....	17
Кіосак В. А., Лесечко О. В. Моделі механічних систем, що зберігають тензор Вейля.....	25
Шваб'юк В. І., Ротко С. В., Бондарський О. Г., Шваб'юк В. В. Уточнений розрахунок композитних плит на пружних основах за дії локальних навантажень.....	35
Gavdzinski V., El-Sheikh M. G., Maltseva E. Application of singular integral equations in solving some contact problems in theory of elasticity.....	46
Ковальчук С. Б., Горик А. В. Основное напряженно-деформированное состояние многослойного кругового кольца под действием взаимно противоположных нормальных сил.....	56
Рачинська А. Л., Купчак О. І. Дослідження руху супутника під дією моменту сил світлового тиску.....	72
Бекшасв С. Я. Про оптимальний розв'язок задачі Бубнова.....	83

CONTENT

Rector's greeting.....	6
Krutii Y., Tsubenko V. Marko Grygorovich Kreyn: prominent mathematician, personality, teacher	7
Akulenko L., Leshchenko D., Pali E. Motion of a nearly dynamically spherical rigid body with a cavity filled with a viscous fluid.....	17
Kiosak V., Lesechko O. Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor.....	25
Shvabyuk V., Rotko S, Bondarsky O., Shvabyuk V. Specified calculation of composite plates on the elastic basis under the action of localized loads	35
Gavdzinski V., El-Sheikh M G., Maltseva E. Application of singular integral equations in solving some contact problems in theory of elasticity.....	46
Koval'schuk S., Goryk O. Basic stress-strain state of a multilayer circular ring under the action of mutually opposite normal forces	56
Rachinskaya A., Kupchak O. Study of the satellite motion under the action of moment of light pressure forces.....	72
Bekshaev S. On the optimal solution of the Bubnov problem	83



Шановні колеги!

Ви тримаєте в руках перший номер нового наукового журналу «Механіка та математичні методи». Створення такого журналу в Одеській державній академії будівництва та архітектури зумовлений рядом причин, головна з яких – підвищення інтересу вчених-будівельників до проблем, що виникають на стиках наукових спеціальностей, успішне розв’язання яких можливе лише при спільних наукових дослідженнях конструкторів, математиків, механіків, фахівців з інформаційних технологій та інженерів.

Наша академія історично завжди славилась своїми науковими школами, в рамках яких здійснювались наукові дослідження у різних областях науки. Спираючись на міцний фундамент, наукові школи Академії і в сьогоднішніх непростих умовах успішно провадять наукову діяльність. Популяризація їх досягнень – одна із задач нового наукового видання.

Завдання журналу – об’єднати на його сторінках передові дослідження й досягнення в області будівельних конструкцій, прикладної математики, теоретичної та технічної механіки, сучасних інформаційних технологій, як українських, так і закордонних вчених, що працюють в областях близьких до наукових шкіл академії.

Дорогі друзі! Я щиро сподіваюся, що наша спільна робота в межах журналу буде творчою, плідною, багатогранною. Розуміючи складність поставлених задач, бажаю Вам успіху на вибраному шляху.

Хай щастить!

З повагою,
ректор академії А. В. Ковров

УДК 371.124:51

МАРКО ГРИГОРОВИЧ КРЕЙН: ВИДАТНИЙ МАТЕМАТИК, ЛЮДИНА, ПЕДАГОГ

Крутий Ю. С.,¹ Цубенко В. Л.¹

¹ *Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація: У статті досліджено одеський період життя і творчості видатного вченого-математика, популяризатора наукових знань, автора численних наукових праць, викладача, який виховав багато поколінь студентів технічних спеціальностей Марка Григоровича Крейна (1954–1974). На основі опрацювання літератури і широкого кола джерел, у тому числі таких, що вперше вводяться до наукового обігу, проаналізовано наукову і педагогічну роботу, громадську діяльність професора М. Г. Крейна на посаді завідувача кафедри теоретичної механіки в Одеському інженерно-будівельному інституті. Доведено, що під керівництвом професора М. Г. Крейна підвищився рівень викладання і науково-дослідної роботи в галузі механіко-математичних наук, систематично працювали науково-дослідні семінари, присвячені теоретичним проблемам математики й питанням застосування математики в задачах теорії пружності, пластичності, будівельної механіки й динаміки споруд, теоретичної фізики тощо, створено програми математичної освіти. Простежено, що створена і керована М. Г. Крейном одеська математична школа функціонального аналізу завоювала всесвітнє визнання. Видатний український математик Марко Григорович Крейн увійшов у золотий фонд науки. Його увага була зосереджена на важливих для того часу проблемах як теоретичного, так і практичного спрямування: теорії осциляційних ядер і матриць, теорії наближень, геометрії функціональних просторів, теорії розширень напівобмежених операторів, теорії продовження ермітово-позитивних функцій і гвинтових ліній, теорії цілих операторів і задачі струни, методу направляючих функціоналів, топологічних груп і однорідних просторів, теорії стійкості рішень диференціальних вправ, теорії операторів в просторі з індефінітною метрикою, зворотних спектральних задач, рівнянь Вінера-Хопфа, методу визначника збурень, несамосопряжених операторів. Поглиблене вивчення документів дозволило виявити нову інформацію щодо наукових відряджень та історію співпраці з вітчизняними і зарубіжними науковими установами члена-кореспондента АН УРСР, доктора фізико-математичних наук, професора М. Г. Крейна. Встановлено, що праці М. Г. Крейна та його наукової школи були першими і заклали фундамент відповідної галузі математичної науки. З'ясовано, що феномен М. Г. Крейна полягає у тому, що його праці не втратили актуальності і до наших днів. Більшість праць вченого знаходять застосування у сучасних дослідженнях, зокрема, в різних галузях фундаментальних наук.

Ключові слова: М. Г. Крейн, вчений, професор, відрядження, математика, механіка, наукові праці, Одеський інженерно-будівельний інститут.

MARKO GRYGOROVICH KREYN: PROMINENT MATHEMATICIAN, PERSONALITY, TEACHER

Y. Krutii¹, V. Tsubenko¹

¹ *Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract: The article investigates the Odessa period of life and work of Mark Kreyn (1954–1974), the outstanding scientist-mathematician, popularizer of scientific knowledge, the author of numerous scientific works, the teacher who trained many generations of students of technical specialties. Based on working out the literature and a wide range of sources, including those introduced for the first time in scientific circulation, the scientific and pedagogical work, the public



activity of Professor M. Kreyn as the head of the Department of Theoretical Mechanics at the Odessa engineering and construction institute has been analyzed. It has been proved that under the guidance of Professor M. Kreyn the level of teaching and research work in the field of mechanics and mathematical sciences increased, scientific seminars devoted to theoretical problems of mathematics and the issues of application of mathematics in the tasks of the theory of elasticity, plasticity, building mechanics, dynamics of structures and theoretical physics were systematically carried out, programs of mathematical education were created. It has been investigated that the Odessa mathematical school of functional analysis created and managed by M. Kreyn, earned world recognition.

The outstanding Ukrainian mathematician Mark Kreyn was included in golden fund of science. His attention was focused on the following important problems of that time, both theoretical and practical: the theory of oscillatory kernels and matrices, approximation theory, geometry of functional spaces, the theory of extensions of semi-bounded operators, the theory of continuation of Hermitian-positive functions and helical lines, the theory of entire operators and problems of the string, method of directing functionals, topological groups and homogeneous spaces, the theory of stability of solutions of differential exercises, the theory of operators in a space with indefinite metric, inverse spectral problems, Wiener-Hopf equations, perturbation determinant method, non-self-adjointed operators.

The through study of documents has revealed new information on scientific trips and the history of cooperation with national and foreign scientific institutions of Professor M. Kreyn, the corresponding member of the Academy of Sciences of the Ukrainian Soviet Socialist Republic, Doctor of physical and mathematical sciences. It has been stated that the works of M. Kreyn and his scientific school were the first and established the foundations of the corresponding branch of mathematical science. It has been clarified that the phenomenon of M. Kreyn consists is based on the fact that his works are still relevant at present days. Most of M. Kreyn's works are used in modern research and in various fields of basic sciences in particular.

Keywords: M. Kreyn, scientist, professor, business trip, mathematics, mechanics, scientific works, Odessa engineering and construction institute.

1 ВСТУП

В умовах сучасної трансформації українського суспільства важливою складовою у визначенні потенціалу України як конкурентоспроможної держави є дослідження у фундаментальних науках, що мають не лише теоретичний, а й прикладний характер. Однією з важливих наук, яка впливає на динамічний науково-технічний прогрес є математика. Наукові знання є найважливішим компонентом сучасної цивілізації. Зокрема, це стосується й галузі функціонального аналізу. Протягом останнього десятиліття спостерігаються загальносвітові тенденції використання результатів фундаментальних досліджень як джерела інновацій і проривних технологій, істотне зростання їх практичної значимості. Серед імен найвидатніших діячів науки ХХ ст. називається ім'я Марка Григоровича Крейна (1907–1989), відомого математика, популяризатора наукових знань, автора численних оригінальних праць, що становлять гордість української математики, і викладача, який виховав багато поколінь студентів технічних спеціальностей. Дослідження М. Г. Крейна стали фундаментальними і багато в чому визначили майбутнє галузі функціонального аналізу. Характерною рисою його робіт є їхня глибока внутрішня єдність, переплетіння загальних абстрактних і геометричних ідей з конкретними аналітичними результатами. Застосування функціонального аналізу дає можливість до розв'язання проблем математичного аналізу, зокрема, розгляду окремих функцій, вивчення функціональних просторів та їхніх перетворень.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Актуальність даної наукової публікації визначається важливістю для історії української математики вивчення наукової спадщини М. Г. Крейна і уточнення багатьох моментів біографії, розширення її за рахунок нових фактів, її забутих чи напівзабутих сторінок, особливо архівних матеріалів, що залишаються неопублікованими. Пріоритет М. Г. Крейна у галузі математики визнаний як його сучасниками – А. А. Нудельманом, М. Г. Чеботарьовим, Г. К. Сусловим, так і послідовниками – Ю. М. Березанським, І. Ц. Гохбергом, В. М. Адамяном та ін. Проте історики науки і досі не віддали належне цьому вченому-математику. Одна з причин такої неуваги може полягати в обмеженості фактичних матеріалів, необхідних для створення його творчої біографії. У сучасній науковій літературі вдалося знайти лише публікації та декілька статей в журналі «Успіхи математичних наук» [1; 6] і «Українському математичному журналі» [12; 14], що присвячені його пам'яті, загальні огляди в енциклопедичних виданнях [10; 11; 13]. Певні моменти досліджуваної теми, що містять загальний огляд особистого листування М. Г. Крейна, висвітлені у статті Ю. В. Булгакова. Автор на основі групи документів, що зберігаються в особовому архівному фонді М. Крейна в Інституті архівознавства Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського дослідив професійні інтереси та приватне життя М. Г. Крейна [7, 100–106]. Доповненням до існуючого фактажу став розширений пошук в архіві Одеської державної академії будівництва та архітектури [3; 4], завдяки якому не тільки були заповнені «білі плями», що існували у життєписі М. Г. Крейна, а й виявився ряд помилок або неточностей в опублікованих про нього матеріалах.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Мета даної роботи полягає в тому, щоб на основі комплексного аналізу архівних джерел та наявної літератури дослідити одеський період життя і творчості

представника української технічної інтелігенції, вченого М. Г. Крейна у галузі математичної науки в другій половині ХХ ст.

Для реалізації поставленої мети визначені такі задачі: 1) з'ясувати стан наукової розробки теми, окреслити джерельну базу; 2) реконструювати у цілісному вигляді основні події одеського періоду життя і творчості видатного математика, а саме: його педагогічну і наукову спадщину в Одеському інженерно-будівельному інституті; 3) уточнити окремі біографічні дані М. Г. Крейна; 4) визначити зміст і значення одеського періоду життя не лише в інтелектуальній біографії вченого, але і в історії вітчизняної математичної науки.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Народився Марко Григорович Крейн 3 квітня 1907 р. у м. Києві. Математикою почав захоплюватися з 13 років під час навчання у трудовій школі. З 1921 р. він відвідував як вільний слухач лекції та наукові семінари Д. О. Граве і Б. М. Делоне в Київському політехнічному інституті. Навесні 1924 р. Марко Григорович без дозволу батьків поїхав до м. Одеси. У 1925 р. вийшла перша наукова праця М. Г. Крейна, що отримала нагороду на конкурсі наукових праць. В Одесі він познайомився з математиками М. Г. Чеботарьовим і С. О. Шатуновським. З 1926 р. по 1929 р. Марко Григорович навчався в аспірантурі під науковим керівництвом М. Г. Чеботарьова. Вів практичні заняття з елементарної математики та інтегрального числення. Брав активну участь у семінарах Г. К. Сулова з механіки. По закінченню аспірантури молодий вчений представив 7 наукових праць з алгебри, геометрії і теорії функцій [8, 115].

З 1929 р. М. Г. Крейн працював у закладах вищої освіти на посадах доцента, з 1934 р. – професора, завідувача кафедри. У 1938 р. вченою радою Московського державного університету йому було присуджено науковий ступінь доктора фізико-математичних наук (без захисту дисертації). У 1939 р. М. Г. Крейна обрано членом-кореспондентом Академії наук УРСР [3].

Життя та творчість видатного математика Марка Григоровича Крейна тісно пов'язані з Одесою. З 1930 р. по 1941 р. М. Г. Крейн працював в Одеському державному університеті на посадах завідувача різними кафедрами: теоретичної механіки і математичної фізики, теорії функцій, математичного аналізу. У 1940 р з ініціативи президента АН УРСР О. О. Богомольця М. Г. Крейн був відряджений до Львова для встановлення ділових контактів з математиками Львова. Участь Марка Григоровича в цій роботі була особливо корисною з огляду на близькість його наукової тематики до інтересів всесвітньовідомого математика С. Банаха, який працював у той час у Львові [1, 197]. У 1941–1944 рр. перебував в евакуації в Куйбишеві, очолював кафедру теоретичної механіки у Куйбишевському індустріальному інституті, брав активну участь в організації Куйбишевського авіаційного інституту [15, 53]. З-під його пера виходять одна за одною видатні наукові праці, стислі повідомлення про яких друкуються у «Доповідях АН СРСР» [1, 198]. У 1944–1954 рр. вчений завідував кафедрою теоретичної механіки Одеського інституту інженерів морського флоту. Протягом 1954–1974 рр. Марко Григорович Крейн очолював кафедру теоретичної механіки в Одеському інженерно-будівельному інституті. У 1954 р. за результатами конкурсу на заміщення вакантної штатної посади М. Г. Крейна було обрано завідувачем кафедри теоретичної механіки Одеського інженерно-будівельного інституту [3].

Протягом 20-річної діяльності (1954–1974) на посаді завідувача кафедри теоретичної механіки в Одеському інженерно-будівельному інституті професора М. Г. Крейна підвищився рівень викладання і науково-дослідної роботи в галузі

механіко-математичних наук. Під керівництвом професора М. Г. Крейна систематично працюють науково-дослідні семінари, присвячені теоретичним проблемам математики й питанням застосування математики в задачах теорії пружності, пластичності, будівельної механіки й динаміки споруд, теоретичної фізики тощо. Лекції професора Крейна М. Г. для студентів, аспірантів і викладачів інституту стали взірцем поєднання наукової глибини з максимальною ясністю, емоціональністю й завершеністю форми, школою для молодих науковців і викладачів. У 1950-х рр. М. Г. Крейн провів низку досліджень з проблеми моментів, а також загальної спектральної теорії ермітових операторів, що відіграють важливу роль, по-перше, в теорії стаціонарних випадкових процесів, по-друге, при вирішенні обернених крайових задач математичної фізики і квантової механіки, дозволяючи вирішувати складні завдання, недоступні для інших методів. Ім'я Марка Григорович Крейна швидко стає відомим у наукових колах. Маючи високий рівень підготовки, математичний талант, науковий ступінь і визнання серед колег-математиків, М. Г. Крейн постійно отримував запрошення до співпраці від різних університетів. Поїздки вітчизняного вченого були представлені широкою географією і охоплювали значне коло відомих учених. Його творчу і педагогічну діяльність високо оцінювали математики. У 1955 р. М. Г. Крейн отримав запрошення з університету м. Ненсі (Франція) взяти участь у колоквіумі математиків з теорії рівнянь, виступити з доповіддю про особисті дослідження і наукові винаходи інших вітчизняних математиків зі зворотніх крайових задач. У 1956 р. професор М. Г. Крейн отримав запрошення взяти участь у роботі Третього всесоюзного математичного з'їзду у Москві для виступу на секції функціонального аналізу з доповіддю на тему: «Зворотні задачі спектральної теорії диференціальних операторів». У 1957 р. доктора фізико-математичних наук Марка Григоровича було направлено у наукове відрядження на три місяці до Москви з метою обміну досвідом і читання спеціальних курсів з питань механіки і функціонального аналізу. Підставою для відрядження стало запрошення ректора Московського державного університету. Також вчений отримав запрошення до співпраці від науковців Угорської академії наук у м. Будапешті для вивчення досвіду організації навчання і методики викладання видатних угорських вчених-математиків. Всі витрати відрядження до Угорщини покривала запрошуюча сторона. Український вчений неодноразово отримував пропозиції емігрувати за кордон, але до останнього залишався в Україні. Протягом життя Марко Григорович тісно співпрацював з Інститутом математики Академії Наук УРСР. У 1963 р. М. Г. Крейна було запрошено виступити з доповіддю на науковому радянсько-американському математичному симпозіумі в м. Новосибірську, що проводився Сибірським відділом АН СРСР. У 1964 р. М. Г. Крейн виступив з пленарною доповіддю на Ювілейних читаннях Московського математичного товариства, присвячених 100-річчю Товариства. У 1965 р. член-кореспондент Академії наук УРСР М. Г. Крейн був включений до складу Наукової комісії з функціонального аналізу при відділенні математики Академії наук СРСР. У вересні 1965 р. М. Г. Крейн отримав запрошення і був відряджений в м. Єрван для участі у Міжнародній конференції по теорії аналітичних функцій. У 1967 р. він був відряджений до м. Києва для обговорення спільних наукових досліджень АН УРСР і АН Угорської Народної республіки [3]. У 1968 р. професор М. Г. Крейн взяв участь у загальних зборах відділень і в роботі сесії АН УРСР [4].

Напружена організаторська, викладацька та громадська робота в Одесі не завадила М. Г. Крейну займатися й наукою з молодим вченим Г. К. Лангером, який проходив стажування з науково-дослідної роботи. Вчені виконали низку досліджень з складних питань спектральної теорії операторів у просторах з індефінітних метриків. Додатки цих досліджень в теорії коливань кемпфінірованих систем з нескінченним числом ступенів свободи були представлені восени 1963 р. на Міжнародному симпозіумі в

Тбілісі. Текст доповіді «Про спектральну функцію самоспряженого оператора в просторі з індефінітною метрикою» було надруковано в наукових працях симпозиуму. Більшість наукових праць і частина лекцій «Вступ в геометрію індефінітної J - просторів і теорію операторів в цих просторах» професора М. Г. Крейна були перекладені іноземними мовами і перевидані за кордоном англійською мовою в США і французькою мовою в Парижі. Одним із досягнень вченого є участь у створенні радянської школи функціонального аналізу і в підготовці багатьох молодих вчених, що працювали в Одесі, Харкові, Києві, Воронежі, Москві та інших містах. Професор М. Г. Крейн – видатний вихователь наукової молоді, справжній майстер підготовки висококваліфікованих наукових кадрів, неперевершений педагог. Він виховав багато всесвітньовідомих учнів, серед яких 20 докторів і 50 кандидатів фізико-математичних і технічних наук [2, 584; 12, 4], з них у період роботи в м. Одесі – 45 вчених: 30 кандидатів наук і 15 докторів наук [3]. Створена і керована ним протягом більш, ніж 30-ти років одеська математична школа функціонального аналізу давно вже завоювала всесвітнє визнання [15, 11]. У вересні 1963 р. член-кореспондент АН УРСР отримав подяку за якісне проведення лекцій і семінарських занять з спеціальних курсів математики в літній школі та обробку і підготовку до видання конспектів лекцій.

Поєднання алгебраїчних і геометричних методів виразно простежується в дослідженнях Марка Григоровича Крейна з теорії топологічних груп і однорідних просторів. Гармонічний аналіз на комутативній локально-компактній групі і відкриття своєрідного принципу двоїстості для компактних не комутативних груп, зокрема, того факту, що структура однорідного компакту цілком визначається алгеброю гармонічних функцій на ньому, помітно вплинули на подальший розвиток абстрактного гармонічного аналізу [2, 582]. М. Г. Крейн розробив загальний метод напрямних функціоналів, за допомогою якого отримав розклади за власними функціями звичайних самоспряжених диференціальних операторів. Методи Марка Григоровича проникли і в теорію не самоспряжених операторів. Завдяки ним ця теорія розглядалася ним як один із ланцюжків «деякої зв'язної множини подій, що розгорнулися на арені гільбертових просторів» [2, 583]. Винайдені ним нові методи розв'язання інтегральних рівнянь деяких класів набувають в руках автора цих методів і його послідовників велике значення як знаряддя до вирішення конкретних задач математичної теорії пружності.

Наукова творчість члена-кореспондента АН УРСР, доктора фізико-математичних наук, професора М. Г. Крейна відзначається як широтою охоплення найактуальніших розділів сучасної математики, так і глибиною досліджень. Вони стосуються теорії матриць, диференціальних рівнянь, геометрії банахових просторів, теорії коливань, проблеми моментів, математичної теорії сталості руху, теорії лінійних операторів в гільбертовому просторі, теорії інтегральних рівнянь різноманітних типів, прямих і обернених граничних задач, теорії збурень, теорії операторів у просторах з індефінітною метрикою та багатьох інших проблем. Серед перелічених розділів є такі, де праці М. Г. Крейна та його школи були першими, саме вони заклали фундамент відповідної галузі математичної науки. Сюди належить теорія осциляційних матриць та ядер, теорія конусів в банахових просторах, теорії напівобмежених та цілих операторів, канонічної системи диференціальних рівнянь в банахових просторах, простори з індефінітною метрикою, конуси та опуклі множини (в тому числі знаменита теорема Крейна-Мільмана), оператори у просторах з двома нормами, інтегральні оператори, прямі та обернені спектральні задачі для неоднорідних струн і рівнянь Штурма-Ліувілля, теорія збурень і теорія Фредгольма, теорія дуальності для компактних груп, проблеми теорії еластичності тощо [9, 14]. Поряд з теоретичною зросла і практична значущість результатів математика, особливо тих, що стосувалися теорії параметричного резонансу. Якщо вірити відомому фізику В. Векслеру, «без праць

М. Г. Крейна ми не мали б синхрофазотрона». У популярній книзі «батька кібернетики» Н. Вінера «Я – математик» ім'я М. Г. Крейна стоїть поруч з іменем А. М. Колмогорова – так оцінено їхні дослідження воєнних і повоєнних років з теорії прогнозування та керування [5, 49]. За період 1965–1970 рр. роботи в Одеському інженерно-будівельному інституті М. Г. Крейн опублікував і здав до друку 37 праць, з них – три монографії. Спільно з завідувачем відділу функціонального аналізу Інституту математики АН МРСР І. Ц. Гохбергом професор М. Г. Крейн провів дослідження з питань теорії несамосопряжених операторів. У результаті співпраці було видано низку наукових статей і 2 монографії М. Г. Крейна у співавторстві з І. Ц. Гохбергом (Гохберг І. Ц., Крейн М. Г. Вступ у теорію лінійних несамосопряжених операторів в гільбертовому просторі. – М. : Наука, 1965. – 448 с.; Гохберг І. Ц., Крейн М. Г. Теорія вольтерових операторів в гільбертовому просторі і її застосування. – М. : Наука, 508 с.: іл.). У 1970 р. вийшла друком монографія у співавторстві з Ю. Л. Далецьким (Далецький Ю. Л., Крейн М. Г. Стійкість рішень диференціальних рівнянь в банахових просторах. – М. : Наука, 1970. – 536 с.) та у 1973 р. – монографія у співавторстві з А. А. Нудельманом (Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментів Маркова та екстремальні задачі. – М. : Наука, 1973. – 416 с.), що була перевидана у 1979 р. англійською мовою. У монографії М. Г. Крейна і А. А. Нудельмана врахований досвід американських авторів, використані праці радянських математиків [14, 67].

Велику наукову і педагогічну роботу М. Г. Крейн поєднував з активною громадською діяльністю. Він входив до складу редакційних колегій кількох провідних радянських і зарубіжних наукових математичних журналів: «Функціональний аналіз і його додатки», «Теорія функції і функціональний аналіз», «Journal of Functional Analyses» – був членом оргкомітетів багатьох математичних конференцій та з'їздів, очолював механіко-математичну секцію Одеського Будинку вчених. Неабияке місце в громадській діяльності професора М. Г. Крейна займала наукова робота із зарубіжними математиками, демонстрація новітніх досягнень радянської науки, обмін досвідом з ученими країн соціалістичного табору. На засіданнях секції Одеського Будинку вчених під керівництвом професора неодноразово виступали з науковими доповідями радянські вчені з міст: Ленінграду, Києва, Харкова, Новосибірська, Кишинєва та Ростова, а також зарубіжні вчені: професор Г. Лангер (Дрезденський технічний університет, м. Дрезден, Німеччина), професор Г. Фонш (Інститут математики Румунської АН в м. Бухаресті), професор Ч. Девіс (Університет в м. Торонто, Канада), професор Е. Хноітт (Вашингтонський університет, США), старший науковий співробітник Я. Богнар (Інститут математики Угорської АН в м. Будапешті) [3].

У квітні 1970 р. професор М. Г. Крейн і був нагороджений медаллю за доблесну працю [4]. У 1973 р. М. Г. Крейн отримав запрошення з Мілану опублікувати свою автобіографію від видавництва науково-технічного відділу біографічної енциклопедії «Енциклопедія вчених і технологів», що містить відомості про детальний огляд історії науки і техніки в різних країнах від античності до наших днів. Дане наукове видання було доповненням 12-томної «Енциклопедії науки і техніки» (тираж 85000 примірників), в якій містилися найвагоміші дослідження природознавства і техніки, значні внески в науку [4]. 13 травня 1970 р. М. Г. Крейна було обрано іноземним почесним членом Американської академії мистецтв і наук [4].

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Феномен М. Г. Крейна полягає у тому, що його праці не втратили актуальності і до наших днів. Більшість праць вченого знаходять застосування у сучасних дослідженнях, зокрема, в різних галузях фундаментальних наук. Для професора М. Г. Крейна

характерним було вміння поєднувати загальні теоретичні дослідження важких математичних проблем із розв'язанням прикладних завдань, що виникають у суміжних науках та в сучасній техніці. Розвинута професором М. Г. Крейном теорія продовження ермітово-позитивних функцій пов'язується ним з проблемами стаціонарних випадкових процесів – однією з основ кібернетики. Цикл робіт з теорії сталості руху знаходить багато важливих застосувань, зокрема, в питаннях регулювання синхрофазотронів. Кілька робіт присвячує професор М. Г. Крейн важким гідродинамічним проблемам в теорії хвильового опору. Проблема теоретичної фізики, зокрема, квантової теорії, присвячені праці професора М. Г. Крейна в галузі теорії збурень, теорії обернених граничних задач та інші.

У 1966 р. на Міжнародному конгресі математиків у м. Москві професору М. Г. Крейну, як представнику найвидатніших математиків світу, було доручено виступити з доповіддю-оглядом протягом години на пленарному засіданні. Серед доповідачів у роботі секцій конгресу взяли участь кілька десятків учнів професора М. Г. Крейна. Деякі з них вже керували значними математичними колективами, з них – член-кореспондент АН УРСР професор Ю. М. Березанський – у м. Києві, професор М. А. Баймарк – у м. Москві, професор М. А. Красносельський – у м. Воронежі та інші. У 1969 р. вчений у співавторстві з професором Ю. Л. Далецьким підготував доповідь на тему «Про деякі результати і проблеми теорії стійкості і асимптотичної поведінки рішень диференціальних рівнянь у банаховому просторі» на Міжнародну конференцію з нелінійних коливань, що проходила у Києві [3].

6 ВИСНОВКИ

Діяльність М. Г. Крейна відзначена винятковою багатосторонністю, залишила помітний слід в науці. Видатний український математик Марко Григорович Крейн увійшов у золотий фонд науки, залишивши по собі глибокі сліди довгострокового впливу на розвиток математики та механіки. Його увага була зосереджена на важливих для того часу проблемах як теоретичного, так і практичного спрямування: теорії осциляційних ядер і матриць, теорії наближень, геометрії функціональних просторів, теорії розширень напівобмежених операторів, теорії продовження ермітово-позитивних функцій і гвинтових ліній, теорії цілих операторів і задачі струни, методу напрямних функціоналів, топологічних груп і однорідних просторів, теорії стійкості рішень диференціальних вправ, теорії операторів в просторі з індефінітною метрикою, зворотних спектральних задач, рівнянь Вінера-Хопфа, методу визначника збурень, несамосопряжених операторів [6, 198–211].

М. Г. Крейн був всебічно обдарованою людиною, прекрасним вченим, талановитим, геніальним математиком. Двадцять років життя віддано М. Г. Крейном роботі в Одеському інженерно-будівельному інституті. Серед його учнів є завідувачі кафедр, ректори технічних закладів вищої освіти, академіки, члени-кореспонденти, сотні фахівців. Запровадження нових математичних курсів і факультативних дисциплін, створення програм математичної освіти – далеко не повний перелік різноманітної діяльності професора М. Г. Крейна. Усі, кому пощастило безпосередньо вчитися у М. Г. Крейна, спілкуватися і працювати з ним, запам'ятали свого вчителя як інтелігентну, ерудовану, доброзичливу і принципову людину. Наукові ідеї М. Г. Крейна вивчатимуться, поглиблюватимуться, розвиватимуться, адже його математичний геній далеко випередив свій час. У 2019 р. виповнюється 30 років від дня смерті Марка Григоровича Крейна, Одеська державна академія будівництва та архітектури пишається своїм видатним вченим, математиком і педагогом.

Література

1. Адамян В. М. Марк Григорьевич Крейн (к семидесятилетию со дня рождения) / В. М. Адамян, Ю. М. Березанский, Н. Н. Боголюбов, И. С. Иохвидов, А. Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев, Ю. А. Митропольский // *Успехи математических наук*. – 1978. – Т. 33. – Вып. 3 (201). – С. 197–203.
2. Адамян В. М. Марко Григорович Крейн: (до сторіччя від дня народження) / В. М. Адамян [та ін.] // *Український математичний журнал*. – 2007. – № 5. – С. 579–587.
3. Архів Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Ф. Відділ кадрів. – Спр. 1 (Марко Григорович Крейн). – 1974.
4. Архів Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Ф. Відділ кадрів. – Спр. 2 (Марко Григорович Крейн). – 1974.
5. Березанський Ю., Горбачук В. Спадщина українського математика у світовому вимірі : Міжнародна конференція «Modern Analysis and Applications» (MAA–2007) (9–14 квітня 2007 р., м. Одеса) / Ю. Березанський, В. Горбачук // *Вісник Національної академії наук України*. – 2007. – № 5. – С. 47–50.
6. Боголюбов Н. Н. Марк Григорьевич Крейн (к шестидесятилетию со дня рождения) / Н. Н. Боголюбов, И. Ц. Гохберг, Г. Е. Шилов // *Успехи математических наук*. – Т. 23. – Вып. 3 (141). – 1968. – С. 209–214.
7. Булгаков Ю. В. Особисте листування М. Крейна: загальний огляд та інформативний потенціал / Ю. В. Булгаков // *Архіви України*. – 2012. – № 6. – С. 100–106.
8. Вчені вузів Одеси: Бібліографічний довідник. – Вип. II: Природничі науки. 1946–2010. – Ч. 2. Математики. Механіки / Упорядник І. Е. Рікун. – Одеса: ОННБ, 2010. – 279 с.
9. Кочубей А. Н. Розвиток функціонального аналізу і його застосування до задач математики та суміжних галузей // *Національна академія наук України. Видатні досягнення. 1918–2018*. – К. : «Фенікс», 2018. – С. 14–16.
10. Крейн Марко Григорович. Енциклопедія сучасної України / [Електронний ресурс] – Режим доступу : http://esu.com.ua/search_articles.php?id=2400
11. Марко Крейн // *Українці в світі* / [Електронний ресурс] – Режим доступу : <http://www.ukrainians-world.org.ua/ukr/peoples/0e66c830fdbabf80/>
12. Митропольський Ю. О. Марк Григорьевич Крейн / Ю. О. Митропольський // *Український математичний журнал*. – 1994. – 46. – № 1–2. – С. 3–4.
13. Наукова школа «Одеська школа функціонального аналізу» / [Електронний ресурс] – Режим доступу : <https://pdpu.edu.ua/splash-ukr/140-психологічна-служба.html>
14. Нудельман А. А. Работы М. Г. Крейна по проблеме моментов / А. А. Нудельман // *Український математичний журнал*. – 1994. – Т. 46. – № 1. – С. 63–75.
15. Ученые Одессы. Марк Григорьевич Крейн. Библиографический указатель. – Одесса, 1990. – Вып. 19. – 59 с.

References

1. Adamyan, V. M., Berezanskiy, Yu. M., Bogoliubov, N. N., Iohvidov, I. S., Kolmogorov, A. N., Lavrentyev, M. A., Mitropolskiy, Yu. A. (1978) Mark Grigoryevich Krein. *Uspehi matematicheskikh nauk*, Vol. 33, 3 (201), 197–203.
2. Adamyan, V. M. (2007) Marko Hryhorovych Krein: (do storichchya vud dnya narodzhennya). *Ukrainian mathematical journal*, 5, 579–587.
3. Krein Marko Hryhorovych. (1974) Archive of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture. c. 1.
4. Krein Marko Hryhorovych. (1974) Archive of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture. c. 2.
5. Berezans'kyi, Yu., Horbachuk, V. (2007) Spadschyna ukrayins'kogo matematyka u svitovomu vymiri. International conference «Modern Analysis and Applications» (MAA–2007), Odessa, 5, 47–50.
6. Boholiubov, N. N., Gohberg, I. Ts., Shilov, G. E. (1968) Makr Grigorievich Krein (k shestidesyatiletiiyu so dnia rozhdeniya). *Uspehi matematicheskikh nauk*, Vol. 23, 3 (141), 209–214.
7. Bulgakov, Yu. V. (2012) Osobyste lystuvannya M. Kreina: zahal'nyi ohlyad ta informatyvnyi potentsial. *Archives of Ukraine*, 6, 100–106.

8. Scientists of Odessa high school: Bibliographic guide (2010) Vol. 2: Natural sciences. Odessa: ONNB, 279.
9. Kochubei, A. N. (2018) Rozvytok funktsional'noho analizu i yoho zastosuvannya do zadach matematyky ta sumizhnykh haluzei. K.: Feniks, 14–16.
10. Krein Marko Hryhorovych. Entsiklopediya suchasnoyi Ukrainy. URL: http://esu.com.ua/search_articles.php?id=2400
11. Marko Krein. Ukrayintsi v sviti. URL: <http://www.ukrainians-world.org.ua/ukr/peoples/0e66c830fdbaf80/>
12. Mitropolskyi, Yu. O. (1994) Mark Grigoryevich Krein. Ukrainian mathematical journal, Vol. 46, 1–2, 3–4.
13. Scientific school «Odessa School of Functional Analysis». URL: <https://pdpu.edu.ua/splash-ukr/140-психологічна-служба.html>
14. Nudelman, A. A. (1994) Raboty M. G. Kreina po problem momentov. Ukrainian mathematical journal, Vol. 46, 1, 63–75. Scientists of Odessa. Bibliographic guide (1990). Odessa, 19, 59.

Кругий Юрій Сергійович,

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.т.н., професор
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029
yurii.krutii@gmail.com

ORCID:0000-0001-7105-3087

Цубенко Валерія Леонідівна

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.і.н., професор
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029
valeriia78d@gmail.com

ORCID:0000-0001-9848-9286

Для посилань:

Кругий Ю. С. Марко Григорович Крейн: видатний математик, людина, педагог / Ю. С. Кругий, В. Л. Цубенко // Механіка та математичні методи. – 2019. – №1. – С. 7–16.

For references:

Krutii, Yu. S, Tsubenko, V. L. (2019). Marko Hryhorovych Krein: vydatnyi matematyk, liudyna, pedahoh. Mechanics and Mathematical Methods, 1, 7–16.

УДК 521.1

РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА, БЛИЗЬКОГО ДО ДИНАМІЧНО СФЕРИЧНОГО, З ПОРОЖНИНОЮ, ЗАПОВНЕНОЮ В'ЯЗКОЮ РІДИНОЮ

Акуленко Л. Д.¹, Лещенко Д. Д.², Палій К. С.²

¹Інститут проблем механіки ім. О.Ю. Ішлінського РАН

²Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: На супутник або космічний апарат у своєму русі відносно центра мас діють моменти сил різної фізичної природи. Ці рухи можуть бути зумовлені наявністю рідини в порожнинах в тілі (наприклад, рідке паливо або окислювач в резервуарах ракети). Тому виникає потреба в дослідженні задач динаміки тіл з порожнинами, що містять в'язку рідину, для проведення розрахунку руху космічних апаратів відносно центра мас, а також у питаннях їх орієнтації та стабілізації.

Проблеми динаміки тіл з порожнинами, що містять в'язку рідину, відносяться до класичних задач механіки. Задачі динаміки твердого тіла з порожнинами, що містять в'язку рідину, представляють значно більші труднощі, ніж у випадку ідеальної рідини, та досліджені значно менше. Важливий внесок у розв'язок цих задач внесли роботи Ф. Л. Черноуська [1, 2]. Ці дослідження показали, що розв'язання задач динаміки тіла з однорідною в'язкою рідиною можна поділити на дві частини - гідродинамічну та динамічну - що може значно спростити початкову задачу.

Розглядається рух відносно центра мас близького до динамічно сферичного твердого тіла (сфероїда) з порожниною, заповненою в'язкою рідиною при малих числах Рейнольдса, який описується системою диференціальних рівнянь з урахуванням в асимптотичному наближенні моментів сил в'язкої рідини в порожнині тіла. Визначення моментів сил, що діють на тіло зі сторони в'язкої рідини в порожнині, було запропоновано в роботах Ф. Л. Черноуська. Отримано систему рівнянь руху в стандартній формі, уточнену в квадратичному наближенні за малим параметром. Проаналізовано задачу Коші для системи, визначеної після усереднення. Еволюція руху твердого тіла описується розв'язками, отриманими в результаті асимптотичних, аналітичних і чисельних розрахунків на нескінченному інтервалі часу.

У нашій роботі ми досліджуємо модель, яка представляє певний природничо-науковий інтерес до динаміки фігури Землі.

Ключові слова: в'язка рідина, порожнина, тверде тіло, усереднення.

MOTION OF A NEARLY DYNAMICALLY SPHERICAL RIGID BODY WITH A CAVITY FILLED WITH A VISCOUS FLUID

L. Akulenko¹, D. Leshchenko², E. Palii²

¹Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS

²Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: A satellite or a spacecraft in its motion about the center of mass is affected by the moments of forces of various physical nature. These motions may have various causes, for example, the presence of fluid in the cavities in the body (for example, liquid fuel or oxidizer in the tanks of a rocket). Therefore, there is a need to study the problems of the dynamics of bodies with cavities containing a viscous fluid, to calculate the motion of spacecrafts about the center of mass, as well as their orientation and stabilization.



The problems of the dynamics of the bodies with the cavities containing a viscous fluid are among the classical problems of mechanics. The problems of the dynamics of a rigid body with cavities, containing a viscous fluid, are significantly more difficult than in the case of ideal fluid and much less investigated. An important contribution to the solution of these problems has been made by the works of F. L. Chernousko [1, 2]. These studies showed that solving the problems of dynamics of a body with a homogeneous viscous fluid can be subdivided into two parts – the hydrodynamic and dynamic ones – which can greatly simplify the initial problem.

We investigated the motion about its center of mass of a nearly dynamically spherical rigid body (spheroid) with a cavity filled with a viscous fluid at small Reynolds numbers, which is described by the system of differential equations, considering the asymptotic approximation of the moments of the viscous fluid in the cavity. The determination of the motions of forces acting on the body from side of the viscous fluid in the cavity was proposed in the works of F. L. Chernousko. We obtained the system of equations of motion in the standard form which refined in square-approximation by small parameter. The Cauchy problem for a system determined after averaging was analyzed. The evolution of the motion of a rigid body is described by the solutions which obtained as a result of asymptotic, analytical and numerical calculations over an infinite time interval.

In our paper we are investigating the model which represents a certain natural-scientific interest for the dynamics of figure of the Earth.

Keywords: viscous fluid; cavity; rigid body; averaging.

1 ВСТУП

Супутник у своєму русі відносно центра мас зазнає впливу моментів сил, зумовлених рухом деяких мас всередині тіла. Ці рухи можуть бути пов'язані з наявністю рідини у порожнинах, розташованих в тілі.

Важливий внесок у розв'язок задач динаміки твердого тіла з порожнинами, що містять в'язку рідину, внесли роботи Ф. Л. Черноуська зі співавторами [1, 2]. В них отримано асимптотичний розв'язок, який описує еволюцію руху тіла, з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, на великому інтервалі часу.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

В роботі О. І. Кобріна [3] досліджено початкову ділянку обертання тіла з порожниною, що містить рідину великої в'язкості. Стаття [4] присвячена вивченню впливу в'язкої рідини в порожнині на обертання тіла навколо заданої осі. В роботі [5] за допомогою асимптотичного методу вивчається рух за інерцією твердого тіла з еліпсоїдальною порожниною, заповненою в'язкою рідиною. У статтях [6, 7, 9] та книзі [8] досліджуються швидкі обертання відносно центра мас динамічно несиметричного супутника з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, під дією моментів сил гравітації, світлового тиску та опору середовища. В роботі [10] побудовано годограф вектора кінетичного моменту твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною, та проведено чисельний аналіз зміни цього вектора. У статті [11] представлені аналітичні та чисельні результати, отримані під час дослідження системи, що складається з твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною. В роботі [12] запропоновано підхід для моделювання динаміки твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості. В [13] виведені та досліджені рівняння руху системи n зв'язаних твердих тіл з порожнинами, заповненими в'язкою рідиною.

Розглянемо рух твердого тіла з в'язкою рідиною відносно центра інерції. Тут $O_1y_1y_2y_3$ – система координат, що рухається поступально, з початком, зв'язаним з центром інерції системи. Тензор P задається у вигляді $P_{ij} = P_0\delta_{ij}$, де δ_{ij} – символ Кронекера, $P_0 > 0$. Такий вигляд тензор P має у випадку сферичної порожнини, для якої згідно [1, 2] $P_0 = 8\pi a^7 / 525$, де a – радіус порожнини. Позначимо головні центральні моменти інерції системи A, B, C ; p, q, r – проекції кутової швидкості ω на головні центральні осі інерції. Рівняння руху запишемо в проекціях на головні центральні осі інерції (крапка – похідна за часом):

$$A\dot{p} + (C - B)qr = \frac{\rho P_0}{v_{ABC}} p \left[C(A - C)(A + C - B)r^2 + B(A - B)(A + B - C)q^2 \right]. \quad (1)$$

Інші рівняння одержуються з (1.1) циклічною перестановкою букв A, B, C и p, q, r .

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо випадок, коли головні центральні моменти інерції твердого тіла близькі один до одного та можуть бути представлені у вигляді:

$$A = J_0 + \varepsilon A', \quad B = J_0 + \varepsilon B', \quad C = J_0, \quad (2)$$

де $0 < \varepsilon \ll 1$ – малий параметр.

Крім того, припустимо, що:

$$|A' - B'| = O(\varepsilon J_*), |A - B| = O(\varepsilon^2 J_*), J_* \sim J_0. \quad (3)$$

Тоді, згідно (1.2), (1.3), маємо:

$$A - B = \varepsilon(A' - B') = \varepsilon^2 J_*, A - C = \varepsilon A', B - C = \varepsilon B'. \quad (4)$$

Після перетворень системи (1) з урахуванням (2)–(4) отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= \frac{B'}{J_0} \left(1 - \varepsilon \frac{A'}{J_0} \right) qr + \varepsilon f_p(p, q, r), \quad p(0) = p_0; \\ \frac{dq}{d\tau} &= \frac{A'}{J_0} \left(-1 + \varepsilon \frac{B'}{J_0} \right) rp + \varepsilon f_q(p, q, r), \quad q(0) = q_0; \\ \frac{dr}{d\tau} &= -\frac{\varepsilon}{J_0} (B' - A') qp + \varepsilon f_r(p, q, r), \quad r(0) = r_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут r – повільна змінна. Система рівнянь (5) – суттєво нелінійна система, причому в ній частота залежить від повільного часу $\tau = \varepsilon t$. В системі (5) позначено:

$$\begin{aligned} \varepsilon f_p(p, q, r) &= \frac{\rho P_0 p}{\nu J_0^3} \left\{ A' [J_0 - \varepsilon(A' + 2B')] r^2 + (A' - B') [J_0 - \varepsilon(A' - B')] q^2 \right\}; \\ \varepsilon f_q(p, q, r) &= \frac{\rho P_0 q}{\nu J_0^3} \left\{ (B' - A') [J_0 - \varepsilon(B' - A')] p^2 + B' [J_0 - \varepsilon(2A' + B')] r^2 \right\}; \\ \varepsilon f_r(p, q, r) &= \frac{\rho P_0 r}{\nu J_0^3} \left\{ B' [-J_0 + \varepsilon(2A' - B')] q^2 + A' [-J_0 + \varepsilon(2B' - A')] p^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

4 МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

Розв'язок незбуреної системи (5) при $\varepsilon = 0, 1/\nu = 0$ записується наступним чином:

$$p = a \sin(\varphi), \quad q = a \sqrt{\frac{A'}{B'}} \cos(\varphi). \quad (7)$$

Тут $a = \sqrt{p_0^2 + (p_0/\omega)^2}$ – амплітуда, φ – фаза, $\omega = r_0 / J_0 \sqrt{A'B'}$.

Проведемо перехід від повільних змінних (p, q, r) до нових повільних змінних (a, φ, r) за допомогою заміни:

$$p = a \cos \varphi, \quad q = \frac{J_0 a \omega \sin \varphi}{B' r}, \quad r = r. \quad (8)$$

Продиференціюємо вирази (8) з урахуванням незбуреності системи. Одержуємо систему у стандартній формі:

$$\begin{aligned} \dot{a} \cos \varphi - \dot{a} \sin \varphi &= -\frac{ar \sqrt{A'B'} \sin \varphi}{J_0} + \varepsilon \frac{A' \sqrt{A'B'}}{J_0^2} ar \sin \varphi + \frac{\rho P_0 a}{\nu J_0^3} \times \\ &\times \left\{ a^2 \frac{A'}{B'} (A' - B') [J_0 - \varepsilon(A' - B')] \sin^2 \varphi + r^2 A' [J_0 - \varepsilon(A' + 2B')] \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\dot{a} \sin \varphi - a \left(\dot{\varphi} - \frac{\sqrt{A'B'}}{J_0} r \right) \cos \varphi = \varepsilon \frac{\sqrt{A'B'}}{J_0^2} \sqrt{\frac{A'}{B'}} ar \cos \varphi - \frac{\rho P_0}{\nu J_0^3} a \sin \varphi \left\{ a^2 \times \right. \\
 & \left. \times (B' - A') [J_0 - \varepsilon(B' - A')] \cos^2 \varphi + r^2 B' [J_0 - \varepsilon(2A' + B')] \right\}; \\
 & \dot{r} = -\frac{A' - B'}{J_0} \sqrt{\frac{A'}{B'}} a^2 \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\rho P_0}{\nu J_0^3} A' a^2 r \left\{ \varepsilon(2A' - B') \sin^2 \varphi + \right. \\
 & \left. + \varepsilon(2B' - A') \cos^2 \varphi - J_0 \right\}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Розв'яжемо рівняння (9) відносно \dot{a} та $\dot{\varphi}$. Підставимо вирази (8) у третє рівняння системи (5) для r . Отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
 \dot{a} &= \varepsilon \frac{\sqrt{A'B'}}{J_0^2} ra \sin \varphi \cos \varphi (A' - B') + \frac{\rho P_0 a}{\nu J_0^3} \left\{ a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \frac{(A' - B')^2}{B'} [J_0 - \varepsilon(A' + B')] + \right. \\
 & \left. + r^2 [A'(J_0 - \varepsilon A') \cos^2 \varphi - 2\varepsilon A'B' + B'(J_0 - \varepsilon B') \sin^2 \varphi] \right\}; \\
 \dot{\varphi} &= \omega(r) - \varepsilon \frac{\sqrt{A'B'}}{J_0^2} r (A' \sin^2 \varphi + B' \cos^2 \varphi) + \frac{\rho P_0}{\nu J_0^3} \cos \varphi \sin \varphi \left\{ r^2 [-J_0(A' + B') + \right. \\
 & \left. + 2\varepsilon(A'^2 - B'^2)] - \varepsilon J_0(A' - B') a^2 \left(\frac{A'}{B'} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right) \right\} \\
 \dot{r} &= (B' - A') \sqrt{\frac{A'}{B'}} \frac{a^2}{J_0^2} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\rho P_0 A'}{\nu J_0^3} ra^2 \left\{ \varepsilon(2A' - B') \sin^2 \varphi + \varepsilon(2B' - A') \cos^2 \varphi - J_0 \right\}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Тут $\omega(r) = \sqrt{A'B'}r/J_0$.

Після усереднення системи (10) по фазі φ знаходимо:

$$\dot{a} = \frac{\rho P_0}{\nu J_0^3} a(\alpha a^2 + \beta r^2), \quad \dot{r} = \frac{\rho P_0}{2\nu J_0^3} ra^2 \gamma, \tag{11}$$

де

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{\varepsilon}{8B'} (A' - B')^2 [J_0 - \varepsilon(A' + B')], \quad \beta = \frac{1}{2} A'(J_0 - \varepsilon A') - 2\varepsilon A'B' + \frac{1}{2} B'(J_0 - \varepsilon B'), \\
 \gamma &= \frac{1}{2} \varepsilon (A'^2 + A'B') - J_0 A'.
 \end{aligned}$$

Систему (11) запишемо у вигляді:

$$\dot{x} = 2\eta x(\alpha x + \beta y), \quad \dot{y} = \eta \gamma xy, \tag{12}$$

де $x = a^2$, $y = r^2$, $\eta = 2\rho P_0/\nu J_0^3$. Системою рівнянь (12) зручно скористатись для проведення чисельних розрахунків дослідження.

5 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

У системі рівнянь (12) x, y – повільні змінні. Поділивши ліву та праву частини першого рівняння системи (12) на відповідні частини другого, одержуємо:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2\alpha}{\gamma} \frac{x}{y} + \frac{2\beta}{\gamma}. \tag{13}$$

Позначимо $z = x/y$, $\tilde{\alpha} = 2\alpha/y$, $\tilde{\beta} = 2\beta/y$, $z' = dz/dy$. Осільки $x = yz$, то

$$\frac{dx}{dy} = yz' + z, \quad (14)$$

де $yz' = ydz/dy = dz/d\theta$, $\theta = \ln y$.

З урахуванням вище введених позначень $yz' = -z + \tilde{\alpha}z + \tilde{\beta}$. В підсумку отримаємо лінійне неоднорідне рівняння вигляду:

$$\frac{dz}{d\theta} = (\tilde{\alpha} - 1)z + \tilde{\beta}. \quad (15)$$

Його розв'язок записується наступним чином:

$$z = \frac{\tilde{\beta}}{1 - \tilde{\alpha}} + C_1 e^{(\tilde{\alpha} - 1)\theta}. \quad (16)$$

Після інтегрування одержуємо:

$$x = \frac{\tilde{\beta}}{1 - \tilde{\alpha}} y + C_1 y^{\tilde{\alpha}}. \quad (17)$$

Підставимо вираз (17) у друге рівняння системи (12) та знаходимо:

$$\dot{y} = \eta \gamma y^2 \left(\frac{\tilde{\beta}}{1 - \tilde{\alpha}} + C_1 y^{\tilde{\alpha} - 1} \right).$$

Останнє рівняння допускає розділення змінних y , τ та інтегрування в квадратурах.

6 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Система (12) з врахуванням обраних значень вхідних параметрів має наступні коефіцієнти: $\eta = 0,0045$, $\alpha = 0,38$, $\beta = -55$, $\gamma = -1,5$ та задані початкові умови: $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

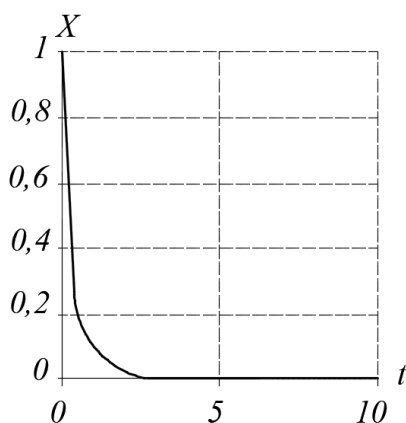


Рис. 1. Графік змінення квадрату амплітуди

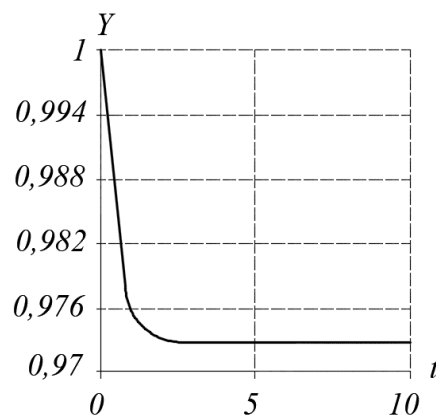


Рис. 2. Змінення квадрату осьової складової проекції вектора кутової швидкості

Отримано, що графіки функцій $x = a^2$ та $y = r^2$ спадають (рис. 1, рис. 2), асимптотично наближуючись до нуля та стаціонарного значення 0,97 відповідно.

7 ВИСНОВКИ

В результаті дослідження руху близького до динамічно сферичного твердого тіла з порожниною, цілком заповненою в'язкою рідиною, при малих числах Рейнольдса отримано систему рівнянь руху в стандартній формі. Після аналізу системи, що визначена за допомогою метода усереднення, знайдено чисельний розв'язок задачі Коші. Еволюція руху твердого тіла на нескінченному інтервалі часу описується розв'язками, отриманими аналітично, асимптотично та чисельно, які можуть бути використані при дослідженні орієнтації та стабілізації руху космічного апарату відносно центра мас.

Література

1. Chernousko F. L. The Movement of a Rigid Body with Cavities Containing a Viscous Fluid / F. L. Chernousko. – Washington.: NASA, 1972. – 204 с.
2. Chernousko F. L. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass / F. L. Chernousko, L. D. Akulenko, D. D. Leshchenko. – Springer, 2017. – 260 p. doi 10.1007/978-3-319-53928-7
3. Kobrin A. I. On the motion of a hollow body with viscous liquid about its center of mass in a potential body force field / A. I. Kobrin // J. Appl. Math. Mech. – 1969. – 33 (3). – 418–427.
4. Smirnova E. P. Stabilization of free rotation of an asymmetric top with cavities completely filled with fluid / E. P. Smirnova // J. Appl. Math. Mech. – 1974. – 38 (6). – P. 931–935.
5. Baranova E. U. Evolution of motion of a rigid body with a fixed point and an ellipsoidal cavity filled with a viscous fluid / E. U. Baranova, V. G. Vil'ke // Moscow University Mechanics Bulletin. – 2013. – 68 (1). – P. 15–20. doi:10.3103/s0027133013010032
6. Акуленко Л. Д. Эволюция вращений спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Механика твердого тела. – 2007. – 37. – С. 126–139.
7. Akulenko L. D. Rapid rotations of a satellite with a cavity filled with viscous fluid under the action of moments of gravity and light pressure forces / L. D. Akulenko, Y. S. Zinkevich, D. D. Leshchenko, A. L. Rachinskaya // Cosmic Research. – 2011. – 49(5). – P. 440–451. doi: 10.1134/s0010952511050017
8. Акуленко Л. Д. Возмущенные и управляемые вращения твердого тела / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская, Я. С. Зинкевич. – Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова. - О.: ОНУ, 2013. – 287 с.
9. Leshchenko D. Rotational motion of a satellite with viscous fluid under the action of the external resistance torque / D. Leshchenko, L. Akulenko, A. Rachinskaya, Yu. Shchetinina // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. – 2015. – 6 (3). – P. 383–391.
10. Rachinskaya A. L. Motion of a solid body with cavity filled with viscous liquid / A. L. Rachinskaya // Cosmic Research. – 2015. – 53(6). – P. 476–480. doi.org/10.1134/s00109525150600052
11. Disser K. Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous liquid / K. Disser, G. R. Galdi, G. Mazzone, P. Zunino // Arch. Rational Mech. – 2016. – 221. – P. 487–526. doi 10.1007/s00205-016-0966-2
12. Ramodanov S. M. Dynamics of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with viscous fluid / S. M. Ramodanov, V. V. Sidorenko // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2017. – 95. – P. 42–46. doi.org/10.1016/j.jnonlinmec.2017.05.006
13. Кононов Ю. Н. О движении системы связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость / Ю. Н. Кононов // Механика твердого тела. – 2000. – №30. – С. 207–216.

References

1. Chernousko, F. L. (1972). The Movement of a Rigid Body with Cavities Containing a Viscous Fluid. Washington: NASA, 204.
2. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer, 260. doi 10.1007/978-3-319-53928-7

3. Kobrin, A. I. (1969). On the motion of a hollow body with viscous liquid about its center of mass in a potential body force field. *J. Appl. Math. Mech.*, 33 (3), 418–427.
4. Smirnova, E. P. (1974). Stabilization of free rotation of an asymmetric top with cavities completely filled with fluid. *J. Appl. Math. Mech.*, 38 (6), 931–935.
5. Baranova, E. U., Vil'ke, V. G. (2013). Evolution of motion of a rigid body with a fixed point and an ellipsoidal cavity filled with a viscous fluid. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 68(1), 15–20. doi:10.3103/s0027133013010032
6. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L. (2007). Evolution of rotations of a satellite with cavity filled with viscous fluid. *Mekh. Tverd. Tela*, 37, 126–139.
7. Akulenko, L. D., Zinkevich, Y. S., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L. (2011). Rapid rotations of a satellite with a cavity filled with viscous fluid under the action of moments of gravity and light pressure forces. *Cosmic Research*, 49 (5), 440–451, doi: 10.1134/s0010952511050017
8. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L., Zinkevich, Y. S. (2013). Perturbed and Controlled Rotations of a Rigid Body. O.: Mechnikov Odessa National University, 287.
9. Leshchenko, D., Akulenko, L., Rachinskaya, A., Shchetinina, Yu. (2015). Rotational motion of a satellite with viscous fluid under the action of the external resistance torque. *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace*, 6 (3), 383–391.
10. Rachinskaya, A. L. (2015). Motion of a solid body with cavity filled with viscous liquid. *Cosmic Research*, 53(6), 476–480. doi.org/10.1134/s00109525150600052
11. Disser, K., Galdi, G. R., Mazzone, G., Zunino, P. (2016). Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous liquid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 221, 487–526. doi 10.1007/s00205-016-0966-2
12. Ramodanov, S. M., Sidorenko, V. V. (2017). Dynamics of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with viscous fluid. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 95, 42–46, doi.org/10.1016/j.jnonlinmec.2017.05.006
13. Kononov, Y. N. (2000). On the motion of a system of connected rigid bodies with cavities containing fluid. *Mekh. Tverd. Tela*, 30, 207–216.

Акуленко Леонід Денисович

Інститут проблем механіки ім. О.Ю. Ішлінського РАН, д.ф.-м.н., професор
Проспект Вернадського, д. 101, Москва, Росія 119526
l.akulenko@bk.ru,
ORCID: 0000-0003-3209-1472

Лещенко Дмитро Давидович

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.ф.-м.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
leshchenko_d@ukr.net,
ORCID: 0000-0003-2436-221X

Палій Катерина Сергіївна

Одеська державна академія будівництва та архітектури, асистент
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
ESChernyakova@gmail.com,
ORCID: 0000-0002-5553-2405

Для посилань:

Акуленко Л. Д. Рух твердого тіла, близького до динамічно сферичному, з порожниною, заповненою в'язкою рідиною / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Е. С. Палій // Механіка та математичні методи. – 2019. – №1. – С. 17-24.

For references:

Akulenko, L., Leshchenko, D., Palii, E. (2019). Motion of a nearly dynamically spherical rigid body with a cavity filled with a viscous fluid. *Mechanics and Mathematical Methods*, 1, 17-24.

УДК 514.765.1+512.813.4

МОДЕЛІ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ, ЩО ЗБЕРІГАЮТЬ ТЕНЗОР ВЕЙЛЯ

Кіосак В. А.¹, Лесечко О. В.¹

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: При моделюванні фізичних чи інших об'єктів одним з основних методів є відображення, тобто встановлення взаємно однозначної відповідності між точками многовидів в деякій спільній по відображенню системі координат.

Природним є прагнення збереження в моделі певних, важливих для даного дослідження, властивостей. З іншого боку, модель повинна мати "технологічні" переваги, бути більш зручною для дослідження. При цьому важливим є збереження деяких властивостей чи об'єктів прообразу в образі.

Одним з об'єктів, інваріантних відносно вибору системи координат, що характеризують простір афінної зв'язності, є його тензор проективної кривини Вейля. У роботі знайдені умови, достатні для того, щоб при відображенні простору афінної зв'язності A_n на простір афінної зв'язності \bar{A}_n зберігався тензор Вейля. Ці умови є ознакою того, що при відображенні зберігаються всі компоненти тензора Вейля, хоча накладені вони на деякі компоненти інших тензорів.

Тензор проективної кривини Вейля за необхідністю зберігається при геодезичних відображеннях, відповідностях при яких образ та прообраз мають спільні геодезичні лінії. Але умова збереження тензора проективної кривини Вейля не є достатньою для того, щоб при відображенні зберігались геодезичні лінії. Тобто, збереження тензора проективної кривини Вейля більш широке поняття ніж геодезичні відображення.

З другого боку, при моделюванні динамічної системи за допомогою псевдоріманових просторів в них повинні виконуватися умови Леві-Чевіти. При відсутності зовнішніх сил це відображення буде геодезичним відображенням. В роботі наведені умови, при виконанні яких при присутності зовнішніх сил тензор проективної кривини Вейля зберігається. Знайдені вимоги, які накладають на деякі компоненти тензора кривини, для того, щоб у образа і прообразу співпадали всі компоненти тензора Вейля.

Дослідження ведуться локально, в класі достатньо гладких функцій, методами тензорного аналізу, без обмежень на знак метрики, для просторів, розмірність яких більше двох.

Отримані результати можуть бути застосовані при моделюванні динамічних систем за умови присутності зовнішніх сил

Ключові слова: відображення, динамічна модель, механічна система, тензор Вейля, тензор Рімана.

MODELS OF MECHANICAL SYSTEMS PRESERVING THE WEYL TENSOR

V. Kiosak¹, O. Lesechko¹

¹Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: Modeling physical or other objects, one of the main methods is the reflection, it is matching reciprocation between the points of manifolds in some common system of coordinates.

It is natural to retain certain, important for this research properties in the model. On the other hand, the model should have "technological" advantages, be more convenient for the research. At the same time, it is important to retain some properties or objects of the prototype.

Models are complete when there are all the objects of this type, or they are incomplete ones when the conditions are imposed on some of them.

One of the objects, invariant over the choice of coordinate system, characterizing the space of affine connectedness, is its tensor of Weil projective curvature. In the paper, the conditions are found out which are sufficient to hold down Weil tensor under the reflection of affinely connected space A_n in affinely connected space \bar{A}_n . These conditions are the criteria in order to be sure that a certain mapping preserves every component of Weyl tensor, even if they are posed on certain components of other tensors

The tensor of Weil projective curvature is necessarily held out under the geodesic mapping, the possibilities where the object and the prototype have common geodesic lines. But preserving condition of the tensor of Weil projective curvature is not sufficient for the geodesic lines to be retained during the mapping. So preserving of the tensor of Weil projective curvature is wider concept than geodesic mappings.

On the other hand, when modeling a dynamical system using pseudo-Riemannian spaces, Levi-Civita conditions must be fulfilled in them. In the absence of external forces, this reflection will be a geodesic mapping. In the article, the conditions are given in which, in the presence of external forces, the tensor of Weil projective curvature is retained. The requirements, that impose on some components of the tensor of the curvature, are found in order to coincide all the components of the Weil tensor in the object and the prototype.

The research is conducted locally, in the class there are enough differentiable functions, by the methods of tensor analysis, without restrictions on the metric sign, for the spaces which dimensions are more than two.

The obtained results can be applied in the simulation of dynamic systems on condition that the external forces are present

Keywords: dynamic model; mappings; mechanic system; Riemannian tensor; Weyl tensor.

1. ВСТУП

При моделюванні фізичних чи інших об'єктів одним з основних методів є відображення, тобто встановлення взаємно однозначної відповідності між точками многовидів в деякій спільній по відображенню системі координат.

Природним є прагнення збереження в моделі певних, важливих для даного дослідження, властивостей. З іншого боку, модель повинна мати «технологічні» переваги, бути більш зручною для дослідження. При цьому важливим є збереження повних властивостей чи об'єктів прообраза в образі.

Моделі бувають повними, коли зберігаються всі об'єкти даного типу, чи неповними – коли умови накладаються на деякі з них. Існують і такі, в яких обмеження частини об'єктів веде до певних властивостей всіх об'єктів іншого типу.

Одним з тензорних об'єктів, що характеризують простір афінної зв'язності є тензор Вейля проективної кривини.

В роботі знайдені умови, які накладають на деякі компоненти тензора кривини, для того, щоб у образа і прообраза співпадали всі компоненти тензора Вейля.

Дослідження ведуться локально, в класі достатньо гладких функцій, методами тензорного аналізу, без обмежень на знак метрики, для просторів, розмірність яких більше двох.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Побудова класичної теорії відображень бере свій початок в середині XIX сторіччя в працях італійського геометра Є. Бельтрамі, який розглянув відображення поверхонь на площину такі, що геодезичні лінії переходять в прямі. З розвитком тензорного аналізу та його застосуванням в диференціальній геометрії були отримані базові фундаментальні результати в роботах Т. Леві-Чевіті, Г. Вейля, Т. Томаса[1-3].

В теорії відображень працювала велика кількість вчених, як математиків, так і фізиків, зацікавлених в застосуванні результатів для моделювання динамічних процесів. Як відомо, рух деяких типів механічних систем, багато процесів в гравітаційних та електромагнітних полях, в суцільних середовищах протікають за траєкторіями, які можна розглядати як геодезичні лінії афіннозв'язного або псевдориманового простору, що визначаються енергетичним режимом, при якому зовнішні сили відсутні, або за деякими кривими, вектор кривини яких – це вектор узагальнених зовнішніх сил [4].

З часом відбулась спеціалізація відображень та були сформовані три основні напрямки:

- 1) вивчення основних закономірностей відображень;
- 2) для заданого узагальненого простору та спеціального відображення пошук відповіді на питання: дозволяє чи не дозволяє він відображення;
- 3) для заданої пари просторів знайти відображення, яке їх пов'язує.

Тензор, що не змінюється при відображенні, називають інваріантним відносно даного відображення. Інваріантом геодезичних відображень є тензор проективної кривини Вейля. Геодезичні відображення – це відображення із збереженням геодезичних ліній. Інваріантність тензора Вейля – це необхідна умова при геодезичних відображеннях. Існують приклади псевдориманових просторів, у яких співпадають тензори Вейля, але вони не допускають один на одного геодезичних відображень.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою дослідження є знаходження умов, яким повинні задовольняти внутрішні об'єкти просторів для того, щоб при їх відображенні зберігався тензор Вейля. Отримані результати застосувати до інтерпретації рівнянь Леві-Чевіти, що характеризують динамічну систему, а саме, знайти достатні умови, яким повинен задовольняти вектор зовнішніх сил, щоб при відображенні зберігався тензор Вейля.

4 ПРО МОДЕЛЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Нехай A деяка механічна система з n ступенями свободи. Тоді, як відомо [4], кінетичну енергію системи в узагальнених координатах q^1, q^2, \dots, q^n записують таким чином

$$T = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q^1, q^2, \dots, q^n) \frac{dq^\alpha}{dt} \frac{dq^\beta}{dt}.$$

Тут g_{ij} – метричний тензор псевдоріманового простору V_n ; для однойменних індексів діє згода Ейнштейна про сумування.

Диференціальне рівняння руху системи має вид:

$$\frac{d^2 q^i}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i(q^1, q^2, \dots, q^n) \frac{dq^\alpha}{dt} \frac{dq^\beta}{dt} = X^i,$$

де X^i – контраваріантні координати узагальненої сили X_i , $X^i = g^{ai} X_a$, g^{ij} – елементи оберненої матриці до g_{ij} , Γ_{ij}^h – символи Хрістоффеля V_n .

Природно, моделювати цю систему за допомогою механічної системи \bar{A} з тим же ступенем свободи n та з кінетичною енергією

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \bar{g}_{\alpha\beta}(q^1, q^2, \dots, q^n) \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau}$$

і рівнянням руху системи

$$\frac{d^2 q^i}{d\tau^2} + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^i(q^1, q^2, \dots, q^n) \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau} = \bar{X}^i.$$

Для того, щоб виписані вище системи рівнянь визначали одні й ті ж траєкторії руху, але, взагалі то з різним розподілом параметрів t та τ вздовж цих траєкторій, для метрик та сил повинні виконуватись певні умови. Ці умови для просторів зі знаковизначеною метрикою були знайдені Т. Леві-Чевітою. Вони зберігаються і для псевдоріманових просторів в виді:

для символів Хрістоффеля

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + \delta_j^i A_n + \delta_k^i A_j + X^i C_{jk}, \quad (1)$$

тут δ_j^i – символи Кронекера, A_i – деякий вектор, C_{ij} – симетричний тензор;

для узагальненої сили

$$\bar{X}^i = \mu^2 X^i,$$

де μ – функція від q^1, q^2, \dots, q^n .

А також вздовж траєкторії системи повинна виконуватись рівність



$$\frac{d \ln f}{dt} + 2 \left(A_{\alpha} \frac{dg^{\alpha}}{dt} \right) = 0 ,$$

для функції f такої, що

$$f \left(q^i, \frac{dq^i}{dt} \right) = \mu(q^i) \left(1 + C_{\alpha\beta} \frac{dq^{\alpha}}{dt} \frac{dq^{\beta}}{dt} \right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Зауважимо, що f має механічний зміст: $f = \frac{dt}{d\tau}$.

Для подальшого розгляду перейдемо до вивчення відображень більш загальних просторів, а саме просторів афінної зв'язності.

5 ПОЛОВИННІ ВІДОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРІВ АФІННОЇ ЗВ'ЯЗНОСТІ

Простором афінної зв'язності A_n розмірності n називають такий диференційований многовид, на кожній кривій якого задана афінна зв'язність, що задовольняє умові лінійності, тобто для кожної точки M та для всякого векторного поля в околі даної точки абсолютний диференціал вектора, що належить цьому полю, обчислений в точці M для всякої кривої, що проходить через цю точку, є лінійна функція вектора елементарного зміщення по кривій.

Розглядаються простори афінної зв'язності A_n без скруту, тобто такі, що

$$\Gamma_{ij}^h(x) = \Gamma_{ji}^h(x) .$$

Простір A_n належить класу C^r ($A_n \in C^r$), якщо $\Gamma_{ij}^h(x) \in C^r$.

Розглянемо два простори афінної зв'язності. Взаємно однозначна відповідність між точками просторів афінної зв'язності A_n та \bar{A}_n називається відображенням. Тоді в спільній за відображенням системі координат виконуються умови

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^h(x) = P_{ij}^h(x) ,$$

де Γ_{ij}^h , $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ – об'єкти афінної зв'язності просторів A_n і \bar{A}_n відповідно. Далі об'єкти \bar{A}_n будемо позначати рискою.

Об'єкт $\bar{\Gamma}_{ij}^{\lambda}$, побудований за правилом

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ij}^{\lambda} &= \Gamma_{ij}^h(x) + \frac{\lambda}{\lambda+1} P_{ij}^h(x), \\ \lambda &= const > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

задає зв'язність деякого простору афінної зв'язності \bar{A}_n^{λ} [1-2].

Відображення простору афінної зв'язності A_n на простір афінної зв'язності \bar{A}_n^{λ} називають укороченим відображенням, якщо в спільній за відображенням системі координат має місце рівняння (2).

Якщо $\lambda = 1$, то таке відображення називається укороченим навіпіл або половинним, а сама зв'язність – середньою.

Якщо простори A_n та \bar{A}_n дозволяють відображення, що відповідає тензору деформації P_{ij}^h , тоді існує половинне відображення, для якого тензори Рімана, Річчі та Вейля задовольняють умовам

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ijk}^h &= R_{ijk}^h + \nabla_k^c P_{ji}^h - \nabla_j^c P_{ki}^h, \\ \bar{R}_{ij} &= R_{ij} + \nabla_\alpha^c P_{ji}^\alpha - \nabla_j^c P_{\alpha i}^\alpha, \\ \bar{W}_{ijk}^h &= W_{ijk}^h + \nabla_k^c P_{ji}^h - \nabla_j^c P_{ki}^h - \frac{1}{n-1} \left(\delta_k^h \left(\nabla_\alpha^c P_{ji}^\alpha - \nabla_j^c P_{\alpha i}^\alpha \right) - \delta_j^h \left(\nabla_\alpha^c P_{ki}^\alpha - \nabla_k^c P_{\alpha i}^\alpha \right) \right).\end{aligned}$$

Тут ∇^c – знак коваріантної похідної по середній зв'язності.

Тензор Вейля W_{ijk}^h визначається як

$$W_{ijk}^h \stackrel{def}{=} R_{ijk}^h - \frac{1}{n-1} (\delta_k^h R_{ij} - \delta_j^h R_{ik}).$$

Зауважимо, що зазначені умови носять лише необхідний характер.

Позначимо різницю тензорів Рімана просторів \bar{A}_n та A_n , пов'язаних відображенням через P_{ijk}^h , тобто P_{ijk}^h – деформація тензорів Рімана при відображенні

$$\bar{R}_{ijk}^h - R_{ijk}^h \stackrel{def}{=} P_{ijk}^h. \quad (3)$$

Зауважимо, що тензор P_{ijk}^h задовольняє умовам

$$P_{ijk}^h + P_{ikj}^h = 0, \quad (4)$$

та

$$P_{ijk}^h + P_{jki}^h + P_{kij}^h = 0. \quad (5)$$

Доведено наступні теореми.

Теорема 1. Якщо в довільній системі координат тензор P_{ijk}^h такий, що $P_{223}^1 = 0$ (або $P_{234}^1 = 0$ для $n > 3$), то цей тензор записується таким чином

$$P_{ijk}^h = \delta_i^h (P_{jk} - P_{kj}) + \delta_j^h P_{ik} - \delta_k^h P_{ij}, \quad (6)$$

де P_{ij} – деякий тензор.

Зауважимо, оскільки при доведенні теореми використовувалися лише алгебраїчні властивості P_{ijk}^h , то тому вона справедлива для довільного тензору, який задовольняє умовам (5).

Теорема 2. Якщо в довільній системі координат тензор P_{ijk}^h такий, що $P_{223}^1 = 0$ (або $P_{234}^1 = 0$ для $n > 3$), то при цьому відображенні зберігається тензор проективної кривини Вейля.

Останні теореми дозволяють сформулювати наступний наслідок.

Наслідок 1. Якщо у просторів афінної зв'язності співпадають значення компонент тензорів Рімана R_{223}^1 (або R_{234}^1 для $n > 3$) та \bar{R}_{223}^1 (або \bar{R}_{234}^1), то при відображенні їх один на одного зберігається тензор проективної кривини Вейля.

Повернемось до розгляду рівнянь (1). Для них

$$P_{jk}^i = \delta_j^i A_k + \delta_k^i A_j + X^i C_{jk}.$$

Коваріантна похідна по середній зв'язності буде

$$\overset{c}{\nabla}_h P_{jk}^i = \delta_j^i \overset{c}{\nabla}_h A_k + \delta_k^i \overset{c}{\nabla}_h A_j + X^i \overset{c}{\nabla}_h C_{jk} + C_{jk} \overset{c}{\nabla}_h X^i.$$

Тоді

$$P_{jkh}^i = \overset{c}{\nabla}_h P_{jk}^i - \overset{c}{\nabla}_k P_{jh}^i = \delta_j^i \left(\overset{c}{\nabla}_h A_k - \overset{c}{\nabla}_k A_h \right) + \delta_k^i \overset{c}{\nabla}_h A_j - \delta_h^i \overset{c}{\nabla}_k A_j + \\ + X^i \left(\overset{c}{\nabla}_h C_{jk} - \overset{c}{\nabla}_k C_{jh} \right) + C_{jk} \overset{c}{\nabla}_h X^i - C_{jh} \overset{c}{\nabla}_k X^i.$$

Умова $P_{234}^1 = 0$ приймає вид:

$$X^1 \left(\overset{c}{\nabla}_4 C_{23} - \overset{c}{\nabla}_3 C_{24} \right) + C_{23} \overset{c}{\nabla}_4 X^1 - C_{24} \overset{c}{\nabla}_3 X^1 = 0. \quad (7)$$

Остання умова дозволяє сформулювати ще один наслідок.

Наслідок 2. Якщо тензор C_{ij} та вектор X^i із рівнянь (1) задовольняють умовам (7), то при відображенні псевдоріманових просторів V_n та \bar{V}_n тензор Вейля є інваріантним.

Продемонструємо за допомогою прикладу, як застосувати отримані результати.

Відомо, що проективно симетричні (або відповідно проективно рекурентні) псевдоріманові простори V_n ($n > 2$) є симетричними (або рекурентними).

За допомогою прикладу показано, що це не поширюється на простори афінної зв'язності [5].

Як контрприклад побудовано простір афінної зв'язності A_n , зв'язність Γ_{ij}^h якого в деякій системі координат x^1, x^2, \dots, x^n визначається так: $\Gamma_{ij}^h = \phi^h \delta_i^1 \delta_j^1$,

де $\phi^h = ax^h + bD_\alpha^{h\alpha} - x^1(a+b)\delta_1^h$; $(D_i^h \neq \delta_i^h)$ – деякі сталі, причому $D_i^1 = \delta_i^1, a, b$ – функції від x^i .

Вказане A_n не буде проективно пласким якщо $b \neq 0$. У випадку, коли $b \neq const, a \neq kb(k - const)$, простір A_n буде проективно рекурентним, відмінним від рекурентного. Якщо $b \neq const, a \neq const$, то A_n буде проективно симетричним, відмінним від симетричного.

Нехай середня зв'язність має аналогічну будову, тобто $\overset{c}{\Gamma}_{ij}^h = \phi^h \delta_i^1 \delta_j^1$, тоді рівняння (7) приймуть вид:

$$X^1 (\partial_4 c_{23} - \partial_3 c_{24}) + c_{23} \partial_4 X^1 - c_{24} \partial_3 X^1 = 0.$$

Таким чином, задача зводиться до розв'язування диференціального рівняння в частинних похідних.

6 ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМ

6.1. Доведення теореми 1. При перетворенні системи координат



$$x'^h = x'^h(x^1, x^2, \dots, x^n),$$

компоненти тензора P_{ijk}^h перетворюються за законом

$$P_{ijk}^h = P_{\beta\gamma\delta}^\alpha P_\alpha^h B_i^\beta B_j^\gamma B_k^\delta, \quad (8)$$

де $P_i^h \stackrel{def}{=} \partial_i x'^h$, $\|B_i^h\| \stackrel{def}{=} \|P_i^h\|^{-1}$.

Переконаємось, що якщо $P_{223}^1 = 0$ (або $P_{234}^1 = 0$) в будь-якій системі координат, то відповідно

$$P_{ijj}^h = 0 \quad (9)$$

та

$$P_{ijk}^h = 0 \quad (10)$$

в будь-якій системі координат для взаємно відмінних індексів i, j, k, h .

Розглянемо наступні перетворення координат

$$x'^p = x^p + rx^q; \quad x'^s = x^s; \quad p \neq s. \quad (11)$$

Тут p та q – взаємно відмінні індекси, r – довільна стала. Тоді P_i^h та B_i^h в рівняннях (8) записуються в виді:

$$P_i^h = B_i^h = \delta_i^h, \quad P_q^p = -B_q^p = r,$$

за умовою або $h \neq p$, або $i \neq q$. Обчислимо компоненти тензора P_{ijk}^h в новій системі координат, що визначається (11)

$$P_{pqk}^h = P_{pqk}^h + r P_{qqk}^h. \quad (12)$$

Тоді

$$P_{ppk}^h = P_{ppk}^h + r(P_{pqk}^h + P_{qpk}^h) + r^2 P_{qqk}^h, \quad (13)$$

для $P_{pj k}^q = P_{pj k}^q + r(P_{qjk}^q - P_{pj k}^p) - r^2 P_{qqk}^p$, також

$$P_{ipk}^q = P_{ipk}^q + r(P_{iqk}^q - P_{ipk}^p) - r^2 P_{iqk}^p, \quad (14)$$

і, наостанок,

$$P_{ppk}^q = P_{ppk}^q - r(P_{ppk}^p - P_{qpk}^q - P_{qpk}^q) - r^3 P_{qqk}^p + r^2(P_{qqk}^q - P_{pqk}^p - P_{qpk}^p). \quad (15)$$

В останніх формулах всі, різні за написом, індекси відмінні. За індексами p та q тут та в подальшому в цьому доведенні згоду Ейнштейна про сумування не застосовуємо. Враховуючи (12), переконаємось, що з (10) випливає (9).

Доведемо зворотнє. Нехай виконуються рівняння (9), тобто $P_{iik}^h = 0$ в будь-якій системі координат при взаємно відмінних індексах h, i, k . Тоді з (13) отримаємо

$$P_{ijk}^h + P_{jik}^h = 0,$$

де i, j, k, h взаємно відмінні індекси.

Альтернуючи останнє за індексами k та j , враховуючи властивості (4) та (5) тензора P_{ijk}^h , отримаємо (10). Далі з (12) та (14) знайдемо

$$P_{qjk}^q = P_{pjk}^p, \quad P_{ikq}^q = P_{ipk}^p,$$

де $p, q \neq k, j$. Із останнього випливає, що для всіх індексів $j, k, p (p \neq j, k)$

$$P_{pjk}^p = B_{jk}, \quad P_{ipk}^p = P_{ik}. \quad (16)$$

Тут B_{jk}, P_{ik} , – деякі геометричні об'єкти. Враховуючи (10), (16), а також те, що r – стала, із (15) отримаємо

$$P_{ppk}^p = B_{pk} + P_{pk}, \quad (17)$$

для довільних індексів $p \neq k$.

Тепер переконаємося, що (9), (10), (16), (17) мають вид $P_{ijk}^h = \delta_i^h B_{jk} + \delta_j^h P_{ik} - \delta_k^h P_{ij}$, де i, j, k, h – довільні індекси.

Циклюючи за індексами i, j, k , отримаємо $B_{jk} = P_{jk} - P_{kj}$.

Таким чином, умови (6) виконуються. Тепер зауважимо, що P_{jk} – є тензором типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Згортаючи (6), переконаємось в цьому.

Дійсно,

$$P_{kj} = (1/(n^2 - 1))(n P_{jka}^a + P_{kja}^a).$$

В останньому, права частина – тензорний вираз, а тому P_{kj} – теж тензор.

Таким чином, теорему доведено.

6.2. Доведення теореми 2. Нехай тензор P_{ijk}^h задовольняє умовам теореми 1. Тоді, враховуючи (3) та (6), можемо записати

$$\bar{P}_{ijk}^h = P_{ijk}^h + \delta_i^h (P_{jk} - P_{kj}) + \delta_j^h P_{ik} - \delta_k^h P_{ij}.$$

Згортаючи, для тензорів Річчі A_n та \bar{A}_n , отримаємо $\bar{R}_{ij} = R_{ij} + P_{ji} - n P_{ij}$.

Для еквіафінних просторів переконаємось, що тензор P_{ij} симетричний, і останні формули перепишуться в виді:

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \delta_j^h P_{ik} - \delta_k^h P_{ij}; \quad \bar{R}_{ij} = R_{ij} - (n-1) P_{ij}.$$

Враховуючи це, будемо мати

$$\bar{R}_{ijk}^h - \frac{1}{n-1} (\delta_k^h \bar{R}_{ij} - \delta_j^h \bar{R}_{ik}) = R_{ijk}^h - \frac{1}{n-1} (\delta_k^h R_{ij} - \delta_j^h R_{ik}).$$

Таким чином

$$\bar{W}_{ijk}^h = W_{ijk}^h,$$

де $\bar{W}_{ijk}^h, W_{ijk}^h$ – тензори проективної кривини Вейля A_n та \bar{A}_n відповідно.

Очевидно, що аналогічні результати можна отримати і для нееквіафінних просторів, а також поширити їх на келерові простори та інші простори зі спеціальними структурами.

7 ВИСНОВКИ

Показано, як можна побудувати модель динамічної системи з відмінним від нуля вектором зовнішніх сил таку, що її тензор Вейля є інваріантним.

Достатня умова зведена до рівняння в коваріантних похідних по середній зв'язності простору афінної зв'язності.

Питання класифікації та ефективних тензорних ознак пар просторів з спільним тензором Вейля, що не допускають один на одного геодезичні відображення, залишається відкритим і актуальним.

Література

1. Kiosak V. Mappings of Spaces with Affine Connection / V. Kiosak, O. Lesechko, O. Savchenko // 17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT 2018 – Proceedings, Bratislava – 2018. – P. 563–569.
2. Norden A. P. Spaces of affine connection / A. P. Norden. – М.: Nauka, 1976. – 432 p.
3. Matveev V. S. Projectively Invariant Objects and the Index of the Group of Affine Transformations in the Group of Projective Transformations // Bulletin of the Iranian Mathematical Society – 2018. – 44 (2). – P. 341–375.
4. Солодовников А. С. Проективные преобразования римановых пространств / А. С. Солодовников. // Успехи математических наук. – 1956. – №4. – С. 45–116.
5. Микеш Й. Проективно-симметрические и проективно-рекуррентные пространства аффинной связности / Й. Микеш // Тр. геом. сем. – 1981. – 13. – С. 61–62.

References

1. Kiosak, V., Lesechko, O., & Savchenko, O. (2018). 17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT 2018. Mappings of Spaces with Affine Connection, Bratislava, 563–569.
2. Norden, A. P. (1976). Spaces of affine connection. М.: Nauka, 432.
3. Matveev, V. S. (2018). Projectively Invariant Objects and the Index of the Group of Affine Transformations in the Group of Projective Transformations. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 44(2), 341–375.
4. Solodovnikov, A. S. (1956). Proektivnyie preobrazovaniya rimanovyih prostranstv. Uspеhi matematicheskikh nauk, XI, 4(70), 45–116.
5. Mikesh, I. (1981). Proektivno-simmetricheskie i proektivno-rekurrentnye prostranstva affinnoi svyaznosti. TR. Geom. Sem., 13, 61–62.

Кіосак Володимир Анатолійович

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029
kiosakv@ukr.net,
ORCID:0000-0002-7433-6709

Лесечко Олександр Васильович

Одеська державна академія будівництва та архітектури, к.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029
a.lesechko@ukr.net,
ORCID: 0000-0002-2352-6174

Для посилань:

Кіосак В. А. Моделі механічних систем, що зберігають тензор Вейля / В. А. Кіосак, О. В. Лесечко // Механіка та математичні методи. – 2019. – №1. – С. 25–34.

For references:

Kiosak, V., Lesechko, O. (2019). Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor. Mechanics and Mathematical Methods, 1, 25–34.

УДК 539.3

УТОЧНЕНИЙ РОЗРАХУНОК КОМПОЗИТНИХ ПЛИТ НА ПРУЖНИХ ОСНОВАХ ЗА ДІЇ ЛОКАЛЬНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Шваб'юк В. І.¹, Ротко С. В.¹, Бондарський О. Г.¹, Шваб'юк В. В.¹

¹Луцький національний технічний університет

Анотація: Якісний і достовірний розрахунок плит на пружних основах є одним із основних елементів проектування складних будівельних конструкцій. Існує надзвичайно велика кількість методів розрахунку, які не завжди досконалі і не дають чітких відповідей на важливі питання, що виникають у будівельній практиці. Ці питання стосуються як до проблеми вибору моделей пружних основ, так і розрахункових моделей оболонок і плит. Зокрема, у більшості випадків, використовувані у будівельних конструкціях оболонки і плити є анізотропними, тому вибір їх розрахункових моделей таких елементів є надзвичайно важливим питанням. У статті розглядається осесиметрична задача згину нескінченної трансверсально-ізотропної плити на пружній основі (пружному півпросторі), якою може бути плита дорожнього чи аеродромного покриттів під дією локальних навантажень. Визначаються контактні переміщення і напруження на поверхні розділу із врахуванням деформації поперечного зсуву і обтиснення.

Ключові слова: пружні основи, контактні напруження і переміщення, трансверсально-ізотропні плити, поперечний зсув і обтиснення, локальні навантаження.

SPECIFIED CALCULATION OF COMPOSITE PLATES ON THE ELASTIC BASIS UNDER THE ACTION OF LOCALIZED LOADS

V. Shvabyuk¹, S. Rotko¹, O. Bondarsky¹, V. Shvabyuk¹

¹Lutsk National Technical University

Abstract: The qualitative and reliable calculation of plates on elastic bases is one of the main elements of the design of complex building constructions. There is an extremely large number of calculation methods, that are not always perfect. These methods do not provide clear answers to important issues arising in building constructions. These questions relate to both problem. The first of this problem consists of the choosing models of elastic bases. The second problem consists of choosing of calculation models of shells and plates. In particular, in most cases, shells and plates, which are used in building structures, are anisotropic. So, the choice of their design models for such elements is an extremely important issue.

The paper is aimed at the axisymmetric problem of bending an infinite transversal-isotropic plate on an elastic basis (elastic half-space), which can be the models of road slabs or airfield pavement, which are under the action of localized loads. On the basis of the equations of the generalized model of transversally isotropic plates, the solution of problem for the case of the plates on elastic bases is obtained. This solution corresponds to the case of the influence of localized loads. The contact displacements and stresses on the section surface are determined with accounting for the deformation of the transverse shear and compression. Obtained results coincide with the results of the classical theory of thin plates, when in the obtained equations are neglected by the listed refinements. The obtained results coincide with S. Lukasevych's results, when in the given formulas the members, which are corresponded transverse compression deformations, do not account for. Values of the contact displacements and pressures in the boundary of the plate and the elastic basis, which depend on the ratios of their modulus of elasticity, is summarized in the comparative table and the corresponding figures.



The obtained results indicate that the classical theory of thin plates gives very low values of the contact displacements and pressures compared with the results of the refined theory of transtropic plates of medium thickness.

Keywords: elastic bases, contact displacements and stresses, transversal-isotropic plate, transverse shear and compression, localized loads

1 ВСТУП

Розглядаються контактні задачі згину трансверсально-ізотропних плит на пружних основах за дії локальних навантажень. Умови роботи таких плит відповідають умовам, у яких знаходяться плити дорожнього та аеродромного покриттів. Для отримання розв'язків задач найчастіше використовується інтегральне перетворення Ганкеля, або через функції Бесселя [1,2].

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Аналіз розв'язків подібних задач для різних основ і видів навантажень для пластинок Кірхгофа-Лява дається в книзі С. Тимошенка і С. Войновського-Крігера "Пластинки і оболонки" [3]. Розв'язок задачі для пластинки під дією симетрично розподіленого навантаження, що лежить напівнескінченній пружній основі, але вже у постановці уточненої теорії згину ізотропних пластин Нагді, наведено К. Пістером і Р. Вестманом в роботі [4]. Разом з тим, тільки у деяких роботах ведуться дослідження, які зв'язані з врахуванням впливу поперечної анізотропії на величини максимальних напружень і переміщень у плитах (наприклад, у монографії С. Лукасевича [6]).

Задачі для ізотропних та трансверсально-ізотропних плит на пружних основах розглянуті також у роботах авторів [5-9]. Разом з тим, тільки у деяких роботах ведуться дослідження, які зв'язані з врахуванням впливу поперечної анізотропії на величини максимальних напружень і переміщень у плитах.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даної роботи є врахування впливу поперечної анізотропії на величини максимальних напружень і переміщень в розрахунках композитних плит.

4 МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо згин нескінченної трансверсально-ізотропної плити товщиною $2h$, віднесеної до циліндричної системи координат r, θ, z . Плита лежить на пружній основі і згинається зосередженою силою P , прикладеною в початку системи координат ($r=0$). Для такого типу навантаження авторами [3] пропонується скористатися перетворенням Ганкеля [1,2], згідно якого вираз для тансформанти навантаження P можна записати у вигляді $\tilde{P} = P/2\pi$, а вираз для розподіленого (на нескінченно малій ділянці) зовнішнього тиску представити у вигляді:

$$q^-(\rho) = \frac{P}{2\pi l_0^2} \int_0^\infty (\lambda \rho) \cdot \lambda \cdot d\lambda,$$

де l_0 – характерний розмір, а $\rho = r/l_0$.

Прийmemo, що поверхня розділу плити і пружної основи є ідеально гладкою, тому дотичні напруження τ_{rz} , $\tau_{\theta z}$ на цій поверхні вважаються відсутніми. Таким чином граничні умови на зовнішніх поверхнях плити записуються в наступному вигляді:

$$\sigma_z = q^+(r) \text{ для } (0 \leq r \leq \infty, z = h); \quad \sigma_z = -q^-(r) \text{ для } (0 \leq r \leq R, z = -h); \quad (1)$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \tau_{\theta z}(r, z) = 0 \text{ для } z = \pm h,$$

де $\bar{q}(r)$ – вертикальне навантаження, яке прикладене до лицевої поверхні плити ($z = -h$), $q^+(r)$ – контактний тиск, який виникає між нижньою поверхнею плити і пружною основою.

Будемо виходити із співвідношень узагальненої моделі трансверсально-ізотропних плит, які стосовно до даного класу осесиметричних задач можна записати у вигляді [11]:

а) розрахункових рівнянь згину:

$$D\Delta^2\hat{w} = (1 - \varepsilon_1\Delta)q_2; \quad D\Delta\tilde{w}_r = -\frac{5}{4}\varepsilon_r q_2, \quad (2)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{h^2}{10(1-\nu)} \left(8\frac{G}{G'} - 3\nu'' \right), \quad \varepsilon_r = \frac{0,8h^2G}{(1-\nu)G'},$$

$$\varepsilon_2 = 0,05(1-\alpha)h^4 \frac{\tilde{E}}{E'}, \quad \hat{w} = w + \frac{\varepsilon_2}{D}q_2;$$

б) виразів для напружень і вертикального переміщення

$$\sigma_r = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2w_1}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dw_1}{dr} \right) + A'\sigma_z; \quad \tau_{rz} = G' \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \cdot \frac{dw_r}{dr}; \quad (3)$$

$$\sigma_z = q_1(r) + \frac{1}{4} \left(3\frac{z}{h} - \frac{z^3}{h^3} \right) \cdot q_2(r); \quad q_1(r) = \frac{1}{2}(q^+(r) - q^-(r));$$

$$W(r, z) = w(r) + \alpha_z z \cdot q_1/E' + A' \cdot \Delta w_b \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{\alpha_z z^2 q_2}{16E'h} \cdot B(z), \quad (4)$$

де $w_1 = w - w_r \left(1 - \frac{z^2(1-\alpha)}{3h^2} \right) + \frac{z^2(1-\alpha) \cdot q_2}{8E'h}; \quad \alpha = \frac{\nu''G'}{2G}, \quad B(z) = 6A_2 - \frac{z^2}{h^2},$

$$q_2 = q^+ + q^-, \quad \alpha_z = 1 - 2\nu' \cdot A', \quad A' = \frac{\nu''}{(1-\nu)}, \quad A_2 = 1 + \frac{A'E'}{\alpha_z G'}.$$

Якщо у приведених формулах покласти відношення $G/G' = E/E' = 0$, то отримуємо формули [3,9], знайдені за допомогою рівнянь класичної теорії тонких пластинок. У випадку, коли $A' = \alpha = \varepsilon_2 = 0$ – будемо мати результати, які відповідають гіпотезам уточненої теорії Е. Рейсснера [12].

У співвідношеннях (2), (3) відсутні рівняння і члени, які враховують роботу плити як мембрани, тому вважається, що плита працює на згин у випадках, коли

$$W(0, h) - W(R, h) < (2/5 \div 2/3)h.$$

Вираз для вертикального переміщення (4) в області контакту плити з основою має вигляд

$$W(r, h) = w(r) + \frac{A'}{2}h^2\Delta w_b + \frac{\alpha_z h q_1}{E'} + \frac{\alpha_z h q_2}{16E'} B(h).$$

Застосовуючи до рівнянь (5), (6) перетворення Ганкеля нульового порядку і, розв'язуючи цю систему відносно трансформанти $\tilde{W}(\lambda, h)$, отримаємо

$$\tilde{W}(\lambda, h) = \int_0^\infty W(r, h) \cdot J_0(\lambda r) \cdot r \cdot dr = \tilde{q}_2(\lambda) \cdot \frac{f(\lambda)}{D\lambda^4} + \frac{\alpha_z h \tilde{q}_1(\lambda)}{2E'}, \quad (5)$$

де $f(\lambda) = (1 + \varepsilon_1\lambda^2 - \varepsilon_2\lambda^4)(1 - 0,5A'\lambda^2h^2) + \alpha_z D\lambda^4 h B(h) / 16E'$,

$$\tilde{q}_i(\lambda) = \int_0^\infty q_i(r) \cdot J_0(\lambda r) \cdot r dr, \quad (i=1,2);$$

Між вертикальним переміщенням і тиском на поверхні розділу існує зв'язок в формі [8,9]:

$$W(r, h) = -\int_0^\infty \tilde{q}^+(\lambda) \cdot K(\lambda) \cdot J_0(\lambda r) \lambda d\lambda. \quad (6)$$

Звідки можна записати, що

$$\tilde{W}(\lambda, r) = -K(\lambda) \tilde{q}^+(\lambda),$$

де $K(\lambda)$ – величина, за допомогою якої можна моделювати характер основи. Для випадку пружного півпростору $K(\lambda) = 1/k_0 \cdot \lambda$, а у випадку основи Вінклера – $K(\lambda) = 1/k$. Тут $k_0 = E_0/2(1-\nu_0^2)$, E_0 і ν_0 – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона для півпростору; k – коефіцієнт постелі пружної основи типу Вінклера.

Виходячи з рівнянь (5), (6) легко отримати залежності між трансформантами $\tilde{q}^+(\lambda)$ і $\tilde{q}^-(\lambda)$ у вигляді:

$$\tilde{q}^+(\lambda) = -\frac{f^-(\lambda) \cdot \tilde{q}^-(\lambda)}{f^+(\lambda) + D\lambda^4 \cdot K(\lambda)}; \quad f^\pm(\lambda) = f(\lambda) \pm \frac{\alpha_z h D \lambda^4}{2E'}$$

Ця залежність дозволяє, використавши формулу обернення Ганкеля (5), при відповідному значенні $K(\lambda)$, знайти вираз для контактної тиску, який виникає між плитою і пружним півпростором

$$q^+(r) = -\int_0^\infty \frac{\tilde{q}^-(\lambda) \cdot f^-(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda}{f^+(\lambda) + D\lambda^3 / k_0}. \quad (7)$$

5 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Отримані розв'язки (5)-(7) легко використати для випадку, коли плита навантажена зосередженою силою P , прикладеною в центрі плити ($r=0$). При такому навантаженні вираз для трансформанти $\tilde{q}^-(\lambda)$ дорівнює

$$\tilde{q}^-(\lambda) = \frac{P}{2\pi l_0^2}, \quad (8)$$

де $l_0 = \sqrt[3]{D/k_0}$ – характерний розмір; $l_0^2 = \sqrt[3]{D^2/k_0^2} = n^2 h^2$, $n = \sqrt[3]{4/3 \cdot \tilde{E}/\tilde{E}_0}$.

Підставивши значення трансформанти $\tilde{q}^-(\lambda)$ вирази (6), (7), отримаємо розрахункові формули для переміщення нижньої поверхні плити $W(r, h)$, а також контактної тиску $q^+(r)$ на поверхні розділу через параметр $t = \lambda l_0$:

$$W(r, h) = \frac{P l_0^2}{2\pi D} \cdot \int_0^\infty \psi(t) \cdot J_0\left(\frac{t \cdot r}{l_0}\right) dt, \quad q^+(r) = -\frac{P}{2\pi l_0^2} \cdot \int_0^\infty \psi(t) \cdot J_0\left(\frac{t \cdot r}{l_0}\right) t dt, \quad (9)$$

де
$$\psi(t) = \frac{f^-(t)}{f^+(t) + t^3}, \quad l_0 = \sqrt[3]{\frac{D}{k_0}} = nh, \quad f^\pm(t) = f(t) \pm \frac{\alpha_z \tilde{E} t^4}{3n^4 \cdot E'},$$

$$f(t) = (1 + \varepsilon_1 t^2 / n^2 - \varepsilon_2 t^4 / n^4)(1 - 0,5A't^2 / n^2) + \alpha_z \tilde{E} t^4 (6A_2 - 1) / (12n^4 E').$$

Аналіз формул (9) показує, що інтегралі, через які виражаються контактне переміщення і контактний тиск в точці $r=0$, розходяться. Розходяться вони і при врахуванні однієї тільки деформації поперечного зсуву, що підтверджується дослідженнями С. Лукасевича в монографії [6]. Разом з тим, при деяких значеннях коефіцієнта Пуассона ν'' можна отримати кінцевий результат для $W(0, h)$.

Наприклад, якщо в формулах (9) покласти коефіцієнт Пуассона $\nu'' = 0$, то підінтегральна функція $\psi(t)$ в них значно спроститься. Зокрема, функції $f^\pm(t)$ приймуть вигляд:

$$f^+(t) = 1 + 0,4 \frac{t^2}{n^2} \frac{\tilde{E}}{G'} + 0,49 \frac{t^4}{n^4} \frac{\tilde{E}}{E'}, \quad f^-(t) = 1 + 0,4 \frac{t^2}{n^2} \frac{\tilde{E}}{G'} - 0,175 \frac{t^4}{n^4} \frac{\tilde{E}}{E'}. \quad (10)$$

З формул (9), (10) видно, що неврахування ефектів поперечного зсуву і обчислення ($\tilde{E}/G' = \tilde{E}/E' = 0$) приводить до результатів класичної теорії тонких пластинок Кірхгофа [3,9], $f^+(t) = f^-(t) = 1$, а $\psi(t) = 1/(1+t^3)$. Тому, при $r=0$ у формулах (9) будемо мати:

$$w_{\max} = 0,192 \cdot Pl_0^2 / D, \quad q_{\max}^+ = -0,192P / l_0^2. \quad (11)$$

У випадку, коли

$$E = E_0, \quad \nu = \nu_0 = 1/3, \quad \tilde{E}/G' = 3, \quad \tilde{E}/E' = 9/8$$

(ізотропний матеріал), формули (10) спрощується до наступних виразів

$$f^+(t) = 1 + 0,99t^2 + 0,38t^4; \quad f^-(t) = 1 + 0,99t^2 - 0,134t^4. \quad (12)$$

У цьому випадку, використавши формули (12), можна обчислити інтегралі (9) для визначення контактного тиску $q^+(r)$ та переміщення нижньої поверхні ізотропної плити $W(r, h)$ у точці $r=0$, відкинувши при цьому останній член функції $f^-(t)$. У результаті, отримуємо значення

$$W(0, h) = 0,208Pl_0^2 / D,$$

що близьке до результату класичної теорії. Необхідно зауважити, що інтеграл для $q^+(0)$ у цьому випадку розходиться також.

Тому, для більш детального дослідження впливу зосередженого навантаження на розподіл контактних переміщень та контактного тиску, запишемо локальне зовнішнє навантаження у вигляді локального навантаження типу «дзвін»:

$$q^-(r) = \frac{P}{h^2} e^{-\pi\xi^2}, \quad \xi = r/h. \quad (13)$$

Такий тиск уже при $r=h$ складає $0,043P/h^2$. Вираз для трансформанти $\tilde{q}^-(\lambda)$, у випадку (13), буде наступним:

$$\tilde{q}^-(\lambda) = P / (2\pi e^{-(\lambda h)^2/4\pi}). \quad (14)$$

Підставивши вираз (14) в формули (6), (7), отримаємо

$$W(r, h) = \frac{Pl_0^2}{2\pi D} \cdot \int_0^\infty \psi(t) e^{-\frac{t^2}{4\pi n^2}} J_0\left(\frac{t \cdot r}{l_0}\right) dt ;$$

$$q^+(r) = \frac{-P}{2\pi l_0^2} \cdot \int_0^\infty \psi(t) e^{-\frac{t^2}{4\pi n^2}} J_0\left(\frac{t \cdot r}{l_0}\right) t dt , \quad (15)$$

де $\psi(t) = f^-(t) / (f^+(t) + t^3)$, функції $f^\pm(t)$ такі ж, як у (14).

Із формул (15) легко одержати результати класичної теорії тонких пластинок Кірхгофа, записавши функцію $\psi(t)$ у вигляді $\psi(t) = (1 + t^3)^{-1}$.

Результати підрахунків величин

$$\tilde{W}(0, h) = \frac{W(0, h)}{Ph^2 / D} \quad \text{і} \quad \tilde{q}^+(0) = -\frac{q^+(0)}{P / h^2}$$

для різних матеріалів і відношень \tilde{E} / \tilde{E}_0 можна звести у табл. 1. Дані, що розміщені у знаменнику, стосуються результатів класичної теорії тонких пластинок. Аналіз цих даних показує, що для ізотропного матеріалу за різних відношень \tilde{E} / \tilde{E}_0 результати уточненої теорії плит для переміщень та контактних тисків близькі (різниця менше 30%) до результатів класичної теорії тонких пластинок. Одночасно, на величини контактних переміщень і тисків дуже сильно впливає поперечна анізотропія плити, а також відношення модулів пружності \tilde{E} / \tilde{E}_0 .

Таблиця 1

Значення контактних переміщень і тисків

E / E_0		0,1	1	10	100
$\frac{\tilde{E}}{G'} = 3$	$\tilde{W}(0, h)$	<u>0,035</u>	<u>0,271</u>	<u>1,302</u>	<u>5,409</u>
		0,038	0,213	1,052	4,983
$\frac{\tilde{E}}{E'} = \frac{9}{8}$	$\tilde{q}^+(0, h)$	<u>0,292</u>	<u>0,202</u>	<u>0,059</u>	<u>0,011</u>
		0,333	0,109	0,029	0,007
$\frac{\tilde{E}}{E'} = 50G'$ $\tilde{E} = 10E'$	$\tilde{W}(0, h)$	0,039	0,378	2,837	10,85
	$\tilde{q}^+(0, h)$	0,381	0,363	0,248	0,063

Аналіз даних табл. 1 показує, що для ізотропного матеріалу за різних відношень \tilde{E} / \tilde{E}_0 результати уточненої теорії плит для переміщень та контактних тисків близькі (різниця менше 30%) до результатів класичної теорії тонких пластинок. Одночасно, на величини контактних переміщень і тисків дуже сильно впливає поперечна анізотропія плити, а також відношення модулів пружності \tilde{E} / \tilde{E}_0 .

Наприклад, для відношень $\tilde{E} / \tilde{E}_0 \geq 10$ величини контактних переміщень $\tilde{W}(0, h)$ трансропної плити більше ніж удвічі перевищують відповідні значення плити із ізотропного матеріалу. Подібні висновки можна зробити і на основі графіків, побудованих на рис. 1, 2 для величин контактних переміщень \tilde{W} і тисків \tilde{q}^+ .

Тут, штрихова крива 1 побудована для розв'язків класичної теорії тонких пластинок, крива 2 (штрих-пунктирна) на основі рівнянь уточненої теорії плит середньої товщини. Крива 3 стосується розподілу контактних переміщень та тисків для плит із трансропного матеріалу – ($\tilde{E} = 50G'$, $\tilde{E} = 10E'$).

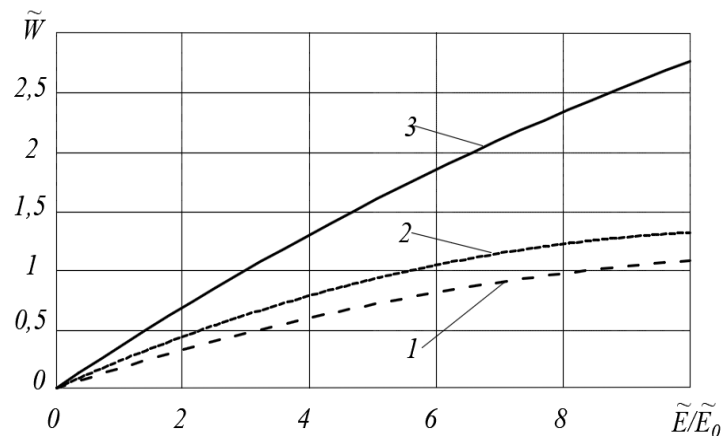


Рис. 1. Зміна контактної переміщення \tilde{W}

Із аналізу наведених рисунків видно, що класична теорія тонких пластинок дає дуже занижені значення контактних переміщень і тисків порівняно із результатами уточненої теорії транстропних плит середньої товщини. Отримані результати співпадають із результатами С. Лукасевича [6], якщо у наведених формулах знехтувати членами, що ураховують деформації поперечного обтиснення.

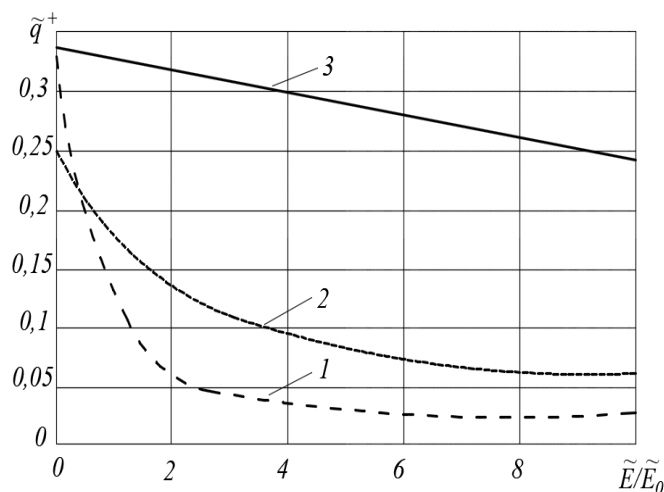


Рис. 2. Розподіл контактної тиску в точці $r = 0$ залежно від параметра \tilde{E} / \tilde{E}_0

Ще одним способом задання зовнішнього локального навантаження $q^-(r)$ може бути його задання у вигляді розподілу за законом Герца:

$$q^-(r) = \frac{3P}{2\pi h^2} \cdot \sqrt{1 - r^2 / h^2}. \quad (16)$$

Вираз для трансформанти $q^-(\lambda)$ при такому навантаженні буде наступним

$$\tilde{q}^-(\lambda) = 3P \cdot (8\pi h^3 \lambda^3)^{-1/2} \cdot J_{3/2}(\lambda h). \quad (17)$$

Підставивши (17) в формули (8), (9) для контактної переміщення та контактної тиску, будемо мати

$$W(r, h) = \frac{Pl_0^2}{2\pi D} \cdot \sqrt{4,5\pi n} \int_0^\infty \psi(t) J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{t}{n}\right) J_0\left(\frac{tr}{l_0}\right) \frac{dt}{t\sqrt{t}};$$

$$q^+(r) = -\frac{Pn^2}{2\pi l_0^2} \cdot \sqrt{4,5\pi n} \int_0^\infty \psi(t) J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{t}{n}\right) J_0\left(\frac{tr}{l_0}\right) \frac{dt}{\sqrt{t}}. \quad (18)$$

Аналогічним способом можна отримати розв'язки і для інших видів навантажень та пружних основ. Зокрема, для випадку навантаження нескінченної пластини, що лежить на пружній основі типу Вінклера із коефіцієнтом постелі k , зосередженою силою P , будемо мати:

$$W(r, h) = -\frac{1}{k} \cdot q^+(r);$$

$$q^+(r) = -\frac{P}{2\pi l^2} \cdot \int_0^\infty \psi_k(t) \cdot J_0\left(\frac{t \cdot r}{l}\right) t dt, \quad (19)$$

де $l = \sqrt[4]{\frac{D}{k}} = n_k h$, $n_k = \sqrt[4]{\frac{4}{3} \cdot \frac{\tilde{E}}{2kh}}$, $\psi_k(t) = f^-(t) [f^+(t) + t^4]^{-1}$,

$$f^+(t) = 1 + 0,4 \frac{t^2}{n_k^2} \frac{\tilde{E}}{G'} + 0,49 \frac{t^4}{n_k^4} \frac{\tilde{E}}{E'}, \quad f^-(t) = 1 + 0,4 \frac{t^2}{n_k^2} \frac{\tilde{E}}{G'} - 0,175 \frac{t^4}{n_k^4} \frac{\tilde{E}}{E'}.$$

6 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Якщо скористатись характеристиками пружної основи і плити, які приведені в роботі [25]: $k = 5 \text{ кГ/см}^3$, $E = 2 \times 10^5 \text{ кГ/см}^2$, $\nu = 0,15$, $10 \text{ см} \leq 2h \leq 100 \text{ см}$ то відповідні параметри формул (19) будуть наступними: $\tilde{E}/G' = 2,353$; $\tilde{E}/E' = 1,023$; $n_k(10 \text{ см}) = 8,594$; $n_k(100 \text{ см}) = 4,833$.

Необхідно зауважити, що безпосередньо у точці $r = 0$ інтеграл (19) для визначення контактної тиску $q^+(r)$ розходиться. Одночасно, якщо відійти від цієї точки на дуже малу відстань, то можна визначити і величину контактної тиску, і значення переміщення нижньої поверхні плити $W(r, h)$. Наприклад, для плити товщиною $2h = 10 \text{ см}$, в околі $r = 2h$ контактний тиск рівний $q^+(r) = -0,122P/l^2$, а при наближенні до осі прикладення сили P до відстані $r = 10^{-4}h$ контактний тиск зростає до значення $q^+(r) = -0,146P/l^2$. Одночасно, для плити товщиною $2h = 100 \text{ см}$ ці значення будуть дорівнювати $q^+(r) = -0,116P/l^2$ і $q^+(r) = -0,211P/l^2$, відповідно.

Випадок неврахування ефектів поперечного зсуву і обтиснення ($\tilde{E}/G' = \tilde{E}/E' = 0$) приводить до результатів класичної теорії тонких пластинок – розв'язку Герца [1-3], де $q^+(r) = -0,125P/l^2$.

Поклавши в попередніх формулах для $W(r, h)$, $q^+(r)$ відношення $D/k_0 = D/k$, будемо мати відповідну задачу для плити на абсолютно жорсткій основі.

7 ВИСНОВКИ

На основі співвідношень узагальненої моделі трансверсально-ізотропних плит отримано розв'язки задач для плит під дією локалізованих навантажень, що лежать на пружних основах. Значення контактних переміщень і тисків на межі плити і пружної основи залежно від відношень їх модулів пружності зведено у порівняльну таблицю та відповідні графіки.

Отримані результати свідчать класична теорія тонких пластинок дає дуже занижені значення контактних переміщень і тисків порівняно із результатами уточненої теорії

транстропних плит середньої товщини. На значення цих величин впливають також відношення модулів пружності плити і основи (\tilde{E}/\tilde{E}_0). Наприклад, для відношень $\tilde{E}/\tilde{E}_0 \geq 10$, величини контактних переміщень $\tilde{W}(0, h)$ транстропної плити більше ніж удвічі перевищують відповідні значення плити із ізотропного матеріалу.

Література

1. Коренев Б. Г. Расчёт плит на упругом основании / Б. Г. Коренев, Е. И. Черниговская – М.: Госстройиздат, 1962. – 355 с.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. – М.-Л.: Изд.-во АН СССР, 1963. – 402 с.
3. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.
4. Пистер К. Изгиб пластинок на упругом основании / К. Пистер, Р. Вестман // Труды Америк. Об-ва инж. механиков. Сер. Е. Прикл. механика. – 1962. – №2. – С. 165–171.
5. Крутий Ю. С. Аналітичний розв'язок задачі про вільні коливання пластини, що лежить на змінній пружній основі / Ю. С. Крутий, М. Г. Сур'янінов // Міжвузівський збірник «Наукові нотатки». – 2016. – № 1 (53). – С. 84 – 92.
6. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках / С. Лукасевич. – М.: Мир, 1982. – 544 с.
7. Піскунов В. Г. Контактна задача для трансверсально-ізотропної плити на пружному півпросторі / В. Г. Піскунов, В. І. Шваб'юк // Вісник Українського транспортного університету. – 1999. – Вип.3. – С. 218–223.
8. Піскунов В. Г. Задача контакту прямокутної плити жорсткого дорожнього одягу з на півпростором / В. Г. Піскунов, В. К. Присяжнюк, О. В. Марчук // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. – 1965. – В. 36. – С. 7–12.
9. Власов В. З. Балки, пластины и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М.: Госфизматлит, 1960. – 491 с.
10. Безелянский В. В. Расчет бесконечной плиты на упругом основании по схеме осесимметрической задачи без гипотезы прямых нормалей / В. В. Безелянский // Проектирование и эксплуатация аэропортов. Труды ГосНИИ гражданской авиации. – 1980. – №196. – С. 3–7.
11. Шваб'юк В. И. Учет эффекта сжимаемости нормали в контактных задачах для трансверсально изотропных плит / В. И. Шваб'юк // Прикл. механика. – 1980. – Т.16. №. 4. – С. 71–77.
12. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates / E. Reissner // J. Math. And Phys. – 1944. – 33. – P. 184–191.

References

1. Korenev, B. G., Chernigovskaya E. I. (1962). Raschet plit na uprugom osnovanii. M.: Gosstroyizdat, 355.
2. Uflyand, Ya. S. (1963). Integralnye preobrazovaniya v zadachakh teoryii uprugosti. M.-L.: AN SSSR, 402.
3. Tymochenko, S. P., Voyinovskiy-Kriher, S. (1963). Plastinki i obolochki. M.: Phizmathiz, 635.
4. Pister, K., Vestman, R. (1962). Izgib plastinok na uprugom osnovanii. Trudy Amer. Ob-va inzh. Mekhanikov. Ser. E. Prikl. Mekhanika, 165–171.
5. Krutiyy, Yu. S., Suryaninov, M. G. (2016). Analitychnyi rozv'iazok zadachi pro vil'ni kolyvannya plastyn scho lezhyat` na zminnii pruzhnii osnovi. Naukovi notatky, 1 (53), 84–92.
6. Lukasevych, S. (1982). Lokalnyie nagruzki v plastinah i obolochkah. M.: Myr, 544.
7. Piskunov, V. G., Shvab'yuk, V. I. (1999). Kontaktna zadacha dlya transversalno-izotropnoii plyty na pruzhnomu pivprostori. Visnyk Ukrayinskogo transportnogo universytetu, 3, 218–223.
8. Piskunov, V. G., Prisyazhnyuk, V. K., Marchuk, O. V. (1965). Zadacha kontaktu pryamokutnoyi plyty zhorstкого dorozhnogo odyahu z napivprostorum. Avtomobilni dorohy i dorozhnyje budivnyctvo, V.36, 7–12.

9. Vlasov, V. Z., Leontev, N. N. (1960). Balki, plastiny, obolochki na uprugom osnovanii. M.: Gosfizmatlyt, 491.
10. Bezelyanskiy, V. V. (1980). Raschet beskonechnoi plity na uprugom osnovanii po sheme osesimetricheskoi zadachi bez hipotezy priamyh normalii. Proektyrovanye i ekspluatatsia aeroportov, 196, 3–7.
11. Shvabyuk, V. I. (1980). Uchet efekta szhymaemosty normalii v kontaktnykh zadachah dlya transversalno izotropnykh plyt. Prykl. mekhanika, V.16, 4, 71–77.
12. Reissner, E. (1944). On the theory of bending of elastic plates. J. Math. And Phys., 33, 184–191.

Шваб'юк Василь Іванович

Луцький національний технічний університет, д.т.н., професор
вул. Потебні, 56 Луцьк, Україна 43017
v.shvabyuk@gmail.com,
ORCID: 0000-0019-1800-5115

Ротко Світлана Володимирівна

Луцький національний технічний університет, к.т.н., доцент
вул. Потебні, 56 Луцьк, Україна 43017
svitlanarotko61@gmail.com,
ORCID: 0000-0003-1860-7890

Бондарский Олександр Георгійович

Луцький національний технічний університет, к.т.н., доцент
вул. Потебні, 56 Луцьк, Україна 43017
o.bondarskyu@gmail.com,
ORCID: 0000-0003-4624-8485

Шваб'юк Володимир Васильович

Луцький національний технічний університет, к.т.н., доцент
вул. Потебні, 56 Луцьк, Україна 43017
avto@lntu.edu.ua,
ORCID: 0000-0001-8294-5291

Для посилань:

Шваб'юк В. І. Уточнений розрахунок композитних плит на пружних основах за дії локальних навантажень / В. І. Шваб'юк, С. В. Ротко, О. Г. Бондарський, В. В. Шваб'юк // Механіка та математичні методи. – 2019. – №1. – С. 35-45.

For references:

Shvabyuk, V., Rotko, S., Bondarskyu, O., Shvabyuk, V. (2019). Specified calculation of composite plates on the elastic basis under the action of localized loads. Mechanics and Mathematical Methods, 1, 35-45.

УДК 539.3

APPLICATION OF SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS IN SOLVING SOME CONTACT PROBLEMS IN THEORY OF ELASTICITY

V. Gavdzinski¹, M. G. El-Sheikh², E. Maltseva³

¹*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

²*Ain Shams University, Cairo, Egypt*

³*Odessa National Economic University*

Abstract. In this paper the modification can be used to find an expression of the unbounded contact stress in the theory of elasticity. The vertical vibrations of a punch lying on an elastic isotropic rectangle under harmonic force are considered. This mixed boundary value problem is reduced to a discrete Riemann problem connecting the Fourier components of the required extension of the unknown functions. Separation of the singular part of the discrete problem leads to the Hilbert type singular integral equation, rather than of the Cauchy's kernel one.

The unknown function in this integral equation is normal contact stress. Thus, it is possible to search for the physically interesting unbounded solution. The inversion of the integral equation provided an expression of that solution in terms of its Fourier components. To complete the definition of this expression, that is, to determine these Fourier components presented therein, it is further reduced to an infinite system of algebraic equations through application of the Fourier transforms. The solution of this system completes the definition with the aid of the physical conditions. The solution of this system can be obtained approximately by means of the truncation. The truncation of the algebraic system of equations is justified by using the corresponding theorem. It is supposed that the appropriate homogeneous system has only trivial solution in some space. Then the infinite system has a unique solution. The truncated system has a unique solution and the error is estimated. We assume that the frequency differs from those values for which the homogeneous system corresponding to the given system of equations has nontrivial solutions. On choosing the number of equation and using the formula for determination of the contact stress we can get an approximate solution of the contact problem for rectangle to find a contact stress up to any prescribe accuracy. The resonance frequencies are the real roots of some resonance equations. In the dimensionless frequency, time and coordinate the table of the values of the contact stress corresponding to different values of coordinate is given. The values of the contact stress increase unboundedly at the vicinities of the end points of the contact interval.

Keywords: contact, discrete, elasticity, equation, punch, singular.

ЗАСТОСУВАННЯ СИНГУЛЯТОРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРИ РІШЕННІ ДЕЯКИХ КОНТАКТНИХ ЗАВДАНЬ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Гавдзинський В. Н.¹, Ель-Шейх М. Г.² Мальцева Є. В.³

¹*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

²*Університет Айн Шамс, Каїр, Єгипет*

³*Одеський національний економічний університет*

Анотація. У цій роботі модифікація постановки задачі пов'язаною з сингулярним інтегральним рівнянням використовується для знаходження необмеженого контактного напруження в теорії пружності. Розглядаються вертикальні коливання штампу того, що лежить на пружному ізотропному прямокутнику під дією гармонійної сили. Ця змішана гранична



задача зводиться до дискретної задачі Римана відносно коефіцієнтів Фур'є невідомих функцій. Виділення сингулярної частини дискретної задачі приводить до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гілберта. Звернення цього рівняння дозволяє знайти контактне напруження і звести задачу до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. Усікання системи алгебраїчних рівнянь обгрунтоване і погрішність оцінена. Вибираючи число рівнянь, і використовуючи формулу для визначення контактного напруження для прямокутника, отримуємо наближене рішення контактної задачі з наперед заданої точністю. Резонансні частоти є дійсними коренями відповідних резонансних рівнянь. Приведена таблиця значень контактного напруження того, що відповідає різним значенням безрозмірної координати. Значення контактного напруження збільшуються необмежено в околицях кінцевих точках контактного інтервалу.

Ключові слова: дискретний, контакт, рівняння, сингулярний, пружність, штамп.

1 INTRODUCTION

Contact interaction in deformable bodies plays an important role in assessing the stress-strain state, therefore the solution of contact problems is very important and relevant. Analytical solutions can be obtained only for a limited class of problems in the mechanics of a deformable solid. Extensive possibilities for solving contact problems are presented by modern computer programs, but the obtained results require verification, therefore, further development of applied methods of mathematical modeling with respect to solving contact problems of mechanics and the development of new efficient algorithms are necessary.

2 ANALYSIS OF LITERARY DATA AND RESOLVING THE PROBLEM

In 1961 Cherskii Y. I. proposed the method of the discrete Riemann problems for solving some plane mixed boundary value problems [1]. The unknown of this integral equation is an extension of one of the partially imposed conditions and is compatible to the other. It has become of wide applications in several branches of mathematical physics [2]. In 1992 [3] the method of the integral equation was extended to include problems in the theory of elasticity. In the paper [4] the contact elastic problem for an infinite strip with the force prescribed at the stressed segments was given. This problem was reduced to the Hilbert type singular integral equation. The Hilbert equation was inverted to define the contact stress and further reduced to an infinite algebraic system of equations, its solution completes the definition with the aid of the physical conditions. The truncation of the algebraic system was justified and the error was estimated. By Gavdzinski V. N., El-Sheikh M. G. and Maltseva E. V. was given the justification of approximate unbounded solutions of mixed plane boundary value problems and was fully justified and the error was estimated [5]. This was the class to which lot of mixed plane boundary value problems are reducible. An example was given in which the procedures were carried out right to the numerical results.

In the paper [6] the contact problem of symmetric indentation of two punches in the form of circular segments without friction, into the exterior surface of a cylinder under harmonic force $P = P_0 e^{-i\omega t}$ and the temperature field was considered. The expression for the contact stress was found and the estimation of the error of the approximate solution was given.

3 PURPOSE AND TASKS OF THE STADY

In solving the contact problem for a rectangle under harmonic force $P = P_0 e^{-i\omega t}$ our aim is 1) to find an approximate solution of the problem 2) to justify the truncation of the system of algebraic equations 3) to estimate the error of the approximate solution 4) to investigate the vertical vibrations of a punch lying on an elastic isotropic rectangle 5) to find resonance frequencies for which the displacement tends to infinity 6) to carry out the procedures right to the numerical results.

4 METHODS OF RESEARCH

Using the Fourier transform the problem is reduced to the following discrete Riemann problem

$$n \Phi_{n+} = -A_{\alpha\beta} \operatorname{sgn} \left(n + \frac{1}{2} \right) \Phi_{n-} + \Gamma_n^{\alpha\beta} \Phi_{n-} - n V_{n-},$$

where $\alpha = w/c_1$, $\beta = w/c_2$ and Φ_{n-} are the Fourier components of the required unbounded extension $\varphi_-(x)$ that differs than zero on an interval Δ_1 ; Φ_{n+} are those of $\varphi_+(x)$ the extension of the complementary conditions on Δ_2 . The factor $\Gamma_n^{\alpha\beta}$ differ from problem to another but always $|\Gamma_n^{\alpha\beta}| = 0(1/n^2)$. On performing the inverse Fourier transform

$$w^{-1} \Phi_{n\pm} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_{n\pm} e^{inx} = \varphi_{\pm}(x)$$

the discrete Riemann problem is reduced to the Hilbert type singular integral equation

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \cot \frac{t-x}{2} \varphi_-(t) dt = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n^{\alpha\beta} \Phi_{n-} \sin nx.$$

The inversion of this equation defines $\varphi_-(x)$ in terms of infinite number of unknowns: its Fourier components and therefore, this equation can in general be only approximately solved. The approximation is achieved by truncating the infinite system of algebraic equations with respect to Φ_{n-} . The justification of the truncation is perform by using the corresponding theorem on the existence of a unique solution in $L_{\rho}(-a, a)$, where $1 < \rho < 4/3$. Consequently the Fourier coefficient Φ_{n-} will belong to l_p , where $p = \rho/(\rho-1)$. Thus we will work in the space $l_p (p > 4)$ with the norm

$$\Phi_{l_p} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_{n-}|^p \right)^{1/p}.$$

We show that the approximate solution approaches the unique exact solution when the order of truncation increases indefinitely and the error resulting due to the truncation is of the form

$$\|\Phi - \Phi^N\|_{l_p} \leq \frac{C}{(N+1)^{(p-2)/2p}}.$$

5 BASIC RESULTS

Now we consider the vertical vibrations of a punch lying on an elastic isotropic rectangle under harmonic force $P = P_0 e^{-i\omega t}$.

In view of the statement of the problem the boundary conditions are

$$v(x, 0, t) = v_0 e^{-i\omega t}, \text{ if } x \in \Delta_1, \tag{1}$$

$$\sigma(x, 0, t) = 0, \text{ if } x \in \Delta_2, \tag{2}$$

$$\tau(x, 0, t) = 0, \text{ if } x \in \Delta_1 \cup \Delta_2, \tag{3}$$

$$u(x, h, t) = v(x, h, t) = 0, \text{ if } x \in \Delta_1 \cup \Delta_2, \tag{4}$$

$$u(\pm\pi, y, t) = \tau_{xy}(\pm\pi, y, t) = 0, \text{ if } x \in \Delta_3, \tag{5}$$

Where v_0 is the unknown amplitude of the vibration;



$$\Delta_1 = [-a, a], \Delta_2 = [-\pi, \pi] / \Delta_1, \Delta_3 = [0, h].$$

Since v_0 is a constant, then $v(x, y, t)$ and $\sigma_y(x, y, t)$ are the even functions and $u(x, y, t)$ and $\tau_{xy}(x, y, t)$ are the odd functions with respect to x .

The substitution for the components of the displacements by the expressions

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

where Φ and Ψ are the longitudinal and transversal potentials, into the familiar equations

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \Psi = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad \text{where } c_1^2 = \frac{2G}{\rho(1-\nu)}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho},$$

and ρ is the density; G is the modulus of elasticity; ν is Poisson's ratio.

The potential Φ and Ψ can be thought of the form

$$\Phi(x, y, t) = \Phi^*(x, y)e^{-i\omega t}, \quad \Psi(x, y, t) = \Psi^*(x, y)e^{-i\omega t},$$

where

$$\nabla^2 \Phi^* + \alpha^2 \Phi^* = 0, \quad \nabla^2 \Psi^* + \beta^2 \Psi^* = 0, \quad \alpha = \frac{\omega}{c_1}, \quad \beta = \frac{\omega}{c_2}.$$

Boundary conditions (1) and (2) can be completed as follows

$$v^*(x, 0) = v_-(x) + \varphi_+(x), \quad \sigma_y^*(x, 0) = \varphi_+(x),$$

where

$$v(x, y, t) = v^*(x, y)e^{-i\omega t}, \quad \sigma_y(x, y, t) = \sigma_y^*(x, y)e^{-i\omega t}, \quad (6)$$

$$\text{and } \varphi_+(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Delta_1; \\ \text{undetermined}, & x \in \Delta_2; \end{cases} \quad \varphi_-(x) = \begin{cases} \text{undetermined}, & x \in \Delta_1; \\ 0, & x \in \Delta_2; \end{cases}$$

$$v_-(x) = \begin{cases} v_0, & x \in \Delta_1; \\ 0, & x \in \Delta_2. \end{cases}$$

Working in the same way as in [4] we arrive at the following discrete Riemann problem

$$\Phi_{n+} = M_n^h \Phi_{n-} - V_{n-} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (7)$$

where

$$M_n^h = \frac{S_n^h}{P_n^h}, \quad T_{1n}^h = k_{2n} (P_n^w \cosh(k_{2n}h) - 2G_n^2 \cosh(k_{1n}h)),$$

Now we estimate coefficients M_n^h and $\frac{T_n^h}{P_n^h}$ as $n \rightarrow \infty$

$$M_n^h = -A_{\alpha\beta} \frac{1}{|n|} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \frac{T_n^h}{P_n^h} = -\frac{B_{\alpha\beta}}{\cosh(k_{2n}h)} + O\left(\frac{1}{\cosh(k_{1n}h)}\right),$$

$$T_{2n}^h = in(2Gk_{1n}k_{2n} \sinh(k_{2n}h))$$



$$\begin{aligned}
 P_n^h &= T_{1n}^h (P_n^w \cosh(k_{1n}h) - 2Gn^2 k_{2n}h) (\rho u^2 T_{2n}^h) - in (\rho u^2 k_{1n})^{-1} \\
 & (P_n^w \sinh k_{1n} - 2Gk_{1n} \sinh(k_{2n}h)), \\
 S_n^k &= T_{1n} k_{1n} \sinh(k_{1n}h) (P_n^w T_{2n}^h)^{-1} - in \cos k_{1n}h (P_n^w)^{-1}, \\
 P_n^w &= 2Gn^2 - \rho w^2, \quad k_{1n}^2 = n^2 - \alpha^2 i w j, \quad k_{2n}^2 = n^2 - \beta^2 i w j \quad (j \downarrow 0),
 \end{aligned}$$

where $A_{\alpha\beta} = \frac{\rho w^2}{2G(2\rho w^2 - G(\alpha^2 + \beta^2))}$, $B_{\alpha\beta} = \frac{\rho^2 w^4}{G(\alpha^2 + \beta^2)(2\rho w^2) - G(\alpha^2 + \beta^2)}$.

All these coefficients are positive, since

$$2\rho w^2 - G(\alpha^2 + \beta^2) = 2\rho w^2 - Gw^2 \left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) = w^2 G \left(\frac{2}{c_2^2} - \frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) = w^2 G \left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) > 0 \text{ by}$$

virtue of $c_1 < c_2$.

On representing M_n^h in the form

$$M_n^h = \left(M_n^h + \frac{A_{\alpha\beta}}{|n|} \right) - A_{\alpha\beta} \frac{1}{|n|}$$

and multiplying (7) by n we get the following discrete Riemann problem

$$n\Phi_{n+} = -A_{\alpha\beta} \operatorname{sgn}\left(n + \frac{1}{2}\right) \Phi_{n-} + \Gamma_n^{\alpha\beta} \Phi_{n-} - nV_{n-}, \tag{8}$$

where

$$\Gamma_n^{\alpha\beta} = nM_n^h + A_{\alpha\beta} \operatorname{sgn}\left(n + \frac{1}{2}\right) \text{ and also } |\Gamma_n^{\alpha\beta}| = 0 \left(\frac{1}{n^2} \right) (n \rightarrow \infty)$$

The equivalence condition of problems (7) and (8) has the form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (k_{1n} B_n - in C_n) = v_0, \text{ where } C_n = -\frac{2Gink_{1n}}{P_n^w} B_n, \tag{9}$$

$$B_n = \frac{1}{D_n^{\alpha\beta}} (X_{1n} T_{2n}^h + X_{2n} T_{1n}^h); \quad X_{1n} = in \cosh(k_{1n}h) \Phi_{n-},$$

$$X_{2n} = k_{1n} \sinh(k_{1n}h) \Phi_{n-},$$

$$D_n^{\alpha\beta} = in T_{2n} (P_n^w \sin k_{1n}h - 2Gk_{1n} k_{2n} \sinh(k_{2n}h)) - k_1 T_{1n}^h (P_n^w \cosh(k_{1n}h) - 2Gn^2 k_{2n}h).$$

On performing the inverse Fourier transform

$$w^{-1} \Phi_{n\pm} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_{n\pm} e^{inx} = \varphi_{\pm}(x)$$

and using the formula [2]

$$w^{-1} \operatorname{sgn}\left(n + \frac{1}{2}\right) \Phi_{n-} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi_-(t) e^{it}}{e^{it} - e^{ix}} dt. \tag{10}$$

We reduce the discrete problem (8) to the singular integral equation



$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \cot \frac{t-x}{2} \varphi_-(t) dt = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n^{\alpha\beta} \Phi_{n-} \sin nx. \quad (11)$$

This Hilbert type singular integral equation can be inverted in the class of integrable function functions with the result

$$\varphi_-(x) = \frac{1}{A_{\alpha\beta} X(x)} \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n^{\alpha\beta} Q_n(x) \Phi_{n-} + a_0 \cos \frac{x}{2} \right), \quad (12)$$

where

$$X(x) = \sqrt{2(\cos x - \cos a)}, \quad Q_n(x) = \sum_{m=0}^n \mu_{n-m}(\cos a) \cos \left(m + \frac{1}{2} \right) x,$$

$$\mu_0(\cos a) = 1, \quad \mu_1(\cos a) = -\cos a, \quad \mu_k(\cos a) = \frac{P_{k-2}(\cos a) - P_k(\cos a)}{2k-1} \quad (k = 2, 3, \dots).$$

The application of the finite Fourier transform to (12) leads to the following infinite system of linear algebraic equations

$$A_{\alpha\beta} \Phi_{n-} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_n^{\alpha\beta} \Phi_{k-} N_{kn} + a_0 R_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (13)$$

where

$$N_{kn} = -\frac{n+1}{2(n-k)} (P_n(\cos a) P_{k-1}(\cos a) P_k(\cos a)) \quad (k > 1), \quad (14)$$

$$R_n = \frac{1}{4} (P_n(\cos a) + P_{n+1}(\cos a)), \quad P_n(\cos a) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x dx}{\sqrt{2(\cos x - \cos a)}} \quad \text{are} \quad (15)$$

Legendre polynomials.

Since system (13) can in general be solved approximately, namely using the method of truncation, we set up function spaces and sequence spaces. The solution (12) of equation (11) is in $L_\rho(-a, a)$, where $1 < \rho < 4/3$ [8]. Consequently the Fourier coefficient Φ_{n-} will belong to l_ρ where $\rho = p/(p-1)$. Thus we will work in the space l_ρ ($p > 4$) with the norm

$$\Phi_{l_\rho} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_{n-}|^p \right)^{1/p}, \quad (16)$$

where $\Phi = \{ \Phi_{n-} \}_{n=0, \infty}$.

The justification of truncating system (13) is a simple consequence of the following theorem whose proof is similar to that given in [9] for the case $p = 2$.

Theorem. Suppose that

1. The homogeneous system corresponding to system (13) has only trivial solution in l_ρ

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Gamma_n^{\alpha\beta} N_{kn}|^{p/(p-1)} \right)^{p-1} < \infty$;

3. $\sum_{n=0}^{\infty} |R_n|^p < \infty$



Then the infinite system (13) has a unique solution in l_p . The truncated system will also have a unique solution and the following estimate holds

$$\Phi - \Phi_{l_p}^N \leq Q_1 \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Gamma_n^{\alpha\beta} N_{kn}|^{p/(p-1)} \right)^{p-1} \right)^{1/p} + Q_2 \left(\frac{\sum_{n=N+1}^{\infty} |R_n|^p}{\sum_{n=0}^{\infty} |R_n|^p} \right)^{1/p}, \quad (17)$$

where Q_1 and Q_2 are constants.

We shall assume that the frequency w differs from those values for which the homogeneous system corresponding to (13) has nontrivial solutions. The fulfillment of the second and the third conditions follows from (14) and (15) together with the estimations

$$|N_{kn}| \sim \frac{C}{\sqrt{nk^3}}, \quad R_n \sim \frac{C}{\sqrt{n}} \text{ for } n \rightarrow \infty \text{ and } |N_{mn}| \leq \frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{\pi \sin a} \right)^{1/2} \frac{n+1}{\sqrt{n}},$$

$$|P_n(\cos a)| \leq \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\pi \sin a}} \quad (0 < a < \pi, n = 1, 2, \dots).$$

Therefore, conditions (2) and (3) are satisfied as $p > 4$.

Recall that $\Gamma_n^{\alpha\beta} \sim 0(k^{-2})$. Additionally we have

$$\|\Phi - \Phi^N\|_{l_p} \leq \frac{C}{(N+1)^{(p-2)/2p}} \quad (18)$$

Thus the approximate solution of the singular integral equation (11) is given by the formula

$$\tilde{\varphi}_-(x) = \frac{1}{A_{\alpha\beta} X(x)} \left(2 \sum_{n=1}^N \Gamma_n^{\alpha\beta} Q_n(x) \Phi_{n-} + a_0 \cos \frac{x}{2} \right). \quad (19)$$

Using formula (12) and taking into account boundary condition (2) we get the expression for the contact stress

$$p(x, t) = -\sigma_y(x, 0, t) = -\frac{e^{-i\omega t}}{A_{\alpha\beta} X(x)} \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n^{\alpha\beta} \Phi_{n-} Q_n(x) + a_0 \cos \frac{x}{2} \right). \quad (20)$$

The quantity a_0 included in (12) is still to be defined. In fact the equation of motion of the punch is [10].

$$M \frac{d^2 v}{dt^2} = e^{-i\omega t} (P_0 - P_R), \quad (21)$$

where M is the mass of the punch; P_0 is the amplitude of the force acting on the punch, and P_R is the reaction of the elastic rectangle.

$$P_R = -\int_{-a}^a \sigma_y^*(x, 0) dx = \int_{-a}^a \varphi_-(x) dx = -\frac{\pi}{A_{\alpha\beta}} a_0. \quad (22)$$

Substituting this expression together with $v = v_0 e^{-i\omega t}$ into (21) we get

$$-Mw^2 v_0 = P_0 + \frac{2Ga_0\pi}{A_{\alpha\beta}}. \quad (23)$$

6 DISCUSSION OF THE RESULTS OF THE STUDY

Thus the amplitude v_0 and the quantity a_0 can be calculated from equations (9) and (23). The real values for which $v^*(x, 0) \rightarrow \infty$, the resonance frequencies, are the real roots of the resonance equations

$$D_n^{\alpha\beta} = 0, 2Gn^2 - \rho w^2 = 0 \quad (n=1, 2, \dots, N). \quad (24)$$

Let $\bar{w} = wa_T/c_2^2$, $\tau = tc_2^3/a_T$, $\bar{x} = x/a$ are the dimensionless frequency, time and coordinate. $\bar{M} = M/\rho a_T^2$ is the dimensionless mass.

Suppose that $\bar{w} = 0.1$, $\bar{M} = 1$, $\nu = 0.3$, $N = 10$. In the table the values of the contact stress corresponding to different values of \bar{x} are exhibited, when $\tau = 2\pi$.

Table 1

Contact stress						
\bar{x}	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\frac{\tilde{p}(\bar{x}, \tau)}{P_0}$	0,4294	0,4302	0,4324	0,4422	0,4682	0,4889
\bar{x}	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
$\frac{\tilde{p}(\bar{x}, \tau)}{P_0}$	0,5174	0,5713	0,6515	0,8653	1,1388	2,3455

The unknown amplitude of the vibration of the punch is $v_0 = 0,1217P_0$. If $p = 5$ then the estimation of the error is subjected to the inequality

$$\|\Phi - \Phi^N\|_5 \leq \frac{C}{3,278}.$$

Note that the values of the contact stresses increase unboundedly at the vicinities of the end point of the contact interval.

7 CONCLUSIONS

On choosing the number N and using the corresponding formulas we can get the approximate solution of the contact problem for the rectangle to find the contact stress up to any prescribed accuracy.

References

1. Cherskii, Y. I. (1961). Svedenie periodicheckikh zadach matematicheskoi fiziki k singulyarnym integralnym uravneniyam s yadrom Koshi. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 140, 69–72.
2. Gakhov, F. D., Cherskii, Y. I. (1978). Uravneniya tipa svertki. M.: Nauka, 295.
3. El-Sheikh, M. G. (1992). The integral equation formation of mixed finite time dependent elastic problems. Computers Math. Applic., vol. 24, 4, 3–14.
4. El-Sheikh, M. G., Khalipa, M. E., Gavdzinski, V. N. (1998). The methods of integral equation formulation and the unbounded solutions of elastic contact problems. Computers Math. Applic., Vol. 36, 1, 33–39.
5. Gavdzinski, V. N., El-Sheikh, M. G., Maltseva, E. V. (2002). On the justification of approximate unbounded solutions of mixed plane boundary value problems. Math. and Comp. in Simulation, 59, 533–539.

6. Gavdzinski, V. N., El-Sheikh, M. G., Maltseva, E. V. (2012). The thermoelastic contact problem for a cylinder. *Visnyk ODABA*, 45, 44–51.
7. Novatski, V. (1975). *Teoriya uprugosti*. M.: Mir, 872.
8. Titchmarsh, E. C. (1980). *Teoriya funktsyi*. M.: Nauka, 463.
9. Kantarovich, L. V., Akilov, G. P. (1971). *Funktsionalnyi analiz*. M.: Nauka, 742.
10. Seimov, V. M. (1976). *Dinamicheskie kontaktnye zadachi*. K.: Naukova dumka, 283.

Литература

1. Черский Ю. И. Сведение периодических задач математической физики к сингулярным интегральным уравнениям с ядром Коши / Ю. И. Черский // Доклад Академика Наук СССР. – 1961. – №140. – С. 69–72.
2. Гахов Ф. Д. Уравнения типа свертки / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. – М.: Наука, 1978. – 295 с.
3. El-Sheikh M. G. The integral equation formation of mixed finite time dependent elastic problems / El-Sheikh. // *Computers Math. Applic.*. – 1992. – №24. – С. 3–14.
4. El-Sheikh M. G. The methods of integral equation formulation and the unbounded solutions of elastic contact problems / M. G. El-Sheikh, M. E. Khalipa, V. M. Gavdzinski. // *Computers Math. Applic.*. – 1998. – №36. – С. 33–39.
5. Gavdzinski V. N. On the justification of approximate unbounded solutions of mixed plane boundary value problems / V. N. Gavdzinski, M. G. El-Sheikh, E. V. Maltseva. // *Math. and Comp. in Simulation*. – 2002. – №59. – С. 553–539.
6. Gavdzinski V. N. The thermoelastic contact problem for a cylinder / V. N. Gavdzinski, M. G. El-Sheikh, E. V. Maltseva. // *Visnyk ODABA*. – 2012. – №45. – С. 44–51.
7. Новатский В. Теория упругости / В. Новатский. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
8. Титчмарш Е. Теория функций / Е. Титчмарш. – М.: Наука, 1980. – 463 с.
9. Кантарович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Кантарович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1971. – 742 с.
10. Сеймов В. М. Динамические контактные задачи / В. М. Сеймов. – К.: Наукова думка, 1976. – 283 с.

Gavdzinski Vladislav

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Ph.D., professor
Didrihsona str.,4 Odessa, Ukraine 65029
gavdzinskivn@gmail.com,
ORCID: 0000-0002-3152-4662

El-Sheikh M.G.

Ain Shams University, Cairo, Egypt, Ph.D., professor
Nour Mosque, 38 Abbasia Next, El-Mohamady, Al Waili, Cairo, Egypt
medasu@gmail.com
ORCID: 0000-0001-6867-4878

Maltseva Evgenia

Odessa National Economic University
Preobrazhenskaya str.,8 Odessa, Ukraine 65082
mmmd@oneu.edu.ua
ORCID: 0000-0002-8769-023X

Для посилань:

Гавдзинський В. Н. Застосування сингулярних інтегральних рівнянь при рішенні деяких контактних завдань теорії пружності / В. Н. Гавдзинський, М. Г. Ель-Шейх, Є. В. Мальцева // Механіка та математичні методи. – 2019. – №1. – С. 46–55.

For references:

Gavdzinski, V., El-Sheikh, M. G., Maltseva, E. (2019). Application of singular integral equations in solving some contact problems in theory of elasticity. *Mechanics and Mathematical Methods*, 1, 46–55.

УДК 539.3

ОСНОВНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНОГО КРУГОВОГО КОЛЬЦА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЗАИМНО ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ НОРМАЛЬНЫХ СИЛ

Ковальчук С. Б.¹, Горик А. В.¹

¹ *Полтавская государственная аграрная академия*

Аннотация: Представлено аналитическое решение задачи растяжения-сжатия многослойного кольца, с произвольным количеством ортотропных слоев, взаимно противоположными нормальными силами, действующими в плоскости кольца вдоль одного диаметра. Решение построено на основе общего решения теории упругости для задачи изгиба многослойного бруса с круговой осью и нагрузкой на торцах. Полученные соотношения, соответствуют точному решению задачи на большей части кольца, а вблизи точек приложения нагрузки дают упрощенное описание напряженно-деформированного состояния (НДС) без учета локального искажения возле сосредоточенной силы. Для демонстрации возможностей и апробации полученных решений приведены результаты определения НДС четырехслойного кольца с отношением среднего радиуса к высоте сечения равным 1,75, а также результаты дополнительных расчетов при увеличении указанного отношения до 5,5 и 10,5.

Ключевые слова: многослойное кольцо, ортотропный слой, сосредоточенная сила, напряжения, перемещения

BASIC STRESS-STRAIN STATE OF A MULTILAYER CIRCULAR RING UNDER THE ACTION OF MUTUALLY OPPOSITE NORMAL FORCES

S. Koval'chuk, A. Goryk

¹ *Poltava State Agrarian Academy*

Abstract: Closed circular rings are widely used in engineering structures both as individual parts and as reinforcing elements of thin-walled structures. One of the important cases of the load of such elements is tension-compression by mutually opposite forces acting along one diameter. For homogeneous isotropic rings, exact solutions of this plane problem are known, and various applied calculation methods are developed. At the same time, for composite and, in particular, multilayer rings, this problem is studied much worse. The purpose of this work is to develop an analytical solution of the problem of tension-compression of a composite ring with an arbitrary number of orthotropic layers with mutually opposite normal forces acting in the plane of the ring along one diameter. Using the symmetry of the problem, its solution comes to the auxiliary problem of determining the stress-strain state (SSS) of a half ring separated on loaded sections with corresponding static and kinematic conditions at the ends. The SSS of such an element, with the exception of small areas near the ends, is similar to the SSS of a circular multilayer bar with loads on the ends. This allowed us to use the exact solution of the theory of elasticity obtained by the authors for the problem of bending a multilayer circular bar with a load on the ends to develop the solution of the problem under consideration. The relations obtained in this way correspond to the exact solution of the problem for the greater part of the ring and close to the points of application of the load, give a simplified description of the SSS without local distortion near the concentrated force. This enables to determine the main SSS of multilayer rings with different sizes of the inner and outer radius, however, the



solution loses its meaning for a solid disk or a disk with a small hole in the center. For thin multilayer rings made of materials that hardly respond to lateral shear and compression, a simplified solution obtained using the plane-sections hypothesis is proposed. To demonstrate the possibilities and approbation of the solutions obtained, the results of determining the SSS of a four-layer ring with the ratio of the mean radius to the height of the cross section equal to 1.75 as well as the results of additional calculations with an increase in the specified ratio to 5.5 and 10.5 are presented.

Keywords: multilayer ring; orthotropic layer; concentrated force; stress; displacement

1 ВВЕДЕНИЕ

Замкнутые круговые кольца, нагруженные в собственной плоскости, широко применяются в машиностроительных конструкциях в виде отдельных деталей или в качестве подкрепляющих элементов тонкостенных конструкций. Одним из важных случаев нагрузки таких элементов является растяжение-сжатие взаимно противоположными силами, действующими вдоль одного диаметра. Задача сопротивления однородных изотропных колец действию взаимно противоположных сил хорошо исследована. Значительно менее исследованной эта задача является для композитных колец, в частности, многослойных.

2 АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРНЫХ ДАННЫХ И ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Возможность решения указанной задачи для изотропных однородных колец в рамках плоской задачи теории упругости показана еще Тимпе в [1]. В дальнейшем, с использованием различных подходов были получены завершённые частные решения [2-6] для отдельных случаев отношения внутреннего и внешнего радиуса кольца. Менее строгое решение получено в [7] на основе решения для кругового бруса с нагрузкой на торцах. Такой подход не позволяет точно описать напряженно-деформированное состояние (НДС) поблизости точек приложения нагрузки, однако довольно точен на некотором удалении от них.

Кроме указанных решений, для однородных колец хорошо развиты прикладные методы расчета, построенные с использованием гипотезы линейного распределения окружных напряжений в поперечном сечении кольца или гипотезы плоских недеформированных сечений [2, 8].

Работ, посвященных исследованию задачи растяжения-сжатия композитных колец значительно меньше. Известны прикладные методы расчета однородных ортотропных [9] и многослойных [10] колец, построенные с использованием различных гипотез о распределении перемещений и напряжений. Более строгим, с точки зрения теории упругости, является решение [11] для ортотропного кольца, построенное путем рассмотрения четверти кольца с эквивалентными условиями на торцах. Однако данное решение не позволяет учитывать неоднородное строение многослойных колец.

Такое состояние исследований рассматриваемой задачи для композитных колец усложняет внедрение таких элементов в практику проектирования конструкций различного назначения.

3 ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Целью данной работы является построение аналитического решения задачи деформирования композитного многослойного кольца под действием диаметрально противоположно направленных сосредоточенных нормальных сил, на основе общего решения теории упругости для многослойной консоли с круговой осью и нагрузкой на свободном торце [12].

4 МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

Рассмотрим многослойное кольцо, которое состоит из m концентрических слоев $P_k (k = \overline{1, m})$, выполненных из различных материалов и жестко связанных на поверхностях контакта (рис. 1). Внутренний радиус кольца – r_1 , внешний – r_2 .

Поперечные сечения кольца (рис. 1, б) имеет форму узкого прямоугольника шириной b и высотой h , причем $b \ll h \ll 2\pi r_c$. Структура и размеры сечения неизменны вдоль оси кольца.

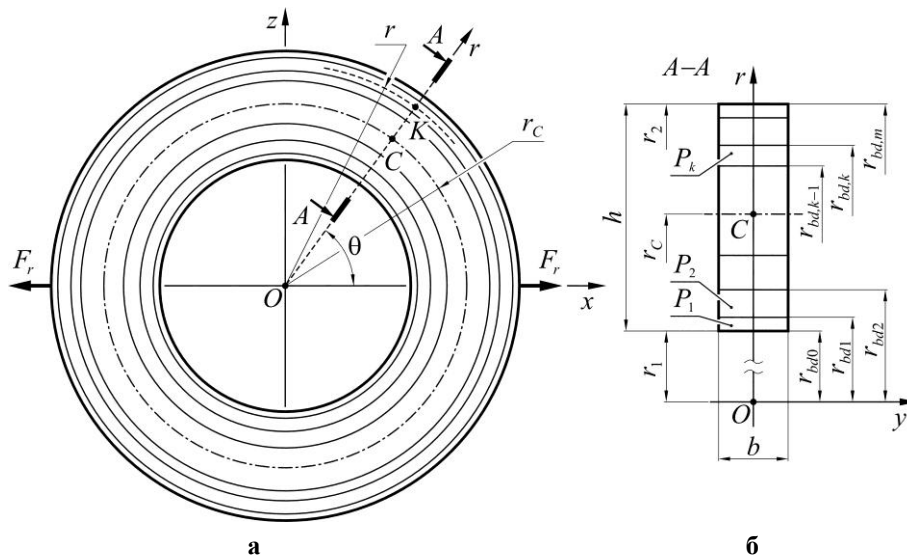


Рис. 1. Схема многослойного кольца и его поперечного сечения

Кольцо отнесено к круговой цилиндрической системе координат $r\theta y$, начало O которой лежит в плоскости круговой оси и совпадает с центром ее кривизны.

Слои кольца выполнены из однородных материалов с цилиндрической ортотропией [13]. В произвольной точке $K(r\theta y)$ слоя одна из плоскостей упругой симметрии совпадает с поперечным сечением, а вторая проходит параллельно плоскости xOz . Известны упругие характеристики материалов всех слоев кольца, которые для произвольного k -го слоя представлены совокупностью констант

$$\|S_a^{[k]}\| = \|E_r^{[k]}, E_\theta^{[k]}, E_y^{[k]}, G_{r\theta}^{[k]}, G_{\theta y}^{[k]}, G_{yr}^{[k]}, \nu_{r\theta}^{[k]}, \nu_{\theta r}^{[k]}, \nu_{y\theta}^{[k]}, \nu_{\theta y}^{[k]}, \nu_{ry}^{[k]}, \nu_{yr}^{[k]}\|,$$

Для всего многослойного кольца упругие характеристики материала будут кусочно-постоянными функциями $\mu_a^S(r)$, которые аналогично [12] представим с помощью функций Хевисайда $H(r)$:

$$\mu_a^S = \sum_{k=1}^m (S_a^{[k]} (H(r - r_{bd,k-1}) - H(r - r_{bd,k}))), \quad (1)$$

где $r_{bd0} = r_1$, $r_{bd,m} = r_2$ – радиусы кривизны внутренней и внешней цилиндрических поверхностей.

Кольцо в собственной плоскости растягивают (сжимают) нормальные сосредоточенные силы F_r , приложенные в диаметрально противоположных сечениях, с координатами $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$ (рис. 1, а). Продольные цилиндрические и боковые поверхности, кроме указанных сечений, свободны от нагрузок.

Рассмотрим НДС описанного многослойного кольца при упругой работе материалов ее слоев.

Точное решение для основного НДС. Симметричность нагрузки и деформаций целого кольца позволяет исходную задачу заменить эквивалентной, – для половины кольца, отделенной по сечениям в которых действуют силы F_r (рис. 2). При этом для

обеспечения эквивалентности деформаций, отброшенную половину кольца заменим соответствующей нормальной и касательной нагрузками, сведенной к поперечной силе Q_r и изгибающему моменту M_y в сечениях $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$.

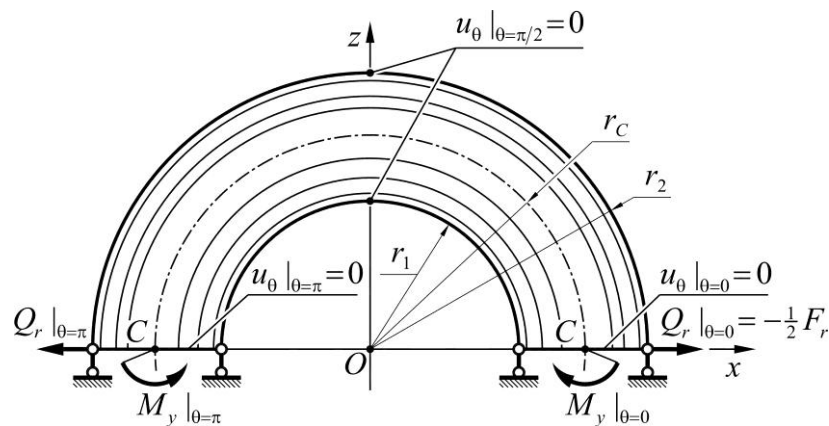


Рис. 2. Расчетная схема многослойного кольца

Такая постановка задачи позволяет отметить, что в большей части полукольца НДС будет подобным НДС многослойного кругового бруса с нагрузками на торцах. Исключение составляют лишь небольшие участки полукольца вблизи торцов, в которых распределение компонент НДС искажается действием сосредоточенной силы. Таким образом, используя решение для кругового бруса можно приближенно определить НДС кольца, который по аналогии с прямыми балками в работе [14] и теорией оболочек [15], будем называть основным.

На основе решения [12] для многослойной консоли с круговой осью, для полукольца на рис. 2 можем записать следующие соотношения для компонент НДС:

$$\sigma_r = -R_{r\theta}^{\tau 2} \sin \theta + R_r^\sigma, \quad \sigma_\theta = -\frac{1}{r} \frac{d(r^2 R_{r\theta}^{\tau 2})}{dr} \sin \theta + \frac{d}{dr}(r R_r^\sigma), \quad \tau_{r\theta} = R_{r\theta}^{\tau 2} \cos \theta, \quad (2)$$

$$u_r = \sin \theta \int_{r_1}^r \left(\frac{\mu_{\theta r}^v}{\mu_\theta^E} \frac{1}{r} \frac{d(r^2 R_{r\theta}^{\tau 2})}{dr} - \frac{R_{r\theta}^{\tau 2}}{\mu_r^E} \right) dr + \int_{r_1}^r \left(\frac{R_r^\sigma}{\mu_r^E} - \frac{\mu_{\theta r}^v}{\mu_\theta^E} \frac{d(r R_r^\sigma)}{dr} \right) dr + u_r|_{r=r_1},$$

$$u_\theta = \left(\frac{1}{\mu_\theta^E} \frac{d(r^2 R_{r\theta}^{\tau 2})}{dr} - \frac{\mu_{r\theta}^v}{\mu_r^E} (r R_{r\theta}^{\tau 2}) + \int_{r_1}^r \left(\frac{\mu_{\theta r}^v}{\mu_\theta^E} \frac{1}{r} \frac{d(r^2 R_{r\theta}^{\tau 2})}{dr} - \frac{R_{r\theta}^{\tau 2}}{\mu_r^E} \right) dr \right) (\cos \theta - 1) +$$

$$+ \theta \left(r \left(\frac{1}{\mu_\theta^E} \frac{d(r R_r^\sigma)}{dr} - \frac{\mu_{r\theta}^v R_r^\sigma}{\mu_r^E} \right) + \int_{r_1}^r \left(\frac{\mu_{\theta r}^v}{\mu_\theta^E} \frac{d(r R_r^\sigma)}{dr} - \frac{R_r^\sigma}{\mu_r^E} \right) dr \right) - \int_0^\theta u_r|_{r=r_1} d\theta + u_\theta|_{\theta=0}, \quad (3)$$

$$u_r|_{r=r_1} = \frac{1}{2} K_2 (\theta \cos \theta + \sin \theta) + \frac{1}{E^{[1]}} \left(\int R_r^{\sigma[1]} dr \right) |_{r=r_1} + K_4 \sin \theta + K_7 \cos \theta,$$

$$u_\theta|_{\theta=0} = \frac{1}{\mu_\theta^E} \frac{d(r^2 R_{r\theta}^{\tau 2})}{dr} - \frac{\mu_{r\theta}^v}{\mu_r^E} (r R_{r\theta}^{\tau 2}) + \int_{r_1}^r \left(\frac{\mu_{\theta r}^v}{\mu_\theta^E} \frac{1}{r} \frac{d(r^2 R_{r\theta}^{\tau 2})}{dr} - \frac{R_{r\theta}^{\tau 2}}{\mu_r^E} \right) dr + r K_6 + K_4. \quad (4)$$

Соотношения (2)-(4) зависят от 2-х определяющих функций $R_{r\theta}^{\tau 2} = R_{r\theta}^{\tau 2}(r)$, $R_r^\sigma = R_r^\sigma(r)$ и 4-х постоянных: K_2, K_4, K_6, K_7 . Здесь сохранены обозначения работы [12], и поскольку $N_\theta|_{\theta=0} = 0$, то соответствующая составляющая касательных напряжений $R_{r\theta}^{\tau 1} = 0$.

Общие решения для функций $R_{r\theta}^{\tau 2}, R_r^\sigma$ в пределах однородного ортотропного слоя получены в виде:

$$R_{r\theta}^{\tau 2[k]} = C_{12}^{[k]} r^{\kappa_1^{[k]}} + C_{22}^{[k]} r^{\kappa_3^{[k]}} + \frac{K_2}{\frac{1-2\nu_{\theta r}^{[k]}}{E_\theta^{[k]}} + \frac{1}{E_r^{[k]}} + \frac{1}{G_{r\theta}^{[k]}}} \frac{1}{r},$$

$$R_r^{\sigma[k]} = C_{13}^{[k]} r^{\kappa_3^{[k]}-1} + C_{23}^{[k]} r^{\kappa_4^{[k]}-1} + K_5 \frac{E_r^{[k]} E_\theta^{[k]}}{E_r^{[k]} - E_\theta^{[k]}},$$

$$\kappa_{1,2}^{[k]} = -1 \pm \sqrt{1 - 2\nu_{\theta r}^{[k]} + \frac{E_\theta^{[k]}}{E_r^{[k]}} + \frac{E_\theta^{[k]}}{G_{r\theta}^{[k]}}}, \quad \kappa_{3,4}^{[k]} = \pm \sqrt{\frac{E_\theta^{[k]}}{E_r^{[k]}}}, \quad k = \overline{1, m}, \quad (5)$$

где учтено равенство $E_r^{[k]} \nu_{\theta r}^{[k]} = E_\theta^{[k]} \nu_{r\theta}^{[k]}$ для ортотропного материала.

В случае изотропного слоя форма определяющих уравнений задачи и, соответственно, их решений меняется

$$R_{r\theta}^{\tau 2[k]} = C_{12}^{[k]} r + C_{22}^{[k]} \frac{1}{r^3} + \frac{K_2 E^{[k]}}{4} \frac{1}{r}, \quad R_r^{\sigma[k]} = C_{13}^{[k]} + C_{23}^{[k]} \frac{1}{r^2} + \frac{K_5 E_\theta^{[k]}}{2} \ln r. \quad (6)$$

Содержащиеся в соотношениях (5) или (6) неизвестные постоянные $C_{12}^{[k]}, C_{22}^{[k]}, C_{13}^{[k]}, C_{23}^{[k]}$ для внутреннего и наружного слоев должны обеспечивать выполнение краевых условий на цилиндрических поверхностях

$$R_{r\theta}^{\tau 2[1]}|_{r=r_1} = 0, \quad R_{r\theta}^{\tau 2[m]}|_{r=r_2} = 0, \quad R_r^{\sigma[1]}|_{r=r_1} = 0, \quad R_r^{\sigma[m]}|_{r=r_2} = 0, \quad (7)$$

а на границах слоев – выполнение условий жесткого контакта

$$R_{r\theta}^{\tau 2[k]}|_{r=r_{bd,k}} = R_{r\theta}^{\tau 2[k+1]}|_{r=r_{bd,k}}, \quad R_r^{\sigma[k]}|_{r=r_{bd,k}} = R_r^{\sigma[k+1]}|_{r=r_{bd,k}}, \quad k = \overline{1, m-1},$$

$$\frac{1}{E_\theta^{[k]}} \left(r \frac{dR_{r\theta}^{\tau 2[k]}}{dr} + (2 - \nu_{\theta r}^{[k]}) R_{r\theta}^{\tau 2[k]} \right) |_{r=r_{bd,k}} = \frac{1}{E_\theta^{[k+1]}} \left(r \frac{dR_{r\theta}^{\tau 2[k+1]}}{dr} + (2 - \nu_{\theta r}^{[k+1]}) R_{r\theta}^{\tau 2[k+1]} \right) |_{r=r_{bd,k}},$$

$$\frac{1}{E_\theta^{[k]}} \left(r \frac{dR_r^{\sigma[k]}}{dr} + (1 - \nu_{\theta r}^{[k]}) R_r^{\sigma[k]} \right) |_{r=r_{bd,k}} = \frac{1}{E_\theta^{[k+1]}} \left(r \frac{dR_r^{\sigma[k+1]}}{dr} + (1 - \nu_{\theta r}^{[k+1]}) R_r^{\sigma[k+1]} \right) |_{r=r_{bd,k}}. \quad (8)$$

Кроме условий (7) и (8), решения для функций $R_{r\theta}^{\tau 2}, R_r^\sigma$ должны удовлетворять условия на торцах, которые в пределах данного решения возможно выполнить только интегрально

$$\int_{r_1}^{r_2} R_{r\theta}^{\tau 2} dr = Q_r |_{\theta=0} = -\frac{F_r}{2b}, \quad \int_{r_1}^{r_2} (r R_r^\sigma) dr = -\frac{1}{b} M_y |_{\theta=0}. \quad (9)$$

В рассматриваемом случае F_r известная величина, а $M_y|_{\theta=\pi} = M_y|_{\theta=0}$ – неизвестный момент, который должен обеспечивать выполнение кинематических условий на торцах. Однако, без изменения соотношений (2)-(9) возможна упрощенная постановка задачи сжатия кольца между параллельными жесткими или упругими полупространствами, когда сила F_r , как и момент $M_y|_{\theta=0}$, будет неизвестной величиной реакции полупространств.

Для всего пакета слоев искомые функции $R_{r\theta}^{\tau 2}$, R_r^σ могут быть построены, с использованием решений (5) и (6), подобно функциям механических характеристик (1):

$$\begin{aligned} R_{r\theta}^{\tau 2} &= \sum_{k=1}^m \left(R_{r\theta}^{\tau 2[k]} (H(r - r_{bd,k-1}) - H(r - r_{bd,k})) \right), \\ R_r^\sigma &= \sum_{k=1}^m \left(R_r^{\sigma[k]} (H(r - r_{bd,k-1}) - H(r - r_{bd,k})) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Вместе условия (7), (8) и (9) позволяют определить $4m$ неизвестных $C_{12}^{[k]}$, $C_{22}^{[k]}$, $C_{13}^{[k]}$, $C_{23}^{[k]}$, а также постоянные K_2 , K_5 . Однако этого недостаточно для определения всех компонент напряженного состояния в рассматриваемой задаче, поскольку соотношение для функции R_r^σ содержит неизвестный момент $M_y|_{\theta=0}$. Для его определения, а также определения постоянных K_4 , K_6 , K_7 необходимо воспользоваться кинематическими условиями.

Полное соответствие деформаций полукольца на рис. 2 и целого кольца на рис. 1, а, если считать неподвижным центр кольца, будет в случае выполнения следующих условий

$$u_\theta|_{\theta=0} = 0, \quad u_\theta|_{\theta=\pi} = 0, \quad u_\theta|_{\theta=\pi/2} = 0. \quad (11)$$

Однако имея всего 4 неизвестных постоянных K_4 , K_6 , K_7 и $M_y|_{\theta=0}$, условия (11) можно выполнить лишь приблизительно, совместив, как и в работе [14], перемещения только крайних волокон кольца

$$u_\theta|_{\theta=0, r=r_1} = 0, \quad u_\theta|_{\theta=0, r=r_2} = 0, \quad u_\theta|_{\theta=\pi/2, r=r_1} = 0, \quad u_\theta|_{\theta=\pi/2, r=r_2} = 0. \quad (12)$$

В (12) нет условий для сечения с координатой $\theta = \pi$, поскольку, вследствие симметричности нагрузки, деформации левой четверти полукольца на рис. 2 будут симметричны деформациям правой четверти. Также, условия (12) не могут обеспечить отсутствие искривления крайних сечений полукольца. Поэтому в этих сечениях совместимость перемещений будет обеспечена только для внутреннего и внешнего волокон.

Следует отметить, что первые два условия (12) не являются исключительными и в качестве кинематических условий можно принять ограничения перемещения двух других точек сечения $\theta = 0$. Однако, обоснование выбора различных вариантов кинематических условий, выходит за рамки данной работы и является предметом отдельного исследования.

Упрощение решения с использованием гипотезы плоских сечений.

Соотношения полученного решения можно существенно упростить, если пренебречь деформациями поперечного сдвига и обжатия, приняв $E_r^{[k]}, G_r^{[k]} \rightarrow \infty$, $v_{r\theta}^{[k]}, v_{\theta r}^{[k]} \rightarrow 0$, $k = \overline{1, m}$. Такое упрощение исключает искривление поперечных сечений кольца и соответствует гипотезе плоских сечений, широко применяемой на практике. Оно допустимо в случае тонких колец с относительно большим отношением $(r_1 + r_2)/2h$, а также колец, слои которых изготовлены из изотропных материалов. Однако, в случае толстых колец изготовленных из материалов с большими отношениями $E_\theta/G_{r\theta}$ и E_θ/E_r , использование гипотезы плоских сечений может привести к большим погрешностям при определении перемещений.

В случае применения гипотезы плоских сечений решения для функций $R_{r\theta}^{\tau^2}$, R_r^σ можно получить сразу для всего пакета слоев

$$R_{r\theta}^{\tau^2} = -\frac{F_r}{2bD_{-1}} \frac{1}{r^2} \left(\int_{r_1}^r \mu_\theta^E dr - \frac{B_0}{B_1} \int_{r_1}^r (\mu_\theta^E r) dr \right), \quad R_r^\sigma = -\frac{M_y|_{\theta=0}}{bD_0} \frac{1}{r} \left(\int_{r_1}^r \frac{\mu_\theta^E}{r} dr - \frac{B_{-1}}{B_0} \int_{r_1}^r \mu_\theta^E dr \right). \quad (13)$$

Соотношения для напряжений (2) с учетом (13) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{F_r}{2b} \mu_\theta^E \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\sin\theta}{D_{-1}} - \frac{2B_0}{\pi B_{-1} D_0} \right) + \frac{2 - \pi \sin\theta}{\pi D_0} \right), \\ \sigma_r &= -\frac{F_r}{2bD_0} \frac{1}{r} \left(\frac{\sin\theta}{r} \int_{r_1}^r (\mu_\theta^E r) dr - \left(\frac{B_1 \sin\theta}{B_0 r} + \frac{2}{\pi} \right) \int_{r_1}^r \mu_\theta^E dr + \frac{2B_0}{\pi B_{-1}} \int_{r_1}^r \frac{\mu_\theta^E}{r} dr \right), \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{F_r}{2bD_{-1}} \frac{\cos\theta}{r^2} \left(\int_{r_1}^r \mu_\theta^E dr - \frac{B_0}{B_1} \int_{r_1}^r (\mu_\theta^E r) dr \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Решения для перемещений и искомый момент в сечении с нагрузкой, с учетом условий (12) принимают такой вид

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{F_r}{2bD_{-1}} \left(\frac{2\theta - \pi}{4} \cos\theta - \frac{\sin\theta}{2} + \frac{2B_0^2}{\pi B_{-1} B_1} \right), \\ u_\theta &= -\frac{F_r}{2bD_{-1}} \left(\frac{B_0}{B_1} r \left(1 - \frac{2\theta}{\pi} - \cos\theta \right) + \frac{\pi - 2\theta}{4} \sin\theta \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$M_y|_{\theta=0} = \frac{F_r B_0}{\pi B_{-1}}. \quad (16)$$

В соотношениях (13)-(15) введены обозначения определенных интегралов

$$\begin{aligned} B_0 &= \int_{r_1}^{r_2} \mu_\theta^E dr, \quad B_1 = \int_{r_1}^{r_2} (\mu_\theta^E r) dr, \quad B_{-1} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_\theta^E}{r} dr, \\ D_{-1} &= \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \mu_\theta^E dr - \frac{B_0}{B_1} \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r (\mu_\theta^E r) dr \right) dr, \quad D_0 = \int_{r_1}^{r_2} \left(\int_{r_1}^r \frac{\mu_\theta^E}{r} dr - \frac{B_{-1}}{B_0} \int_{r_1}^r \mu_\theta^E dr \right) dr, \\ D_{-1} &= \frac{1}{B_1} (B_{-1} B_1 - B_0^2), \quad D_0 = \frac{1}{B_0} (B_{-1} B_1 - B_0^2), \quad \frac{B_1}{B_0} = \frac{D_0}{D_{-1}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Согласно первому соотношению (15) прогиб кольца в продольном направлении, в сечении с нагрузкой, будет равен

$$u_r|_{\theta=0} = -\frac{F_r}{2bD_{-1}} \left(\frac{2B_0^2}{\pi B_{-1} B_1} - \frac{\pi}{4} \right), \quad (18)$$

а в поперечном направлении

$$u_r|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{F_r}{2bD_{-1}} \left(\frac{2B_0^2}{\pi B_{-1} B_1} - \frac{1}{2} \right). \quad (19)$$

В случае однослойного кольца, соотношения для напряжений и перемещений упрощаются к виду

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{F_r}{4b(\ln(\Delta_r)\bar{r}-h)} \frac{1}{r} \left(\frac{4h}{\pi \ln(\Delta_r)} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) - (r-r_1) \left(\frac{4}{\pi} + \frac{r_2-r}{r} \sin\theta \right) \right), \\ \sigma_\theta &= -\frac{F_r}{4b(\ln(\Delta_r)\bar{r}-h)} \left(\frac{4}{\pi} \left(\frac{h}{r \ln(\Delta_r)} - 1 \right) - 2 \frac{\bar{r}-r}{r} \sin\theta \right), \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{F_r(r-r_1)(r_2-r)}{4b(\ln(\Delta_r)\bar{r}-h)r^2} \cos\theta, \\ u_r &= -\frac{F_r\bar{r}}{2bE_\theta(\ln(\Delta_r)\bar{r}-h)} \left(\frac{2\theta-\pi}{4} \cos\theta - \frac{\sin\theta}{2} + \frac{2h}{\pi \ln(\Delta_r)\bar{r}} \right), \\ u_\theta &= -\frac{F_r\bar{r}}{2bE_\theta(\ln(\Delta_r)\bar{r}-h)} \left(\frac{r}{\bar{r}} \left(1 - \frac{2\theta}{\pi} - \cos\theta \right) + \frac{\pi-2\theta}{4} \sin\theta \right). \end{aligned} \quad (20)$$

$$\quad (21)$$

Соотношения для прогибов кольца (18) и (19) примут такой вид

$$\begin{aligned} u_r|_{\theta=0} &= -\frac{F_r\bar{r}}{2bE_\theta(\ln(\Delta_r)\bar{r}-h)} \left(\frac{2h}{\pi \ln(\Delta_r)\bar{r}} - \frac{\pi}{4} \right), \\ u_r|_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= -\frac{F_r\bar{r}}{2bE_\theta(\ln(\Delta_r)\bar{r}-h)} \left(\frac{2h}{\pi \ln(\Delta_r)\bar{r}} - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Момент в сечении с нагрузкой

$$M_y|_{\theta=0} = \frac{F_r h}{\pi \ln(\Delta_r)}. \quad (23)$$

В соотношениях (20)-(23) использованы обозначения

$$(r_2 + r_1)/2 = \bar{r}, \quad r_2/r_1 = \Delta_r.$$

Следует отметить, что, несмотря на использование гипотезы плоских сечений, соотношения (20)-(23) отличаются от соотношений, приведенных в литературе [8,10], поскольку в рассматриваемом упрощенном решении не использовались допущения о распределении нормальных окружных напряжений. Сравнение результатов расчета по указанным соотношениям показало, что (23) дает несколько заниженное значение момента по сравнению с соотношением $M_y|_{\theta=0} = F_r \bar{r} / \pi$ в [8,10]. В то же время соотношения (22) дают большие значения перемещений, чем в [8], однако меньшие – чем в [10], поскольку в последнем случае также учитывается дополнительный поворот сечений за счет деформаций поперечного сдвига. Однако с увеличением отношения \bar{r}/h , разница между результатами расчета по соотношениям (20)-(23) и соотношениям в [8,10] быстро уменьшается, что косвенно подтверждает правильность подхода, использованного для решения задачи.

5 РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассмотрим применение построенных решений на примере композитного четырехслойного кольца с поперечным сечением, размеры и строение которого, приведены на рис. 3, а. Радиусы внутренней и внешней цилиндрических поверхностей кольца: $r_1 = 75\text{мм}$, $r_2 = 135\text{мм}$.

Следует отметить, что кольцо с такими размерами согласно известной классификации [8] для криволинейных брусьев, относится к толстым кольцам или кольцам большой кривизны ($\bar{r}/h = 1,75 < 5$).

Кольцо состоит из цилиндрически ортотропных и изотропных слоев со следующими упругими свойствами:

- стеклопластик (P_1, P_3):

$$E_{\theta}^{[1]} = E_{\theta}^{[3]} = 36,8 \text{ ГПа}, \quad E_r^{[1]} = E_r^{[3]} = 11,0 \text{ ГПа}, \quad G_{r\theta}^{[1]} = G_{r\theta}^{[3]} = 4,5 \text{ ГПа}, \quad \nu_{\theta r}^{[1]} = \nu_{\theta r}^{[3]} = 0,351;$$

- фанера ФБС (P_2): $E_{\theta}^{[2]} = 14,8 \text{ ГПа}, \quad E_r^{[2]} = 1,13 \text{ ГПа}, \quad G_{\theta r}^{[2]} = 1,35 \text{ ГПа}, \quad \nu_{\theta r}^{[2]} = 0,445$;

- алюминиевый сплав (P_4): $E_{\theta}^{[4]} = E_r^{[4]} = 70 \text{ ГПа}, \quad G_{\theta r}^{[4]} = 26,9 \text{ ГПа}, \quad \nu_{\theta r}^{[4]} = 0,34$.

Функции механических характеристик μ_a^S для сечения на рис. 3, а, согласно (1) могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mu_a^S = & S_a^{[1]}(H(r-0,075) - H(r-0,079)) + S_a^{[2]}(H(r-0,079) - H(r-0,128)) + \\ & + S_a^{[3]}(H(r-0,128) - H(r-0,132)) + S_a^{[4]}(H(r-0,132) - H(r-0,135)). \end{aligned} \quad (1)$$

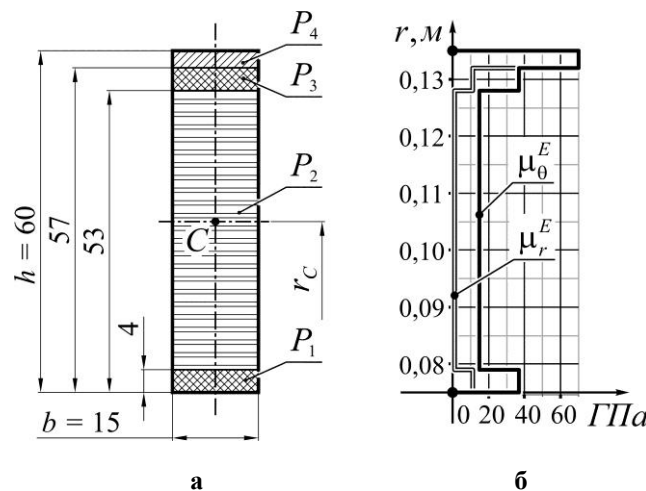


Рис. 3. Схема поперечного сечения (а) и распределение модулей упругости (б) многослойного кольца

Графики функций продольного μ_{θ}^E и поперечного μ_r^E модулей упругости, построенные по соотношениям (24) приведены на рис. 3, б.

К кольцу приложены сосредоточенные силы интенсивностью $F_r = -9\kappa H$ согласно схеме на рис. 1. Отрицательное значение силы F_r указывает на то, что рассматриваемое кольцо сжато.

Общие решения для функций $R_{r\theta}^{\tau 2[k]}$ и $R_r^{\sigma[k]}$ для ортотропных слоев $P_1 - P_3$ были построены с использованием соотношений (5), а для изотропного слоя P_4 – с использованием (6). После подстановки полученных решений в условия (7), (8) и (9) была получена система $4m$ уравнений, из которых определены неизвестные постоянные $C_{12}^{[k]}, C_{22}^{[k]}, C_{13}^{[k]}, C_{23}^{[k]}$. Далее на основе полученных решений $R_{r\theta}^{\tau 2[k]}$ и $R_r^{\sigma[k]}$ согласно (10) были сформированы функции $R_{r\theta}^{\tau 2}$ и R_r^{σ} для всего пакета слоев.

Содержащиеся в полученных соотношениях неизвестные K_2 и K_5 были определены с использованием интегральных условий (9). После этого были получены общие решения для составляющих перемещений $u_r|_{r=r_1}$, $u_\theta|_{\theta=0}$ (4) и самих перемещений u_r, u_θ (3). Последним шагом было определение неизвестных K_4, K_6, K_7 и момента $M_y|_{\theta=0}$ с использованием кинематических условий (12) и получение окончательных соотношений для перемещений и функций $R_{r\theta}^{\tau^2}$, R_r^σ (рис. 4).

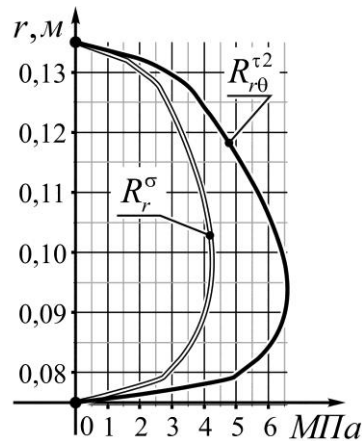


Рис. 4. Графики определяющих функций

Подстановкой полученных определяющих функций в (2), были получены функции распределения нормальных σ_r, σ_θ и касательных $\tau_{r\theta}$ напряжений, графики которых для характерных сечений приведены на рис. 5. Для сравнения на графики распределения напряжений двойными линиями нанесены кривые, построенные упрощенным решением (13), полученным с использованием гипотезы плоских сечений.

Графики на рис. 5 показывают скачкообразное изменение окружных нормальных напряжений σ_θ и выполнение условий непрерывности полученных решений для функций $\sigma_r, \tau_{r\theta}$ на границах слоев. Также, построенные графики показывают, что применение гипотезы плоских сечений вносит незначительное изменение в распределения напряжений σ_r и $\tau_{r\theta}$, причем для касательных напряжений кривые, построенные с использованием точного и упрощенного решений, практически совпадают для всех сечений кольца.

В то же время, использование гипотезы плоских сечений ощутимо искажает распределение нормальных окружных напряжений σ_θ . В сечении с координатой $\theta = 0$ для внутренних ($r_1 = 0,075\text{ м}$) и внешних ($r_2 = 0,135\text{ м}$) волокон упрощенное решение дает значения, заниженные на 5% и 15% соответственно, в сечении с координатой $\theta = 0,709$ – на 40% и 25%, а в сечении с координатой $\theta = \pi/2$ – на 18% и 17%.

Следует отметить, что использование гипотезы плоских сечений также привело к незначительному уменьшению полученного значения момента $M_y|_{\theta=0}$ на 2,6%.

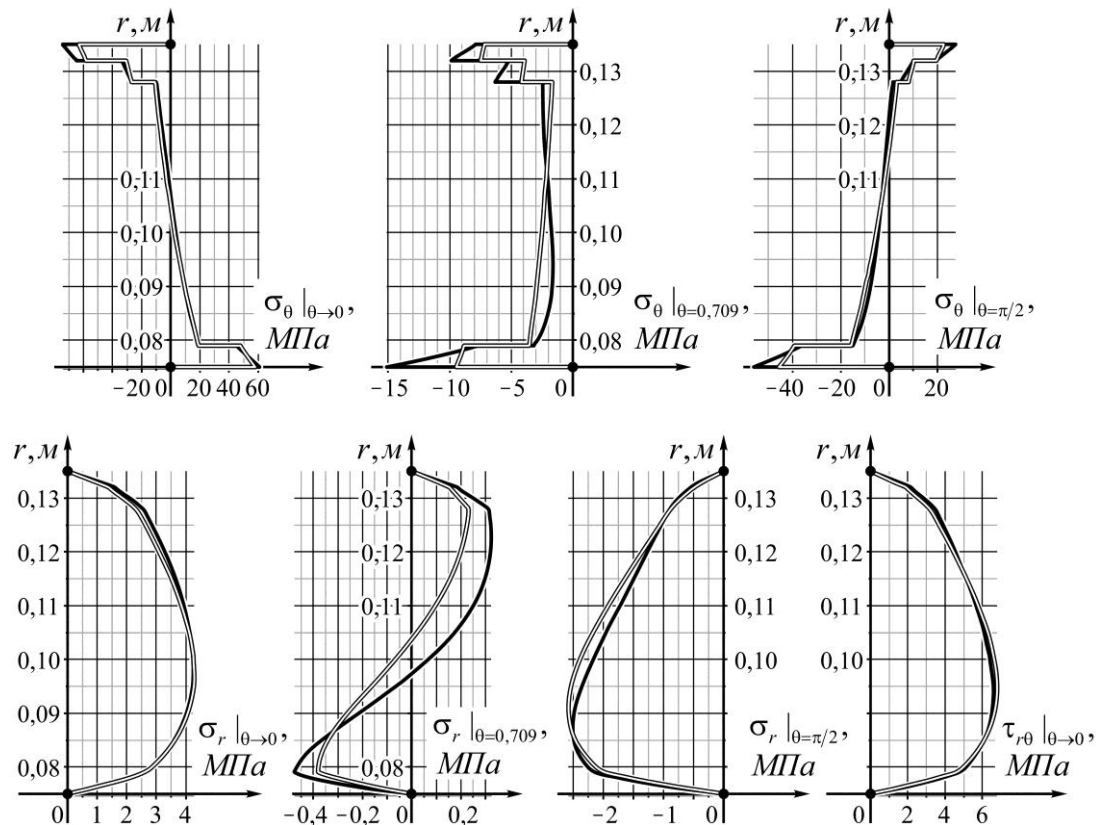


Рис. 5. Графики распределения компонент напряженного состояния

Распределение перемещений для отдельных сечений приведены на рис. 6, где сплошными линиями построены графики перемещений согласно точному решению (3), а двойными линиями – с использованием соотношений (15) упрощенного решения.

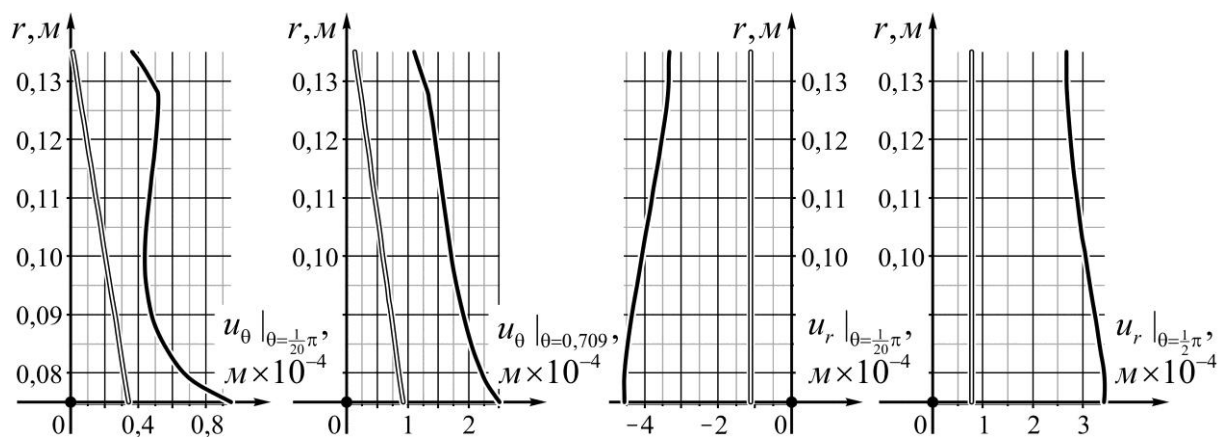


Рис. 6. Графики перемещений в отдельных сечениях

Графики на рис. 6 показывают существенное изменение распределения перемещений при использовании гипотезы плоских сечений. Упрощенное решение не позволяет учитывать влияние искривления (депланации) поперечных сечений кольца, что приводит к заниженным значениям перемещений. Радиальные перемещения внутреннего волокна в сечениях $\theta = 0, \pi$ по упрощенному решению оказываются меньше на 78,1%, а в сечении $\theta = \pi/2$ – на 49,4%.

Влияние деформаций сдвига и обжатия на общее деформированное состояние рассматриваемого кольца можно оценить по графикам на рис. 7. Здесь сплошными линиями показаны с увеличением в 60 раз полные перемещения внешних поверхностей кольца и границ его слоев согласно точному (рис. 7, а) и упрощенному (рис. 7, б) решениям, а штриховыми – их положение до деформации.

Графики на рис. 7 показывают существенное изменение характера деформаций и величины полных перемещений кольца при использовании упрощенного решения, полученного на основе гипотезы плоских сечений.

6 ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ

Приведенные выше результаты расчета показывают значительное влияние податливости материалов слоев деформациям поперечного сдвига и обжатия на характер распределения и величину компонент НС и, особенно, перемещений многослойного кольца. Однако, такое влияние имеет место для относительно толстых колец с малым отношением $(r_1 + r_2)/(2h)$. Дополнительные расчеты показали, что при увеличении этого отношения до 5,5, путем увеличения внутреннего радиуса кольца r_1 , применение упрощенного решения дает значение радиального перемещения в сечении $\theta = 0$ заниженным на 26,6%, а в сечении $\theta = \pi/2$ – на 18,1%. В то же время разница между распределениями напряжений σ_θ , в этих сечениях уже не превышает 3%.

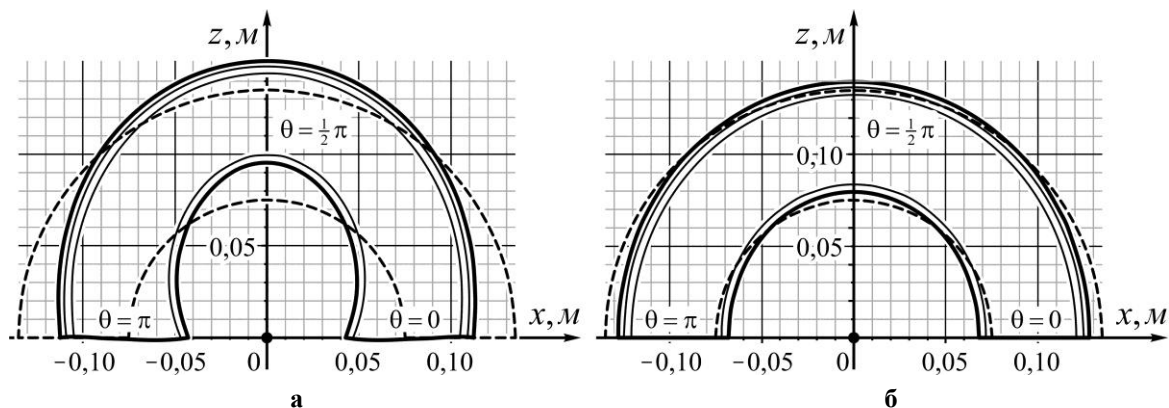


Рис. 7. Графики полных перемещений поверхностей кольца (перемещения увеличены в 60 раз):
 а – точное решение; б – упрощенное решение (гипотеза плоских сечений)

В случае, когда отношение $(r_1 + r_2)/(2h) = 10,5$, применение упрощенного решения дает значение радиального перемещения в сечении $\theta = 0$ заниженным на 8,8%, в сечении $\theta = \pi/2$ – только на 6,0%, а разница между распределениями напряжений оказывается меньше 1%. Деформированное состояние кольца по точному (рис. 8, а) и упрощенному решению (рис. 8, б) в этом случае уже мало отличается.

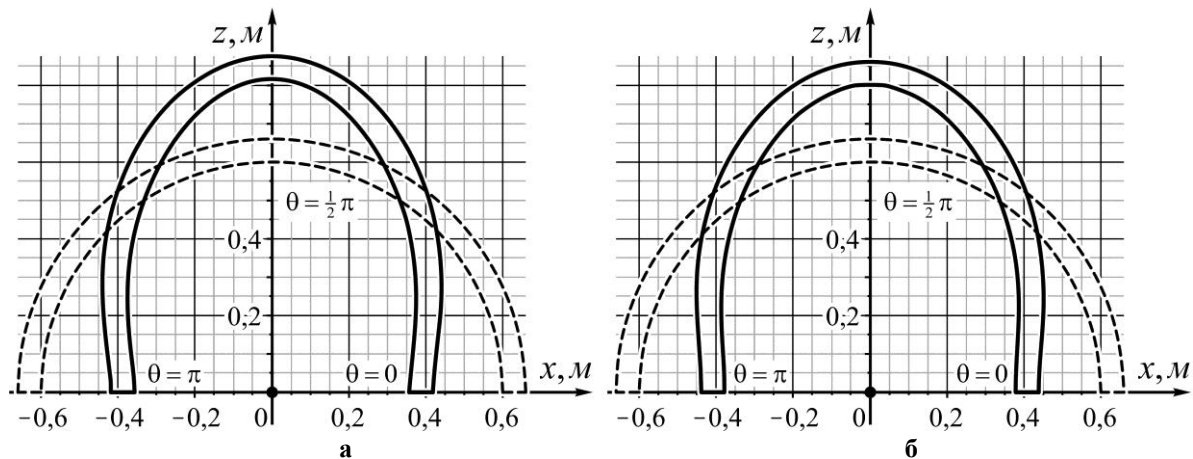


Рис. 8. Графики полных перемещений поверхностей кольца (перемещения увеличены в 10 раз):
 а – точное решение; б – упрощенное решение (гипотеза плоских сечений)

7 ВЫВОДЫ

Таким образом, на основе точного решения теории упругости для многослойного бруса с круговой осью построено аналитическое решение диаметрального растяжения (сжатия) многослойного кольца взаимно противоположными сосредоточенными нормальными силами. Соотношения (2)-(12) позволяют определять основное НДС композитных колец с произвольным количеством цилиндрически ортотропных слоев, с учетом податливости их материалов деформациям поперечного сдвига и обжатия.

Результаты применения соотношений точного и упрощенного решения для тестовой задачи определения основного НДС четырехслойного толстого кольца ($(r_1 + r_2)/(2h) = 1,75$) показали, что применение гипотезы плоских сечений приводит к незначительному изменению распределений σ_r и $\tau_{r\theta}$. Однако, при определении напряжений σ_θ такое упрощение приводит к значительному занижению их величины в опасных точках. Еще большие изменения применение гипотезы плоских сечений вносит в распределения перемещений, занижая их величину, в некоторых сечениях, в несколько раз.

Дополнительные расчеты показали, что при увеличении отношения $(r_1 + r_2)/(2h)$ до определенных значений применение гипотезы плоских сечений уже не вносит значительных изменений при определении НДС, а при дальнейшем увеличении указанного отношения – и перемещений. Это позволяет использовать упрощенное решение для расчета тонких многослойных колец.

Литература

1. Timpe A. Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion / A. Timpe // Z. Math. Physik. – 1905. – 52. – P. 348–383.
2. Тимошенко С. П. Прочность и колебания элементов конструкций / С. П. Тимошенко. – М.: Наука, 1975. – 704 с.
3. Chianese R. B. The general solution to the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter / R. B. Chianese, R J. Erdlac // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – 1988. – Vol. 41, Iss. 2. – P. 239–247.
4. Batista M. Technical note: Stresses in a circular ring under two forces acting along a diameter / M. Batista, J. Usenik // Journal of Strain Analysis for Engineering Design. – 1996. – 31 (1). – P. 75–78.

5. Batista M. Stresses and displacements in a circular ring loaded by symmetrically spaced radial forces / M. Batista // *The IES Journal Part A: Civil & Structural Engineering*. – 2015. – 8 (4). – P. 296–303.
6. Durelli A. J. Stresses and Displacements on the Boundaries of Circular Rings Diametrically Loaded / A. J. Durelli, Y. H. Lin // *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme* – 1986. – 53 (1). – P. 213–219.
7. Bagci C. Exact elasticity solutions for stresses and deflections in curved beams and rings of exponential and t-sections / C. Bagci // *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*. – 1993. – 115(3). – P. 346–358.
8. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1 / Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 831 с.
9. Шваб'юк В. І. Лінійне деформування, міцність стійкість композитних оболонок середньої товщини: монографія / В. І. Шваб'юк, С. В. Ротко. – Луцьк: РВВ ЛНТУ. – 2015. – 264 с.
10. Композиционные материалы: Справочник / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др.; Под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
11. Tutuncu N. Plane Stress Analysis of End-Loaded Orthotropic Curved Beams of Constant Thickness With Applications to Full Rings / N. Tutuncu // *J. Mech. Des.* – 1998. – 120 (2). – P. 368–374.
12. Koval'chuk S. B. Elasticity Theory Solution of the Problem on Bending of a Narrow Multilayer Cantilever with a Circular Axis by Loads at its End / S. B. Koval'chuk, A. V. Goryk // *Mechanics of Composite Materials*. – 2018. – Vol. 54, Iss. 5. – P. 605–620.
13. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
14. Kovalchuk S. B. Major stress-strain state of double support multilayer beams under concentrated load. Part 1. Model construction / S. B. Kovalchuk, A.V. Gorik // *Journal of mechanical engineering*. – 2018. – Vol. 21. Iss. 4. – P. 30–36.
15. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек / А. Л. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.

References

1. Timpe, A. (1905). Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion, *Z. Math. Physik*, 52, 348–383.
2. Timoshenko, S. P. (1975). *Prochnost i kolebaniya elementov konstruktsiy*. М.: Nauka, 704.
3. Chianese, R. B., Erdlac, R. J. (1988). The general solution to the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 41(2), 239–247.
4. Batista, M., Usenik, J. (1996). Technical note: Stresses in a circular ring under two forces acting along a diameter. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 31(1), 75–78.
5. Batista, M. (2015). Stresses and displacements in a circular ring loaded by symmetrically spaced radial forces. *The IES Journal Part A: Civil & Structural Engineering*, 8(4), 296–303.
6. Durelli, A. J., Lin, Y. H. (1986). Stresses and Displacements on the Boundaries of Circular Rings Diametrically Loaded. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 53(1), 213–219.
7. Bagci, C. (1993). Exact elasticity solutions for stresses and deflections in curved beams and rings of exponential and t-sections. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 115(3), 346–358.
8. Birger, I. A., Panovko, Ya. H. (1968). *Prochnost, ustoychivost, kolebaniya. Spravochnik v treh tomah. Tom 1*. М.: Mashinostroenie, 831.
9. Shvabiuk, V. I., Rotko, S. V. (2015). *Liniine deformuvannia, mitsnist stiikist kompozytnykh obolonok serednoi tovshchyny: monohrafiia*. Lutsk: RVV LNTU, 264.
10. Vasilev, V. V., Protasov, V. D., Bolotin, V. V. (1990). *Kompozitsionnyie materialyi: Spravochnik*. М.: Mashinostroenie, 512.
11. Tutuncu, N. (1998). Plane Stress Analysis of End-Loaded Orthotropic Curved Beams of Constant Thickness With Applications to Full Rings. *J. Mech. Des.*, 120 (2), 368–374.

12. Koval'chuk, S. B., Goryk, A. V. (2018). Elasticity Theory Solution of the Problem on Bending of a Narrow Multilayer Cantilever with a Circular Axis by Loads at its End. *Mechanics of Composite Materials*, 54 (5), 605–620.
13. Lehnitskiy, S. G. (1977). *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela*. M.: Nauka, 416.
14. Kovalchuk, S. B., Gorik, A. V. (2018). Major stress-strain state of double support multilayer beams under concentrated load. *Journal of mechanical engineering*, 21 (4), 30–36.
15. Goldenveyzer, A. L. (1976). *Teoriya uprugih tonkih obolochek*. M.: Nauka, 515.

Ковальчук Станислав Богданович

Полтавская государственная аграрная академия, к.т.н., доцент
Ул. Сковороды, 1/3, Полтава Украина 36003
stanislav.kovalchuk@pdaa.edu.ua,
ORCID: 0000-0003-4550-431X

Горик Алексей Владимирович

Полтавская государственная аграрная академия, д.т.н., профессор
Ул. Сковороды, 1/3, Полтава Украина 36003
oleksii.goruk@pdaa.edu.ua,
ORCID: 0000-0001-8274-9266

Для посилань:

Ковальчук С. Б. Основний напружено-деформований стан багат шарового кругового кільця під дією взаємно протилежних нормальних сил / С. Б. Ковальчук, А. В. Горик // Механіка та математичні методи. – 2019. – №1. – С. 56-71.

For references:

Koval'chuk, S., Goryk, A. (2019). Basic stress-strain state of a multilayer circular ring under the action of mutually opposite normal forces. *Mechanics and Mathematical Methods*, 1, 56-71.

УДК 521.1

ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ СУПУТНИКА ПІД ДІЄЮ МОМЕНТУ СИЛ СВІТЛОВОГО ТИСКУ

Рачинська А. Л.¹, Купчак О. І.¹

¹Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

Анотація: Досліджено швидкий обертальний рух динамічно несиметричного супутника відносно центру мас під дією моменту сил світлового тиску. Орбітальні рухи з довільним ексцентриситетом вважаються заданими. Аналізується система, отримана після усереднення за рухом Ейлера-Пуансо. Дослідження проводиться в безрозмірному вигляді, що дозволяє отримати багатопараметричну систему рівнянь руху. Проведено аналіз впливу параметрів задачі на характер руху супутника відносно центру мас. Моделюється годограф вектора кінетичного моменту в тривимірному просторі для різних значень параметрів системи. Отримано критерій виникнення різних видів годографа вектора кінетичного моменту.

Ключові слова: геометрія мас, годограф, кінетичний момент, критерій, світловий тиск, супутник.

STUDY OF THE SATELLITE MOTION UNDER THE ACTION OF MOMENT OF LIGHT PRESSURE FORCES

A. Rachinskaya¹, A. Kupchak¹

¹Odessa I. I. Mechnikov National University

Abstract: The fast rotational motion of a dynamically asymmetric body relative to the center of mass under the action of a moment of force of light pressure has been researched. The surface of the satellite represents a surface of rotation. The center of mass of the satellite moves in a Keplerian ellipse with an arbitrary given eccentricity. The system of equations of body motion relative to the center of mass, obtained after averaging over the Euler-Poinsot motion, is being analyzed. As a result of averaging, the functions of the system depend on complete elliptic integrals of the first and second kind. The research of the equations of motion is carried out in a dimensionless form. The distinctive parameters of the problem are: the angular velocity of the orbital motion, the moment of inertia about one of the main central axes of inertia of the solid, and the modulus of the satellite kinetic moment vector at the initial moment of time. A multiparameter system of equations of body motion has been obtained. The analysis of the effect of the moment of the forces of light pressure on the nature of the motion of the satellite relative to the center of mass has been carried out. It has been established that an increase in the characteristic number of the model leads to an increase in the amplitude of the function of the angle of deviation of the angular kinetic momentum vector from vertical to the orbit plane. And also to an increase in the rate of rotation of the kinetic moment vector near the vertical to the orbital plane. Simulation of satellite motion is being carried out for different types of trajectories of motion of the center of mass. This work is researching the effect of the magnitude of the modulus of elliptic functions on the nature of body motion relative to the center of mass. To carry out a complete analysis of the constructed mathematical model, own package for the hodograph visualization of the kinetic moment vector in three-dimensional space has been developed. The construction of hodograph of the kinetic moment vector has been implemented for various values of the system parameters. The hodograph is being built on a sphere of unit radius. The significant effect of satellite orbit eccentricity and geometry of the body mass has been shown. The character of the hodograph of the kinetic moment vector for dynamically “elongated” and “oblate” bodies is being analyzed. A criterion of the occurrence of various types of hodographs of the kinetic moment vector, which has a geometric interpretation of the results, has been obtained.

Keywords: mass geometry; hodograph; kinetic moment; criterion, light pressure; satellite.

1 ВВЕДЕННЯ

Дослідження задач динаміки руху твердих тіл відносно нерухомої точки залишається актуальним протягом багатьох десятиліть. Це зумовлено зростанням вимог до точності вирішення практичних завдань космонавтики, гіроскопії та ін. Стрімкий розвиток ІТ-технологій дозволяє не тільки застосовувати нові методики дослідження задач, але й проводити моделювання досліджуваних процесів.

Розробка власних пакетів для моделювання механічних процесів дозволяє проводити дослідження руху твердого тіла відносно нерухомої точки під дією різних силових факторів, а також їх сукупності. Для кожного силового фактора будується необхідна фізична і математична моделі, а також досліджується питання взаємодії силових факторів. Для узагальнення отриманих результатів необхідно будувати моделі в безрозмірному вигляді, вибираючи в якості масштабу характерні параметри задачі.

Однією з важливих характеристик обертального руху твердого тіла відносно нерухомої точки є вектор кінетичного моменту. Годограф даного вектора є просторовою кривою, яка дозволяє досліджувати характер руху твердого тіла і визначити необхідні співвідношення між параметрами моделі

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Розглянемо рух супутника відносно центру мас під дією моменту сил світлового тиску. Обертальні рухи розглядаються в рамках моделі твердого тіла, центр мас якого рухається заданою фіксованою еліптичною орбітою навколо Сонця [1]. Завдання дослідження обертального руху космічного апарату під дією моменту сил світлового тиску є одним з найважливіших розділів динаміки обертального руху твердого тіла відносно центру мас. Спочатку вивчалися супутники і космічні апарати, оснащені протяжними сонячними батареями або відбивними антенами. Потім з'явилася задача про управління орієнтацією за допомогою світлового тиску. Дослідженням обертальних рухів тіл відносно центру мас під дією збурюючих моментів сил різної природи (гравітаційних, світлового тиску, впливу порожнини, заповненої в'язкою рідиною, і ін.). Близьким до наведеного нижче, присвячені роботи [1-8].

Введемо три декартові системи координат, початок яких поєднуємо з центром інерції супутника [1]. Система координат $Ox_i (i=1,2,3)$ рухається послідовно разом з центром інерції: вісь Ox_1 паралельна радіус-вектору перигелія орбіти, вісь Ox_2 – вектору швидкості центру мас супутника в перигелії, вісь Ox_3 – нормалі до площини орбіти. Система координат $Oy_i (i=1,2,3)$ зв'язана з вектором кінетичного моменту G . Вісь Oy_3 напрямлена по вектору кінетичного моменту G , вісь Oy_2 лежить у площині орбіти (т.б. у площині Ox_1x_2), вісь Oy_1 лежить у площині Ox_3y_3 та напрямлена так, що вектори y_1, y_2, y_3 утворюють праву трійку [1]. Вісі системи координат $Oz_i (i=1,2,3)$ пов'язані з головними центральними осями інерції твердого тіла. Взаємне положення головних центральних осей інерції та осей Oy_i визначається кутами Ейлера. При цьому направляючі косинуси α_{ij} осей Oz_i відносно системи Oy_i виражаються через кути Ейлера φ, ψ, θ за відомими формулами [1]. Положення вектора кінетичного моменту G відносно його центру мас у системі координат Ox_i визначається кутами λ та δ , як показано в [1].

Рівняння руху тіла відносно центру мас запишемо в формі [1]:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= L_3, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G \sin \delta}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} - \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= G \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут L_i – моменти прикладених сил відносно осей Oy_i , G – величина кінетичного моменту, $A_i (i=1,2,3)$ – головні центральні моменти інерції відносно осей Oz_i .

У деяких випадках зручно поряд зі змінною θ використовувати в якості додаткової змінної важливу характеристику – кінетичну енергію T , похідна якої має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{2T}{G} L_3 + G \sin \theta \left[\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right) (L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi) + \right. \\ &\left. + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Центр мас супутника рухається кеплерівським еліпсом з ексцентриситетом e та частотою обертання ω_0 . Залежність істинної аномалії ν від часу t задається співвідношенням

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\omega_0 (1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q} = \sqrt{\frac{\mu(1 - e^2)^3}{l_0^3}}, \quad (3)$$

де l_0 – фокальний параметр орбіти, ω_0 – кутова швидкість орбітального руху, e – ексцентриситет орбіти, μ – гравітаційна стала. Проекції L_i моменту прикладених сил складаються з моменту сил світлового тиску L_i^c .

Припустимо, що поверхня космічного апарату представляє собою поверхню обертання, причому одиничний орт вісі симетрії k напрямлений вздовж вісі Oz_3 . Як показано в [1, 2], в цьому випадку для моменту сил світлового тиску, що діє на супутник, має місце формула

$$L^c = (a_c(\varepsilon_s) R_0^2 / R^2) e_r \times k, \quad a_c(\varepsilon_s) \frac{R_0^2}{R^2} = p_c S(\varepsilon_s) Z_0'(\varepsilon_s), \quad p_c = \frac{E_0}{c} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2. \quad (4)$$

Тут e_r – одиничний вектор за напрямом радіус-вектора орбіти; ε_s – кут між напрямками e_r й k так, що $|e_r \times k| = \sin \varepsilon_s$; R – поточний відстань від центру Сонця до центру мас супутника; R_0 – фіксоване значення R , наприклад, в початковий момент часу; $a_c(\varepsilon_s)$ – коефіцієнт моменту сил світлового тиску, який визначається властивостями поверхні; S – площа «тіні» на площині, нормальній до потоку; Z_0' – відстань від центру мас до центру тиску; p_c – величина світлового тиску на відстані R

від центра Сонця; c – швидкість світла; E_0 – величина потоку енергії світлового тиску на відстані R_0 від центру Сонця.

Вважаємо [1], що в силу симетрії відповідна функція (4) має вигляд $a_c = a_c(\cos \varepsilon_s)$ та апроксимуємо її тригонометричним поліномом за ступенями $\cos \varepsilon_s$. Представимо функцію $a_c(\cos \varepsilon_s)$ у вигляді $a_c = a_0 + a_1 \cos \varepsilon_s + \dots$. Розглянемо другий член розкладання, коли $a_c(\cos \varepsilon_s) = a_1 \cos \varepsilon_s$ в припущенні, що $a_1 \sim \varepsilon$.

Розглядається динамічно несиметричний супутник, в припущенні, що кутова швидкість ω руху супутника відносно центру мас істотно більше кутової швидкості орбітального руху ω_0 , т.б. $\varepsilon = \omega_0/\omega \sim A_1\omega_0/G \ll 1$. В цьому випадку кінетична енергія обертання тіла велика в порівнянні з моментами збурювальних сил.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ставиться задача дослідження еволюції обертань супутника на асимптотично великому інтервалі часу $t \sim \varepsilon^{-2}$, на якому відбуваються значні зміни параметрів руху.

Для вирішення завдання будемо застосовувати метод усереднення [9].

4 МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

В результаті усереднення (1)-(2) по ψ , а потім за часом t з урахуванням залежності φ, θ від t [9] отримуємо систему рівнянь, в якій усереднені повільні змінні δ, λ, G, T зберігають свої позначення

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= -a_1 R_0^2 (2GR^2)^{-1} H \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu), \quad \frac{d\lambda}{dt} = -a_1 R_0^2 (GR^2)^{-1} H \cos \delta \cos^2(\lambda - \nu), \\ \frac{dG}{dt} &= 0, \quad \frac{dT}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Функція $H(k)$ в перших двох рівняннях визначається співвідношеннями

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left[3a^2 \frac{E(k^2)}{K(k^2)} - 1 \right], \quad \text{якщо } 2TA_2 - G^2 > 0, \\ H &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3a^2}{k^2} \left[k^2 - 1 + \frac{E(k^2)}{K(k^2)} \right] - 1 \right\}, \quad \text{якщо } 2TA_2 - G^2 < 0, \\ a^2 &= \frac{\sigma + h}{1 + \sigma}, \quad \sigma = \frac{A_3(A_1 - A_2)}{A_1(A_2 - A_3)}, \quad h = \left(\frac{2T}{G^2} - \frac{1}{A_2} \right) \frac{A_2 A_3}{A_2 - A_3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут $K(k^2)$ й $E(k^2)$ – повні еліптичні інтеграли першого та другого роду відповідно [10].

Як відомо [1] $R = \rho_0 / (1 + e \cos \nu)$, а фокальний параметр орбіти визначається рівністю $\rho_0 = \eta^{1/3} (1 - e^2) / \omega_0^{2/3}$, де η – гравітаційна стала. Тоді перші два рівняння системи (5) для кутів орієнтації вектора кінетичного моменту приймуть вигляд:

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{a_1 R_0^2 \omega_0^{4/3} (1 + e \cos \nu)^2}{2G \eta^{2/3} (1 - e^2)^2} H \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu),$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{a_1 R_0^2 \omega_0^{4/3} (1+e \cos \nu)^2}{G \eta^{2/3} (1-e^2)^2} H \cos \delta \cos^2 (\lambda - \nu). \quad (7)$$

Згідно двом останнім рівнянням руху супутника під дією моменту сил світлового тиску в усередненої формі (5) кінетичний момент і кінетична енергія супутника є величини постійні.

5 ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ УСЕРЕДНЕНОГО ВЛАСНОГО ОБЕРТАННЯ СУПУТНИКА

Обезрозмірюємо рівняння руху супутника (7). За одиницю виміру часу візьмемо ω_0^{-1} , моменту інерції - A_1 й для модуля вектора кінетичного моменту – його початкове значення G_0 .

$$\tau = \omega_0 t, \quad \tilde{A}_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad \tilde{A}_3 = \frac{A_3}{A_1}, \quad \tilde{G} = \frac{G}{G_0}, \quad \tilde{T} = \frac{T A_1}{G_0^2}. \quad (8)$$

Проведемо обезрозмірювання співвідношень (6)

$$H = \frac{1}{2} \left[3a^2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1 \right], \text{ якщо } 2\tilde{T}\tilde{A}_2 - \tilde{G}^2 > 0,$$

$$H = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3a^2}{k^2} \left[k^2 - 1 + \frac{E(k)}{K(k)} \right] - 1 \right\}, \text{ якщо } 2\tilde{T}\tilde{A}_2 - \tilde{G}^2 < 0, \quad (9)$$

$$a^2 = \frac{\sigma + h}{1 + \sigma}, \quad \sigma = \frac{\tilde{A}_3 (1 - \tilde{A}_2)}{(\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)}, \quad h = \left(\frac{2\tilde{T}}{\tilde{G}^2} - \frac{1}{\tilde{A}_2} \right) \frac{\tilde{A}_2 \tilde{A}_3}{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3}.$$

Введемо безрозмірне характерне число даної моделі

$$\chi = \frac{a_1 R_0^2 \omega_0^{1/3}}{G_0 \eta^{2/3}}. \quad (10)$$

Рівняння системи (7) для кутів орієнтації вектора кінетичного моменту в безрозмірною формі приймають вигляд:

$$\frac{d\delta}{d\tau} = -\frac{\chi}{2\tilde{G}} \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^2} H \sin \delta \sin 2(\lambda - \nu),$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = -\frac{\chi}{\tilde{G}} \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^2} H \cos \delta \cos^2 (\lambda - \nu). \quad (11)$$

$$\frac{d\nu}{d\tau} = \frac{(1+e \cos \nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}}.$$

Проведемо чисельне дослідження для системи рівнянь (11), враховуючи (9), і рівняння зміни істинної аномалії (3) в безрозмірному вигляді ($e=0$) для геометрії мас $\tilde{A}_2=0,8$, $\tilde{A}_3=0,5$; для початкових значень кутів $\delta_0=0,33\pi$, $\lambda_0=0$ та $\nu_0=0$; для характерних чисел задачі $\chi=0,1;1;2$ для модуля еліптичних функцій $k^2=0,5$. Результат зміни кута відхилення вектора кінетичного моменту від вісі вертикалі представлено на рис. 1, кут повороту вектора кінетичного моменту навколо вісі

вертикалі - на рис. 2. Крива 1 відповідає значенню $\chi = 0,1$, крива 2 - $\chi = 1$, крива 3 - $\chi = 2$. Видно, що збільшення характерного числа призводить до збільшення амплітуди коливань графіка зміни кута δ та до росту градієнта зростання функції кута λ . Згідно отриманих графіків, вектор кінетичного моменту робить поворот близько осі вертикалі до площини орбіти проти годинникової стрілки. На рис. 3 представлений годограф вектора кінетичного моменту на сфері одиничного радіусу для отриманих чисельних результатів. Видно, що характер кривої годографа для всіх розрахункових випадків однаковий, але при цьому істотно змінюються період і амплітуда.

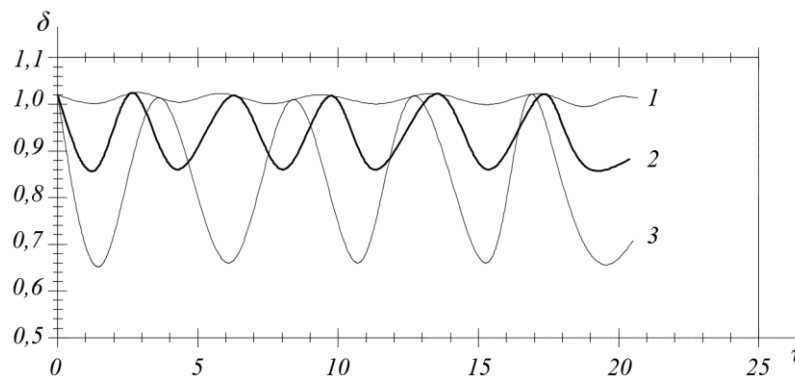


Рис. 1. Залежність кута δ від параметру збурюючого моменту

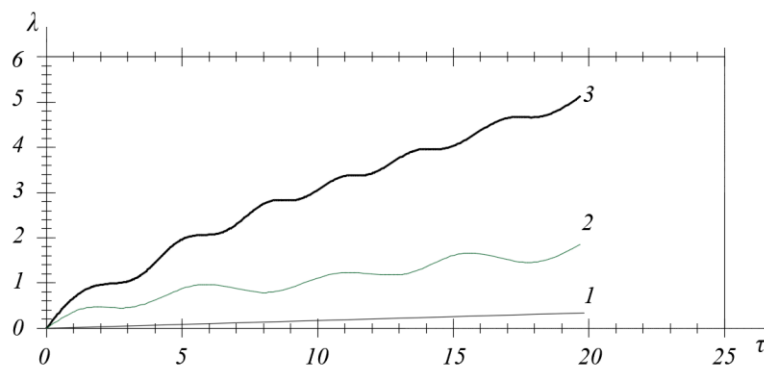


Рис. 2. Залежність кута λ від параметру збурюючого моменту

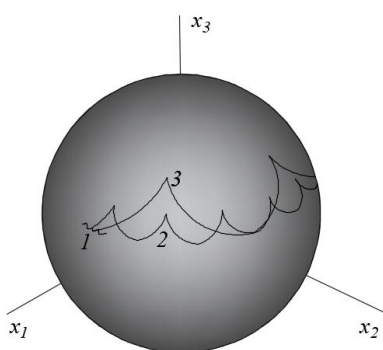


Рис. 3. Годограф вектору кінетичного моменту для різних χ

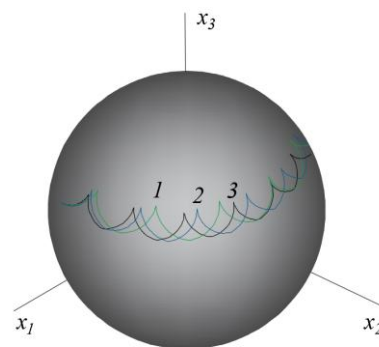


Рис. 4. Годограф вектору кінетичного моменту для різних k^2

Проведемо чисельні дослідження при різних значеннях модуля еліптичних функцій. Розрахунок руху супутника під дією моменту сил світлового тиску по круговій орбіті будемо проводити для геометрії мас $\tilde{A}_2 = 0,8$, $\tilde{A}_3 = 0,5$; для початкових

значень кутів $\delta_0 = 0,33\pi$, $\lambda_0 = 0$ та $v_0 = 0$; для характерного числа задачі $\chi = 1$ й для модуля еліптичних функцій $k^2 = 0,2; 0,5; 0,8$. На рис. 4 представлено годограф вектору кінетичного моменту на кулі одиничного радіуса для отриманих чисельних результатів. Результат зміни кута відхилення вектора кінетичного моменту від осі вертикалі представлено на рис. 5, а кута повороту вектора кінетичного моменту від осі вертикалі представлений на рис. 6. Крива 1 відповідає значенню $k^2 = 0,2$, крива 2 – $k^2 = 0,5$, крива 3 – $k^2 = 0,8$. Видно, що збільшення модуля еліптичних функцій приводить до зменшення амплітуди коливань графіка $\delta(\tau)$ та незначному зменшенню періоду коливань та до зменшення швидкості зростання функції кута $\lambda(\tau)$. Згідно побудованим кривим годографів вектора кінетичного моменту (рис. 4) можна зробити висновок про незначні зміни годографу вектора кінетичного моменту від величини модуля еліптичних функцій.

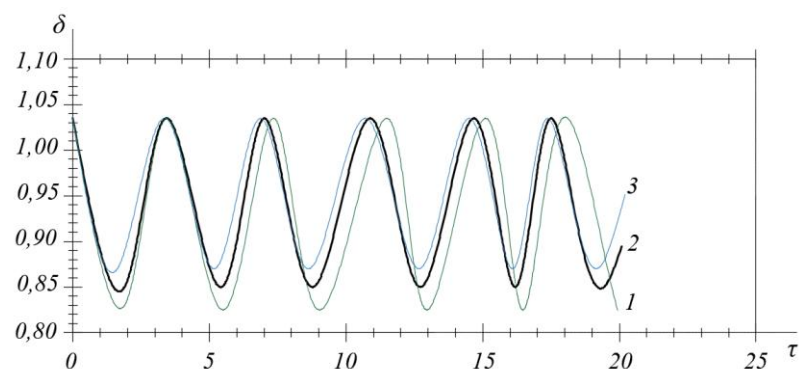


Рис. 5. Залежність кута δ від модуля еліптичних функцій

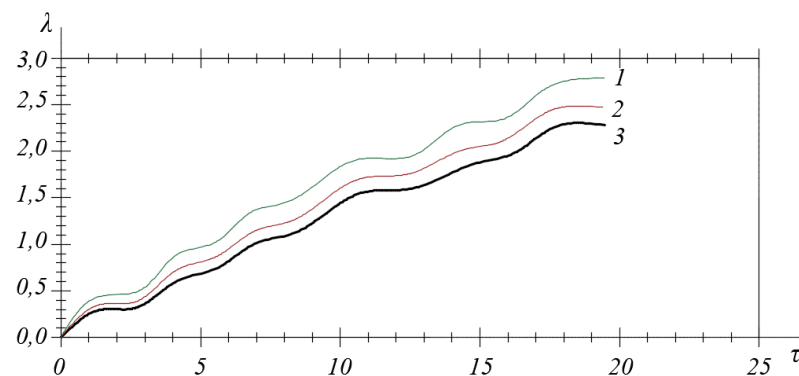


Рис. 6. Залежність кута λ від модуля еліптичних функцій

Проведемо чисельні дослідження для різних еліптичних орбіт супутника. Розрахунок руху супутника будемо проводити для геометрії мас $\tilde{A}_2 = 0,8$, $\tilde{A}_3 = 0,5$; для початкових значень кутів $\delta_0 = 0,33\pi$, $\lambda_0 = 0$ та $v_0 = 0$; для характерного числа задачі $\chi = 1$ й для модуля еліптичних функцій $k^2 = 0,5$. Результат зміни кута відхилення вектора кінетичного моменту від осі вертикалі представлений на рис. 7, а кута повороту вектора кінетичного моменту близько осі вертикалі представлений на рис. 8. Крива 1 відповідає значенню $e = 0$, крива 2 – $e = 0,6$. Видно, що збільшення ексцентриситету орбіти приводить до значної зміни характеру функції кута δ . Зміна кута повороту λ має більш виражену кількісну характеристику. На рис. 9 представлений годограф

вектора кінетичного моменту на кулі одиничного радіусу для отриманих чисельних результатів. Видно, що характер годографа не змінюється і має синусоїдальний вигляд як для кругової орбіти, так і для еліптичної, при цьому змінюються період і амплітуда коливання кривої годографа.

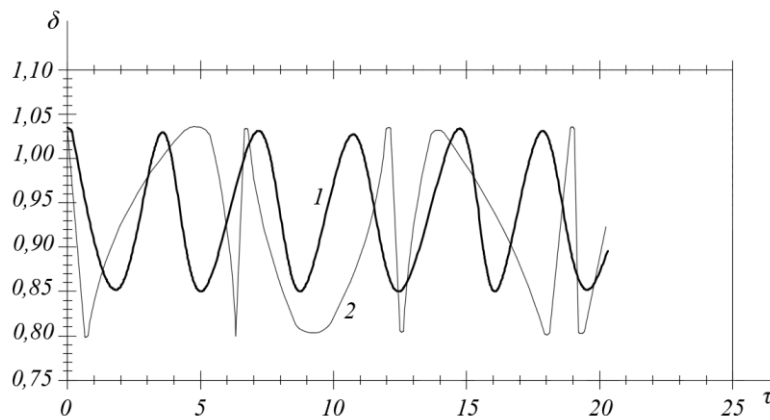


Рис. 7. Залежність кута δ від ексцентриситету орбіти

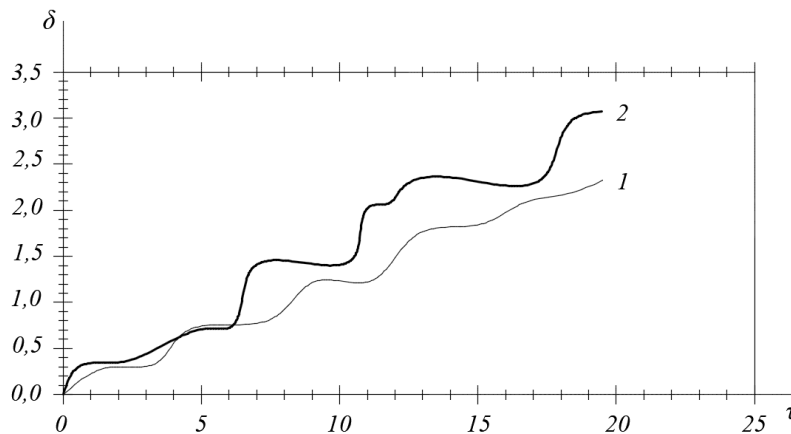


Рис. 8. Залежність кута λ від ексцентриситету орбіти

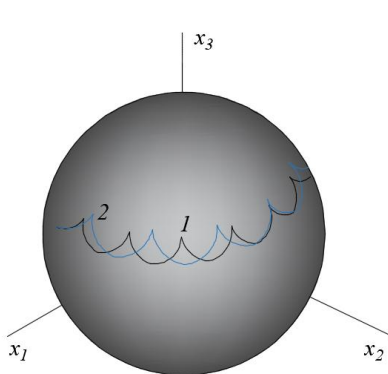


Рис. 9. Годограф вектора кінетичного моменту для різних e

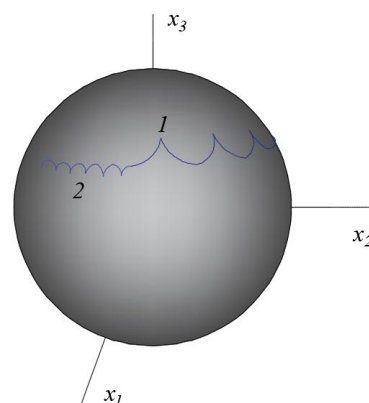


Рис. 10. Годограф вектора кінетичного моменту для різної геометрії мас

Розрахунок руху супутника по круговій орбіті будемо проводити при початкових значеннях кутів $\delta_0 = 0,33\pi$, $\lambda_0 = 0$ та $\nu_0 = 0$; для характерного числа задачі $\chi = 1$ та для

модуля еліптичних функцій $k^2 = 0,5$. На рис. 10 представлено годограф вектора кінетичного моменту на кулі одиничного радіуса для динамічно «втягнутого» та динамічно «сплюснутого» супутника. Крива 1 відповідає характеристикам геометрії мас $\tilde{A}_2 = 0,8$, $\tilde{A}_3 = 0,5$, крива 2 – $\tilde{A}_2 = 2$, $\tilde{A}_3 = 3$. З рисунка видно, що в першому розрахунковому випадку вектор кінетичного моменту обертається навколо вісі вертикалі до площини орбіти проти ходу годинникової стрілки, а у другому випадку у протилежному напрямку, при цьому видно зміну характеру кривої годографа.

6 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Як показало чисельне дослідження, годограф вектора кінетичного моменту для динамічно «сплюснутого» супутника не завжди має вигляд кривої 2 рис. 10. Введемо функцію виду

$$f(k^2) = K(k^2)/(3E(k^2)) \quad (12)$$

Було отримано критерій можливого характеру кривої годографа з використання параметра a^2 (9). Якщо

$$a^2 < f(k^2), \quad (13)$$

то крива годографа має вид кривої 1, у протилежному випадку – кривої 2.

Проведено чисельне дослідження характеру годографа вектора кінетичного моменту для різної геометрії мас супутника. На рис. 11-12, де представлені результати дослідження, крива 1 - це графік функції $f(k^2)$ (12), область A – це область можливих значень параметра a^2 для різних значень моментів інерції \tilde{A}_2 й \tilde{A}_3 . Рис. 11 відповідає динамічно «втягнутому» супутнику, для якого має виконуватися нерівність $1 > \tilde{A}_2 > \tilde{A}_3$, рис. 12 – динамічно «сплюснутому» супутнику із співвідношенням моментів інерції $1 < \tilde{A}_2 < \tilde{A}_3$. З рис. 11 видно, що для динамічно «втягнутого» супутника тільки для вузького діапазону модуля еліптичних функцій k^2 існує мала область геометрії мас супутника, при якій можливий характер годографа вектора кінетичного моменту виду кривої 2 рис. 10. Практично у всіх розрахункових випадках динамічно «втягнутого» супутників буде присутній характер типу кривої 1 рис. 10. Результати чисельного дослідження, представлені на рис. 12, показують, що динамічно «сплюснутого» супутника можливі два характеру годографа вектора кінетичного моменту, при цьому частіше зустрічатиме годограф виду кривої 2, рис. 10.

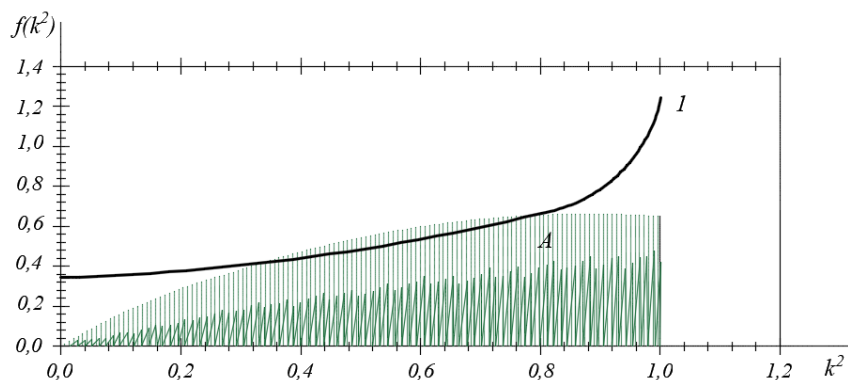


Рис. 11. Область можливих годографів динамічно «втягнутого» супутника

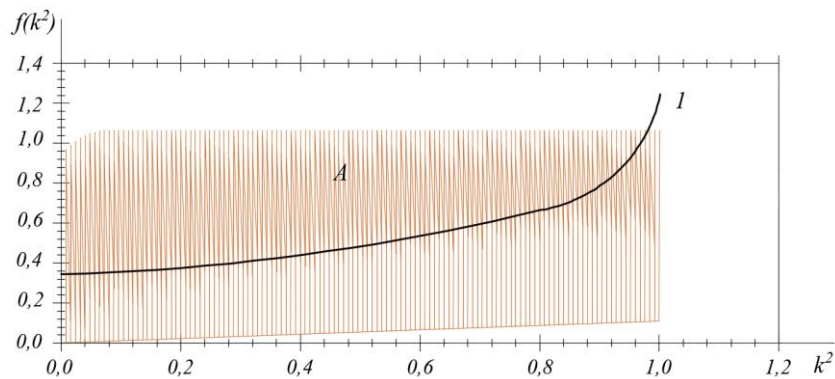


Рис. 12. Область можливих годографів динамічно «сплюснутого» супутника

7 ВИСНОКИ

Проведене чисельне дослідження збуреного руху супутника під дією моменту сил світлового тиску показало, що моделюючи супутники з різною геометрією мас, можна отримати поворот вектора кінетичного моменту відносно центру мас в різних напрямках близько осі вертикалі до площини орбіти, при цьому крива годографа вектора кінетичного моменту має різний характер.

Література

1. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле / В. В. Белецкий – М.: МГУ, 1975. – 416 с.
2. Карымов А. А. Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника Солнца в поле сил светового давления / А. А. Карымов // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28. Вып. 5. – С. 923–930.
3. Поляхова Е. Н. Космический полет с солнечным парусом: проблемы и перспективы / Е. Н. Поляхова. – М.: Наука, 1986. – 54 с.
4. Сазонов В. В. Движение астероида относительно центра масс под действием момента сил светового давления / В. В. Сазонов // Астрон. вестник. – 1994. – Т. 28. №2. – С. 95–107.
5. Лещенко Д. Д. Движение спутника относительно центра масс под действием момента сил светового давления в сопротивляющейся среде / Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Вісник одеськ. нац. ун-ту. – 2007. – Т. 12. Вип. 7. – С. 85–98.
6. Акуленко Л. Д. Возмущенные и управляемые вращения твердого тела: монография / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская, Я. С. Зинкевич. – Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова. – Одесса: Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, 2013. – 288 с.
7. Черноушко Ф. Л. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс: монография / Ф. Л. Черноушко, Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко. – М. – Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. – 308 с.
8. Rachinskaya A. L. Optimal deceleration of a rotating asymmetrical body in a resisting medium / A. L. Rachinskaya, E. A. Romyantseva // International Applied Mechanics. –2018. – Vol. 54, No. 6. – P. 710–717.
9. Волосов В. М. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем / В. М. Волосов, Б. И. Моргунов. – М.: МГУ, 1971. – 507 с.
10. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

References

1. Beleckii, V.V. (1975). Dvijenie sputnika otnositel'no centra mass v gravitacionnom pole. M.: MGU, 416.
2. Karymov, A. A. (1964). Ustoichivost vraschatelnogo dvijeniya geometricheski simmetrichnogo iskusstvennogo sputnika Solntsa v pole svetovogo davleniya. Prikladnaya matematika i mekhanika, T28., Vol.5., 923–930.
3. Polyakhova, E. N. (1986). Kosmicheskii polet s solnechnym parusom: problemy i perspektivy. M.: Nauka, 54.
4. Sazonov, V. V. (1994). Dvijenie asteroida otnositel'no tsentra mass pod deistviem momenta sil svetovogo davleniya. Astron. Vestnik, Vol.28, 95–107.
5. Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L. (2007). Dvijenie sputnika otnositel'no centra mass pod deistviem momenta sil svetovogo davleniya v soprotivlyayuscheysya srede. Visnyk Od.nat. university, Vol 12, 85–98.
6. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L., Zinkevich, Y. S. (2003). Vozmuchsennye i upravlyaemye dvijeniya tverdogo tela: monografiya. O.: Odesskii nacional'nyi universitet im. Mechnikova, 288.
7. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2015). Evolyuciya dvijenii tverdogo tela otnositel'no centra mass: monografiya. M.-Ijevsk: Ijevskii institute komp'yuternykh issledovaniy, 308.
8. Rachinskaya, A. L., Rummyantseva, E. A. (2018). Optimal deceleration of a rotating asymmetrical body in a resisting medium. International Applied Mechanics, Vol. 54, 6, 710–717.
9. Volosov, V. M., Morgunov, B. I. (1971). Metod osredneniya v teorii nelineynykh kolebatel'nykh sistem. M.: MGU, 507.
10. Grandshtein, I. S., Ryjik, I. M. (1971). Tablicy integralov, summ, ryadov i proizvedenii. M.: Nauka, 1108.

Рачинська Алла Леонидівна

Одеський національний університет ім.І.І. Мечникова, к.ф.-м.н., доцент
вул. Дворянська, 2 Одеса, Україна 65082
rachinskaya@onu.edu.ua,
ORCID: 0000-0003-2430-9603

Купчак Олександр Ігорович

Одеський національний університет ім.І.І. Мечникова, аспірант
вул. Дворянська, 2 Одеса, Україна 65082
kupchakoi@onu.edu.ua,
ORCID: 0000-0002-7335-354X

Для посилань:

Рачинська А. Л. Дослідження руху супутника під дією моменту сил світлового тиску / А. Л. Рачинская, А. И. Купчак // Механіка та математичні методи. – 2019. – №1. – С. 72-82.

For references:

Rachinskaya, A., Kupchak, A. (2019). Study of the satellite motion under the action of moment of light pressure forces. Mechanics and Mathematical Methods, 1, 72-82.

УДК 539.3:624.046.3

ПРО ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ БУБНОВА

Бекшаєв С. Я.

Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: Розглядається задача максимального підвищення критичної сили прямолінійного стрижня змінної згинної жорсткості, шарнірно опертого кінцями на жорсткі або пружні опори і стиснутого постійною по довжині поздовжньою силою, за рахунок встановлення проміжних шарнірних опор кінцевої жорсткості, таких, що збільшення жорсткості будь-якої з опор не призводить до подальшого зростання критичної сили (узагальнена задача Бубнова). Ставиться задача: серед нескінченної кількості наборів проміжних і кінцевих опор, які розв'язують узагальнену задачу Бубнова, знайти такий, при якому сума витрат на встановлення системи цих опор буде мінімальною. В якості міри сумарних витрат приймається сума коефіцієнтів жорсткості всіх введених опор. Знайдено явні вирази шуканих оптимальних значень коефіцієнтів жорсткості. Проведено чисельне порівняння витрат при оптимальному розподілі жорсткостей опор і при однакових опорах. Розв'язок задачі отримано на основі використання якісних методів.

Ключові слова: підвищення стійкості, задача Бубнова, розподіл жорсткостей, оптимальний розподіл.

ON THE OPTIMAL SOLUTION OF THE BUBNOV PROBLEM

S. Bekshaev

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: We consider a rectilinear rod of variable flexural stiffness, hinged at the ends on rigid or elastic supports and compressed by a longitudinal force constant along length. In order to increase its critical force, additional intermediate elastic or rigid supports are installed. It is known what conditions must satisfy the locations and coefficients of stiffness of the intermediate and end supports to critical force of formed multi-span rod has reached the maximum possible value for the given number of supports (the generalized Bubnov problem). These conditions are such that the maximum critical force can be realized at some finite values of the stiffness coefficients of the supports. Further increase in the stiffness of the supports and the associated costs will be useless, because it will not cause an increase in the critical force of the rod. At the same time, reducing the stiffness of at least one of the supports will reduce the stability of the rod. It is also known that the same maximum value of the critical force can be get at different distributions of stiffness (and, accordingly, the material) between the supports. The paper sets the task: among an infinite set of systems of supports (intermediate and end), solving the generalized Bubnov problem, to find one for which the total cost for installing the entire system of supports will be minimal. As a measure of the total cost, the sum of the stiffness coefficients of all supports is taken. The case when the stiffness of the end supports do not vary, in particular, are infinite, is considered especially. For it is searched the minimal sum of the stiffness coefficients for the intermediate supports only. In this paper, we developed explicit expressions of the desired optimal values of the stiffness coefficients (including the end ones, if they vary). The numerical comparison of costs at optimum distribution of stiffness of support and at identical supports is executed. The solution of the problem is obtained on the basis of the use of qualitative methods of the theory of stability of rod systems, in particular theorems on the influence of the imposition of constraints on their critical forces.

Keywords: stability increase; Bubnov problem; stiffness distribution; optimal distribution

1 ВСТУП

Забезпечення стійкості поздовжньо стиснутих елементів інженерних конструкцій, є важливим фактором їх експлуатаційної надійності. Одним із шляхів підвищення стійкості стиснутих стрижнів на практиці є накладення в'язей, зокрема, встановлення додаткових проміжних опор. При цьому результат залежить від пружних характеристик і локалізації опор, які вводяться. Відома верхня межа для критичної сили посилюваної стрижневої системи, яка може бути досягнута за рахунок встановлення заданої кількості додаткових в'язей. Досягнення цієї межі можливо, взагалі кажучи, різними способами і при різних витратах, зокрема, при різних витратах матеріалу і його розподілу між опорами, які вводяться. Як правило, критичні сили зростають разом із зростанням жорсткості в'язей, але іноді максимальне зростання основної (найменшої) критичної сили забезпечується вже при скінченій жорсткості опор і подальше їх посилення і пов'язані з цим додаткові витрати не підвищують стійкості конструкції.

Значний теоретичний і практичний інтерес представляє дослідження множини в'язей, що забезпечують максимальне підвищення критичної сили стрижня, і відшукування в цій множині такого набору, для якого вказане підвищення досягається при мінімальних витратах.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Бубновим [1] була поставлена і розв'язана наступна задача. Знайти таке значення $c_{кр}$ коефіцієнта жорсткості n однакових рівновіддалених проміжних пружних шарнірних опор (однакове для всіх опор), при якому основна критична сила прямолінійного призматичного $(n+1)$ - прогонового стрижня, шарнірно опертого по кінцях на жорсткі опори і стиснутого постійною по довжині осьовою силою, досягає максимально можливого (при даному числі опор) значення і не збільшується при подальшому збільшенні жорсткості, тобто при $c > c_{кр}$.

Пізніше були запропоновані різні розв'язання і узагальнення задачі Бубнова (зокрема Ф. Блейхом [2,3], П. Ф. Папковичем [4], М. Д. Дольбергом [5]), з яких особливий інтерес представляє розв'язання Я. Л. Нудельмана [6], яким був запропонований простий прийом, що дозволяє знайти нескінченно багато розв'язків узагальненої задачі Бубнова, в якій не накладається обмежень на співвідношення жорсткостей проміжних опор, зокрема не потрібна їх рівність. Незважаючи на простоту і витонченість підходу деякі деталі його застосування дають формальний привід для незадоволеності і спонукають до додаткових досліджень. Особливістю цього прийому є та обставина, що шукані коефіцієнти жорсткості виражаються через $2n$ числових параметрів, n з яких можуть вибиратися довільно в певних межах, обумовлених їх механічним змістом. Питання вибору конкретних значень цих параметрів, якщо необхідно, щоб коефіцієнти жорсткості опор, які вводяться, задовольняли будь-яким додатковим вимогам (наприклад, знаходились в заданих співвідношеннях або забезпечували екстремум певної цільової функції), не розглядалося. В окремих випадках, розглянутих в [6], розв'язання задачі Бубнова спиралися не на визначення, а на виключення цих параметрів. При цьому формально не можна гарантувати, що їх значення, які відповідають знайденим коефіцієнтам жорсткості, будуть перебувати в заданих межах, тобто зберігати вказаний механічний зміст.

По суті, залишається відкритим питання про повноту запропонованого розв'язку, тобто про існування та єдиність конкретного набору параметрів, що виключаються, для

будь-якої системи опор, що розв'язують задачу Бубнова, і про можливе існування таких систем, які не включені в описану n -параметричну множину.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Основною метою цієї роботи є визначення в нескінченній множині n -опорних підсиленів стиснутого стрижня такого розподілу жорсткостей введених опор, при якому витрати на їх встановлення будуть мінімальні. При цьому приймається, що сумарні витрати, пов'язані зі встановленням опор, пропорційні сумі їх коефіцієнтів жорсткості. Одночасно доводиться, що будь-який частинний розв'язок задачі Бубнова є одним з розв'язків, описаних в [6], тобто розв'язок Я.Л. Нудельмана є загальним.

4 МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

Розв'язання поставленої задачі здійснюється в основному із застосуванням якісних методів теорії стійкості стрижневих систем, використаних в [6] і детально описаних в [7].

Зокрема використовуються такі результати:

А. Нехай P_1^0, P_2^0, \dots – критичні сили стрижневої системи S^0 , які занумеровані в порядку зростання. Тоді основна критична сила системи S^n , утвореної з S^0 введенням n в'язей, не перевищує величини P_{n+1}^0 .

Б. Нехай P_j^0 – одна з старших критичних сил стрижневої системи S^0 ($j > 1$).

Число критичних сил системи S^1 , утвореної з S^0 введенням одної в'язі, строго менших за P_j^0 , може зменшитися тільки за умови, що в'язь накладено у вузлі кожної з форм втрати стійкості системи S^0 , що відповідають P_j^0 .

В. Кратність критичної сили в спектрі системи S^1 , посиленю одною в'яззю, не менше її кратності в спектрі S^0 лише в тому випадку, якщо в'язь накладено у вузлі кожної з форм втрати стійкості системи S^0 , що відповідають цій критичній силі.

5 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

5.1. До розв'язання Я. Л. Нудельмана узагальненої задачі Бубнова. Ідея розв'язання використовує ту обставину, що при втраті стійкості однопрогонового шарнірно опертого на жорсткі опори стрижня по $(n+1)$ -й формі всередині прогону існують рівно n внутрішніх вузлів (точок з нульовим прогином) і кожна його ділянка, обмежена двома сусідніми вузлами, деформується як окремий шарнірно опертий стрижень, так що вузли ділять цей стрижень на $(n+1)$ рівностійких ділянок. Якщо розрізати стрижень у вузлах $(n+1)$ -ї форми на $(n+1)$ ізольованих стрижнів і кожен з них вільно оперти на пружні опори, то в спектрі кожного з них буде присутня критична сила P_{n+1}^0 , яка дорівнює $(n+1)$ -й критичній силі вихідного (нерозрізного однопрогонового) стрижня. Вона може бути основною або другою за номером в залежності від жорсткостей введених пружних опор, тому що їй може передувати критична сила, яка дорівнює

$$\bar{P} = \frac{l_j}{\frac{1}{c_{1j}} + \frac{1}{c_{2j}}},$$

де $j = 1, 2, \dots, n+1$ – номер стрижня (номер прогону), l_j – його довжина, c_{1j} и c_{2j} – коефіцієнти жорсткості відповідно лівої та правої пружних опор j -го стрижня. Силі \bar{P} відповідає прямолінійна форма втрати стійкості (рис. 1).



Рис. 1. Дві основні форми втрати стійкості пружно опертого стрижня

Якщо підібрати c_{1j} і c_{2j} так, щоб при будь-якому j виконувалося рівність $\bar{P} = P_{n+1}^0$, величина P_{n+1}^0 стане основною і $2(n+1)$ -кратною критичною силою утвореної розчленованої системи. Якщо тепер усунути розрізи, утвориться $(n+1)$ -прогоновий стрижень, опертий у вузлах $(n+1)$ -ї форми на пружні опори, коефіцієнти жорсткості яких дорівнюють $c_j = c_{2j} + c_{1,j+1}$. Усунення розрізів є накладенням $2n$ в'язей, які урівнюють прогини і кути нахилу опорних перетинів суміжних прогонів. $2n$ в'язей можуть підняти основну критичну силу до $(2n+1)$ -ї, а другу – до $2(n+2)$ -ї, які в силу зазначеної $2(n+1)$ -кратності критичної сили розчленованого стрижня обидві дорівнюють P_{n+1}^0 . Таким чином, n проміжних опор з коефіцієнтами жорсткості $c_j = c_{2j} + c_{1,j+1}$, встановлені у вузлах $(n+1)$ -ї форми вихідного стрижня, підвищують його основну критичну силу до максимально можливого значення P_{n+1}^0 , роблячи її двократною, тим самим розв'язуючи задачу Бубнова, причому в узагальненій постановці, оскільки дозволяють знайти нескінченно багато її розв'язків з різними коефіцієнтами жорсткості введених опор при змінній по довжині стрижня згинальній жорсткості і при скінченній жорсткості крайніх опор, встановлюючи умови, яким повинні задовольняти коефіцієнти жорсткості c_0 і c_{n+1} цих опор.

При цьому для кожного номера j одне з чисел c_{1j} , c_{2j} можна вибирати довільно, дотримуючись умови $c_{1j} > P_{n+1}^0/l_j$ ($c_{2j} > P_{n+1}^0/l_j$). Решта коефіцієнтів жорсткості визначаються системою рівнянь:

$$P_{n+1}^0 = \frac{l_j}{\frac{1}{c_{1j}} + \frac{1}{c_{2j}}}, \quad j = 1, 2, \dots, n+1; \quad (1)$$

$$c_j = c_{2j} + c_{1,j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad c_0 = c_{11}, \quad c_{n+1} = c_{2,n+1}. \quad (2)$$

В [6] не було дано прямого розв'язання цієї системи, тобто невідомі c_{ij} не розшукувалися, а виключалися, що залишало не з'ясованими дві обставини. Перше – чи немає серед виключених невідомих таких, які позбавлені фізичного змісту (наприклад, від'ємних). Друге – чи немає серед розв'язків задачі Бубнова таких, які взагалі не охоплюються запропонованою схемою, для яких не існує представлення через c_{1j} та c_{2j} . Обидва питання знімаються наступною теоремою.

Теорема. Для будь-якого набору c_0, c_1, \dots, c_{n+1} , який розв'язує задачу Бубнова, тобто забезпечує підвищення критичної сили до P_{n+1}^0 , роблячи її двократною, існує єдиний набір c_{1j} і c_{2j} , що задовольняє співвідношенням (1) і (2).

Для доведення розглянемо розрізний стрижень S^* , складений з $(n+1)$ абсолютно жорстких прямолінійних ланок довжини l_j , шарнірно з'єднаних між собою, опертий на пружні опори кінцями ланок і стиснутий постійною за довжиною стрижня осьювою силою (рис. 2).

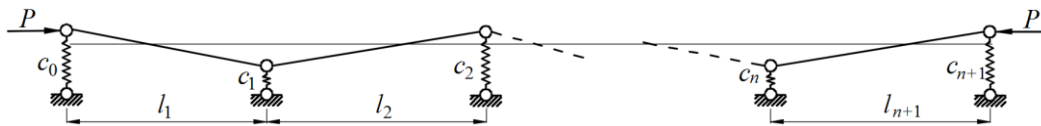


Рис. 2. Розрізний стрижень S^* з абсолютно жорсткими ланками

Мають місце наступні твердження.

Лема 1. Якщо коефіцієнти жорсткості c_j всіх опор, крім, можливо, крайніх, скінченні, всі критичні сили стрижня S^* є простими.

Щоб в цьому переконатися, припустимо, що існують дві форми втрати стійкості, що відповідають деякій критичній силі, і утворимо їх лінійну комбінацію з нульовою осадкою однієї з крайніх опор. При цьому реакція цієї опори дорівнює нулю і відповідна крайня ланка, завантажена двома силами на кінцях, може перебувати в рівновазі, тільки залишаючись горизонтальною, звідки випливає, що і друга опора цієї ланки має нульову осадку і все сказане щодо крайньої ланки залишається справедливим і для сусідньої і може бути повторене для всіх інших ланок. Таким чином, лінійна комбінація двох форм дорівнює нулю, і вони не є лінійно незалежними.

Лема 2. Для будь-якого набору додатних чисел c_0, c_1, \dots, c_{n+1} існують додатні числа c_{1j} і c_{2j} , $j = 1, 2, \dots, n+1$ і P , які однозначно визначаються системою (1), (2), де P_{n+1}^0 слід замінити на P .

Для доведення позначимо через P основну критичну силу стрижня S^* . Подумки розріжемо його на j -й внутрішній опорі, розділивши її на дві пружини з коефіцієнтами жорсткості αc_j і $(1-\alpha)c_j$, $0 < \alpha < 1$, на які спираються відповідно ліва і права частини розрізаного стрижня. При зміні α від 0 до 1 критичні сили цих частин монотонно змінюються в протилежних напрямках, і знайдеться єдине значення α , при якому вони будуть рівні між собою. Їх загальне значення дорівнює P , тому що інакше після усунення розрізу і повернення до стрижня S^* його критична сила була б більшою або меншою P . Зафіксуємо це значення α і прийнемо $c_{2j} = \alpha c_j$, $c_{1,j+1} = (1-\alpha)c_j$. Після цього виконаємо аналогічний розріз будь-якої з решти частин на дві рівностійкі частини, що також будуть мати критичні сили, які дорівнюють P . Продовжуючи цей процес, ми прийдемо до системи $n+1$ ізольованих однопрогонових стрижнів, опертих на пружні опори (як на рис. 1 справа), що мають однакові критичні сили, які дорівнюють P . При цьому на кожному його етапі для чергового номера j однозначно визначається пара чисел c_{2j} і $c_{1,j+1}$, що дають в сумі c_j (рівняння (2)), а рівностійкість однопрогонових стрижнів означає, що знайдені c_{2j} і $c_{1,j+1}$ задовольняють системі рівнянь (1) при P замість P_{n+1}^0 .

Припущення про існування іншого розв'язку c'_{2j} і $c'_{1,j+1}$ системи (1), (2) призводить до протиріччя, тому що розрізання по j -й опорі, описане в попередньому абзаці, призведе до утворення двох частин з різними критичними силами, одна з яких більша, а друга – менша за P (в силу єдиності α , див. вище). Наступні розрізання можуть лише збільшити різницю між найбільшою і найменшою з основних критичних сил утворених ізольованих частин, так що співвідношення (1) не будуть виконані.

Зауваження. Формально лема 2 має чисто математичний зміст і може бути доведена без залучення механічних міркувань, проте таке доведення не відповідає цілям цієї роботи.

Згідно лемі 2 доведено існування і єдиність розв'язку системи, більш широкої, ніж (1), (2), тобто при довільних додатних числах c_0, c_1, \dots, c_{n+1} . Якщо тепер в якості цих чисел взяти такі, які забезпечують значення основної критичної сили стрижня S^* , рівне P_{n+1}^0 , твердження лемі 2 залишиться в силі, звідки випливає справедливості теореми.

Відзначимо, що хоча співвідношення (1), (2) описують всі розв'язки задачі Бубнова в постановці Я. Л. Нудельмана, визначення конкретного розв'язку, що задовольняє будь-яким додатковим умовам, зокрема заданим співвідношенням між коефіцієнтами c_j з різними номерами, не є тривіальним.

Наприклад, у випадку Бубнова

$$l_1 = l_2 = \dots = l_{n+1} = l, \quad c_1 = c_2 = \dots = c_n = c_{кр}, \quad c_{11} = c_{2,n+1} = \infty,$$

розв'язок системи (1), (2) при довільній кількості n проміжних опор має вид

$$c_{1j} = \frac{P_{n+1}^0}{l} \left(1 + \frac{\sin j\varphi}{\sin(j-1)\varphi} \right), \quad c_{2j} = \frac{P_{n+1}^0}{l} \left(1 + 2 \cos \varphi - \frac{\sin(j+1)\varphi}{\sin j\varphi} \right), \quad \varphi = \frac{\pi}{n+1}, \quad (3)$$

в чому можна переконатися прямою підстановкою, причому

$$c_{кр} = c_{2j} + c_{1,j+1} = \frac{4P_{n+1}^0}{l} \cos^2 \frac{\pi}{2(n+1)}. \quad (4)$$

в повній згоді з результатами Бубнова в формі Ф. Блейха [2, 3].

5.2. Оптимальний розв'язок задачі Бубнова. У зв'язку з існуванням нескінченної кількості розв'язків узагальненої задачі Бубнова (нескінченної кількості наборів c_j , які забезпечують однакове максимальне підвищення критичної сили) можна ставити задачу пошуку в цій множині оптимального набору за тим чи іншим критерієм.

Прийемо, що витрати, пов'язані зі встановленням проміжних пружних опор, пропорційні їх жорсткості. Тоді оптимальним буде такий набір опор, для якого сумарна жорсткість $c_1 + c_2 + \dots + c_n$ досягає мінімуму. Прийом, застосований Я. Л. Нудельманом для розв'язання задачі Бубнова, дозволяє просто знайти величини c_j , що забезпечують цей мінімум.

Відома елементарна числова нерівність $(a+b)^2 \geq 4ab$, в якій рівність здійснюється тоді та тільки тоді, коли $a = b$. Тоді

$$a + b \geq \frac{4ab}{a+b} = \frac{4}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}. \quad (5)$$

Якщо підставити сюди c_{1j} і c_{2j} замість a і b , то з урахуванням (1) отримаємо

$$c_{1j} + c_{2j} \geq \frac{4P_{n+1}^0}{l_j},$$

звідки випливає, що при варіюванні c_{1j} і c_{2j} з дотриманням умови (1) ліва частина досягає свого мінімуму, який дорівнює

$$(c_{1j} + c_{2j})_{\min} = \frac{4P_{n+1}^0}{l_j} \text{ при } c_{1j} = c_{2j} = \frac{2P_{n+1}^0}{l_j}. \quad (6)$$

Сумарну жорсткість проміжних опор представимо в наступному вигляді:

$$\sum_{j=1}^n c_j = \sum_{j=1}^n (c_{2j} + c_{1,j+1}) = c_{21} + \sum_{j=2}^n c_{2j} + \sum_{j=2}^n c_{1j} + c_{1,n+1} = c_{21} + c_{1,n+1} + \sum_{j=2}^n (c_{1j} + c_{2j}). \quad (7)$$

Якщо коефіцієнти жорсткості c_{11} і $c_{2,n+1}$ крайніх опор задані, то величини c_{21} і $c_{1,n+1}$, що входять в (7), однозначно визначаються з (1) при $j=1$ і $j=n+1$

$$c_{21} = \frac{1}{\frac{l_1}{P_{n+1}^0} - \frac{1}{c_{11}}}, \quad c_{1,n+1} = \frac{1}{\frac{l_{n+1}}{P_{n+1}^0} - \frac{1}{c_{2,n+1}}}. \quad (8)$$

Тому, як видно з (7), для мінімізації суми $c_1 + c_2 + \dots + c_n$ слід знайти мінімум тільки величини

$$\sum_{j=2}^n (c_{1j} + c_{2j}),$$

який повністю визначається рівностями (6).

Таким чином, оптимальні значення коефіцієнтів жорсткості проміжних опор дорівнюють

$$c_j = c_{2j} + c_{1,j+1} = 2P_{n+1}^0 \left(\frac{1}{l_j} + \frac{1}{l_{j+1}} \right) \text{ при } j = 2, 3, \dots, n-1, \quad (9)$$

$$c_1 = \frac{2P_{n+1}^0}{l_2} + \frac{1}{\frac{l_1}{P_{n+1}^0} - \frac{1}{c_{11}}}, \quad c_n = \frac{2P_{n+1}^0}{l_n} + \frac{1}{\frac{l_{n+1}}{P_{n+1}^0} - \frac{1}{c_{2,n+1}}}, \quad (10)$$

а мінімальна сума

$$\left(\sum_{j=1}^n c_j \right)_{\min} = 4P_{n+1}^0 \sum_{j=2}^n \frac{1}{l_j} + \frac{1}{\frac{l_1}{P_{n+1}^0} - \frac{1}{c_{11}}} + \frac{1}{\frac{l_{n+1}}{P_{n+1}^0} - \frac{1}{c_{2,n+1}}}. \quad (11)$$

У регулярному випадку ($l_1 = l_2 = \dots = l_{n+1} = l$) при жорсткому закріпленні кінців ($c_{11} = c_{2,n+1} = \infty$) отримаємо

$$c_2 = c_3 = \dots = c_{n-1} = \frac{4P_{n+1}^0}{l}, \quad c_1 = c_n = \frac{3P_{n+1}^0}{l}, \quad \left(\sum_{j=1}^n c_j \right)_{\min} = \frac{(4n-2)P_{n+1}^0}{l}. \quad (12)$$

Цікаво порівняти витрати, одержувані в розв'язку Бубнова (4) з мінімальним результатом (12). Згідно (4) при рівних жорсткостях опор

$$\sum_{j=1}^n c_j = \frac{4nP_{n+1}^0}{l} \cos^2 \frac{\pi}{2(n+1)}. \quad (13)$$

В таблиці 1 наведені результати обчислення величини

$$\left(\sum_{j=1}^n c_j \right) \left(\frac{l}{P_{n+1}^0} \right)$$

за формулами (12) і (13) для ряду значень n , а також в рядку 4 – відносний виграш у витратах матеріалу, що отримується при оптимальному розподілі жорсткості між опорами.

Таблиця 1

Зіставлення запропонованого розв'язку з отриманим на основі розв'язку Бубнова

1	Число n проміжних опор	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	Ф-ла (13)	10,24	14,47	18,66	22,81	26,93	31,04	35,12	39,19	43,25
3	Ф-ла (12)	10	14	18	22	26	30	34	38	42
4	$\frac{\text{Рядок 2} - \text{Рядок 3}}{\text{Рядок 2}} \cdot 100$	2,37	3,26	3,54	3,56	3,47	3,34	3,19	3,04	2,89

6 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Як бачимо, максимальна економія при використанні оптимального розподілу жорсткості між опорами становить близько 3,5% і досягається при числі опор від 5 до 7.

Зауваження. В розглянутій постановці при оптимізації не варіювалися жорсткості c_{11} і $c_{2,n+1}$ крайніх опор. Якщо допустити можливість їх змінювання, то до

суми (7) слід додати величину $c_{11} + c_{2,n+1}$, після чого мінімізувати суму $\sum_{j=1}^{n+1} (c_{1j} + c_{2j})$

замість (7). В результаті оптимальні значення коефіцієнтів жорсткості проміжних опор при $j = 1, 2, \dots, n$ визначатимуться співвідношеннями (9), а крайніх опор – співвідношеннями (6) при $j = 1$ і при $j = n + 1$.

7 ВИСНОВОК

Максимальне підвищення критичної сили стиснутого стрижня за рахунок встановлення проміжних пружних опор можливо при різних розподілах жорсткості і, отже, матеріалу між опорами. В роботі знайдено оптимальний за витратами розподіл жорсткості між опорами в припущенні, що витрати пропорційні величині коефіцієнта жорсткості опори. Проведене чисельне порівняння витрат в окремому випадку призматичного стрижня продемонструвало економію від використання запропонованого розподілу, а також близькість відомого регулярного розв'язку Бубнова до оптимального.

Література

1. Бубнов И. Г. Строительная механика корабля, ч. 1 / И. Г. Бубнов. – СПб, 1912. – 330 с.
2. Блейх Ф. Теория и расчет железных мостов / Ф. Блейх. – М.: Гострансиздат, 1931. – 640 с.
3. Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкций / Ф. Блейх. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 544 с.
4. Папкович П. Ф. Труды по строительной механике корабля, т. 4 / П. Ф. Папкович. – Л.: Судпромгиз, 1963. – 552 с.
5. Дольберг М. Д. Об одном обобщении задачи Бубнова / М. Д. Дольберг // Украинский математический журнал, т. 3. – 1951. – №4. – С. 433–448.
6. Нудельман Я. Л. Устойчивость упруго опертых балок / Я. Л. Нудельман // ПММ, т. 3. – 1939. – №4. – С. 33–48.
7. Нудельман Я. Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем / Я. Л. Нудельман. – М.-Л. ГТТИ, 1949. – 176 с.

References

1. Bubnov, I. G. (1912). Stroitel'naya mekhanika korablya, v. 1 S.-Pb, 330.
2. Bleich, F. (1931). Teoriya i raschet zheleznykh mostov. M.: Gostransizdat, 640.
3. Bleich, F. (1959). Ustoychivost' metallicheskih konstruktsiy. M.: GIFML, 544.
4. Papkovich, P. Ph. (1963). Trudy po stroitel'noy mekhanike korablya, v. 4. L.: Sudpromgiz, 552.
5. Dolberg, M. D. (1951). Ob odnom obobshchenii zadachi Bubnova. Ukrainian mathematical magazine, v. 3, 4, 433–448.
6. Nudelman, Ya. L. (1939). Ustoychivost' uprugogo opertykh balok. PMM, v. 3, 4, 33–48.
7. Nudelman, Ya. L. (1949). Metody opredelenia sobstvennykh chastot i kriticheskikh sil dlya sterzhnevyykh sistem, M.-L.: GTTI, 176.
8. Dolberg M.D. (1951) "On a some generalization of the Bubnov problem" Ob odnom obobshchenii

Бекшаєв Сергій Янович

Одеська державна академія будівництва та архітектури, ст. викладач
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029
s.bekshayev@gmail.com
ORCID: 0000-0002-5752-5321

Для посилань:

Бекшаєв С. Я. Про оптимальне рішення задачі Бубнова / С. Я. Бекшаєв // Механіка та математичні методи. – 2019. – №1. – С. 83-91.

For references:

Bekshaev, S. (2019). On the optimal solution of the Bubnov problem. Mechanics and Mathematical Methods, 1, 83–91.

Наукове видання

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ
MECHANICS AND MATHEMATICAL METHODS

Науковий журнал

(українською, російською та англійською мовами)

Відповідальний за випуск: Ковров А. В.

Підписано до друку 29.03.2019 р.
Формат 60×84/8 Папір офісний Гарнітура Times
Цифровий друк. Ум.-друк. арк. 9,65.
Наклад 300 прим. Зам. №19-47Е

Видавець і виготовлювач:
Одеська державна академія будівництва та архітектури
Свідоцтво ДК № 4515 від 01.04.2013 р.
Україна, 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 4.
тел.: (048) 729-85-34, e-mail: rio@ogasa.org.ua

Надруковано в авторській редакції з готового оригінал-макету
в редакційно-видавничому відділі ОДАБА