

ISSN 2618-0650 (Print)  
ISSN 2664-1364 (Online)

---

**Механіка**



**та математичні методи**

---

**Mechanics  
and Mathematical Methods**

**Науковий журнал  
The scientific journal**

**V/2/2023**

УДК 531 : 51-7 (05)  
М55

# МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

Науковий журнал



Засновник і видавець:

**Одеська державна академія будівництва та архітектури**

**Том V  
№2  
2023**

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: Серія КВ №23478–13318 Р від 13.07.2018 р.

Рішення Національної ради №1162 від 26.10.2023 р.,  
протокол №24; ідентифікатор медіа: R30-01810

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
Серія ДК №4515 від 01.04.2013 р.

**М55**      **Механіка та математичні методи** : науковий журнал. — Одеса : ОДАБА, 2023. —  
Том V. — №2. — 112 с.

В науковому журналі публікуються статті і огляди за спеціальностями:

- 111 Математика;
- 112 Статистика;
- 113 Прикладна математика;
- 121 Інженерія програмного забезпечення;
- 122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології;
- 124 Системний аналіз;
- 131 Прикладна механіка;
- 192 Будівництво та цивільна інженерія.

---

**Рекомендовано до друку Вченою радою Одеської державної академії будівництва та архітектури, протокол №4 від 30.11.2023 р.**

---

**Адреса:**    редакція журналу «Механіка та математичні методи»  
Одеська державна академія будівництва та архітектури  
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029

**Телефони:** (048)7234937, (048)7323402, (048)7298563

**E-mail:** mmm@odaba.edu.ua

**Web:** mmm-journal.com.ua

---

УДК 531 : 51-7 (05)  
М55

ISSN 2618-0650 (Print)  
ISSN 2664-1364 (Online)

Одеська державна академія  
будівництва та архітектури, 2023

---

## Склад редакційної колегії:

**Головний редактор:** Ковров А. В., к.т.н., проф., ректор Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

**Заступники головного редактора:**

Крутий Ю. С., д.т.н., проф., професор кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Сур'янінов М. Г., д.т.н., проф., завідувач кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

**Відповідальний секретар:** Кіосак В. А., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

- Бербюк В. Є., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри механіки та морських наук, Технічний університет Чалмерса, Гетеборг, Швеція;
- Ватуля Г. Л., д.т.н., проф., професор кафедри будівельної механіки та гідравліки Українського державного університету залізничного транспорту, Харків, Україна;
- Горик О. В., д.т.н., проф., завідувач кафедри загальнотехнічних дисциплін Полтавської державної аграрної академії, Полтава, Україна;
- Куріазопоулос А., к.т.н., доц., професор кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Кода Е., д.т.н., проф., декан факультету будівництва та інженерії середовища Варшавського природничого університету, Варшава, Польща;
- Кононов Ю. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач відділу теорії керуючих систем інституту прикладної математики та механіки НАН України, Слав'янск, Україна;
- Крутлов В. Є., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна;
- Кучер М. К., д.т.н., проф., завідувач відділу конструкційних матеріалів інституту проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна;
- Лазарева Д. В., к.т.н., доц., завідувачка кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Лесечко О. В., к.ф.-м.н., доц., завідувач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Лещенко Д. Д., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри теоретичної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Ляшенко Т. В., д.т.н., проф., професорка кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Максимович О. В., д.т.н., проф., професорка кафедри зварювального виробництва, діагностики та відновлення металоконструкцій Національного університету "Львівська політехніка", Львів, Україна;
- Отрош Ю. А. д.т.н., проф., начальник кафедри пожежної профілактики в населених пунктах Національного університету цивільного захисту України, Харків, Україна;
- Пастернак Я. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна;
- Пневматікос Н., к.т.н., доц., доцент кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Савченко О. Г., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, Херсон, Україна;
- Трач В. М., д.т.н., проф., завідувач кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування, Рівне, Україна;
- Шваб'юк В. І., д.т.н., проф., професор кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна.

Технічний редактор: Теорло Наталя Анатоліївна, аспірантка

Лінгвістичний радник з англійської мови: Мар'яно Яніна Георгіївна, к.ф.н, доц.,  
завідувачка кафедри іноземних мов

---

## The composition of the editorial board:

**Chief Editor:** Kovrov A., Ph.D., Professor, Rector of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

**Deputy Chief Editor:**

Krutii Yu., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of the Department of Information Technologies and Applied Mathematics of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

Suryaninov M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

**Assistant Editor:** Kiosak V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Higher Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

- Berbyuk V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor in Mechanical Systems, Division of Dynamics, Department of Mechanics and Maritime Sciences Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden;
- Vatulia G., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Structural Mechanics and Hydraulics Department, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine;
- Goryk O., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Basic Technical Disciplines Department, Poltava State Agrarian Academy, Poltava, Ukraine;
- Kyriazopoulos A., Ph.D., Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Koda E., Doctor of Technical Science, Professor, Dean of Construction and Environmental Engineering Faculty, University of Life Sciences, Warsaw, Poland;
- Kononov Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Control-system Theory Division, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Slavyansk, Ukraine;
- Kruglov V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Chair of Methods of Mathematical Physics Odessa I. I. Mechnikov National University, Odessa, Ukraine;
- Kucher M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Materials Division, G. S. Pisarenko Institute for Problems of Strength, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine;
- Lazareva D., Ph.D., Associate Professor, Head of the Department of Information Technologies and Applied Mathematics of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Lesechko O., Ph.D., Associate Professor, Head of Higher Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Leshchenko D., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Lyashenko T., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Information Technology and Applied Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Maksymovych O., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Welding Engineering, Diagnostics and Rebuilding of Metal Structures, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine;
- Otrosh Y., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Civil Protection Service, National University of Civil Defence of Ukraine, Kharkiv, Ukraine;
- Pasternak Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Applied Mathematics and Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine;
- Pnevmatikos N., Ph.D., Associate Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Savchenko O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Algebra, Geometry and Mathematical Analysis Department, Kherson State University, Kherson, Ukraine;
- Trach V., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Bridges and Tunnels, Strength of Materials and Structural Mechanics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine;
- Shvabyuk V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Engineering Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine.

Technical Editor: Natalia Teorlo, Graduate Student

Linguistic Adviser in English language: Yanina Marianko, Ph.D., Associate Professor,  
Head of the Department of Foreign Languages

---

## ЗМІСТ

<b>Кононов Ю. М.</b> Про стійкість обертання вільної системи двох пружно зв'язаних твердих тіл .....	6
<b>Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О.</b> Збурені рухи твердого тіла з рухомою масою в середовищі з опором.....	16
<b>Отрош Ю. А., Майборода Р. І., Рашкевич Н. В., Ромін А. В.</b> Дослідження методик розрахунку прогресуючого обвалення.....	25
<b>М. Surianinov, I. Korneeva</b> Experimental studies of serial road-airport reinforced concrete slab .....	41
<b>Барабаш І. В., Пірогов Д. О.</b> Вплив механохімічної активації композиційного цементу на міцність будівельного розчину.....	51
<b>Е. Shcholokov, Yu. Otrosh, N. Rashkevich, R. Melezhyk</b> Simulation of human evacuation in case of fire using pathfinder software .....	60
<b>Рачинська А. Л., Царенко О. П.</b> Інформаційна технологія оцінювання теплоізоляції багатошарових стін .....	71
<b>Човнюк Ю. В., Чередніченко П. П., Шудра Н. С., Козупиця С. І.</b> Використання моделі балістичного маятника в аналізі перехідних процесів кранових систем .....	80
<b>Сорока М. М.</b> Граничний стан армованих двошарнірних арок двотаврового перерізу .....	92
<b>Васильченко О. В., Данілін О. М., Дармофал Е. А., Луценко Т. О.</b> Оцінка впливу тріщин на вогнестійкість згинальних залізобетонних елементів.....	102

---

## CONTENT

<b>Yu. Kononov</b> On the stability of rotation of a free system of two elasticly connected rigid bodies .....	6
<b>D. Leshchenko, T. Kozachenko</b> Perturbed motions of a rigid body with a movable mass in a resistive medium .....	16
<b>Yu. Otrosh, R. Maiboroda, N. Rashkevich, A. Romin,</b> Research of progressive collapsing calculation methods.....	25
<b>M. Surianinov, I. Korneeva</b> Experimental studies of serial road-airport reinforced concrete slab.....	41
<b>I. Barabash, D. Pirogov</b> Influence of mechanochemical activation of composite cement for the strength of mortar..	51
<b>E. Shcholokov, Yu. Otrosh, N. Rashkevich, R. Melezhyk</b> Simulation of human evacuation in case of fire using pathfinder software.....	60
<b>A. Rachinska, O. Tsarenko</b> Information technology for assessing thermal insulation of multi-layer walls.....	71
<b>Yu. Chovniuk, P. Cherednichenko, N. Shudra, S. Kozupitsa</b> Use of the ballistic pendulum model in the analysis of crane system transients .....	80
<b>M. Soroka</b> Limit state of reinforced double-hinged arches of i-section .....	92
<b>O. Vasilchenko, O. Danilin, E. Darmofal, T. Lutsenko</b> Estimation of influence of cracks in bending reinforced concrete elements on their fire resistance .....	102

УДК 531.36, 531.38

## ПРО СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ ВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДВОХ ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ

Кононов Ю. М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України*

**Анотація.** Виведені рівняння обертання вільної системи двох твердих тіл, з'єднаних пружним сферичним шарніром або шарніром Гука. У припущенні, що центр мас твердих тіл знаходиться на третій головній осі інерції, виписані рівняння збуреного руху розглядуваної механічної системи у вигляді восьми звичайних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. У випадку двох гіроскопів Лагранжа отримано характеристичне рівняння четвертого порядку. На підставі критерія Льенара–Шіпара, записаного в іннорному вигляді, отримані необхідні умови стійкості рівномірних обертань гіроскопів Лагранжа у вигляді системи трьох нерівностей. Проведені аналітичні дослідження цих умови стійкості. Доведено, що перша нерівність завжди виконана. Із третьої нерівності слідує, що коли гіроскопи мають рівні осьові моменти інерції і обертаються з однаковими кутовими швидкостями в різні сторони або відсутня пружність у шарнірі, то характеристичне рівняння має кратне коріння і питання про стійкість вимагає додаткових досліджень. Виписані умови стійкості відносно кінетичних моментів і показано, що старші коефіцієнти цих двох нерівностей додатні звідки випливає, що стійкість завжди буде можлива при досить великих значеннях одного або двох кінетичних моментів. Аналогічні висновки отримані і у випадку шарніра Гука, а також показано, що коли гіроскопи однакові, то характеристичне рівняння розпадається на два рівняння. Перше і друге рівняння описують стійки вільні обертання одного гіроскопа на який діє відновлювальний момент, тільки у одному із рівнянні треба до екваторіального моменту додати момент маси другого гіроскопа. При відсутності пружності у шарнірі з'являється кратні нульові коріння і питання про стійкість вимагає додаткових досліджень.

**Ключові слова:** вільне обертання пов'язаної системи двох твердих тіл, що пружно відновлює сферичний шарнір, шарнір Гука, гіроскопи Лагранжа, рівномірне обертання, асимптотична стійкість.

## ON THE STABILITY OF ROTATION OF A FREE SYSTEM OF TWO ELASTICLY CONNECTED RIGID BODIES

Yu. Kononov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine*

**Abstract.** The equations of rotation of the free system of two rigid bodies connected by an elastic spherical joint or a Hook joint are derived. Assuming that the center of mass of the rigid bodies is located on the third main axis of inertia, the equations of the disturbed motion of the mechanical system under consideration are written in the form of eight ordinary differential equations with periodic coefficients. In the case of two Lagrangian gyroscopes, a characteristic equation of the fourth order is obtained. On the basis of the Lénar-Schipar criterion, written in innor form, the necessary conditions for the stability of uniform rotations of Lagrange gyroscopes in the form of a system of three inequalities are obtained. Analytical studies of these stability conditions were carried out. It is proved that the first inequality is always satisfied. It follows from the third inequality that when gyroscopes have equal axial moments of inertia and rotate with the same angular velocities in different directions or there is no elasticity in the hinge, then the characteristic equation has multiple roots and the question of stability requires additional research. The conditions of stability with respect to kinetic



moments are written and it is shown that the older coefficients of these two inequalities are positive, from which it follows that stability will always be possible with sufficiently large values of one of the two kinetic moments. Similar conclusions were obtained in the case of Hook's hinge, and it was also shown that when the gyroscopes are the same, the characteristic equation breaks down into two equations. The first and second equations describe the steady free rotation of one gyroscope on which the restoring moment acts, only in one of the equations it is necessary to add the mass moment of the second gyroscope to the equatorial moment. In the absence of elasticity in the joint, multiple zero roots appear and the question of stability requires additional research.

**Keywords:** free rotation of a coupled system of two rigid bodies, elastically restoring spherical joint, Hooke's joint, Lagrange gyroscopes, uniform rotation, asymptotic stability.



## 1 ВСТУП

На даний час є велика кількість робіт у яких досліджується динаміка та стійкість руху систем зв'язаних твердих тіл. Досить хороший огляд цих робіт наведено в монографіях [1-4]. Наприклад робота [2] містить 351 посилань. В монографії [1] з єдиних позицій викладено підхід до задач про рух систем твердих тіл. Розглянуто моделі, що допускають різноманітні з'єднання тіл та їх загальні просторові рухи. Однак, задачі про вільний рух систем пов'язаних твердих тіл далекі до свого завершення. Мабуть, одними з перших це були роботи [5-7]. У статті [5] вивчається положення рівноваги двох зв'язаних твердих тіл відносно орбітальної системи координат. Автором визначено всі положення відносної рівноваги та отримано достатні умови стійкості. Модель супутника, представленого двома однаковими несиметричними тілами, пов'язаними невагомим стрижнем, розглядається в статті [6]. У роботі [7] модель супутника представляється системою  $n$  твердих тіл і гіростатів, зв'язаними сферичними шарнірами. Проведено чисельне інтегрування рівнянь руху, що дозволило визначити стійкі відносні положення рівноваги. Наведемо лише роботи, які найближчі до розглядуваної у статті задачі. У загальній постановці задача про рух у середовищі з опором вільної системи двох зв'язаних твердих тіл розглядається в монографії [8]. В ній та у статті [9] наголошується, що в залежності від вибору основного тіла будуть представлені різні види рівняння руху вільної системи твердих тіл. У статті [10] досліджені необхідні умови стійкості рівномірних обертань двох вільних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною, та показано, як з рівнянь для невольної системи гіроскопів слідує рівняння для вільної системи. Робота [11] узагальнює результати статті [10] на випадок  $n$  гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною. Дослідження впливу дисипативного і постійного моментів на стійкість рівномірного обертання двох пружно зв'язаних вільних гіроскопів Лагранжа проведено у роботі [12]. У статті [13] показана можливість стабілізації нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною другим обертаним гіроскопом. В роботі [14] розглядається динаміка і орієнтація твердого тіла при вході в атмосферу, динаміка і управління коаксіальними гіростатами супутників та багато інших оригінальних задач космічної механіки. В [15] представлений уніфікований і добре розроблений підхід до динаміки кутових рухів твердих тіл, що зазнають моментів збурення різної фізичної природи. Детально розглядається дія різних моментів збурень, як зовнішніх (гравітаційний, аеродинамічний, сонячний тиск), так і внутрішніх (завдяки в'язкій рідині в резервуарах, пружним і в'язкопружним властивостям тіла). Новий клас обертань динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки з урахуванням нестационарного збурюючого моменту і повільно змінного з часом відновлюючого моменту вивчається у роботі [16]. В статті [17] розглянуто рух навколо центру мас сфероїда з порожниною, заповненою в'язкою рідиною. Момент сил, що діють на тіло з боку в'язкої рідини в порожнині, визначають за методикою, розробленою в роботах Ф. Л. Черноуська. Асимптотичний підхід дозволяє отримати деякі якісні результати та описати нелінійну еволюцію кутового руху за допомогою спрощених усереднених рівнянь. Слід зазначити, що математичний апарат та методи дослідження, які були розроблені в роботах [14-17], знайшли застосування в багатьох задачах динаміки та стійкості руху систем зв'язаних твердих тіл.

У даній статті продовжуються дослідження стійкості руху вільної системи двох твердих, які були розпочаті в роботах [8-13].

## 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

Розглянемо вільний рух двох пружно зв'язаних твердих тіл  $S_1$  і  $S_2$ . Тілами  $S_1$  і  $S_2$  мають спільну точку  $O_2$ . Запишемо теорему про зміну моменту кількості руху і кількості руху для тіла  $S_i$  ( $i=1,2$ ). Для цього звільнимось від в'язів в точках  $O_2$ . Позначимо через  $\mathbf{R}_1$  і  $\mathbf{L}_1$  головний вектор і головний момент сил реакції в'язі, що діють на тіло  $S_1$  з боку тіла  $S_2$ . Рівняння руху центру мас та рівняння зміни моменту кількості руху тіла  $S_i$  відносно центру мас тіла, точки  $C_i$  мають вигляд [8, 10]:

$$m_i \dot{\mathbf{V}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i+1}; \quad (1)$$

$$(\mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}_i)^\square + \mathbf{c}_i \times m_i \dot{\mathbf{V}}_i = \mathbf{M}_i + \mathbf{L}_i - \mathbf{L}_{i+1} - \mathbf{s}_i \times \mathbf{R}_{i+1} \quad (i=1,2). \quad (2)$$

Тут  $\mathbf{J}_i$  – центральний тензор інерції тіла  $S_i$ ;  $\boldsymbol{\omega}_i$  – кутова швидкість твердого тіла  $S_i$ ;  $m = m_1 + m_2$  – маса всієї системи,  $\mathbf{c}_1 = \overline{C_1 O_2}$ ,  $\mathbf{c}_2 = \overline{O_2 C_2}$ ,  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_3 = 0$ ,  $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_3 = 0$ ; точкою « $\square$ » позначена абсолютна похідна.

Система рівнянь (2), з урахуванням (1), буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_1 \boldsymbol{\omega}_1)^\square &= \mathbf{M}_1 - \mathbf{L}_2 - \mathbf{c}_1 \times (m_2 \mathbf{F}_1 - m_1 \mathbf{F}_2 + m_2 \dot{\mathbf{f}}_2) / m; \\ (\mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega}_2)^\square &= \mathbf{M}_2 + \mathbf{L}_2 - [\mathbf{c}_2 \times (m_2 \mathbf{F}_1 - m_1 \mathbf{F}_2) - \mathbf{c}_2 \times \dot{\mathbf{f}}_2] / m, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\mathbf{f}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times m_1 \mathbf{c}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times m_1 \mathbf{c}_2$ .

Зв'яжемо з кожним із тіл  $S_i$  незмінно базис  $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$  з вершиною в точці  $C_i$ , осі якого направимо по головних осях тензора інерції  $\mathbf{J}_i$  і введемо нерухомий базис  $\mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^0$ , вектор  $\mathbf{e}_3^0$  якого протилежний вектору прискорення вільного падіння. Будемо вважати, що треті головні осі інерції проходять для тіл  $S_1$  і  $S_2$  через точку  $O_2$ , тобто будемо вважати, що центр мас тіл  $S_i$  лежить на цих осях. Нехай тверді тіла  $S_1$  і  $S_2$  пов'язані в точці  $O_2$  пружним відновлювальним сферичним шарніром  $\mathbf{L}_2 = -k \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 / (|\mathbf{c}_1| |\mathbf{c}_2|)$ ,  $k \geq 0$ .

Векторні рівняння (3) в проєкціях на осі рухомого базису  $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$  приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} A_1' \dot{p}_1 + (C_1 - B_1') r_1 q_1 + \mu \left[ (\dot{p}_2 - r_2 q_2) \alpha_{22}^{12} - (\dot{q}_2 + r_2 p_2) \alpha_{21}^{12} + (p_2^2 + q_2^2) \alpha_{23}^{12} \right] &= -k \alpha_{32}^{21}; \\ B_1' \dot{q}_1 - (C_1 - A_1') r_1 p_1 - \mu \left[ (\dot{p}_2 - r_2 q_2) \alpha_{12}^{12} - (\dot{q}_2 + r_2 p_2) \alpha_{11}^{12} + (p_2^2 + q_2^2) \alpha_{13}^{12} \right] &= -k \alpha_{31}^{21}; \\ C_1 \dot{r}_1 + (B_1' - A_1') p_1 q_1 &= 0; \\ A_2' \dot{p}_2 + (C_2 - B_1') r_2 q_2 + \mu \left[ (\dot{p}_1 - r_1 q_1) \alpha_{22}^{21} - (\dot{q}_1 + r_1 p_1) \alpha_{21}^{21} + (p_1^2 + q_1^2) \alpha_{23}^{21} \right] &= -k \alpha_{32}^{21}; \\ B_2' \dot{q}_2 - (C_2 - A_2') \omega_{02} p_2 - \mu \left[ (\dot{p}_1 - r_1 q_1) \alpha_{12}^{21} - (\dot{q}_1 + r_1 p_1) \alpha_{11}^{21} + (p_1^2 + q_1^2) \alpha_{13}^{21} \right] &= -k \alpha_{31}^{21}; \\ C_2 \dot{r}_2 + (B_2' - A_2') p_2 q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут  $p_i, q_i, r_i$  – проєкції вектора кутової швидкості  $\boldsymbol{\omega}_i$  на вісі  $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$ ;  $A_1' = A_1 + m_1 m_2 c_1^2 / m$ ;  $B_1' = B_1 + m_1 m_2 c_1^2 / m$ ;  $A_2' = A_2 + m_2 m_1 c_2^2 / m$ ;  $B_2' = B_2 + m_2 m_1 c_2^2 / m$ ;

$\mu = m_1 m_2 c_1 c_2 / m$ ;  $\alpha_{\mu k}^{ij} = \mathbf{e}_\mu^i \cdot \mathbf{e}_k^j$  – напрямні косинуси. Коефіцієнти  $\alpha_{\mu k}^{ij}$  можна виразити через  $\alpha_{\mu\sigma}^{i0}$  і  $\alpha_{\mu\sigma}^{j0}$  наступним чином  $\alpha_{\mu k}^{ij} = \sum_{\sigma=1}^3 \alpha_{\mu\sigma}^{i0} \alpha_{k\sigma}^{j0}$  [8].

До системи рівнянь (4) потрібно додати рівняння для напрямних косинусів [8]:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{11}^{i0} &= -q_i \alpha_{31}^{i0} + r_i \alpha_{21}^{i0}; & \dot{\alpha}_{21}^{i0} &= p_i \alpha_{31}^{i0} - r_i \alpha_{11}^{i0}; \\ \dot{\alpha}_{12}^{i0} &= -q_i \alpha_{32}^{i0} + r_i \alpha_{22}^{i0}; & \dot{\alpha}_{22}^{i0} &= p_i \alpha_{32}^{i0} - r_i \alpha_{12}^{i0}; \\ \dot{\alpha}_{13}^{i0} &= -q_i \alpha_{33}^{i0} + r_i \alpha_{23}^{i0}; & \dot{\alpha}_{23}^{i0} &= p_i \alpha_{33}^{i0} - r_i \alpha_{13}^{i0}; \\ \dot{\alpha}_{31}^{i0} &= -p_i \alpha_{21}^{i0} + q_i \alpha_{11}^{i0}; & \dot{\alpha}_{32}^{i0} &= -p_i \alpha_{22}^{i0} + q_i \alpha_{12}^{i0}; \\ \dot{\alpha}_{33}^{i0} &= -p_i \alpha_{23}^{i0} + q_i \alpha_{13}^{i0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Система (4), (5) допускає розв'язки:

$$\begin{aligned} p_i &= q_i = 0; & r_i &= \omega_{0i}; \\ \alpha_{11}^{i0} &= \cos \omega_{0i} t; & \alpha_{12}^{i0} &= \sin \omega_{0i} t; & \alpha_{13}^{i0} &= 0; \\ \alpha_{21}^{i0} &= -\sin \omega_{0i} t; & \alpha_{22}^{i0} &= \cos \omega_{0i} t; & \alpha_{23}^{i0} &= 0; & \alpha_{31}^{i0} &= 0; & \alpha_{32}^{i0} &= 0; & \alpha_{33}^{i0} &= 1, \end{aligned}$$

які відповідають рівномірним обертанням твердих тіл  $S_i$  ( $i=1,2$ ) з кутовими швидкостями  $\omega_{0i}$  навколо вертикалі.

Запишемо рівняння (4), (5) для збуреного руху, зберігаючи для змінних їхні попередні позначення:

$$\begin{aligned} A'_1 \dot{p}_1 + (C_1 - B'_1) \omega_{01} q_1 + \mu \left[ (\dot{p}_2 - \omega_{02} q_2) \alpha_{22}^{12} - (\dot{q}_2 + \omega_{02} p_2) \alpha_{21}^{12} \right] &= -k \alpha_{23}^{10}; \\ B'_1 \dot{q}_1 - (C_1 - A'_1) \omega_{01} p_1 - \mu \left[ (\dot{p}_2 - \omega_{02} q_2) \alpha_{12}^{12} - (\dot{q}_2 + \omega_{02} p_2) \alpha_{11}^{12} \right] &= -k \alpha_{13}^{10}; \\ A'_2 \dot{p}_2 + (C_2 - B'_1) \omega_{02} q_2 + \mu \left[ (\dot{p}_1 - \omega_{01} q_1) \alpha_{22}^{21} - (\dot{q}_1 + \omega_{01} p_1) \alpha_{21}^{21} \right] &= -k \alpha_{23}^{20}; \\ B'_2 \dot{q}_2 - (C_2 - A'_2) \omega_{02} p_2 - \mu \left[ (\dot{p}_1 - \omega_{01} q_1) \alpha_{12}^{21} - (\dot{q}_1 + \omega_{01} p_1) \alpha_{11}^{21} \right] &= -k \alpha_{13}^{20}; \\ \dot{\alpha}_{13}^{i0} &= \omega_{0i} \alpha_{23}^{i0} - q_i; & \dot{\alpha}_{23}^{i0} &= -\omega_{0i} \alpha_{13}^{i0} + p_i \quad (i=1,2). \end{aligned} \quad (6)$$

Тут  $\alpha_{11}^{ik} = \cos \varphi_{ki}$ ;  $\alpha_{12}^{ik} = -\sin \varphi_{ki}$ ;  $\alpha_{21}^{ik} = \sin \varphi_{ki}$ ;  $\alpha_{22}^{ik} = \cos \varphi_{ki}$ ;  $\varphi_{ki} = \varphi_k - \varphi_i$ ;  $\varphi_i = \omega_{0i} t$ ; ( $i, k = 1, 2$ ).

Таким чином, отримані вісім звичайних диференціальних рівнянь (6) із періодичними коефіцієнтами описують збурений рух у середовищі з опором системи двох пружно пов'язаних твердих тіл у припущенні, що їх центри мас знаходяться на третій головній осі інерції. Через динамічну ( $B'_i \neq A'_i$ ) несиметрію дослідження цих рівнянь стає досить складним. У цьому зв'язку проведемо далі аналітичні дослідження для двох гіроскопів Лагранжа ( $B'_i = A'_i$ ).

### 3 УМОВИ СТІЙКОСТІ РІВНОМІРНИХ ОБЕРТАНЬ ДВОХ ГІРОСКОПІВ ЛАГРАНЖА

Перейдемо до нових змінних  $p'_i, q'_i, \alpha_{13}^i, \alpha_{23}^i$  [8, 11]:



$$p'_i = p_i \sin \varphi_i + q_i \cos \varphi_i; \quad q'_i = p_i \cos \varphi_i - q_i \sin \varphi_i;$$

$$\alpha_{13}^i = \alpha_{13}^{0i} \sin \varphi_i + \alpha_{23}^{0i} \cos \varphi_i; \quad \alpha_{23}^i = \alpha_{13}^{0i} \cos \varphi_i - \alpha_{23}^{0i} \sin \varphi_i.$$

Нехай  $\Omega_i = q'_i - ip'_i$ ,  $\gamma_i = \alpha_{13}^i + i\alpha_{23}^i$  ( $i=1,2$ ), тоді система рівнянь (6) у нових змінних може бути записана наступним чином:

$$\begin{aligned} A'_1 \ddot{\gamma}_1 + (i\tilde{C}_1 + k)\dot{\gamma}_1 + \mu\dot{\gamma}_2 &= 0; \\ A'_2 \ddot{\gamma}_2 + (i\tilde{C}_2 + k)\dot{\gamma}_2 + \mu\dot{\gamma}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\tilde{C}_i = C_i \omega_{0i}$ .

Представивши шукані функції у вигляді  $e^{i\sigma t}$ , запишемо характеристичне рівняння збуреного руху (10):

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu\lambda^2 \\ \mu\lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

або

$$a_4 \sigma^4 + b_3 \sigma^3 - a_2 \sigma^2 - b_1 \sigma + a_0 = 0, \quad (9)$$

де  $F_i = A'_i \lambda^2 + (i\tilde{C}_i + D_i)\lambda + k$ ;

$$a_4 = A'_1 A'_2 - \mu^2 = (A_1 + c_1^2 m_1)(A_2 + c_2^2 m_2) + A_2 s_1^2 m_2 > 0;$$

$$a_3 = 0; \quad b_3 = A'_1 \tilde{C}_2 + A'_2 \tilde{C}_1;$$

$$a_2 = -\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + (A'_1 + A'_2)k; \quad b_2 = 0;$$

$$a_1 = 0; \quad b_1 = (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2)k;$$

$$a_0 = k^2; \quad b_0 = 0.$$

Для того, щоб всі нулі рівняння (9) були різні і лежали на дійсній осі, згідно критерію Льєнара–Шіпара, записаного в іннорному вигляді [18, с. 39], необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, яка складена з коефіцієнтів цього рівняння, була іннорно-позитивною, тобто щоб були позитивно визначені матриці  $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5$  і  $\Delta_7$ :

$$I_1 = |\Delta_1| = 4a_4 > 0;$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & b_3 & -a_2 \\ 0 & 4a_4 & 3b_3 \\ 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 \end{vmatrix} = a_4 \tilde{I}_3 > 0; \quad (10)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 \\ 0 & 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 \\ 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & 0 \\ 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_4 \tilde{I}_5 > 0; \quad (11)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & -b_1 \\ 0 & 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & -b_1 & 0 \\ 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & -b_1 & 0 & 0 \\ 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & -b_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_4 b_1 \tilde{I}_7 > 0. \quad (12)$$

Так як  $a_4 > 0$ , то  $I_1 > 0$  і стійкість рівномірних обертань двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа визначається трьома нерівностями (10)–(12).

Із нерівності (12) слідує, що коли  $\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 = 0$  або  $k = 0$  ( $b_1 = 0$ ) маємо  $I_7 = 0$  і рівняння (9) має кратні кореня. В цьому разі умови стійкості потребують додаткових досліджень. Випадок  $\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 = C_1 \omega_{01} + C_2 \omega_{02} = 0$  означає, що тверди тіла повині обертатися в різні сторони з однаковим по моделю кінетичними моментами.

Запишемо умови стійкості відносно коефіцієнта пружності сферичного шарніру  $k$ :

$$\tilde{I}_{31}k + \tilde{I}_{30} > 0; \quad (13)$$

$$\tilde{I}_{53}k^3 + \tilde{I}_{52}k^3 + \tilde{I}_{51}k + \tilde{I}_{50} > 0; \quad (14)$$

$$(\tilde{I}_{73}k^3 + \tilde{I}_{72}k^2 + \tilde{I}_{71}k + \tilde{I}_{70})(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2)k^2 > 0, \quad (15)$$

де

$$\tilde{I}_{31} = 8(A'_1 + A'_2)a_4 > 0; \tilde{I}_{30} = (\tilde{C}_1 A'_2 + \tilde{C}_2 A'_1)^2 + 2(\tilde{C}_1^2 A_2'^2 + \tilde{C}_2^2 A_1'^2) + 8\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \mu^2 > 0; \quad (16)$$

$$\tilde{I}_{53} = 8[(A'_1 - A'_2)^2 + 4\mu^2]a_4 > 0;$$

$$\tilde{I}_{73} = 4\left\{(A'_1 - A'_2)\left[(A_1'^2 - 5A'_1 A'_2 - 4A_2'^2)\tilde{C}_1 + (4A_1'^2 + 5A'_1 A'_2 - A_2'^2)\tilde{C}_2\right] + 20(A'_1 + A'_2)\mu^2\right\}a_4.$$

Інші коефіцієнти не наведено через їхню громіздкість.

Із (16) випливає, що нерівність (13) і відповідно (10) завжди виконані. Таким чином, необхідні умови стійкості рівномірних обертань двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа визначаються двома нерівностями (11), (12) і відповідно (14), (15).

Умови стійкості відносно кінетичних моментів  $\tilde{C}_i$  ( $i = 1, 2$ ) будуть мати вигляд:

$$I_{i54}\tilde{C}_i^4 + I_{i53}\tilde{C}_i^3 + \dots + I_{i51}\tilde{C}_i + I_{i50} > 0; \quad (17)$$

$$(I_{i75}\tilde{C}_i^5 + I_{i74}\tilde{C}_i^4 + \dots + I_{i71}\tilde{C}_i + I_{i70})(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2)k^2 > 0. \quad (18)$$

Тут

$$I_{154} = 2A_2'^2(\tilde{C}_2^2 + 3A_2'k) > 0; I_{254} = 2A_1'^2(\tilde{C}_1^2 + 3A_2'k) > 0; \quad (19)$$

$$I_{175} = A_2'^2(\tilde{C}_2^2 + 4A_2'k) > 0; I_{275} = A_2'^2(\tilde{C}_2^2 + 4A_2'k) > 0.$$

Із нерівностей (19) слідує, що старші коефіцієнти нерівностей (17), (18) додатні звідки випливає, що стійкість завжди буде можлива при досить великих значеннях одного або двох кінетичних моментів.

У випадку шарнірів Гука, згідно роботи [8], треба покласти  $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ . У цілому разі умови стійкості (11), (12) відносно квадрата кутової швидкості  $x = \omega_0^2$  мають вигляд:

$$I_{53}x^3 + I_{52}x^2 + I_{51}x + I_{50} > 0; \quad (20)$$

$$(I_{73}x^3 + I_{72}x^2 + I_{71}x + I_{70})(C_1 + C_2)k^2\omega_0^2 > 0, \quad (21)$$

де

$$I_{53} = 2C_1^2C_2^2 \left[ (C_1A_2' - C_2A_1')^2 + 4\mu^2C_1C_2 \right] a_4 > 0; \quad (22)$$

$$I_{73} = 2(C_1 + C_2)C_1^2C_2^2 \left[ (C_1A_2' - C_2A_1')^2 + 4\mu^2C_1C_2 \right] > 0. \quad (23)$$

Із нерівностей (22), (23) випливає, що старші коефіцієнти нерівностей (20), (21) додатні і стійкість завжди буде можлива при досить великій кутовій швидкості.

З характеристичного рівняння (13) слідує, що коли гіроскопи однакові ( $A_2' = A_1'$ ,  $C_2 = C_1$ ,  $m_2 = m_1$ ,  $c_2 = c_1$ ) і обертаються з однаковими кутовими швидкостями ( $\omega_{02} = \omega_{01} = \omega_0$ ), то  $F_2 = F_1$  і це рівняння розпадається на два рівняння

$$A_1\sigma^2 + C_1\omega_0\sigma - k = 0 \text{ і } (A_1 + m_1c_1^2)\sigma^2 + C_1\omega_0\sigma - k = 0.$$

Слід зазначити, що перше і друге рівняння при  $k \neq 0$  описують стійкі обертання одного вільного гіроскопа на який діє відновлювальний момент, тільки у другому рівнянні до екваторіального моменту інерції додається момент інерції маси другого гіроскопа. При відсутності пружності у шарнірі ( $k = 0$ ) з'являються кратні нульові коріння і питання про стійкість вимагає додаткових досліджень.

#### 4 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

Виведені рівняння обертання вільної системи двох твердих тіл, з'єднаних пружним сферичним шарніром або шарніром Гука. У припущенні, що центр мас твердих тіл знаходиться на третій головній осі інерції, виписані рівняння збуреного руху механічної системи у вигляді восьми звичайних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. У випадку двох гіроскопів Лагранжа отримано характеристичне рівняння четвертого порядку. На підставі критерія Льєнара-Шіпара, записаного в іннормному вигляді, отримані умови стійкості рівномірних обертань гіроскопів Лагранжа у вигляді системи трьох нерівностей. Проведені аналітичні дослідження цих умов стійкості. Доведено, що перша нерівність завжди виконана. Із третьої нерівності слідує, що коли гіроскопи мають рівні осьові моменти інерції і обертаються з однаковими кутовими швидкостями в різні сторони або відсутня пружність у шарнірі, то характеристичне рівняння має кратне коріння і питання про стійкість вимагає додаткових досліджень. Виписані умови стійкості відносно кінетичних моментів і показано, що старші коефіцієнти цих двох нерівностей додатні, звідки випливає, що стійкість завжди буде можлива при досить великих значеннях одного або двох кінетичних моментів. Аналогічні висновки отримані і у випадку шарніра Гука, а також показано, що коли гіроскопи однакові, то характеристичне рівняння розпадається на два рівняння. Перше і друге рівняння описують стійкі вільні обертання одного гіроскопа, на який діє відновлювальний момент, тільки у одному із рівнянь треба до екваторіального моменту додати масу другого гіроскопа. При

відсутності пружності у шарнірі з'являється кратний нульовий корінь, і питання про стійкість вимагає додаткових досліджень.

Дослідження виконані в рамках програмно-цільової та конкурсної тематики НАН України № 2-19-П (науково дослідна робота за темою ВБ-15-18-21/479) і були частково підтримані грантом від Фонду Сімонса (Нагорода 1160640, Президентські дискреційні гранти на підтримку України, одержувач Кононов Ю.М.).

## Література

1. Болграбская И. А. Динамика систем связанных твёрдых тел / И. А. Болграбская, М. Е. Лесина, Д. А. Чебанов. – Серия “Задачи и методы: математика, механика, кибернетика”. – ИПММ НАН Украины, Том 9. К.: Наукова Думка.– 2012.– 395 с.
2. Bauchau O. A. Flexible Multibody Dynamics / O. A. Bauchau.– Springer. – 2011.– 730 p.
3. Chaudhary H. Dynamics and Balancing of Multibody Systems / H. Chaudhary, S.K. Saha.– Springer. – 2009.– 176 p.
4. Wittenburg J. Dynamics of Multibody Systems / Wittenburg J.– Springer. – 2008.– 223 p.
5. Сарычев В. А. Положение относительного равновесия двух тел, соединенных сферическим шарниром, на круговой орбите / В. А. Сарычев // Космич. исслед.– 1967.–Т.5, № 3.– С. 360–364.
6. Robe T. R. Stability of two tethered unsymmetrical Earth-Pointing bodies / T.R. Robe // AIAA Journal.–1968.– V.6, № 12.– P. 2282–2288.
7. Wittenburg J. Die numerische bestimmung Stabiler Gleichgewichtslagen von Vielkorper-Satellitensystem / J. Wittenburg // Ingh. –Arch.– 1970.– V.39, № 3.– P. 201–208.
8. Савченко А. Я. Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел / А. Я. Савченко, И. А. Болграбская, Г. А. Кононыхин. К.: Наук. думка. 1991. – 166 с.
9. Савченко А. Я. Устойчивость равномерных вращений свободной связки  $n$  гироскопов Лагранжа / А. Я. Савченко, И. А. Болграбская // Математическа физика и нелинейная механика.– 1984.– Т. 36, № 2.– С. 9–14.
10. Кононов Ю. Н. О движения системы двух твердых тел с полостями, содержащими жидкость / Ю. Н. Кононов // Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр. – 1997. – Вып. 29. – С. 76– 85.
11. Кононов Ю. Н. Об устойчивости движения системы  $n$  связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость / Ю. Н. Кононов // Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр. – 2006. – Вып. 36. – С. 75– 82.
12. Кононов Ю. Н. Вплив дисипативного і постійного моментів на стійкість рівномірного обертання двох пружно зв'язаних вільних гіроскопів Лагранжа / Ю. Н. Кононов, Я. І. Святенко / Праці інституту прикл. матем. і мех. НАНУ.– 2019. – 33. – С. 132 – 141.
13. Kononov Yu. M. Stabilization of spinning Lagrange gyroscope filled with ideal fluid in a resisting medium / Yu. M. Kononov, Ya. I. Sviatenko // Int. Appl. Mech. – 2023. – 59, № 2. – P. 207 – 217.
14. Aslanov V. S. Rigid Body Dynamics for Space Applications / Aslanov V. S. – Butterworth Heinemann, Oxford.– 2017.– 410 p.
15. Chernousko F. L. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass / F. L. Chernousko, L. D. Akulenko, D. D. Leshchenko. Springer.– 2017.– 260 p.
16. Leshchenko D. D. Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques / D. D. Leshchenko, S. V. Ershkov, T. A. Kozachenko // Nonlinear Dyn. – 2021.– P. 1517–1528. DOI: 10.1007/s11071-020-06195-0.
17. Leshchenko D. Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque / D. Leshchenko, S. Ershkov, T. Kozachenko // J. Appl. Comput. Mech. – 2022. – 8, N 3 – P. 1023–1031.
18. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем / Джури Э. М.: Наука.– 1979.– 304 С.

## References

1. Bolgrabskaya, I. A., Lesina, M.E., Chebanov, D. A. (2012). Dinamika sistem svyazannyh tvyordyh tel . Seriya “Zadachi i metody: matematika, mekhanika, kibernetika”. IPMM NAN Ukrainy, Tom 9. K.: Naukova Dumka, 395 [in Ukraine].
2. Bauchau, O. A. (2011). Flexible Multibody Dynamics. Springer, 730.
3. Chaudhary, H., Saha, S. K. (2009). Dynamics and Balancing of Multibody Systems. Springer, 176.
4. Wittenburg, J. (2008). Dynamics of Multibody Systems. Springer, 223.
5. Saryichev, V. A.(1967). Polozhenie odnositel'nogo ravnovesiya dvuh tel, soedinennykh sfericheskimi sharnirov, na krugovoy orbite. Kosmich. issled.V.5, № 3, 360–364 [in Russian].
6. Robe, T. R. (1968). Stability of two tethered unsymmetrical Earth-Pointing bodies. AIAA Journal. 6, № 12, 2282–2288.
7. Wittenburg, J. (1970). Die numerische bestimmung Stabiler Gleichgewichtslagen von Vielkorper-Satellitensystem. Ingh. –Arch. 39, № 3, 201–208.
8. Savchenko, A. Ya., Bolgrabskaya, I. A., Kononyhin, G. A. (1991). Ustoychivost' dvizheniya sistem svyazannyh tvyordyh tel. K.: Nauk. Dumka, 166 [in Ukraine].
9. Savchenko, A. Ya., Bolgrabskaya, I. A. (1984). Ustoychivost' ravnomernykh vrascheniy svobodnoy svyazki giroskopov Lagranzha. Matematicheskaya fizika i nelineynaya mehanika. 1984. 36, № 2, 9–14 [in Ukraine].
10. Kononov, Yu. M. (1997). O dvizheniya sistemyi dvuh tverdyyh tel s polostyami, sodержaschimi zhidkost. Mehanika tverdogo tela. Mezhved. sb. nauch. tr. 29, 76– 85 [in Ukraine].
11. Kononov, Yu. M. (2006). Ob ustoychivosti dvizheniya sistemyi  $n$  svyazannykh tverdyyh tel s polostyami, sodержaschimi zhidkost. Mehanika tverdogo tela. Mezhved. sb. nauch. tr. 36, 75–82 [in Ukraine].
12. Kononov, Yu. M., Sviatenko, Ya. I. (2019). Vplyv dysypatyvnoho i postiinoho momentiv na stiikist rivnomirnoho obertannia dvokh pruzhno zviazanykh vilnykh hiroskopiv Lahranzha. Pratsi instytutu prykl. matem. i mekh. NANU. 33, 132–141 [in Ukraine].
13. Kononov, Yu. M., Sviatenko, Ya. I. (2023). Stabilization of spinning Lagrange gyroscope filled with ideal fluid in a resisting medium. Int. Appl. Mech.59, № 2, 207–217.
14. Aslanov, V. S. (2017). Rigid Body Dynamics for Space Applications. Butterworth Heinemann, Oxford, 410.
15. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer, 260.
16. Leshchenko, D. D., Ershkov, S. V., Kozachenko, T.A. (2021). Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques. Nonlinear Dyn. 1517–1528. DOI: 10.1007/s11071-020-06195-0.
17. Leshchenko, D., Ershkov, S. V., Kozachenko, T. (2022). Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque. J. Appl. Comput. Mech.8, N 3. 1023–1031.
18. Jury, E. I. (1979). Innory i ustoychivost' dinamicheskikh sistem. M.: Nauka, 1979, 304 [in Ukraine].

### Кононов Юрій Микитович

Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України  
д.ф.-м.н., професор  
вул. Добровольського, 1, Слов'янськ, Україна, 84100  
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-1609-0253

### Для посилань:

Кононов Ю. М. Про стійкість обертання вільної системи двох пружно зв'язаних твердих тіл. Механіка та математичні методи, 2023. Т. 5. № 2. С. 6–15.

### For references:

Yu. Kononov. (2023). On the stability of rotation of a free system of two elastically connected rigid bodies. Mechanics and Mathematical Methods. 5 (2). 6–15.



УДК 531.381

## ЗБУРЕНІ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА З РУХОМОЮ МАСОЮ В СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ

Лещенко Д. Д.<sup>1</sup>, Козаченко Т. О.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Анотація.** Досліджуються різні випадки руху твердого тіла з внутрішніми степенями вільності. Розглянуто рухи тіла, яке містить лінійні пружні та дисипативні елементи. Зокрема, досліджені рухи тіла, що несе маси, з'єднані з ним за допомогою пружних сил з лінійним демпфіруванням. Ця ситуація моделює наявність нежорстко закріплених деталей на космічному апараті, що відповідно чинить суттєвий вплив на його рух відносно центра мас.

Розвиток досліджень задач динаміки твердих тіл навколо його центра мас йде в напрямку врахування того факту, що ці тіла не є ідеально твердими, а досить близькими до ідеальних моделей. Необхідність аналізу впливу різних неідеальностей обумовлена зростанням вимог до точності розв'язань практичних задач космонавтики, гіроскопії, тощо. Вплив неідеальностей може бути виявленим за допомогою асимптотичних методів нелінійної механіки (усереднення, сингулярних збурень та ін.). Він зводиться до наявності додаткових збурюючих моментів в рівняннях руху Ейлера деякого фіктивного твердого тіла. У [1, 6] одержано векторне рівняння, яке описує зміну вектора  $\bar{\omega}$  в системі координат, пов'язаної з тілом. Функція  $\bar{\Phi}(\bar{\omega})$  є поліномом, що містить четвертий і п'ятий степені  $\bar{\omega}$ .

Ряд робіт присвячено аналізу різних проблем динаміки космічних апаратів, що містять внутрішні маси. Вивчались питання стійкості та нестійкості, а також проблеми керування та стабілізації рухів. В космічному польоті іноді виникає потреба заглушити хаотичне обертання, яке виникає з будь яких причин. Для цього використовують переміщення рухомих мас.

Ми досліджуємо задачу про рух в середовищі з опором динамічно симетричного твердого тіла з рухомою точковою масою, яка з'єднана з тілом пружною в'яззю за наявності в'язкого тертя. За допомогою асимптотичного підходу рівняння руху тіла з масою були спрощені. Нелінійна еволюція кутових рухів тіла проаналізована за допомогою усереднених рівнянь та чисельного інтегрування. Побудовано графіки величин квадратів екваторіальної та осьової компонент кутової швидкості. Результати, які представлені в цій роботі дають можливість аналізувати кутові рухи штучних супутників під дією малих збурюючих моментів.

**Ключові слова:** тверде тіло, середовище з опором, рухома маса.

## PERTURBED MOTIONS OF A RIGID BODY WITH A MOVABLE MASS IN A RESISTIVE MEDIUM

D. Leshchenko<sup>1</sup>, T. Kozachenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract.** Various cases of the rigid body motion having internal degrees of freedom was studied. In particular, the motions of a body carrying masses which are attached to it by means of elastic forces with linear damping was investigated. This situation simulates the presence of loosely fixed components on a spacecraft, having a significant influence on its motion about its center of mass.

The development of research in dynamics of rigid body motions about its center of mass goes in the direction of taking into account the fact that these bodies are not perfectly rigid but are rather close to perfect models. The need for the analysis of the influence of various deviations from perfectness is caused by growing accuracy requirements in space exploration, gyroscopy, etc. The influence of imperfections can be revealed using asymptotic methods of nonlinear mechanics (averaging, singular perturbations and others). This influence reduces the additional terms in the Euler equations of motion of a fictitious rigid body. In the space flight, there arises sometimes a necessity to suppress the chaotic



rotation that occurs for one reason to another. To this end, the relative displacements of movable masses are used.

A number of works are devoted to the analysis of various problems of the dynamics of space vehicles containing internal masses. The issues of stability and instability and the problems of control and stabilization of motions have been studied. In [1, 6] vector equation which describes the change of vector  $\bar{\omega}$  in the system of coordinates connected with the body was obtained. Function  $\bar{\Phi}(\bar{\omega})$  in the right-hand side of this equation is a polynomial containing the fourth and fifth powers of  $\bar{\omega}$ .

We study the problem of the motion in a resistive medium of a dynamically symmetric rigid body carrying a movable point mass, connected with the body by an elastic coupling in the presence of viscous friction. By means of asymptotic approach equations of motion of body with mass are simplified. Nonlinear evolution of angular motions of the body is analyzed using averaged equations and numerical integration. Results summed up in this paper make it possible to analyze angular motions of artificial satellites under the influence of small internal perturbation torques.

**Keywords:** rigid body, resistive medium, movable mass.

## 1 ВСТУП

На рух штучного супутника відносно центра мас діють моменти, які обумовлені рухом деяких мас всередині тіла. Ці рухи можуть бути обумовленими різними причинами: наявністю в тілі обертових мас (роторів, гіроскопів), а також переміщенням екіпажу в випадку пілотованого апарата.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Велика кількість робіт, присвячена дослідженню обертання твердого тіла з рухомими внутрішніми масами з пружними та дисипативними елементами. Огляд робіт з цієї тематики представлений в [1-6].

В роботах [1, 6] розглянуті деякі випадки руху твердого тіла, які містять рухомі внутрішні маси, з'єднані з тілом за допомогою пружних та дисипативних елементів.

В книзі [7] виведені рівняння руху твердої оболонки з коливними точковими масами. Деякі якісні аспекти задачі про рух навколо нерухомої точки твердого тіла з рухомою масою досліджувались в [8]. В [9] розглядається тверде тіло з нерухомою точкою, в якому вздовж прямолінійного жолоба, який проходить через цю точку, здійснює коливання прикріплена до пружини точка з заданою масою.

В статтях [10-12] розглядається рух твердого тіла, до якого в точці нерухомо зв'язаною з тілом, прикріплена за допомогою пружинної в'язі з квадратичним тертям рухома маса. Вивчається рух динамічно симетричного твердого тіла зі сферичною порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, несучого рухома масу, яка прикріплена за допомогою пружної в'язі з в'язким тертям на осі симетрії. Розглядається рух навколо центра інерції близькою до динамічно сферичного твердого тіла, яке містить в'язкопружний елемент.

В роботі [13] оцінено вплив рухомих точкових мас (лінійних осциляторів), які здійснюють коливання вздовж осі симетрії вовчка або вздовж осей, ортогональних осі симетрії, на стійкість рівномірного руха вовчка Лагранжа.

В роботах [10, 14, 15] розв'язана задача про оптимальну за швидкістю стабілізацію вільного твердого тіла з рухомою масою, яка з'єднана з тілом в'язкопружним чином. Досліджена задача про оптимальне за швидкістю гальмування твердого тіла зі сферичною порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, та рухомою точковою масою, з'єднаною сильним демпфером з корпусом. Розглянута задача про оптимальне за швидкістю гальмування в середовищі з опором твердого тіла з рухомою точковою масою, з'єднаною демпфером з корпусом. В [16, 17] досліджена задача квазіоптимального за швидкістю керування обертань динамічно симетричного тіла з в'язкопружним елементом в середовищі з опором. Розглянута задача квазіоптимального за швидкістю гальмування обертань динамічно симетричного твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною, та з в'язкопружним елементом в середовищі з опором. В [18-21] розглянуті задачі про рух твердого тіла відносно центра мас в середовищі з опором.

Розглядаються обертальні рухи динамічно симетричного тіла з рухомою точковою масою, яка прикріплена в'язкопружним демпфером до точки на осі симетрії (в недеформованому стані) [1, 6], в середовищі з опором. Будемо вважати, що моменти сил опору є лінійними та дисипативними [1, 18-21]:

$$M_1^r = -\varepsilon I_1 p, M_2^r = -\varepsilon I_1 q, M_3^r = -\varepsilon I_3 r, I_1, I_3 > 0, \quad (1)$$

де  $I_1, I_3$  – деякі постійні коефіцієнти пропорційності, які залежать від властивостей середовища та форми тіла.

З урахуванням (1) наближена система рівнянь збуреного руху в проекціях на головні центральні осі інерції має вигляд [1, 6, 18-21]

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= -\varepsilon I_1 p + Lqr + Spr^4, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= -\varepsilon I_1 q - Lpr + Sqr^4, \\ C\dot{r} &= -\varepsilon I_3 r - AC^{-1}Sr^3(p^2 + q^2). \end{aligned} \quad (2)$$

де  $p, q, r$  – проекції вектора абсолютної кутової швидкості  $\bar{\omega}$  на зв'язані осі,  $\mathbf{J} = \text{diag}(A, A, C)$  – тензор інерції незбуреного тіла.

Коефіцієнти  $L, S$  в (2) виражаються через параметри системи наступним чином:

$$\begin{aligned} L &= m\rho^2 \Omega^{-2} A^{-3} C (A^2 p^2 + A^2 q^2 + C^2 r^2), \\ S &= m\rho^2 \lambda \Omega^{-4} C^3 (A - C) A^{-4} \end{aligned} \quad (3)$$

Коефіцієнти  $L, S$  характеризують збурюючі моменти сил, які обумовлені наявністю в'язкопружного елемента,  $m$  – маса рухомої точки,  $\rho$  – відстань від центра мас недеформованої системи до точки кріплення, яка знаходиться, за припущенням, на осі динамічної симетрії цього тіла. Сталі  $\Omega^2 = c/m, \lambda = \delta/m$  визначають частоту коливань і швидкість їх згасання відповідно;  $c$  – жорсткість (коефіцієнт пружності),  $\delta$  – коефіцієнт в'язкості демпфера.

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

**Ціллю роботи** є дослідження різних випадків руху твердого тіла з внутрішніми степенями вільності.

Досліджується випадок потужного демпфера, коли коефіцієнти  $\Omega, \lambda$  зв'язані нерівностями [1, 6]:

$$\Omega^2 \square \lambda \omega \square \omega^2 \quad (4)$$

Умова (4) дозволяє ввести малий параметр в (3) і вважати вказані збурюючі моменти малими з метою застосування асимптотичного метода усереднення [22].

Крім того, нерівності (4) дозволяють нехтувати ділянками вільних коливань рухів маси, які обумовлені початковими відхиленнями, внаслідок їх швидкого згасання і врахувати вимушені квазістаціонарні рухи, викликані обертанням тіла.

Будемо вважати, що  $\Omega^2 \square \varepsilon, \lambda \Omega^{-4} \sim \varepsilon$ .

Коли  $\varepsilon = 0, \Omega^2 = 0, \lambda \Omega^{-4} = 0$  система (1) інтегрується, при цьому  $r = r_0$ .

Припустимо, що  $r_0 \neq 0$ . В цьому випадку змінні  $p, q$  здійснюють гармонічні коливання, частота яких  $|(C - A)r_0|$  залежить від  $r_0$ . Тоді система рівнянь (1) нелінійна.

Загальний породжувальний розв'язок системи (1) [23]

$$p = a \cos \varphi, \quad q = a \sin \varphi, \quad r = r_0 \quad (5)$$

застосуємо як перетворення до змінних  $a, r$ , де  $a > 0, a = \text{const}, \varphi = r(C - A)A^{-1}t$ .

З (5) одержимо, що  $\dot{a} = \dot{p} \cos \varphi + \dot{q} \sin \varphi$ . Підставимо в цей вираз  $\dot{p}$  і  $\dot{q}$  з перших двох рівнянь (1). В результаті усереднення одержаного рівняння для  $a$  за фазою  $\varphi$  [22] і, враховуючи, що  $a^2 = p^2 + q^2$  запишемо рівняння (1) для  $r$  у вигляді (крапка – похідна за часом  $t$ ):

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\varepsilon I_1 A^{-1} a + S A^{-1} r^4 a, \\ \dot{r} &= -\varepsilon I_3 C^{-1} r - A C^{-2} S r^3 a^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здійснюючи заміну змінних  $x = a^2$ ,  $y = r^2 > 0$  систему (6) приведемо до наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2x [\varepsilon I_1 A^{-1} - S A^{-1} y^2], \\ \frac{dy}{dt} &= -2y [\varepsilon I_3 C^{-1} + A C^{-2} S x y]. \end{aligned} \quad (7)$$

В цій системі  $x$ ,  $y$  – повільні змінні.

#### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Система (7) проінтегрована чисельно за початкових умов  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 1$  та параметрів  $\rho = 1$ ,  $m = 1$ ,  $\lambda = 98$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $I_3 = 1.0$ . Чисельний розв'язок системи отримано в математичному пакеті Maple, з застосуванням метода Рунге-Кутти-Фельберга п'ятого порядку точності.

На рис. 1 – 4 зображено графіки величин  $x = a^2$  і  $y = r^2$  квадратів екваторіальної та осової компонент кутової швидкості твердого тіла у випадках: 1)  $A = 1.5$ ,  $C = 1$  та  $I_1 = 1.25$  або  $I_1 = 2.5$  (рис. 1, 3); 2)  $A = 4$ ,  $C = 2$  та  $I_1 = 1.25$  або  $I_1 = 2.5$  (рис. 2, 4).

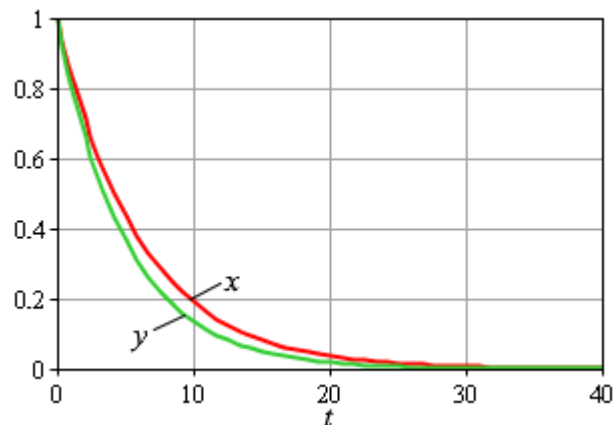


Рис. 1. Графіки змінних  $x$  і  $y$  в випадку  $A = 1.5$ ,  $C = 1$ ,  $I_1 = 1.25$

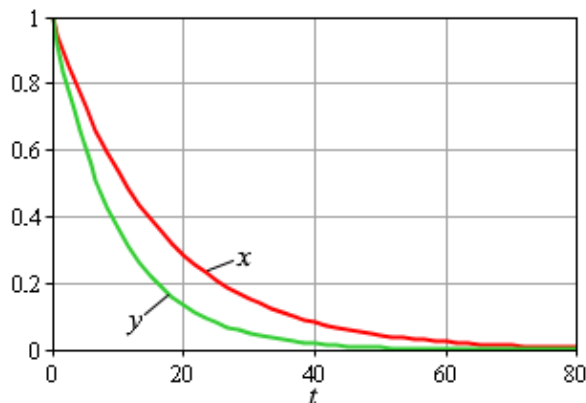


Рис. 2. Графіки змінних  $x$  і  $y$  в випадку  $A = 4$ ,  $C = 2$ ,  $I_1 = 1.25$

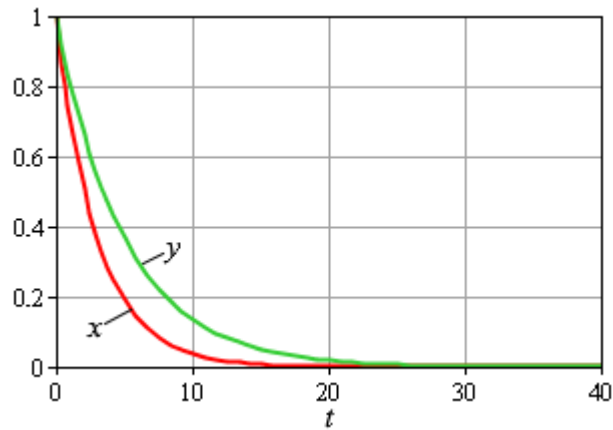


Рис. 3. Графіки змінних  $x$  і  $y$  в випадку  $A=1.5$ ,  $C=1$ ,  $I_1=2.5$

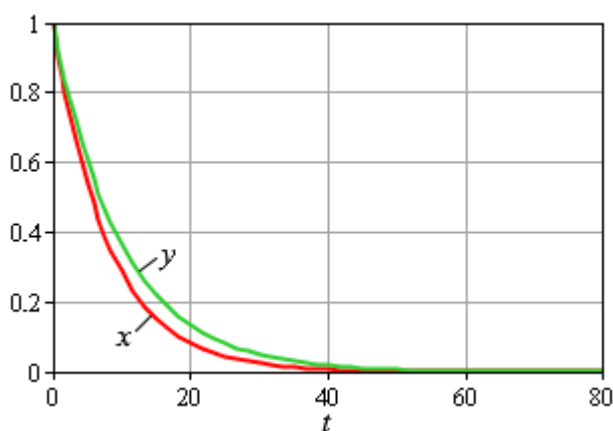


Рис. 4. Графіки змінних  $x$  і  $y$  в випадку  $A=4$ ,  $C=2$ ,  $I_1=2.5$

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Як бачимо, з рис. 1–4 змінні  $x = a^2$  та  $y = r^2$  спадають асимптотично наближаючись до нуля. У випадку виконання співвідношення  $A/C = I_1/I_3$ , система (7) має єдиний розв’язок  $x = y$ . При виконанні нерівності  $A/C > I_1/I_3$  змінна  $y$  швидше прагне до нуля ніж  $x$ . Якщо ж  $A/C < I_1/I_3$  навпаки, змінна  $x$  спадає швидше ніж  $y$ .

Також характер спадання величин квадратів екваторіальної та осьової компонент кутової швидкості твердого тіла залежить від співвідношення між моментами інерції. При зростанні величини  $A/C$  (при однакових інших параметрах) спадання змінних  $x = a^2$  та  $y = r^2$  відбувається повільніше.

## 6 ВИСНОВКИ

В результаті дослідження руху в середовищі з опором близького до динамічно сферичного твердого тіла з рухомою масою, зв’язаною з тілом пружною в’язкою при наявності в’язкого тертя одержано систему рівнянь руху в стандартній формі. Після одержання усередненої системи знайдено чисельний розв’язок задачі. Еволюція руху твердого тіла описується розв’язками, які можуть бути використаними, при дослідженні орієнтації та стабілізації руху супутника відносно центра мас.

## Література

1. Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. D. *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*. Springer, Cham, 2017.
2. He L., Sheng T., Kumar K. D., Zhac Y., Ran D., Chen X. Attitude maneuver of a satellite using moving masses. *Acta Astronaut.* 2020. 176. P. 464–475.
3. Li T., Gao C., Li C., Ting W. A survey of moving mass control theory. *Aerospace Science and Technology.* 2018. 82-83. P. 594–606.
4. Ogunwa T., Abdullah F., Chahl T. *Modeling and Control of an Articulated Multibody Aircraft*. Applied Sciences. 2022. 12. 1162.
5. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л., Зинкевич Я. С. *Возмущенные и управляемые вращения твердого тела*. Одесса: ОНУ им. И.И. Мечникова, 2013. 287с.
6. Черноусько Ф. Л. О движении твердого тела с подвижными массами. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* 1973. №4. С.33–44.
7. Lurie A. I. *Analytical Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York. 2002.
8. Month L. A., Rand R. H. Stability of a rigid body with an oscillating particle. An application of MACSYMA. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics.* 1985. 52. P. 686–692.
9. Christov O. On the non-integrability of a system describing the motion of a rigid body with a fixed point and particle oscillating in it. *Bulletin des Sciences Mathematiques.* 1994. 118. P. 385–401.
10. Akulenko L. D., Leshchenko D. D. Some problems of the motion of a solid with a moving mass. *Mechanics of Solids.* 1978. 13 (5). P. 24–28.
11. Leshchenko D. D., Sallam S. N. Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics.* 1992. 28 (8). P. 524–528.
12. Akulenko L., Leshchenko D., Kushpil T., Timoshenko I. Problems of evolution of rotations of a rigid body under the action of perturbing moments. *Multibody System Dynamics.* 2001. 6 (1). P. 3–16.
13. Kononov Yu. N. Spin stability of a Lagrange top containing linear oscillators. *Journal of Mathematical Sciences.* 2001. 103 (1). P. 38–42.
14. Akulenko L. D., Leshchenko D. D. Optimal braking of the rotations of a solid body with internal degrees of freedom. *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 1996. 34 (3). P. 127–135.
15. Akulenko L. D., Zinkevich Ya. S., Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L. Optimal rotation deceleration of a dynamically symmetric body with movable mass in a resistant medium. *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 2011. 50 (2). P. 198–204.
16. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Shchetinina Yu. S. Quasi-optimal deceleration of rotations of a rigid body with a moving mass in a resistive medium. *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 2017. 56 (2). P. 186–191.
17. Akulenko L. D., Kozachenko T. A., Leshchenko D. D. Time quasi-optimal deceleration of rotations of a gyrost with moving mass in a resistive medium. *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 2019. № 58 (5). P. 667–673.
18. Кошляков В. Н. *Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы*. М.: Наука, 1985. 288с.
19. Routh E. J. *Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part II* New York: Dover Publications, 1955.
20. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Деякі задачі про рух твердого тіла у середовищі з опором. *Механіка та математичні методи.* 2021. Т. 3. № 2. С. 6–17.
21. Kononov Yu. N. On the stability of the uniform rotations of the asymmetric rigid body in the resistive medium under the action of constant moment. *International Applied Mechanics.* 2021. 54 (4). 432–439.
22. Митропольский Ю. А. *Метод усреднения в нелинейной механике*. К.: Наукова Думка, 1971. 440с.
23. Ландау Л. Д., Мифинц Е. М. *Теоретическая физика. Т1. Механика*. М.: Наука, 1973. 208с.

## References

1. Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. D. (2017). *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*. Springer, Cham.

2. He L., Sheng T., Kumar K. D., Zhac Y., Ran D., Chen X. (2020). Attitude maneuver of a satellite using moving masses. *Acta Astronaut.* 176. 464–475.
3. Li T., Gao C., Li C., Ting W. (2018). A survey of moving mass control theory. *Aerospace Science and Technology.* 82-83. 594–606.
4. Ogunwa T., Abdullah F., Chahl T. (2022). Modeling and Control of an Articulated Multibody Aircraft. *Applied Sciences.* 12. 1162.
5. Akulenko L. D., Leschenko D. D., Rachinskaya A. L., Zinkevich Ya. S. (2013). *Vozmuschennyie i upravlyayemye vrascheniya tverdogo tela* [Perturbed and controlled rotations of a rigid body]. Odessa: OHU im. I.I. Mechnikova. [in Ukrainian].
6. Chernousko F. L. (1973). O dvizhenii tverdogo tela s podvizhnyimi massami [On the motion of a rigid body with moving masses]. *Izv. AN SSSR. Mehanika tverdogo tela.* No.4. 33–44.
7. Lurie A. I. (2002). *Analytical Mechanics.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
8. Month L. A., Rand R. H. (1985). Stability of a rigid body with an oscillating particle. An application of MACSYMA. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics.* 52. 686–692.
9. Christov O. (1994). On the non-integrability of a system describing the motion of a rigid body with a fixed point and particle oscillating in it. *Bulletin des Sciences Mathematiques.* 118. 385–401.
10. Akulenko L. D., Leshchenko D. D. (1978). Some problems of the motion of a solid with a moving mass. *Mechanics of Solids.* 13 (5). 24–28.
11. Leshchenko D. D., Sallam S. N. (1992). Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics.* 28 (8). 524–528.
12. Akulenko L., Leshchenko D., Kushpil T., Timoshenko I. (2001). Problems of evolution of rotations of a rigid body under the action of perturbing moments. *Multibody System Dynamics.* 6 (1). 3–16.
13. Kononov Yu. N. (2001). Spin stability of a Lagrange top containing linear oscillators. *Journal of Mathematical Sciences.* 103 (1). 38–42.
14. Akulenko L. D., Leshchenko D. D. (1996). Optimal braking of the rotations of a solid body with internal degrees of freedom. *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 34 (3). 127–135.
15. Akulenko L. D., Zinkevich Ya. S., Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L. (2011). Optimal rotation deceleration of a dynamically symmetric body with movable mass in a resistant medium. *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 50 (2). 198–204.
16. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Shchetinina Yu. S. (2017). Quasi-optimal deceleration of rotations of a rigid body with a moving mass in a resistive medium. *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 56 (2). 186–191.
17. Akulenko L. D., Kozachenko T. A., Leshchenko D. D. (2019). Time quasi-optimal deceleration of rotations of a gyrostap with moving mass in a resistive medium. *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 58 (5). 667–673.
18. Koshlyakov V. N. (1985). *Zadachi dinamiki tverdogo tela i prikladnoj teorii giroskopov: Analiticheskie metody* [Problems in Dynamics of Solid Bodies and in Applied Gyroscope Theory: Analytical Methods]. Nauka, Moskva. [in Russian].
19. Routh E. J. (1955). *Dynamics of a System of Rigid Bodies.* Part II New York: Dover Publications.
20. Leshchenko D., Kozachenko T. (2021). Some problems about the motion of a rigid body in a resistive medium. *Mechanics and Mathematical Methods.* 3 (2). 6–17. [in Ukrainian].
21. Kononov Yu. N. (2021). On the stability of the uniform rotations of the asymmetric rigid body in the resistive medium under the action of constant moment. *International Applied Mechanics.* 54 (4). 432–439.
22. Mitropolskiy Yu. A. (1971). *Metod usredneniya v nelineynoy mehanike* [Averaging method in nonlinear mechanics]. Kyiv, Naukova Dumka. [in Ukrainian].
23. Landau, L. D., Lifshic, E. M. (1973). *Teoreticheskaya fizika. T.1. Mehanika* [Theoretical physics. T.1. Mechanics]. Nauka, Moskva. [in Russian].

**Лешенко Дмитро Давидович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури  
д.ф.-м.н., професор  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029





leshchenko\_d@ukr.net,  
ORCID: 0000-0003-2436-221X  
**Козаченко Тетяна Олександрівна**  
Одеська державна академія будівництва та архітектури  
к.ф.-м.н., доцент  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029  
kushpil.t.a@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-9034-3776

*Для посилань:*

Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи твердого тіла з рухомою масою в середовищі з опором  
Механіка та математичні методи, 2023. Т. 5. № 2. С. 16–24.

*For references:*

D. Leshchenko, T. Kozachenko. (2023). Perturbed motions of a rigid body with a movable mass in a resistive medium. Mechanics and Mathematical methods. 5 (2). 16–24.

УДК 624

## ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДИК РОЗРАХУНКУ ПРОГРЕСУЮЧОГО ОБВАЛЕННЯ

Отрош Ю. А<sup>1</sup>, Майборода Р. І<sup>1</sup>, Рашкевич Н. В<sup>1</sup>, Ромін А. В<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Національний університет цивільного захисту України

**Анотація.** Проведене моделювання прогресуючого обвалення будівель в умовах пожежі з використанням програмного середовища ЛІРА-САПР з метою підвищення рівня забезпечення пожежної безпеки.

Проаналізовані наукові праці та нормування вимог щодо прогресуючого обвалення будівель в умовах пожежі, причини виникнення прогресуючого обвалення в умовах пожеж, розглянуті сучасні методи та підходи до розрахунку прогресуючого обвалення в умовах пожежі в США та Україні. Встановлено, що на теперішній час не існує єдиної методики розрахунку на «прогресуюче обвалення». Забезпечення (розробка методики розрахунку) необхідного опору об'єктів прогресуючому обваленню при різних комбінованих особливих діях пожежі та вибуху є актуальним науково-практичним завданням.

Розроблена чисельна модель прогресуючого обвалення будівлі в умовах пожежі, яке може призвести до прогресуючого обвалення будівлі. Для цього, використаний програмний комплекс ЛІРА-САПР. Була створена скінчено-елементну модель трьох поверхового паркінгу. Застосоване диференційне рівняння теплопровідності, яка враховує радіаційно-конвективний теплообмін від газового середовища до обігрівних поверхонь колони, теплообмін теплопровідністю в колоні. Для моделі було визначено типи жорсткості та відповідні характеристики. В результаті чисельного моделювання було встановлено місце виникнення пожежі, наслідки від якої призведуть до втрати несучої здатності конструкцій, і, як наслідок, до втрати загальної стійкості будівлі паркінгу.

Встановлено, що підходи щодо збільшення площі армування мають місце при проектуванні будівель та споруд, проте взагалі не прийнятні при експлуатації вже побудованих будівель та при необхідності підвищення меж вогнестійкості залізобетонних конструкцій до нормованих значень.

**Ключові слова:** прогресуюче обвалення, пожежа, вибух, чисельне моделювання, ЛІРА-САПР.

## RESEARCH OF PROGRESSIVE COLLAPSING CALCULATION METHODS

Yu. Otrosh<sup>1</sup>, R. Maiboroda<sup>1</sup>, N. Rashkevich<sup>1</sup>, A. Romin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National University of Civil Defence of Ukraine

**Abstract.** Modeling of the progressive collapse of buildings under fire conditions was carried out using the LIRA-CAD software environment in order to increase the level of fire safety.

Scientific works and standardization of requirements for the progressive collapse of buildings in fire conditions are analyzed, the causes of progressive collapse in fire conditions, modern methods and approaches to calculating progressive collapse in fire conditions in the USA and Ukraine are considered. It has been established that currently there is no single methodology for calculating "progressive collapse". Ensuring (development of calculation methodology) the necessary resistance of objects to progressive collapse under various combined special effects of fire and explosion is an urgent scientific and practical task.

A numerical model of the progressive collapse of the building under fire conditions, which can lead to the progressive collapse of the building, has been developed. For this, the LIRA-SAPR



software complex was used. A finite-element model of a three-story parking lot was created. The applied differential equation of thermal conductivity takes into account radiation-convective heat transfer from the gas medium to the heating surfaces of the column, heat transfer by thermal conductivity in the column. Stiffness types and corresponding characteristics were determined for the model. As a result of the numerical modeling, the place of the fire was established, the consequences of which will lead to the loss of the load-bearing capacity of the structures, and, as a result, to the loss of the overall stability of the parking building.

It has been established that approaches to increase the area of reinforcement take place in the design of buildings and structures, but are generally not acceptable in the operation of already constructed buildings and in the case of the need to increase the fire resistance limits of reinforced concrete structures to standardized values.

**Keywords:** progressive collapse, fire, explosion, numerical modeling, LIRA-SAPR.

## 1 ВСТУП

З розвитком архітектури будівництва, появою нових будівельних матеріалів, інженерних машин, відбувається зведення різних за архітектурною складністю будівель, від висотних до незвичних та архітектурно-складних за конструкцією будівель. Такі будівлі переважно характеризуються перебуванням значної кількості людей.

В умовах пожежі, порушення загальної стійкості будівлі відбувається внаслідок втрати несучої здатності та руйнування окремих елементів. небезпека обвалу несучих конструкцій, крім матеріального збитку, ставить під загрозу життя людей, які в ній перебувають, та рятувальників під час гасіння пожежі. У переважній більшості випадків руйнування конструкцій призводить до повного обвалення та знищення матеріальних цінностей.

Конструктивна схема будь-якої будівлі повинна забезпечувати його міцність і стійкість у випадку локального руйнування несучих конструкцій, спричинених пожежами та вибухами, як мінімум на час необхідний для повної евакуації людей.

Вперше з випадком прогресуючого обвалення людство зустрілося в 1968 році, коли внаслідок вибуху побутового газу було повністю зруйновано крило з житловими квартирами 22-поверхового будинку «Ronan Point» (Лондон), що призвело до загибелі десятків людей (рис. 1). Комісією по вивченню причин трагедії було запропоновано «узаконити», проведення обов'язкового розрахунку будівель деяких видів на протидію прогресуючому обваленню.



**Рис. 1.** 16 травня 1968 рік, Лондон, наслідки ефекту прогресуючого обвалення конструкцій житлового будинку після вибуху побутового газу в одній із квартир

11 вересня 2001 року в Нью-Йорку трапилася терористична атака літаками двох башт Всесвітніх торговельних центрів. Прогресуюче обвалення цих двох унікальних будівель відбулося внаслідок комбінованого характеру майже одночасно трьох особливих дій типу «удар-вибух-пожежа», а не окремо кожного, як це розглядалося при проектуванні і будівництві (рис. 2).



**Рис. 2.** 11 вересня 2001 року США. Руйнування світових торговельних центрів в результаті терористичного акту та ефекту прогресуючого обвалення

На території міст України, найбільшу кількість займають будинки радянської забудови 50-80-х років з цегли та панельні віком 70-80-х років минулого століття. Така стара забудова, як з'ясувалося, теж не розрахована на протидію прогресуючому обваленню, що підтверджується трагічними подіями із загибеллю людей і значними руйнуваннями.

13 жовтня 2007 року у багатоповерхівці панельного типу м. Дніпро стався вибух побутового газу. В результаті вибуху в одній із квартир відбулося порушення несучих елементів (панелей) та виник ефект прогресуючого обвалення. Зруйновано 10 поверхів, загинуло 24 людини (рис. 3).



**Рис. 3.** Ефект прогресуючого руйнування панельного будинку в результаті вибуху газу

Ситуація з цегляними будинками радянської забудови суттєво не відрізняється від панельних. Як приклад, у місті Нова Одеса на Миколаївщині, у кутовій частині п'ятиповерхового житлового будинку стався вибух побутового газу, внаслідок чого відбулося руйнування 4 та 5 поверху (рис. 4).



**Рис. 4.** Руйнування будинку внаслідок вибуху газу

Значно краще ситуація з будинками сучасної забудови. 26 лютого 2022 року в результаті влучання потужної ракети у висотну будівлю на рівні 17-20 поверхів поблизу аеропорту «Жуляни» м. Києва, відбулося руйнування та умовне «видалення» частини несучих конструкцій (рис. 5). Факт, що будівля встояла і не завалилась після досить потужного ракетного удару, свідчить про те, що її звели із дотриманням сучасних будівельних нормативів, враховували аспект прогресуючого обвалення.



**Рис. 5.** Наслідки влучання ракети у житловий 25 поверховий будинок

Перед фахівцями постає нове завдання – забезпечення необхідного опору об'єктів прогресуючому обваленню при різних комбінованих особливих діях пожежі та вибуху.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Основна мета роботи, представленої в [1], полягала у визначенні важливих параметрів для розрахунку конструктивних елементів до температурних та/або вибухових навантажень. Для проведення аналізу чутливості необхідно було розробити аналітичний метод точного розрахунку реакції елементів конструкцій на пожежі та вибухи, щоб можна було швидко виконати численні розрахунки зусиль. У цій роботі було зроблено певний шлях розгляду різних умов закріплення (типів опор) та прикладених навантажень.

В [2] розглянуті катастрофічні події в нафтовій промисловості, інциденти під час складних виробничих процесів, неправильне поводження з побутовими газовими установками та терористичні атаки. Вибух створює вибухову хвилю, яка створює екстремальне навантаження на сусідні конструкції, що спричиняє пошкодження та руйнування, а також може викинути уламки конструкцій. Обчислювальне моделювання розглянутої задачі було виконано з використанням пакету нелінійних кінцевих елементів Abaqus. Чисельні моделі були побудовані та перевірені з використанням даних існуючих польових експериментів. Результати чисельної перевірки в цьому дослідженні показали, що методи чисельного моделювання з використанням лише моделей пластичності Джонсона-Кука та масового пропорційного демпфування добре узгоджуються з даними польових випробувань. Однак у методах, використаних у цьому дослідженні, є обмеження, для яких необхідні подальші дослідження для перевірки інших теорій у цій галузі дослідження.

Основною метою цього дослідження [3] є чисельне моделювання поведінки, розробка моделей руйнування сталевих колон під ударними навантаженнями з використанням динамічного пакету скінчених елементів ABAQUS/Explicit. Запропоновано чисельну модель та перевірено на основі опублікованих експериментальних випробувань на повномасштабних сталевих колонах, які піддаються динамічним вибуховим навантаженням. Дослідження також представляє виведення та перевірку запропонованого аналітичного підходу для розрахунку критичного імпульсу вибуху, при якому сталева колона втрачає свою глобальну стійкість.

У [4] розглянутий розрахунок будівельних конструкцій для захисту від вуглеводневих пожеж і вибухів, необхідність розгляду низки питань, які зазвичай не розглядаються проектувальниками. Основні напрями, які охоплюються: дані про властивості матеріалів при підвищеній температурі; дані про властивості матеріалу з високою швидкістю деформації для використання у вибухостійкій конструкції; методи аналізу пожежі та вибуху.

Розділ [5] допомагає читачам зрозуміти небезпеку пожежі та вибуху, а також визначити хімічні властивості, пов'язані з займистістю та вибухонебезпечністю. Вибух привернув національну увагу до небезпеки горючого пилу в хімічній і сільськогосподарській промисловості

У [6] розглянуто, що пожежі, і вибухи є результатом реакцій горіння, де паливо та кисень реагують, іноді бурхливо та миттєво, виділяють велику кількість енергії.

У [7] розглянуто відповідність новому законодавству Великої Британії та ЄС щодо газової безпеки для хімічних заводів сьогодні є основним фактором, що впливає на їх проектування та роботу.

У [8] наведено застосування у криміналістиці – розслідування навмисних пожеж, спричинених злочинними порушеннями правил профілактики, вчинених з помсти, з метою приховування інших злочинів, шляхом вандалізму, внаслідок психічних розладів або у разі самозаймання в громадських місцях.

В [9] проаналізовано міжнародні та національні стандарти. Під час обговорення аудиту пожежної безпеки та встановлення перегородок обговорюються негативні наслідки проектів реконструкції перегородок на будівельні конструкції, пошкодження протипожежного відсіку, вплив на шляхи евакуації людей, проектування димовидалення та інші стаціонарні засоби протипожежного захисту.

У [10] розглянута поведінка будівель та конструкцій під час критичних подій. Тим не менш, проблема часто вирішується якісно багатьма чинними кодексами та правилами, проектувальники не можуть посилатися на конкретні методології для оцінки або досягнення структурної цілісності конструкцій. Термін структурна цілісність тут мається на увазі як здатність конструкції витримувати екстремальні дії, які безпосередньо впливають на структурну систему, без розвитку значного руйнування. У цій статті описано два основні методи досягнення структурної цілісності: підхід «знизу вгору», коли досліджуються наслідки відмов елементів, не враховуючи моделювання конкретної дії, яка могла їх спровокувати; і низхідний підхід, коли визначається реакція структури на конкретну випадкову дію.

Також проведений аналіз світового та вітчизняного досвіду з виникнення та попередження надзвичайних ситуацій на територіях, які зазнали ракетно-артилерійських уражень в контексті визначення небезпек ґрунтів. Наукова спільнота до небезпек, окрім хімічного забруднення, відносить фізичні порушення [11, 12].

Фізичні порушення ґрунту виникають через запечатування внаслідок будівництва оборонних споруд, копання траншей або тунелів, ущільнення внаслідок руху техніки та військ або утворення вирв від бомбардування [11].

В [12] зазначається, що фізичні порушення можуть призвести до зсувів та ерозії.

Визначено [13], що фізико-хімічні процеси призводять до закритичного збільшення небезпечних чинників, які у свою чергу призводять до локальних (у найгіршому сценарії до фонових) змін показників фізико-хімічних властивостей (стану) ґрунтів, носять довгостроковий характер небезпеки ґрунтового середовища та становлять небезпеку для населення та територій.

Вібраційний вплив здатен призвести до ущільнення ґрунту, витискання води, просідання поверхні, утворення порожнин. Температурний вплив – порушити термічний і водний режим ґрунтів, змінити гранулометричний та агрегатний склад [14]. Воєнні дії впливають на основи будівель та споруд, та можуть призвести до прогресуючого обвалення.

Враховуючи реалії військового часу постає нагальне питання підземного будівництва, а саме захисних споруд цивільного захисту. Для цього потрібно проводити дослідження порушень ґрунтів, які спричинені воєнними діями, та враховувати їх під час реконструкції, нового будівництва.

Отже, на теперішній час не існує єдиної методики розрахунку на «прогресуюче обвалення». Всебічне дослідження та оцінка дії різного роду не проектних та аварійних навантажень, комбінація їх впливу на будівельні конструкції різних типів будинків є вкрай необхідною умовою для розробки та удосконалення методики розрахунку «прогресуючого обвалення» будівель та споруд під час пожеж і вибухів є актуальним науковим завданням, особливо з врахуванням військового часу.

### **3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ**

Метою дослідження є моделювання прогресуючого обвалення будівель в умовах пожежі з використанням програмного середовища ЛПРА-САПР з метою підвищення рівня забезпечення пожежної безпеки.

Для досягнення поставленої мети потребували вирішення наступні завдання:



- провести аналіз наукових праць та нормування вимог щодо прогресуючого обвалення будівель в умовах пожежі, причини виникнення прогресуючого обвалення в умовах пожеж, розглянути сучасні методи та підходи до розрахунку прогресуючого обвалення в умовах пожежі в США та Україні;
- з метою дослідження вогнестійкості будівлі до прогресуючого обвалення розробити модель прогресуючого обвалення будівлі (на прикладі паркінгу) в умовах пожежі, що може призвести до прогресуючого обвалення будівлі.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

### 4.1 Результати досліджень методів розрахунку прогресуючого обвалення

Прогресуюче руйнування об'єкту – це остання, лавиноподібна стадія кінетичного процесу послідовного накопичення пошкоджень або деформацій структурних елементів об'єкту, що приводять до втрати загальної стійкості і геометричної незмінності об'єкту в цілому, що розвивається в часі.

Один з найбільш відомих методів – це метод «Design of Structures to Resist Progressive Collapse», який був розроблений для використання військовими інженерами. В цьому методі розглядається необхідність застосування певних заходів для забезпечення стійкості будівлі після локального руйнування, а також відновлення інтегральності будівлі. Цей метод регламентується «Unified Facilities Criteria (UFC) 4-023-03 Design of Buildings to Resist Progressive Collapse [15]», який використовується для розрахунку стійкості будівель до прогресуючого обвалення. Цей метод вимагає визначення потенційних сценаріїв руйнування будівлі та застосування конструкційних заходів для забезпечення стійкості будівлі.

Також в США існує метод «General Services Administration (GSA) Progressive Collapse Analysis and Design Guidelines for New Federal Office Buildings and Major Modernization Projects», який використовується для розрахунку стійкості нових федеральних будівель та проєктів їх модернізації. В цьому методі розглядаються фактори, що можуть призвести до прогресуючого обвалення, та заходи, необхідні для запобігання таким ситуаціям.

У США також використовуються інші методи, які розробляє «Los Alamos National Laboratory (LANL) Method», який розглядає прогресуюче обвалення з точки зору механіки твердого тіла, та метод «FEMA 427, Primer for Design of Commercial Buildings to Mitigate Terrorist Attacks», який використовується для розрахунку стійкості будівель до терористичних атак [16].

Загальний підхід до розрахунків прогресуючого обвалення в США передбачає використання трьох основних методів: методу тягових сил, методу альтернативних шляхів та методу підвищеної місцевої стійкості:

- метод тягових сил, як і в Європейському союзі, базується на використанні з'єднань між структурними елементами, які забезпечують їхню інтегральність у разі локального руйнування. Однак у США підхід до розрахунків методом тягових сил визначається за допомогою FEMA P-751 Design Guide for Improving School Safety in Earthquakes, Floods and High Winds [17], яка передбачає застосування допоміжного програмного забезпечення та розрахунків;

- метод підвищеної місцевої стійкості в США базується на розробці міцності конкретних структурних елементів, які можуть бути вимушені працювати за межами своєї нормальної міцності при локальному руйнуванні. У США цей метод регулюється документами UFC 4-023-03 Design of Buildings to Resist Progressive Collapse та Unified Facilities Criteria (UFC) 4-023-07 Design to Resist the Effects of Accidental Explosions [18];

- метод альтернативних шляхів в США передбачає розгляд можливих шляхів для розподілу навантаження у випадку локального руйнування. Цей метод передбачає

використання трьох аналітичних процедур: лінійного статичного, нелінійного статичного та нелінійного динамічного аналізу. У США метод альтернативних шляхів регулюється документами UFC 4-023-03 Design of Buildings to Resist Progressive Collapse та Unified Facilities Criteria (UFC) 3-340-01 Design and Analysis of Hardened Structures to Conventional Weapons Effects [19].

В Україні у 2009 році набув чинності ДБН В.2.2-24:2009 «Будинки і споруди. Проектування висотних житлових і громадських будинків», де вперше визначено термін прогресуючого обвалення та наводиться методика розрахунку.

На теперішній час у зв'язку із скасуванням ДБН В.2.2-24:2009 та набрання законності ДБН В.2.2-41:2019 «Висотні будівлі. Основні положення» під терміном прогресуючого обвалення розуміється – обвалення будівлі внаслідок локального руйнування частини несучих конструкцій на одному чи декількох поверхах. Тобто поширення початкового місцевого руйнування у вигляді ланцюгової реакції від елемента до елемента, що в результаті завершується обваленням будівлі (або її частини висотою два та більше поверхів), що втратили опору внаслідок (місцевого) локального руйнування на будь-якому поверсі. Причиною руйнування може бути будь-яка з безлічі аварійних ситуацій, які не розглядаються в звичайному проектуванні.

З огляду на це та враховуючи вимоги ДБН В.1.1-12 та ДБН В.1.1-7 особливо актуальними постають проблеми забезпечення сейсмостійкості та вогнестійкості будівельних конструкцій, а також стійкості багатопверхових будівель до прогресуючого обвалення. У той же час землетруси, пожежі, сильні вітри, на які виконуються розрахунки будівель відповідно до будівельних норм, також не повинні призводити до прогресуючого обвалення.

Методика розрахунків на прогресуюче обвалення пропонується наступна:

– після формування розрахункової схеми з врахуванням граничних умов необхідно вказати типів кінцевих елементів і їх жорсткості. Для врахування фізичної і геометричної нелінійності вибираються відповідні типи кінцевих елементів (наприклад, 410, 442, 444). При завданні жорсткостей наголошується необхідність врахування нелінійності і задаються параметри матеріалу конструкції і параметри арматури;

– до розрахункової моделі прикладаються два завантаження: перше моделює постійні і тривалі навантаження на конструкцію, друге дозволяє врахувати коефіцієнт динамічності. Для цього до верхнього вузла зруйнованої колони необхідно докласти зусилля, що становить певну частину від зусилля в цій колоні, що виникає при дії навантажень з першого завантаження;

– за допомогою «Монтажних таблиць» моделюються стадії обвалення. Формується дві стадії. У першу входять всі елементи конструкції без виключення, в другу – всі, за винятком зруйнованої колони;

– для виконання нелінійного розрахунку системи з врахуванням процесу монтажу необхідно задати кількість нелінійних завантажень рівне кількості стадій монтажу. Для другого нелінійного завантаження необхідно враховувати попереднє завантаження.

#### **4.2 Результати моделювання прогресуючого обвалення в ПК «ЛІРА -САПР»**

Методику проведення чисельного моделювання і аналізу ситуації, що склалася, можна представити в наступному вигляді:

1. Оцінка жорсткісних характеристик, дійсних схем роботи і залишкових ресурсів несучої здатності конструктивних вузлів при миттєвому і тривалому типах навантаження в умовах нормальної експлуатації.

2. Оцінка зміни схеми роботи і жорсткісних характеристик конструктивних вузлів при дії підвищених навантажень і розвитку пластичних деформацій до виходу з ладу.

3. Оцінка впливу виявлених схем роботи вузлів на локальні зони конструкції.

#### 4. Оцінка відгуку споруди на введення можливих виявлених конструктивних змін.

Процеси деформації, руйнування і обвалення конструкцій будівельних конструкцій за своєю суттю є розвиненими сильно нелінійними процесами, що супроводжуються великими пластичними деформаціями і переміщеннями, контактною взаємодією між групами елементів, динамічними навантажуючими ефектами у момент відмови елементів конструкцій.

В світлі цього результати комплексного чисельного моделювання істотно залежать від вживаних методів вирішення складових завдань:

- нелінійні динамічні задачі;
- геометрично нелінійні задачі з великими переміщеннями;
- геометрично нелінійні задачі з великими деформаціями;
- фізично нелінійні задачі з розвинутою пластикою і накопиченням пошкоджень матеріалом;
- завдання контактної взаємодії різних груп елементів конструкцій, у тому числі і «самоконтакт»:

- ✓ побудувати скінчено-елементну модель напружено-деформованого стану будівлі паркінгу для автомобілів із залізобетонних конструкцій та скінчено-елементну модель елемента конструкції (колони) для визначення теплового навантаження;

- ✓ проаналізувати варіанти пожеж для дослідження вогнестійкості (стійкості) будівлі в залежності від місця виникнення та пожежного навантаження на вогнезахисні залізобетонні конструкції будівлі паркінгу;

- ✓ виявити найбільш уразливі конструкції, виключення яких із конструктивної схеми призведе до найбільших збитків при пожежі та в подальшому до втрати стійкості будівлі в цілому;

- ✓ провести оцінювання вогнестійкості вогнезахисних будівельних конструкцій за допомогою розробленої моделі:

- ✓ визначити розподіл температур по перерізу будівельної конструкції;

- ✓ перевірити несучу здатність будівельних конструкцій моделі (напружено-деформований стан із зміненими жорсткісними характеристиками від впливу на конструкцію підвищених температур пожежі);

- ✓ запропонувати заходи з підвищення меж вогнестійкості конструкцій за допомогою вогнезахисних покриттів з науково обґрунтованими параметрами.

- ✓ порівняти стійкість будівлі паркінгу до впливу високих температур пожежі з використанням вогнезахисних покриттів для підвищення меж вогнестійкості залізобетонних конструкцій і без використання.

Для дослідження прогресуючого обвалення змодельований 3-х поверховий паркінг являє собою монолітно-каркасну будівлю, яка виконана із монолітного залізобетону. Схема будівлі являє собою повний зв'язковий каркас, загальною місткістю на 124 парко місць під легкові автомобілі (рис. 6).

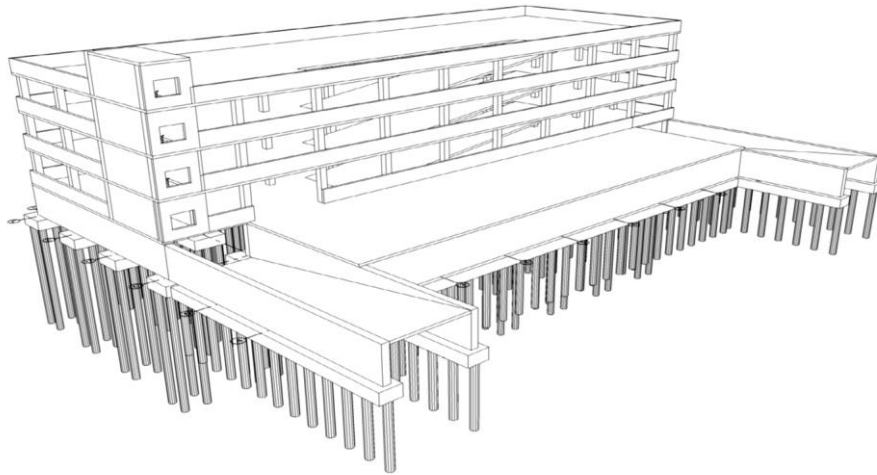


Рис. 6. Схема каркасу трьохповерхового паркінгу

На рис. 7 показано створену в програмному комплексі ЛІРА-САПР скінчено-елементну модель трьохповерхового паркінгу, задані навантаження на конструкції паркінгу.

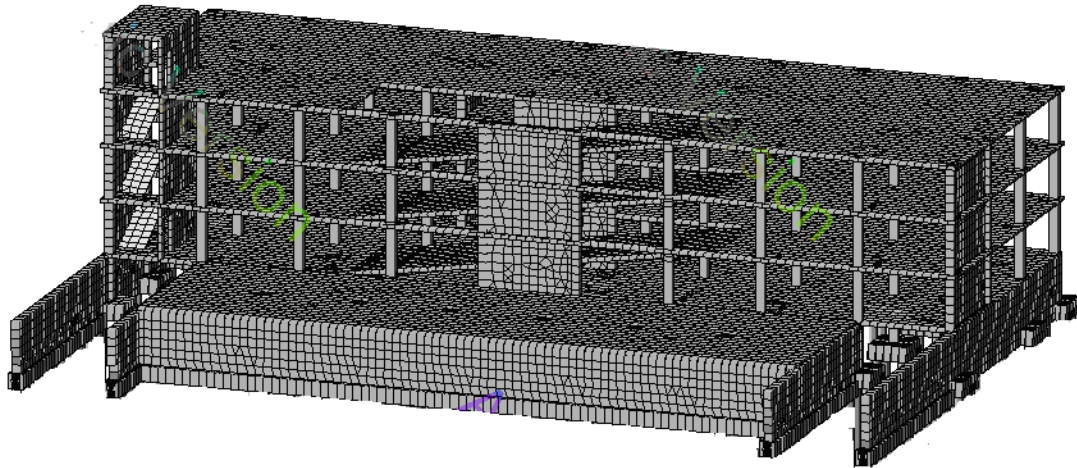


Рис. 7. Скінченно-елементна 3D модель трьохповерхового паркінгу

Змодельованим елементам скінченно-елементної моделі було призначено типи жорсткості, як зображено на рис. 7 та надані їх характеристики (табл. 1–4).

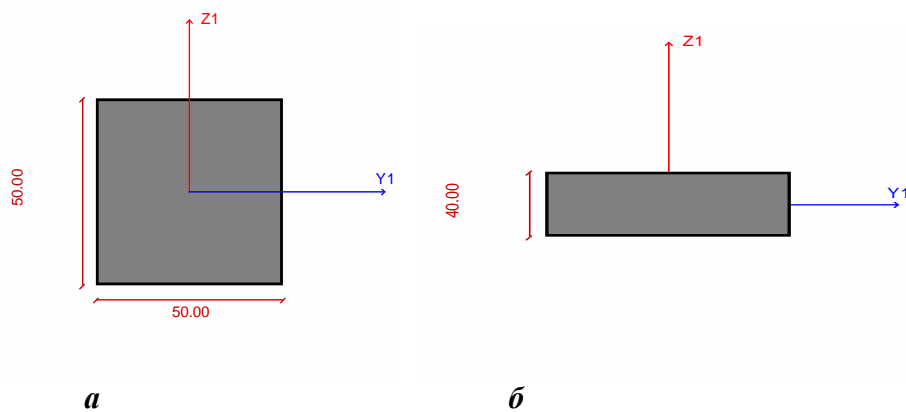


Рис. 7. Жорсткість колон «Брус 50 × 50» (а) та перекриттів «Пластина Н 40» (б)

**Таблиця 1**

Характеристики залізобетонних колон

Ім'я	Коментар	E, т/м <sup>2</sup>	R <sub>0</sub> , т/м <sup>3</sup>	EF, т	EI <sub>y</sub> , т·м <sup>2</sup>	EI <sub>z</sub> , т·м <sup>2</sup>	GI <sub>k</sub> , т·м <sup>2</sup>	Y1, см	Y2, см	Z1, см	Z2, см	q, т/м	GF <sub>y</sub> , т	GF <sub>z</sub> , т
Брус 50×50	Залізобетон колон	306·10 <sup>4</sup>	2,5	765000	15937	15937	11156	8,3	8,3	8,3	8,3	0,6	265625	265625

**Таблиця 2**

Жорсткісні характеристики плити перекриття

Ім'я	Коментар	E(E1), т/м <sup>2</sup>	R <sub>0</sub> , т/м <sup>3</sup>	V12(V)	H, см
Пластина Н 20	Залізобетон плит	2750000	2,5	0,2	20

**Таблиця 3**

Жорсткісні характеристики. Пластини (теплопровідність)

Ім'я	Коментар	H, см	K, Дж/(м·с·°С)	C, Дж/(кг·°С)	R <sub>0</sub> , Н/м <sup>3</sup>
Теплопровідність	Залізобетон	200	0.850	1100	23030
Теплопровідність	Вогнезахист	100	0.071	2000	5000

**Таблиця 4**

Жорсткісні характеристики. Стержні (конвекція)

Ім'я	Коментар	H, см	a, Дж/(с·м <sup>2</sup> ·°С)
Конвекція		100	25

В результаті чисельного моделювання було встановлено місце виникнення пожежі, наслідки від якої призведуть до втрати несучої здатності конструкцій, і, як наслідок, до втрати загальної стійкості будівлі паркінгу.

Для врахування нелінійності в програмному комплексі «ЛІРА-САПР» був обраний простий кроковий метод з кількістю кроків рівним 30. Обрано закон нелінійного деформування бетону, що застосовуються в програмному комплексі «ЛІРА-САПР»: 1501 – кусково-лінійний закон деформування.

Для розрахунків нерівномірних розподілів температури в поперечному перерізі залізобетонної колони застосовували математичну модель нестационарної теплопровідності, математичний апарат якої використано в програмі ЛІРА-САПР. Модель являє собою диференційне рівняння теплопровідності, яка враховує радіаційно-конвективний теплообмін від газового середовища до обігрівних поверхонь колони (обігрів з 4-ох сторін) (граничні умови III-го роду), теплообмін теплопровідністю в колоні. Для розв'язання рівняння теплопровідності використовувався метод скінчених елементів, реалізований в програмі ЛІРА-САПР.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

### 5.1 Обговорення результатів дослідження методів розрахунку прогресуючого обвалення

Різні нормативні документи можуть мати різні визначення прогресуючого обвалення, але вони мають спільні риси, які пов'язані з помилками при проектуванні,

невірним розрахунком навантажень та неврахуванням можливих впливів на будівлю під час експлуатації, таких як вибухи, пожежі тощо. Прогресуюче обвалення будівель під час пожежі становить особливу небезпеку.

Загальний підхід до розрахунків прогресуючого обвалення в США передбачає використання трьох основних методів: методу тягових сил, методу альтернативних шляхів та методу підвищеної місцевої стійкості. Кожен з цих методів має свої особливості та застосовується відповідно до конкретних умов. Застосування цих методів дозволяє забезпечити стійкість будівель після локального руйнування та зменшити наслідки можливих катастроф.

Методи та підходи до розрахунку прогресуючого обвалення в Україні за допомогою ПК ЛІРА-САПР включають квазістатичну постановку (лінійний та нелінійний розрахунок) та динамічну постановку (лінійний та нелінійний розрахунок). Основна мета такого розрахунку полягає у проектуванні споруд, які можуть протистояти аварійним ситуаціям, зменшуючи наслідки для людей та навколишнього середовища.

Дослідження за напрямком прогресуючого обвалення включає розгляд потенційних загроз, які можуть призвести до руйнування конструкції будівлі.

Таким чином, запобігання прогресуючому обваленню – одна з найважливіших умов безпечної експлуатації як новобудов, так і існуючих будівель. Згідно з вимогами ДБН В.1.2-14 та ДБН В.2.2-41 конструктивна система будівлі має забезпечувати опір прогресуючому обваленню та локальному руйнуванню у разі виникненні надзвичайних ситуацій.

## **5.2 Обговорення результатів моделювання прогресуючого обвалення в ПК «ЛІРА -САПР»**

Дослідження за напрямком прогресуючого обвалення включає розгляд потенційних загроз, які можуть призвести до руйнування конструкцій будівлі. Розроблена комп'ютерна модель для розрахунку на прогресуюче обвалення будівлі під впливом теплового та напружено-деформованого стану будівлі трьох поверхового паркінгу для автомобілів. Дане дослідження допомагає визначити найбільш слабкі місця конструкції паркінгу на прогресуюче обвалення, які потребують підсилення, а також розробити та впровадити відповідні заходи з покращення вогнестійкості конструкцій, встановлення систем пожежної сигналізації та автоматичного пожежогасіння, організація евакуаційних виходів та інші. При цьому обґрунтовано товщину пасивного вогнезахисного покриття.

## **6 ВИСНОВКИ**

1. На теперішній час не існує єдиної методики розрахунку на «прогресуюче обвалення». Всебічне дослідження та оцінка дії різного роду не проектних та аварійних навантажень, комбінація їх впливу на будівельні конструкції різних типів будинків є вкрай необхідною умовою для розробки та удосконалення методики розрахунку «прогресуючого обвалення» будівель та споруд під час пожеж і вибухів є актуальним науковим завданням, особливо з врахуванням військового часу.

Різні нормативні документи можуть мати різні визначення прогресуючого обвалення, але вони мають спільні риси, які пов'язані з помилками при проектуванні, невірним розрахунком навантажень та неврахуванням можливих впливів на будівлю під час експлуатації, таких як вибухи, пожежі тощо. Основна мета кожного методу полягає в забезпеченні стійкості будівлі та її захисту від локального руйнування шляхом розподілу навантаження та забезпечення міцності конструкцій.

Постає завдання забезпечення необхідного опору об'єктів прогресуючому обваленню при різних комбінованих особливих діях пожежі та вибуху.

2. Досліджуваний трьох поверховий паркінг є монолітно-каркасною будівлею, що виконана із монолітного залізобетону, які більш схильні до прогресуючого обвалення. Структура будівлі складається з колон та перекриттів, які утворюють повний зв'язковий каркас. У даному випадку, використовуючи програмний комплекс ЛІРА-САПР, було створено скінчено-елементну модель трьох поверхового паркінгу. Для моделі було визначено типи жорсткості та відповідні характеристики.

Під час дослідження вогнестійкості та стійкості будівлі до прогресуючого обвалення було змодельовано варіанти пожеж для визначення наслідків виникнення пожежі на конструкції паркінгу. В результаті чисельного моделювання було виявлено потенційне місце виникнення пожежі, що може призвести до прогресуючого обвалення.

3. Встановлено, що підходи щодо збільшення площі армування мають місце при проектуванні будівель та споруд, проте взагалі не прийнятні при експлуатації вже побудованих будівель та при необхідності підвищення меж вогнестійкості залізобетонних конструкцій до нормованих значень.

## Література

1. Walker S., Howarth M. Sensitivity of the response of structures to fires and explosions. HSE OTO 97 043. 2022. Available at: <https://www.fabig.com/external-publications/hse-oto-97-043/>.
2. Aikenhead K., Chernin L. Effect of debris impact on post-blast response of steel columns. In 1st International Conference on Structural Integrity for Offshore Energy Industry: Structural Integrity (SI) 2018 (Vol. ASRANet Ltd).
3. Al-Thairy H. Behaviour and Failure of Steel Columns Subjected to Blast Loads: Numerical Study and Analytical Approach. *Advances in Materials Science and Engineering*. 2018. Available at: <https://doi.org/10.1155/2018/1591384/>.
4. Burgan B. A., Hamdan F.H., Barker D.D., Puskar F.J. Response of topside structures to fires and explosions: recent findings. In *International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*. 2003, January. Vol. 36827. P. 155–162. Available at: <https://doi.org/10.1115/OMAE2003-37183>.
5. CCPS. Fire and Explosion Hazards. In book: *Process Safety for Engineers*. 2022. P.53–83. DOI: 10.1002/9781119831075.ch4
6. Houck M., Siegel J. Fires and Explosions. 2015. DOI: 10.1016/B978-0-12-800037-3.00018-2.
7. Nasr G. G., Connor N. Fire and Explosion. *Natural Gas Engineering and Safety Challenges*. 2014. P. 281–308. DOI: 10.1007/978-3-319-08948-5\_7
8. Aron I. Forensic Investigation of Fires and Explosions. *Bulletin of the Transilvania University of Braşov. Series VII: Social Sciences Law*. 2021. P. 143–148. DOI: 10.31926/but.ssl.2021.14.63.1.14
9. Wang Q., Zhang C. Fire safety analysis of building partition wall engineering. *Procedia engineering*. 2018. Vol. 211. P. 747-754. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.12.071.
10. Giuliani L. Structural safety in case of extreme actions. *International Journal of Lifecycle Performance Engineering*. 2012. Vol. 1. P. 22-40. DOI: 10.1504/IJLCPE.2012.051282
11. Certini G., Scalenghe R., Woods W.I. The impact of warfare on the soil environment. *Earth-Science Reviews*. 2013. Vol. 127. P. 1–15. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2013.08.009>
12. Broomandi P., Guney M., Kim J.R., Karaca F. Soil Contamination in Areas Impacted by Military Activities: A Critical Review. *Sustainability*. 2020. Vol. 12 (21). 9002. Retrieved from: <https://doi.org/10.3390/su12219002>
13. Рашкевич Н. В. Аналіз сучасного стану попередження надзвичайних ситуацій на територіях України, які зазнали ракетно-артилерійських уражень. *Комунальне господарство міст*. 2023. Том 4. Вип. 178. С. 232–251. DOI: <https://doi.org/10.33042/2522-1809-2023-4-178-232-251>

14. Сплідитель А., Голубцов О., Чумаченко С., Сорокіна Л. Забруднення земель внаслідок агресії росії проти України <https://ecoaction.org.ua/wp-content/uploads/2023/03/zabrudnennia-zemel-vid-rosii1.pdf>
15. UFC 4-023-03. Design of Structures to Resist Progressive Collapse. (Department of defense USA). 2005. 245 p. Available at: [https://www.wbdg.org/FFC/DOD/UFC/ufc\\_4\\_023\\_03\\_2009\\_c3.pdf](https://www.wbdg.org/FFC/DOD/UFC/ufc_4_023_03_2009_c3.pdf)
16. FEMA 427. Primer for Design of Commercial Buildings to Mitigate Terrorist Attacks. 2003. Available at: <https://www.fema.gov/sites/default/files/2020-08/fema427.pdf>
17. FEMA P-751. Design Guide for Improving School Safety in Earthquakes, Floods and High Winds. 2009. Available at: [https://www.wbdg.org/FFC/DHS/ARCHIVES/FEMA\\_P-751\\_NEHRP\\_Design\\_Examples\\_2009.pdf](https://www.wbdg.org/FFC/DHS/ARCHIVES/FEMA_P-751_NEHRP_Design_Examples_2009.pdf)
18. UFC 4-023-07. Design to Resist the Effects of Accidental Explosions. Department of defense USA. 2008. Available at: <https://www.wbdg.org/ffc/dod/unified-facilities-criteria-ufc/ufc-3-340-02>
19. UFC 3-340-01. Design and Analysis of Hardened Structures to Conventional Weapons Effects. Department of defense USA. 2002. Available at: <https://www.wbdg.org/ffc/dod/unified-facilities-criteria-ufc/ufc-3-340-01>

## References

1. Walker, S., Howarth, M. (2022). Sensitivity of the response of structures to fires and explosions. HSE OTO 97 043. Available at: <https://www.fabig.com/external-publications/hse-oto-97-043/>
2. Aikenhead, K., Chernin, L. (2018). Effect of debris impact on post-blast response of steel columns. In 1st International Conference on Structural Integrity for Offshore Energy Industry: Structural Integrity (SI) 2018 (Vol. ASRANet Ltd).
3. Al-Thairy, H. (2018). Behaviour and Failure of Steel Columns Subjected to Blast Loads: Numerical Study and Analytical Approach. *Advances in Materials Science and Engineering*. Available at: <https://doi.org/10.1155/2018/1591384>
4. Burgan, B. A., Hamdan, F. H., Barker, D. D., Puskar, F. J. (2003, January). Response of topside structures to fires and explosions: recent findings. In *International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 36827, 155–162. Available at: <https://doi.org/10.1115/OMAE2003-37183>
5. CCPS. (2022). Fire and Explosion Hazards. In book: *Process Safety for Engineers*, 53–83. DOI: 10.1002/9781119831075.ch4
6. Houck, M., Siegel, J. (2015). Fires and Explosions. DOI: 10.1016/B978-0-12-800037-3.00018-2
7. Nasr, G.G., Connor, N. (2014). Fire and Explosion. *Natural Gas Engineering and Safety Challenges*, 281–308. DOI: 10.1007/978-3-319-08948-5\_7
8. Aron, I. (2021). Forensic Investigation of Fires and Explosions. *Bulletin of the Transilvania University of Braşov. Series VII: Social Sciences Law*, 143–148. DOI: 10.31926/but.ssl.2021.14.63.1.14
9. Wang, Q., Zhang, C. (2018). Fire safety analysis of building partition wall engineering. *Procedia engineering*, 211, 747–754. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.12.071.
10. Giuliani, L. (2012). Structural safety in case of extreme actions. *International Journal of Lifecycle Performance Engineering*, 1, 22–40. DOI: 10.1504/IJLCPE.2012.051282
11. Certini, G., Scalenghe, R., Woods, W.I. (2013). The impact of warfare on the soil environment. *Earth-Science Reviews*, 127, 1–15. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2013.08.009>
12. Broomandi, P., Guney, M., Kim, J.R., Karaca, F. (2020). Soil Contamination in Areas Impacted by Military Activities: A Critical Review. *Sustainability*, 12 (21), 9002. Available at: <https://doi.org/10.3390/su12219002>
13. Rashkevich, N. (2023). Analysis of the current state of warning of emergency situations in the territories of Ukraine which were suffered by rocket and artillery impacts, 4, 178, 232–251. DOI: <https://doi.org/10.33042/2522-1809-2023-4-178-232-251>
14. Splidnyk, O., Holubtsov, O., Chumachenko, S., Sorokina, L. (2022). Zabrudnennya zemel' vnaslidok ahresiyi rosiyi proty Ukrayiny. Available at: <https://ecoaction.org.ua/wp-content/uploads/2023/03/zabrudnennia-zemel-vid-rosii1.pdf>



15. UFC 4-023-03. (2005). Design of Structures to Resist Progressive Collapse. (Department of defense USA), 245. Available at: [https://www.wbdg.org/FFC/DOD/UFC/ufc\\_4\\_023\\_03\\_2009\\_c3.pdf](https://www.wbdg.org/FFC/DOD/UFC/ufc_4_023_03_2009_c3.pdf)
16. FEMA 427. (2003). Primer for Design of Commercial Buildings to Mitigate Terrorist Attacks. Available at: <https://www.fema.gov/sites/default/files/2020-08/fema427.pdf>
17. FEMA P-751. (2009). Design Guide for Improving School Safety in Earthquakes, Floods and High Winds. Available at: [https://www.wbdg.org/FFC/DHS/ARCHIVES/FEMA\\_P-751\\_NEHRP\\_Design\\_Examples\\_2009.pdf](https://www.wbdg.org/FFC/DHS/ARCHIVES/FEMA_P-751_NEHRP_Design_Examples_2009.pdf)
18. UFC 4-023-07. (2008). Design to Resist the Effects of Accidental Explosions. Department of defense USA. Available at: <https://www.wbdg.org/ffc/dod/unified-facilities-criteria-ufc/ufc-3-340-02>
19. UFC 3-340-01. (2002). Design and Analysis of Hardened Structures to Conventional Weapons Effects. Department of defense USA. Available at: <https://www.wbdg.org/ffc/dod/unified-facilities-criteria-ufc/ufc-3-340-01>

**Отрош Юрій Анатолійович**

Національний університет цивільного захисту України  
д.т.н, професор  
вул. Чернишевська, 94, м. Харків, Україна, 61023  
yuriyotrosh@gmail.com  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0698-2888>

**Майборода Роман Ігорович**

Національний університет цивільного захисту України  
викладач  
вул. Чернишевська, 94, м. Харків, Україна, 61023  
maiboroda.roman@gmail.com; maiboroda.roman@ukr.net  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3461-2959>

**Рашкевич Ніна Владиславівна**

Національний університет цивільного захисту України  
доктор філософії зі спеціальності «Цивільна безпека»  
старший викладач  
вул. Чернишевська, 94, м. Харків, Україна, 61023  
nine291085@gmail.com  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5124-6068>

**Ромін Андрій Вячеславович**

Національний університет цивільного захисту України  
доктор наук з державного управління, професор  
вул. Чернишевська, 94, м. Харків, Україна, 61023  
romin@nuczu.edu.ua  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3974-6702>

*Для посилань:*

Отрош Ю. А., Майборода Р. І., Рашкевич Н. В., Ромін А. В. Дослідження методик розрахунку прогресуючого обвалення. Механіка та математичні методи, 2023. Т. V. № 2. С. 25–40.

*For references:*

Yu. Otrosh, R. Mayboroda, N. Rashkevich, A. Romin. (2023). Research of progressive collapsing calculation methods. Mechanics and Mathematical Methods. V(2). 25–40.

UDK 624.04

## EXPERIMENTAL STUDIES OF SERIAL ROAD-AIRPORT REINFORCED CONCRETE SLAB

M. Surianinov<sup>1</sup>, I. Korneeva<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odessa State Academy of Construction and Architecture*

**Abstract.** The results of experimental studies of the load-bearing capacity and crack resistance of the serially produced road-airfield reinforced concrete slab PAG, manufactured at Velikodolinsky Reinforced Concrete Plant LLC by order of the Odessa State Academy of Construction and Architecture, are presented. In accordance with the regulatory documents in force in Ukraine, one of two possible loading schemes was considered — with a load by a concentrated force applied on the cantilever part of the slab. The slab was tested on a specially made stand, which consists of four support posts connected in pairs by beams on which the slab rested. The load was applied along the width of the slab in steps — 0.04 from the destructive load, along two concentrated vertical stripes. Each load stage ended with a five-minute hold, at the beginning and end of which readings were taken on the measuring instruments. All tests were carried out using two 30t jacks and a 50t dynamometer. The principle of operation of the jack was that its lower plane pressed on a two-level cross-beam system, and through it the load was distributed onto the slab. During testing, the applied load, deflections and deformations were recorded on the slabs. Dial indicators and deflectometers were used as measuring instruments. The process of crack formation on the surfaces of the slabs was observed using a Brinell tube in the places of the greatest opening of the cracks.

As a result of the tests, the load-bearing capacity of the slab was 163.2 kN with a bending moment of 78.3 kNm. The load corresponding to the onset of cracking is 86.4 kN with a bending moment of 36.9 kNm. The maximum crack opening width was 1.0 mm. Based on the indicator readings, graphs of the dependence of relative deformation on load were constructed. Graphs of the dependence of deflections on load are constructed using data from two deflection meters. Before the first crack appears, the maximum deflection of the slab is 12.0% of the deflection recorded at the end of the tests.

**Keywords:** reinforced concrete, PAG slab, load-bearing capacity, deformability, crack resistance, experimental studies.

## ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ СЕРІЙНОЇ ДОРОЖНО-АЕРОДРОМНОЇ ЗАЛІЗОБЕТОННОЇ ПЛИТИ

Сур'янінов М. Г.<sup>1</sup>, Корнеєва І. Б.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація.** Наведено результати експериментальних досліджень несучої здатності та тріщиностійкості дорожньо-аеродромної залізобетонної плити ПАГ, що серійно випускається, виготовленої на ТОВ «Великодолинський завод ЗБК» на замовлення Одеської державної академії будівництва та архітектури. Відповідно до нормативних документів, що діють в Україні, розглянуто одну з двох можливих схем навантаження — при навантаженні зосередженою силою, прикладеною на консольній частині плити. Плита випробовувалась на спеціально виготовленому стенді, що складається з чотирьох опорних стійок, пов'язаних попарно між собою балками, на які спиралася плита. Навантаження прикладалося по ширині плити сходами — по 0,04 від руйнівного, по двох зосереджених вертикальних смуг. Кожна ступінь навантаження закінчувалася п'ятихвилинною витримкою, на початку і наприкінці якої

знімалися показання на вимірювальних приладах. Усі випробування проводилися з використанням двох домкратів 30 т та 50-тонного динамометра. Принцип роботи домкрата полягав у тому, що його нижня площина тиснула на дворівневу перехресно-балкову систему, а через неї навантаження розподілялося на плиту. У процесі випробування плити фіксували прикладене навантаження, прогини та деформації. Як вимірювальні прилади використовувалися індикатори годинного типу і прогиноміри. Процес тріщиноутворення на поверхнях плит спостерігався за допомогою трубки Брінелля у місцях найбільшого розкриття тріщин.

В результаті випробувань несуча здатність плити склала 163,2 кН при згинальному моменті 78,3 кНм. Навантаження, що відповідає початку тріщиноутворення, дорівнює 86,4 кН при згинальному моменті 36,9 кНм. Максимальна ширина розкриття тріщин становила 1,0 мм. За показаннями індикаторів побудовано графіки залежності відносної деформації від навантаження. Графіки залежності прогинів від навантаження, побудовані за даними двох прогиномірів. До появи першої тріщини максимальний прогин плити становить 12,0% від прогину, зафіксованого наприкінці випробувань.

**Ключові слова:** залізобетон, плита ПАГ, несуча здатність, деформативність, тріщиностійкість, експериментальні дослідження.

## 1 INTRODUCTION

PAG series slabs (smooth airfield slab) are widely used in the construction of runways and airfield sites, as well as in road construction. Such slabs are used to create platforms and roads designed to accommodate heavy equipment. Such slabs are used on construction sites, especially those where the capabilities of a tower crane cannot be dispensed with. As you know, the design of such a crane is designed in such a way that it can easily move along rail tracks. And it is the airfield slab that often becomes the basis for arranging a site for rails.

Of course, the main purpose of PAG slabs is runways and airfield sites. Practice shows that such plates can withstand a load of 50-80 tons, which ensures safe movement of any aircraft along the runway. An important quality of PAG is the preservation of ideal condition even under extreme climatic conditions: severe frosts, exposure to precipitation, abundant sunlight. Such unique properties and a wide range of applications attract special attention from scientists and operators in different countries who strive to constantly improve the characteristics of PAG slabs.

## 2 LITERATURE ANALYSES AND PROBLEM STATEMENT

Experimental studies of airfield slabs, as well as methods for their calculation, are very diverse. Relevant work is being carried out in many countries, but it should be noted that testing PAG slabs requires special equipment, is labor-intensive and expensive. Most tests of airfield slabs are full-scale tests, which can be static (under the action of stepwise applied static loads) or dynamic (under the action of repeatedly repeated moving loads). Such tests are usually carried out at airfields. Tests in laboratory conditions are carried out extremely rarely.

The US Federal Aviation Administration has tested coatings with three different flexural strength limits for two base options. The formation of cracks near transition seams was considered. Sections of the pavement were tested using a moving load simulating an aircraft [1]. The results of full-scale accelerated tests to assess the remaining service life of a rigid airfield pavement at Fort Worth Meacham International Airport, USA are presented in [2]. Full-scale fatigue tests of 15 large-scale slabs with four different types of foundations are described in [3]. The condition of the slabs was monitored using temperature sensors and strain gauges [4] over a two-year period from the moment they were laid at Incheon International Airport (Incheon, South Korea). No less interesting field studies are described in [5-7] and a number of other works.

Now about laboratory tests. The article [8] describes the evolution of precast concrete pavements in different countries and, in particular, in the USA. An overview of the results of accelerated loading tests using a heavy vehicle simulator is presented. In [9], the results of experimental studies of the load-bearing capacity of reinforced concrete road surface slabs, prestressed slabs and threshold unevenness of the test site are presented. The influence of incomplete contact of the PAG slab with the base on the stress-strain state of both the slab itself and its base is considered in [10]. In [11] the results of tests of sixteen airfield slabs for fatigue strength are presented. The article [12] is devoted to the same problem.

## 3 PURPOSE AND OBJECTIVES OF THE STUDY

The purpose of this work is to experimentally study the load-bearing capacity and crack resistance of a serial road-airfield reinforced concrete slab PAG in laboratory conditions.

## 4 MATERIALS AND METHODS OF RESEARCH

We studied a serial reinforced concrete slab 1P30-18-30, manufactured at Velikodolinsky Reinforced Concrete Plant LLC by order of the Odessa State Academy of Construction and Architecture (OSACA). The mass of the slab was 2.2 tons, overall dimensions were 3000x1750x170 mm. For reinforcement, type AI reinforcement KR5, KR11, with a diameter of 12 mm, was used [13]. The load was applied in small steps to study in detail the process of deformation of the slab. At each stage, instrument readings were recorded twice, and also, starting from the moment of formation of the first crack, the opening width of the cracks was measured. Dial indicators, deflectometers, and a Brinell tube were used as measuring instruments [14]. According to the regulatory documents in force in Ukraine [15], airfield slabs (like road slabs) are calculated according to two loading schemes — with a load by a concentrated force applied in the middle of the span, and with a load by a concentrated force applied on the console. Here we considered a cantilever loading scheme. The tests were carried out in the laboratory of the Department of Structural Mechanics of OSACA.

## 5 RESEARCH RESULTS

For testing, a special stand was developed, which consists of four support posts connected in pairs by beams. The road slab rested on the beams. The load was applied along the width of the slab in steps — 0.04 from the destructive load, along two concentrated vertical stripes. Each load stage ended with a five-minute hold, at the beginning and end of which readings were taken on the measuring instruments.

All tests were carried out using two 30t jacks and a 50t dynamometer. The principle of operation of the jack was that its lower plane pressed on a two-level cross-beam system, and through it the load was distributed onto the slab (Fig. 1).

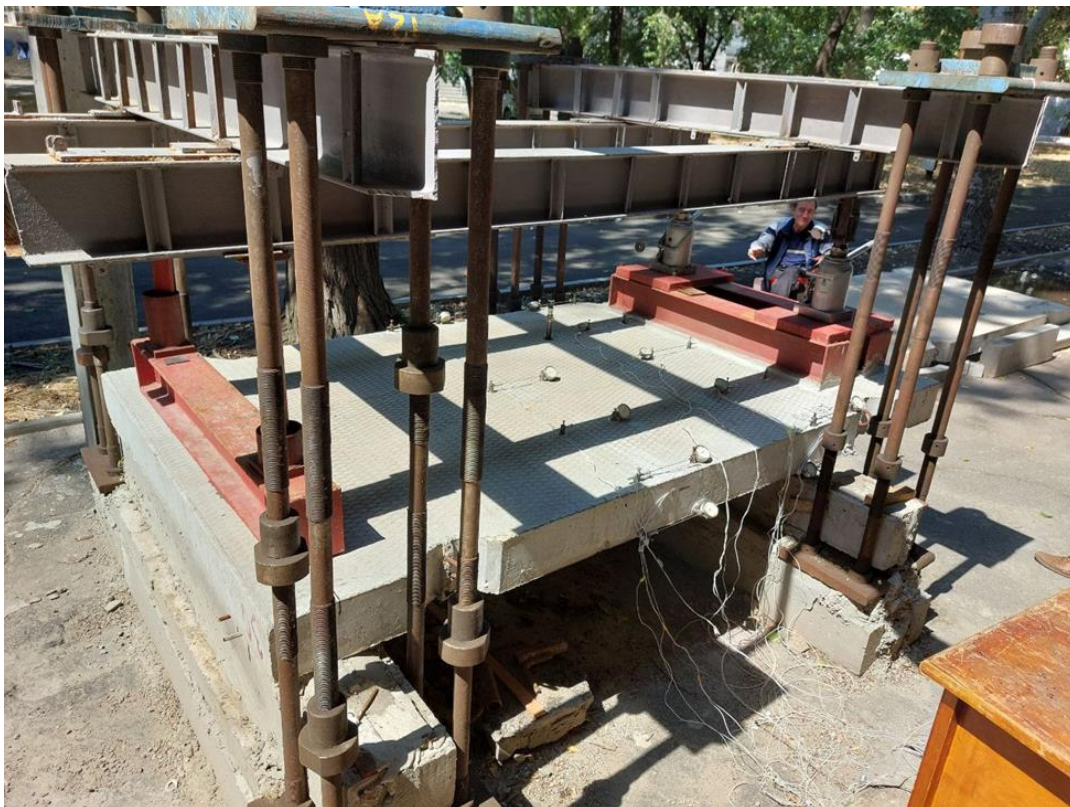


Fig. 1. Test bench

During the test of the slab (the loading diagram is shown in Fig. 2), the applied load, deflections and deformations were recorded. Deformations were measured using dial indicators with a scale of 0.01 mm and a base of 24 cm in the cantilever part of the slab, 36 cm in the span. The process of crack formation on the surfaces of the slabs was observed using a Brinell tube in the places of the greatest opening of the cracks. The Brinell tube division value was 0.1 mm.

In accordance with the accepted loading scheme, two rows of indicators were installed on the upper surface of the slab (Fig. 3). The first group of seven indicators ( $2i - 6i$ ) is installed in the upper span of the slab, and the second group ( $9i - 13i$ ) is installed on the cantilever loading area. Indicators  $8i, 14i$  were mounted on the side faces in the support area of the cantilever section. A pair of indicators  $1i, 7i$  recorded the deformation of the compressed zone in the span of the slab.

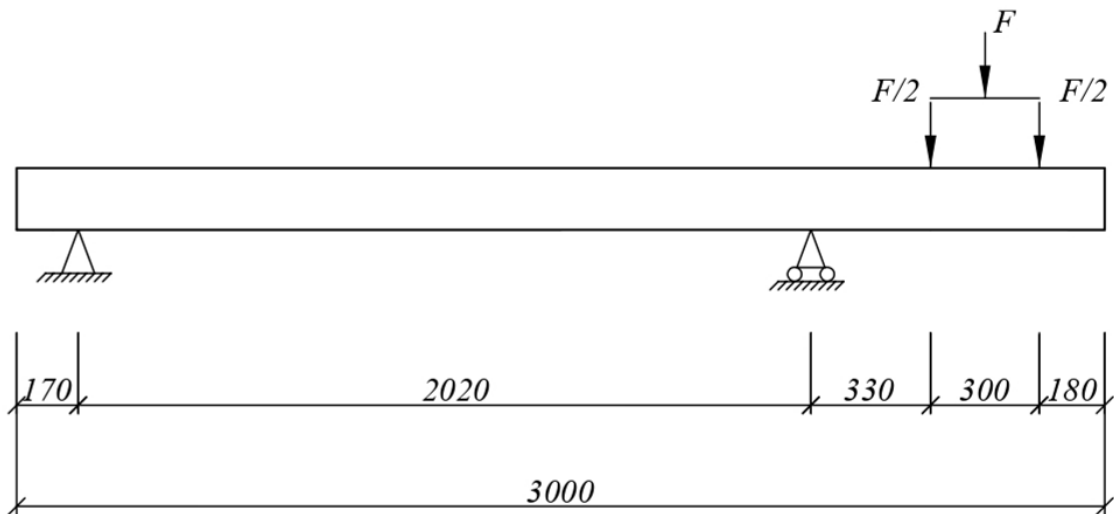


Fig. 2. Cantilever loading scheme

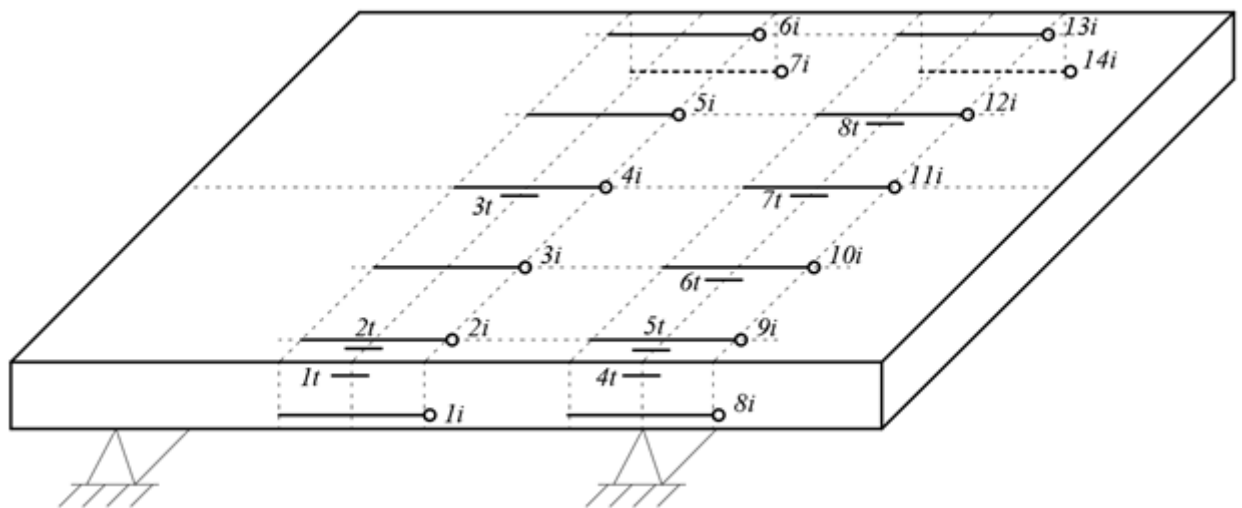


Fig. 3. Indicator location

As a result of the tests, the load-bearing capacity of the slab was 163.2 kN with a bending moment of 78.3 kNm.

The load corresponding to the onset of cracking is 86.4 kN with a bending moment of 36.9 kNm.

## 6 DISCUSSION OF RESEARCH FINDINGS

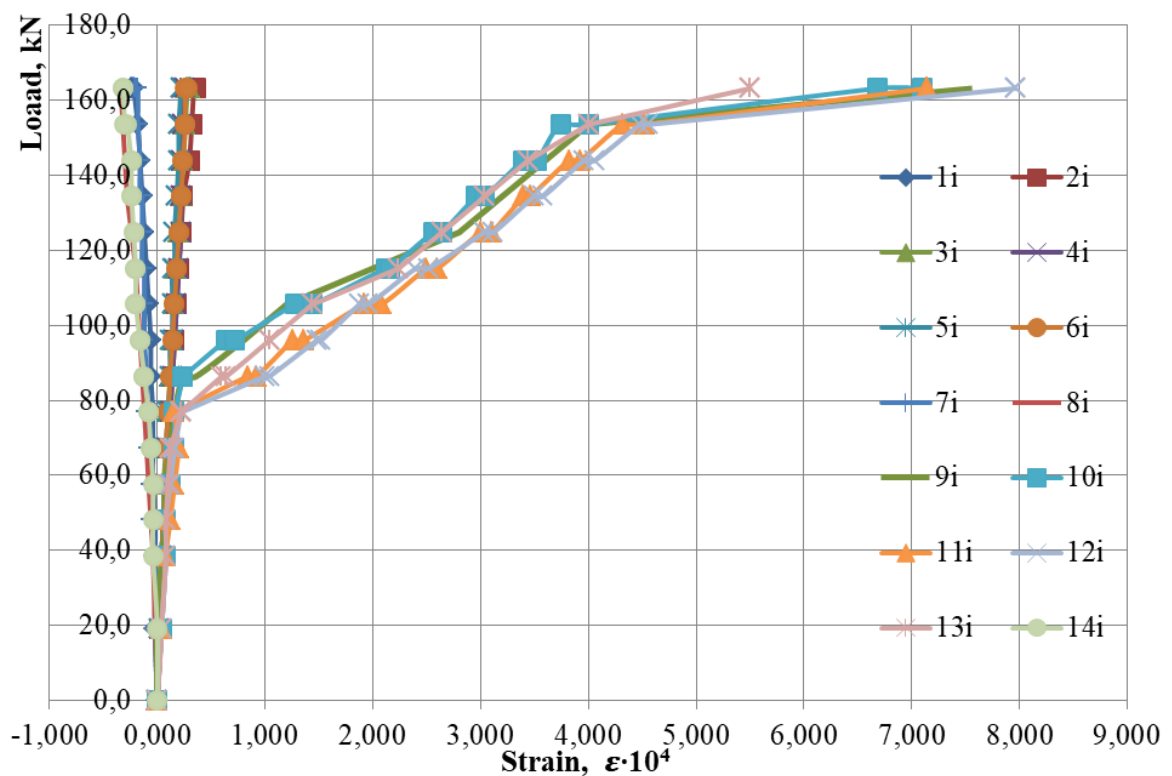
The test results obtained at each loading stage are presented in table 1.

**Table 1**

Slab test results

Load stage number	Load, kN	Crack opening width, mm	
		Initial	Ultimate
1	19,2		
2	38,4		
3	48,0		
4	57,6		
5	67,2		
6	76,8	1 – 0,1	1 – 1,0
7	86,4		
8	96,0	2 – 0,1	2 – 0,5
9	105,6	3 – 0,05	3 – 1,0
10	115,2	4, 5, 6 – 0,1	4, 5, 6 – 0,1
11	124,8		
12	134,4		
13	144,0	7 – 0,05	7 – 0,05
14	153,6	8 – 0,05	8 – 0,05
15	163,2	9 – 0,05	9 – 0,05

In Fig. 4 shows graphs of the dependence of relative deformation on load, constructed according to indicator readings.



**Fig. 4.** Relative deformation according to indicator readings

Graphs of the dependence of deflections on load, constructed using data from two deflectometers, are shown in Fig. 5.

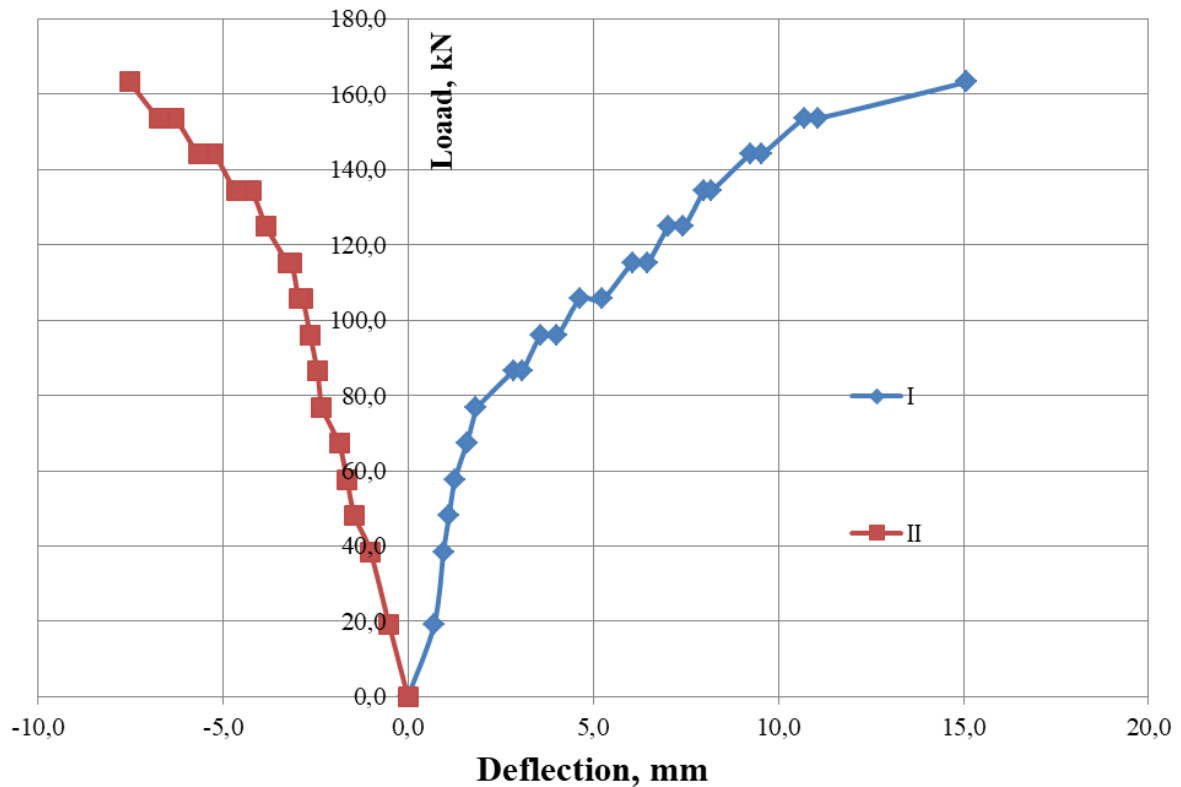


Fig. 5. Slab deflections

Before the first crack appears, the maximum deflection of the slab is 12.0% of the deflection recorded at the end of the tests.

## 7 CONCLUSIONS

Thus, experimental studies of the load-bearing capacity and crack resistance of the commercially produced road and airfield reinforced concrete slab PAG, manufactured at Velikodolinsky Reinforced Concrete Plant LLC, were carried out under laboratory conditions. The tests were carried out on a specially made stand.

Dial indicators and deflectometers were used as measuring instruments. The process of crack formation on the surfaces of the slabs was observed using a Brinell tube in the places of the greatest opening of the cracks.

As a result of the tests, the load-bearing capacity of the slab was 163.2 kN with a bending moment of 78.3 kNm. The load corresponding to the onset of cracking is 86.4 kN with a bending moment of 36.9 kNm. The maximum crack opening width was 1.0 mm. Based on the indicator readings, graphs of the dependence of relative deformation on load were constructed. Graphs of the dependence of deflections on load are constructed using data from two deflection meters. Before the first crack appears, the maximum deflection of the slab is 12.0% of the deflection recorded at the end of the tests.



## References

1. Field cracking performance of airfield rigid pavements, *Journal of Traffic and Transportation Engineering (English Edition)*, Volume 4, Issue 4, 2017, Pp. 380-387, <https://doi.org/10.1016/j.jtte.2017.05.010>.
2. Boo Hyun Nam, In-situ super accelerated pavement test for the fatigue evaluation of in-service airfield rigid pavement – A case study at Meham Airport, *Construction and Building Materials*, Volume 353, 2022, <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2022.129115>.
3. Experimental study on fatigue strength of airport concrete pavement slab. Cheng Hu, Xingzhong Weng, Jun Zhang, Wei Xu, Bo Qu and Lihai Su. *Journal: Construction and Building Materials*, 2021, Volume 270, <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.121493>.
4. Park H-W, Kim D-H, Shim C-S, Jeong J-H. Behavior of Airport Concrete Pavement Slabs Exposed to Environmental Loadings. *Applied Sciences*. 2020; 10(7):2618. <https://doi.org/10.3390/app10072618>.
5. Roswurm, S. J., & Ramseyer, C. (2019). Developing Large Slab Airport Runways for the Next Century. *Transportation Research Record*, 2673(6), 524-535. <https://doi.org/10.1177/0361198119849577>
6. Linek Malgorzata and Piotrowska-Nowak Patrycja 2019 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 603 032042. DOI 10.1088/1757-899X/603/3/032042
7. Gkyrtis, K.; Armeni, A.; Plati, C.; Loizos, A. Structural Performance Assessment of Airfield Concrete Pavements Based on Field and Laboratory Data. *Infrastructures*, 2021, 6, 173. <https://doi.org/10.3390/infrastructures6120173>.
8. Kohler Erwin du Plessis, Louw Smith, Peter Harvey, John Pyle, Tom Kohler, Plessis, Du Pyle, Harvey. *Precast Concrete Pavements and Results of Accelerated Traffic Load Test*. Precast/Prestressed Concrete Institute, 2020. Pp. 263–281.
9. Semenyuk S. D., Kumashov R. V., Ketner E. A. Load-bearing and operational capacity of reinforced concrete slabs for road surfaces. *Science and Budivnitstvo*, 2016. Vol. 8. Pp. 11–18. [in Russian].
10. Artemova L.Yu. On the issue of incomplete contact of the slab with the base. Design and calculation of the strength of airport structures and structures: a collection of scientific papers. Publication MADI (TU), 1999. 94 p. [in Russian].
11. Roesler, J. R., Hiller, J. E., & Littleton, P. C. (2005). Large-scale airfield concrete slab fatigue tests. 8th International Conference on Concrete Pavements: Innovations for Concrete Pavement: Technology Transfer for the Next Generation; Vol. 3. Pp. 1247-1268.
12. Yuan J, Li W, Li Y, Ma L, Zhang J. Fatigue Models for Airfield Concrete Pavement: Literature Review and Discussion. *Materials (Basel)*. 2021;14(21):6579. Published 2021 Nov 2. doi:10.3390/ma14216579
13. DSTU 3760:2019. Rental of reinforcement for reinforced concrete structures. Deep technical minds. [in Ukrainian].
14. DSTU B.V.2.6–137:2010 (GOST 25912.2–91, MOD). Constructions of budins and sporades. Front-stressed reinforced concrete slabs PAG-18 for airfield pavement. Construction. [Chinny edition 2011–07–01]. TOV NTK "Budstandart", 2011. 8 p. (Information and documentation). [in Ukrainian].
15. Reinforced concrete slabs with unstressed reinforcement for covering local roads. DSTU B.V.2.6-122:2010. [Chinny edition 2011-07-01]. K.: Ministry of Regional Development of Ukraine, 2011. 23 p. (National standard of Ukraine). [in Ukrainian].

## Література

1. Field cracking performance of airfield rigid pavements, *Journal of Traffic and Transportation Engineering (English Edition)*, Volume 4, Issue 4, 2017, Pp. 380-387, <https://doi.org/10.1016/j.jtte.2017.05.010>.
2. Boo Hyun Nam, In-situ super accelerated pavement test for the fatigue evaluation of in-service airfield rigid pavement – A case study at Mechem Airport, *Construction and Building Materials*, Volume 353, 2022, <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2022.129115>.
3. Experimental study on fatigue strength of airport concrete pavement slab. Cheng Hu, Xingzhong Weng, Jun Zhang, Wei Xu, Bo Qu and Lihai Su. *Journal: Construction and Building Materials*, 2021, Volume 270, <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.121493>.
4. Park H-W, Kim D-H, Shim C-S, Jeong J-H. Behavior of Airport Concrete Pavement Slabs Exposed to Environmental Loadings. *Applied Sciences*. 2020; 10(7):2618. <https://doi.org/10.3390/app10072618>.
5. Roswurm, S. J., & Ramseyer, C. (2019). Developing Large Slab Airport Runways for the Next Century. *Transportation Research Record*, 2673(6), 524-535. <https://doi.org/10.1177/0361198119849577>
6. Linek Malgorzata and Piotrowska-Nowak Patrycja 2019 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 603 032042. DOI 10.1088/1757-899X/603/3/032042
7. Gkyrtis, K.; Armeni, A.; Plati, C.; Loizos, A. Structural Performance Assessment of Airfield Concrete Pavements Based on Field and Laboratory Data. *Infrastructures*, 2021, 6, 173. <https://doi.org/10.3390/infrastructures6120173>.
8. Kohler Erwin du Plessis, Louw Smith, Peter Harvey, John Pyle, Tom Kohler, Plessis, Du Pyle, Harvey. *Precast Concrete Pavements and Results of Accelerated Traffic Load Test*. Precast/Prestressed Concrete Institute, 2020. Pp. 263–281.
9. Семенюк С. Д., Кумашов Р. В., Кетнер Э.А. Несущая и эксплуатационная способность железобетонных плит покрытия автомобильных дорог. *Наука та будівництво*, 2016. Вип. 8. С. 11–18.
10. Артемова Л.Ю. К вопросу неполного контакта плиты с основанием. Проектирование и расчет прочности конструкций и сооружений аэропортов: сборник научных трудов. Издание МАДИ (ТУ), 1999. 94 с.
11. Roesler, J. R., Hiller, J. E., & Littleton, P. C. (2005). Large-scale airfield concrete slab fatigue tests. 8th International Conference on Concrete Pavements: Innovations for Concrete Pavement: Technology Transfer for the Next Generation; Vol. 3. Pp. 1247-1268.
12. Yuan J, Li W, Li Y, Ma L, Zhang J. Fatigue Models for Airfield Concrete Pavement: Literature Review and Discussion. *Materials (Basel)*. 2021;14(21):6579. Published 2021 Nov 2. doi:10.3390/ma14216579
13. ДСТУ 3760:2019. Прокат арматурний для залізобетонних конструкцій. Загальні технічні умови.
14. ДСТУ Б. В.2.6–137:2010 (ГОСТ 25912.2–91, MOD). Конструкції будинків і споруд. Плити залізобетонні попередньо напружені ПАГ–18 для аеродромного покриття. Конструкція. [Чинний від 2011–07–01]. ТОВ НТК "Будстандарт", 2011. 8 с. (Інформація та документація).
15. Плити залізобетонні з ненапруженою арматурою для покриття міських доріг. ДСТУ Б.В.2.6-122:2010. [Чинний від 2011-07-01]. К.: Мінрегіонбуд України, 2011. 23 с. (Національний стандарт України).

### **Mykola Surianinov**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Doctor of Technical Sciences, Professor  
Didrihsona str., 4, Odessa, Ukraine, 65029



sng@odaba.edu.ua

ORCID: 0000-0003-2592-5221

**Irina Korneeva**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Ph.D., Associate Professor

Didrihsona str., 4, Odessa, Ukraine, 65029

korneevairinaborisovna@gmail.com

ORCID: 0000-0002-0104-6938

*For references:*

M. Surianinov, I. Korneeva. (2023). Experimental studies of serial road-airport reinforced concrete slab. Mechanics and Mathematical Methods. V(2). 41–50.

*Для посилань:*

Суриянінов М. Г., Корнеєва І. Б. Експериментальні дослідження серійної дорожно-аеродромної залізобетонної плити. Механіка та математичні методи, 2023. Т. V. № 2. С. 41–50.

УДК 666.9.022

## ВПЛИВ МЕХАНОХІМІЧНОЇ АКТИВАЦІЇ КОМПОЗИЦІЙНОГО ЦЕМЕНТУ НА МІЦНІСТЬ БУДІВЕЛЬНОГО РОЗЧИНУ

Барабаш І. В.<sup>1</sup>, Пірогов Д. О.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Анотація.** В статті розглянуті питання, які пов'язані з використанням в технології виготовлення розчинових сумішей та будівельних розчинів на їх основі швидкісних змішувачів, робота яких викликає механохімічну активацію в'язучого. Використаний в роботі роторний протитечійний млин виконує роль активатора поверхневої зони як зерен портландцементу, так і зерен кварцового піску і, таким чином, сприяє інтенсифікації процесів структуроутворення як цементного тіста, так і будівельного розчину на його основі. Виходячи з того, що одним із перспективних напрямів зниження витрат на активацію цементу є зниження енергоємності самого процесу диспергації, то використання відносно малоенергоємних роторних млинів може розглядатися як ефективний спосіб підвищення активності в'язучого.

Після сумісної активації портландцементу та немолотого кварцового піску (кількість якого корегувалася від 0 до 50 % маси цементу; термін активації - 300 сек) були виготовлені зразки із рівнов'язкого цементного тіста. Експериментально встановлено, що максимальна міцність цементного каменю в 28-и денному віці досягалася при використуванні композиційного цементу з 20 %-им вмістом активованого піску. Для визначення впливу досліджуваних факторів, таких, як витрата механоактивованого композиційного в'язучого, концентрації суперпластифікатору С-3 (0...1,5 %) та витрати мікрокремнезему (0...10 %) на міцність будівельного розчину в 2-х та 28-и денному віці, був проведений 3-х факторний експеримент. Встановлено, що в дослідженому періоді тверднення найбільший вплив на міцність на стиск для досліджених складів будівельного розчину (від 1:3 до 1:1) надає вміст в них механоактивованого композиційного цементу. Наступним за впливом на міцність будівельного розчину є витрата суперпластифікатору С-3. Зростання міцності на стиск будівельного розчину від введення до його складу мікрокремнезему не перевищує 10-15 %. Сумісний вплив механоактивації в'язучого і використання добавки С-3 забезпечує зростання міцності будівельного розчину (склад розчину 1:1) в 28-и денному віці з 43,5 МПа (неактивоване в'язуче; добавка С-3 відсутня) до 63 МПа, тобто майже на 45 %. Для будівельного розчину аналогічного віку з меншою витратою композиційного цементу (склад розчину 1:3) механоактивація в'язучого в присутності 1,5 % добавки С-3 забезпечує зростання міцності розчину на стиск з 21 МПа (в'язуче немеханоактивоване; С-3 =0 %) до 39 МПа.

**Ключові слова:** композиційний цемент, будівельний розчин, розчинова суміш, активація, протитечійний млин.

## INFLUENCE OF MECHANOCHEMICAL ACTIVATION OF COMPOSITE CEMENT FOR THE STRENGTH OF MORTAR

I. Barabash<sup>1</sup>, D. Pirogov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract.** The article discusses issues related to the use of technology for the production of mortar mixtures and mortars based on high-speed mixers, the operation of which causes mechanochemical activation of the binder. The rotary counterflow mill used in the work acts as an activator of the surface zone of both Portland cement grains and quartz sand grains and, thus, contributes to the intensification of the processes of structure formation of cement paste and mortar based on it. Based on the fact that one of the promising ways to reduce the cost of cement activation is

to reduce the energy intensity of the dispersion process itself, the use of relatively low-energy rotary mills can be considered as an effective way to increase the activity of the binder.

After the joint activation of Portland cement and unground quartz sand (the amount of which was adjusted from 0 to 50 % of the cement mass; activation period - 300 seconds), samples were made from equal-viscosity cement paste. It was experimentally established that the maximum strength of cement stone at 28 days of age was achieved when using composite cement with a 20 % content of activated sand. To determine the influence of the studied factors, such as the consumption of mechanically activated composite binder, the concentration of superplasticizer C-3 (0...1,5 %) and the consumption of microsilica (0...10 %) on the strength of the mortar in 2 and 28-day old, a 3-factor experiment was conducted. It was established that in the studied hardening period, the content of mechanically activated composite cement has the greatest influence on the compressive strength for the studied mortar compositions (from 1:3 to 1:1). The next most important influence on the strength of the mortar is the consumption of superplasticizer C-3. The increase in compressive strength of a mortar from the introduction of microsilica into its composition does not exceed 10-15 %. The combined effect of mechanical activation of the binder and the use of the C-3 additive ensures an increase in the strength of the mortar (mortar composition 1:1) at 28 days of age from 43,5 MPa (non-activated binder; no C-3 additive) to 63 MPa, that is, almost by 45 %. For a mortar of similar age with a lower consumption of composite cement (mortar composition 1:3), mechanical activation of the binder in the presence of 1,5 % C-3 additive ensures an increase in the compressive strength of the mortar from 21 MPa (non-mechanically activated binder; C-3 = 0 %) to 39 MPa.

**Keywords:** composite cement, mortar, mortar mixture, activation, counterflow mill.

## 1 ВСТУП

Цементний камінь, який має в своєму складі мелений кварцовий пісок, характеризується відносно незначними об'ємними деформаціями і володіє високою міцністю та корозійною стійкістю. Вміст меленого кварцового піску в цементі, який використовується для виготовлення будівельних розчинів і які твердіють в нормальних умовах, складає 20...40 %. Кварцовий пісок, який використовується в якості мінеральної добавки до портландцементу, повинен характеризуватися високим вмістом кремніюкислоти (не менше 90 %), а вміст часток менше 0,05 мм не повинен перевищувати 3 %. В умовах традиційної технології виготовлення будівельних розчинів мелений кварцовий пісок практично не вступає в хімічну взаємодію з продуктами гідратації в'язучого і введення його до складу цементу викликає зниження міцності як цементного каменю, так і будівельного розчину на його основі. Тому особливо актуальним є пошук нових технологічних прийомів, які дозволяють активувати поверхневий шар як зерен кварцового піску так і часток цементу і, таким чином, прискорити процес структуроутворення тверднучої системи і зростання її міцності.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Використання в технології виготовлення портландцементу мінеральних добавок з метою економії в'язучого, регулювання властивостей будівельних розчинів і бетону є одним із найбільш ефективних технологічних прийомів, який з успіхом застосовується в будівельній практиці [1-3]. Серед мінеральних добавок природного походження особливе місце займають кварцові піски, які при спільному подрібненні з портландцементом утворюють композиційний цемент [4-6]. Композиційний цемент сприяє формуванню більш щільної дрібнопористої структури цементного каменю, підвищенню його водонепроникності та морозостійкості [7-9]. Покращення властивостей цементного каменю на композиційному цементі, на наш погляд, обумовлено тим, що частки кварцового піску, маючи достатньо високу міцність, рівномірно розподіляються в процесі активації в порожнинах між зернами цементу, виконуючи роль центрів кристалізації і після завершення процесу гідратації остаються рівномірно розподіленими в камені, покращуючи його структуру. Саме наявність значної кількості центрів кристалізації забезпечує утворення щільної структури цементного каменю. В технології виготовлення будівельних розчинів значна увага приділяється як вивченню властивостей розчинових сумішей, так і раціональним способам їх виготовлення для отримання будівельних розчинів заданої якості [10, 11]. В практиці приготування розчинових сумішей широке розповсюдження одержали швидкісні змішувачі різних конструкцій, робота яких викликає активацію в'язучого. Перспективним напрямком слід вважати механохімічну обробку портландцементу в трибозмішувачах особливих конструкцій - струйних млинах, які досить ефективно забезпечують зростання поверхневої енергії часток в'язучого. Виходячи з того, що найбільш перспективним напрямом зниження собівартості активації цементу є зниження енергоємності самого процесу активації, то використання таких агрегатів може розглядатися як безальтернативний спосіб підвищення активності в'язучого. Перспективним напрямом слід рахувати механохімічну обробку композиційного портландцементу в спеціально сконструйованому роторному протитечійному млині, який є різновидом струйних млинів [12].

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Вище викладене зумовило мету даної роботи, яка полягає в експериментальному підтвердженні можливості підвищення міцності будівельного розчину за рахунок використання механоактивованого композиційного цементу.

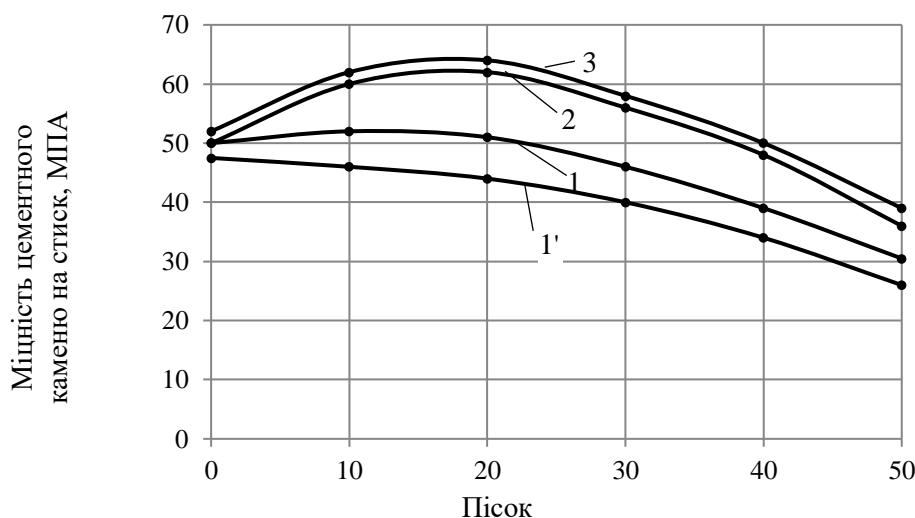
Сумісна активація портландцементу та немолотого кварцового піску здійснювалася в роторному протитечійному млині протягом 60, 180, 300 і 600 сек. Концентрація кварцового піску в композиційному цементі коливалась від 0 до 50 % (по масі). Для контролю виготовлялось змішане в'язуче (цемент + кварцовий пісок), яке механоактивації не підлягало. Концентрація кварцового піску в змішаному в'язучому коливалась в тому ж діапазоні (від 0 до 50 % по масі).

Після визначення оптимального за складом композиційного цементу (критерій - максимальна міцність на стиск в 28-и денному віці) був проведений 3-х факторний експеримент з метою визначення впливу досліджуваних факторів (витрата композиційного в'язучого, концентрація суперпластифікуючої добавки С-3 та витрати мікрокремнезему) на міцність будівельного розчину в 2-х та 28-и денному віці.

### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

В дослідженнях в якості в'язучого використовувався портландцемент ПЦ П/А-Ш-500, який відповідає вимогам ДСТУ Б В. 2.7-46:2010 «Цементи загальнобудівного призначення. Технічні умови».

Для визначення оптимального складу композиційного цементу здійснювалася механохімічна активація портландцементу, а також портландцементу з добавкою кварцового піску (в кількості від 10 до 50 % його маси) впродовж 60, 180, 300 і 600 сек. За критерій оптимальності була прийнята максимальна міцність цементного каменю в 28-и денному віці. Для цього досліджувалася міцність на стиск зразків-балочок розміром 40x40x160 мм, які були виготовлені з використанням композиційного цементу. Витрата води визначалася діаметром розпливу цементного тіста на приборі Суттарда в діапазоні  $90 \pm 5$  мм. Наведені на рис. 1 експериментальні криві свідчать про те, що активація композиційного цементу протягом 300 сек викликає підвищення міцності на стиск цементного каменю в зоні максимуму з 52 МПа (термін активації 60 сек) до 62 МПа (термін активації 300 сек).



**Рис. 1.** Вплив вмісту кварцового піску на міцність цементного каменю в віці 28-и днів:  
1,2,3 - цементний камінь на композиційному цементі, активованого протягом 60, 300 і 600 сек;  
1' - цементний камінь на немеханоактивованому портландцементі з добавкою кварцового піску

Зростання терміну активації до 600 сек незначно впливає на зростання міцності цементного каменю і не перевищує 3...5 %. Слід відмітити неоднозначний вплив вмісту кварцового піску на міцність цементного каменю для різних технологій виготовлення в'язучого. Якщо для контрольних зразків характерно зниження міцності на стиск при зростанні вмісту в цементі кварцового піску, то для цементного каменю на композиційному цементі спостерігається підвищення міцності із зростанням витрати кварцового піску. Максимальний приріст міцності спостерігається при введенні в композиційний цемент 20 % кварцового піску. В цьому разі міцність на стиск цементного каменю стає рівною 62 МПа (термін активації 300 сек), що на 10 % перевищує міцність бездобавочного цементного каменю на механоактивованому портландцементі. Слід відмітити, що міцність цементного каменю на композиційному цементі з 20 %-ою добавкою кварцового піску майже на 30 % перевищує міцність цементного каменю на бездобавочному портландцементі, який механоактивації не підлягав. В подальшому в дослідженнях використовувався композиційний портландцемент, який отримувался механоактивацією протягом 300 сек суміші портландцементу з 20%-ою добавкою кварцового піску.

Представляв інтерес з'ясувати вплив витрати композиційного цементу на міцність будівельного розчину. Поряд з цим фактором варіювалися також наступні незалежні змінні: витрата суперпластифікатору С-3 та мікрокремнезему.

Для вирішення поставленої задачі був реалізований 3-х факторний експеримент з 15-ти точковим симетричним планом. В експерименті варіювалися такі фактори складу:

$X_1$  – цементно-піщане відношення від 1:3 до 1:1;

$X_2$  – кількість суперпластифікатору С-3 (в % від маси цементу)  $-0,75 \pm 0,75$ ;

$X_3$  – кількість мікрокремнезему (в % від маси цементу)  $-5 \pm 5$ .

Для контролю проводився планований експеримент на немеханоактивованому портландцементі з 20 %-ою добавкою кварцового піску. Всі досліджені розчинні суміші характеризувалися рівною рухомістю, яка складала 130 мм розпливу конусу (після 30-и струшувань на струшуючому столику).

План експерименту і склади досліджених будівельних розчинів приведені в таблиці 1.

**Таблиця 1**

План експерименту і склади будівельних розчинів

№ з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	Склад будівельної розчинової суміші			
				В'язуче/ Пісок	С-3, %	МК, %	В'язуче, г	Пісок кв., г	С-3, г	Мікро- кремнезем, г
1	-	-	-	0,33	0	0	500	1500	0	0
2	-	+	-	0,33	1,5	0	500	1500	6,0	0
3	0	0	-	0,50	0,75	0	667	1333	3,75	0
4	+	-	-	1,00	0	0	1000	1000	0	0
5	+	+	-	1,00	1,5	0	1000	1000	12,0	0
6	-	0	0	0,33	0,75	5	500	1500	3,0	20,0
7	0	-	0	0,50	0	5	667	1333	0	25,0
8	0	0	0	0,50	0,75	5	667	1333	3,75	25,0
9	0	+	0	0,50	1,5	5	667	1333	7,5	25,0
10	+	0	0	1,00	0,75	5	1000	1000	6,0	40,0
11	-	-	+	0,33	0	10	500	1500	0	40,0
12	-	+	+	0,33	1,5	10	500	1500	6,0	40,0
13	0	0	+	0,50	0,75	10	667	1333	3,75	50,0
14	+	-	+	1,00	0	10	1000	1000	0	80,0
15	+	+	+	1,00	1,5	10	1000	1000	12,0	80,0



В результаті статистичної обробки експериментальних даних одержані поліноміальні моделі (1–4) залежності міцності будівельного розчину на стиск (МПа) від досліджуваних факторів:

$$R_{\text{ст}}^{\text{м.2}} = 36,3 + 7,9 \cdot X_1 - 4,6 \cdot X_1^2 + 0,3 \cdot X_1 \cdot X_2 + 0,2 \cdot X_1 \cdot X_3 + 4,7 \cdot X_2 - 0,6 \cdot X_2^2 + 0,5 \cdot X_2 \cdot X_3 + 2,2 \cdot X_3 - 0,2 \cdot X_3^2 \quad (1)$$

$$R_{\text{ст}}^{\text{м.28}} = 51,2 + 12,0 \cdot X_1 - 6,6 \cdot X_1^2 - 0,5 \cdot X_1 \cdot X_2 + 0,6 \cdot X_1 \cdot X_3 + 5,5 \cdot X_2 + 0,8 \cdot X_2^2 + 0,6 \cdot X_2 \cdot X_3 + 3,1 \cdot X_3 - 1,0 \cdot X_3^2 \quad (2)$$

$$R_{\text{ст}}^{\text{к.2}} = 22,1 + 7,7 \cdot X_1 - 1,7 \cdot X_1^2 + 1,4 \cdot X_1 \cdot X_2 + 0,2 \cdot X_1 \cdot X_3 + 4,4 \cdot X_2 + 0,8 \cdot X_2^2 + 0,7 \cdot X_2 \cdot X_3 + 1,4 \cdot X_3 + 0,3 \cdot X_3^2 \quad (3)$$

$$R_{\text{ст}}^{\text{к.28}} = 40,3 + 10,6 \cdot X_1 - 4,8 \cdot X_1^2 - 0,6 \cdot X_1 \cdot X_2 + 0,5 \cdot X_1 \cdot X_3 + 4,4 \cdot X_2 + 0,4 \cdot X_2^2 + 0,7 \cdot X_2 \cdot X_3 + 2,3 \cdot X_3 + 0,1 \cdot X_3^2 \quad (4)$$

де  $R_{\text{ст}}^{\text{м.2}}$ ,  $R_{\text{ст}}^{\text{м.28}}$  – міцність будівельного розчину на композиційному механоактивованому портландцементі у 2-х денному та 28-и денному віці, МПа;

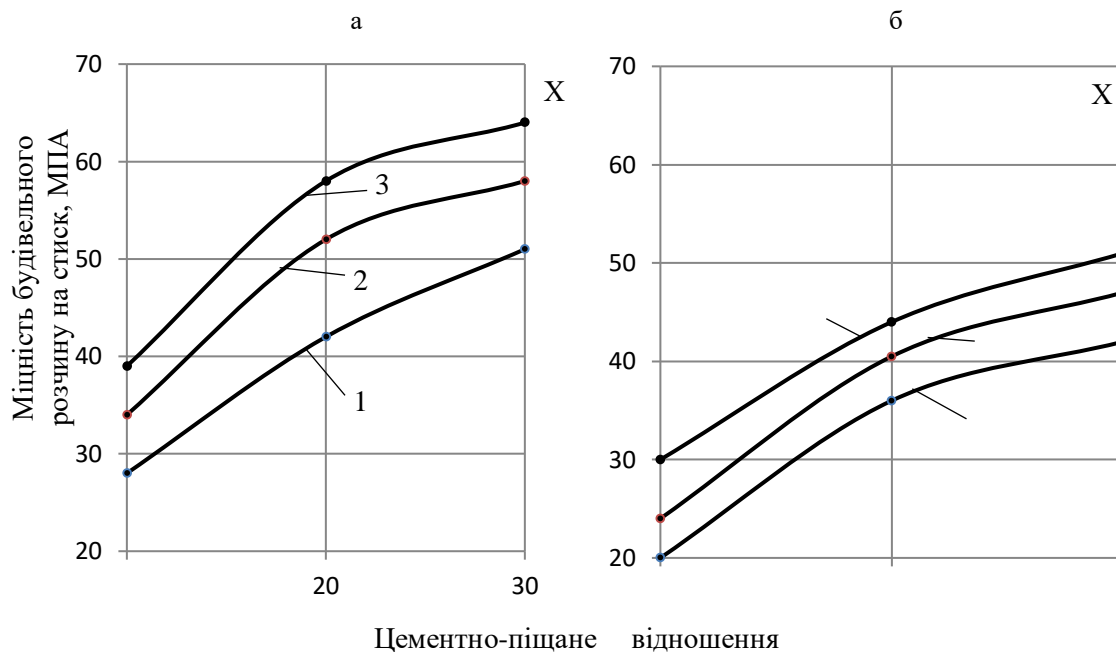
$R_{\text{ст}}^{\text{к.2}}$ ,  $R_{\text{ст}}^{\text{к.28}}$  – міцність будівельного розчину на традиційному (немеханоактивованому) портландцементі з добавкою 20 % немеленого кварцового піску, МПа.

Аналіз математичних моделей (1–4) показав, що по величині коефіцієнтів при варійованих факторах як на механоактивованому в'язучому, так і на в'язучому, яке не піддавалося механоактивації, найбільший вплив на міцність на стиск будівельного розчину в досліджуваному періоді тверднення надає вміст композиційного цементу в розчині.

Підтвердженням вищесказаного є графічні залежності (рис. 2), які відображають вплив витрати механоактивованого композиційного цементу в розчині на міцність будівельного розчину на стиск в 28-и денному віці.

Експериментально виявлено, що зростання вмісту композиційного цементу в будівельному розчині (від 1:3 до 1:1) приведе до зростання міцності на стиск розчину на механоактивованому в'язучому з 27 МПа до 52 МПа (С-3 = 0 %). Зростання витрати С-3 до 1,5 % маси цементу викликає зростання міцності будівельного розчину на механоактивованому в'язучому від 39 МПа до 63 МПа, тобто більше ніж на 60 %. Міцність розчину на стиск аналогічного за витратою в'язучого, але яке механоактивації не підлягало, не перевищує 51 МПа. Наступним за впливом на міцність будівельного розчину є витрата суперпластифікатора С-3. Зростання його кількості від 0 до 1,5 % викликає зростання міцності розчину на стиск в 28-и денному віці майже на 10 МПа (контроль) і на 12 МПа – на механоактивованому в'язучому. Введення до складу розчинової суміші мікрокремнезему викликає відносно менший приріст міцності на стиск (по відношенню до витрати С-3) і не перевищує 4...5 МПа. Сумісний вплив механоактивації в'язучого і введення добавки С-3 забезпечує зростання міцності будівельного розчину на композиційному цементі в 28-и денному віці (склад розчину 1:1) з 43,5 МПа (контроль) до 63 МПа, тобто майже на 45 %. Для будівельного розчину з меншою витратою композиційного цементу (склад розчину 1:3)

механоактивоване в'язуче в присутності 1,5 % С-3 забезпечує більш значне зростання міцності розчину на стиск - з 20,6 МПа (контроль) до 39 МПа, тобто майже в 1,9 рази.



**Рис. 2.** Вплив цементно-піщаного відношення на міцність будівельного розчину в 28 денному віці: 1,2,3 – витрата суперпластифікатора С-3 в кількості 0, 0,75 і 1,5 % від маси цементу, відповідно; а) в'язуче механоактивоване; б) в'язуче немеханоактивоване (контроль)

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Сумісна обробка в протитечійному млині портландцементу з добавкою кварцового піску (до 50 % маси в'язучого) забезпечує зростання міцності цементного каменю, що, на наш погляд, пов'язано із зростанням реакційної здатності як зерен цементу, так і активованої поверхні часток піску. Підвищення реакційної здатності компонентів в'язучого пов'язано з механічним руйнуванням поверхневої зони тонкодисперсних часток цементу та зерен піску в процесі контактної взаємодії між ними в повітряному турбулентному потоці протитечійного млина. Результати експериментальних досліджень дозволили оптимізувати як термін механоактивації, так і кількість кварцового піску в композиційному цементі, які в сукупності забезпечують одержання цементного каменю максимальної міцності.

Для визначення впливу витрати механоактивованого композиційного цементу, вмісту суперпластифікуючої добавки С-3 та витрати мікрокремнезему на міцність будівельного розчину був проведений 3-х факторний планований експеримент. По ефективності впливу на міцність будівельного розчину незалежні фактори розподілилися наступним чином:

- витрата композиційного в'язучого в складі будівельного розчину (в'язуче: кварцовий пісок) - в діапазоні від 1:3 до 1:1;
- витрата суперпластифікатора С-3;
- витрата мікрокремнезему.

Результати досліджень свідчать про ефективність механохімічної обробки композиційного цементу в протитечійному роторному млині. Механоактивоване таким чином композиційне в'язуче забезпечує зростання міцності будівельного розчину в 28-и денному віці від 1,4 до 1,9 рази (в порівнянні з контролем).

## 5 ВИСНОВКИ

1. Визначено, що механохімічна активація протягом 300 сек портландцементу з добавкою 20 % кварцового піску забезпечує одержання композиційного цементу з міцністю на стиск в 28-и денному віці 62 МПа, що майже на 30 % вище міцності цементного каменю на немеханоактивованому портландцементі без добавки кварцового піску.

2. Використання тільки механоактивації композиційного портландцементу сприяє підвищенню міцності будівельного розчину на стиск в середньому на 23-25 % (в порівнянні з міцністю розчину на цементному в'язучому, яке механоактивації не підлягало).

3. Сумісний вплив механоактивації і суперпластифікуючої добавки С-3 забезпечує зростання міцності будівельного розчину (склад 1:3) на композиційному цементі в 28-и денному віці майже в 1,9 рази (в порівнянні з міцністю розчину аналогічного складу на неактивованому в'язучому і без добавки С-3).

## Література

1. Кривенко П. В., Пушкарёва К.К., Гоц В.И., Ковальчук Г.Ю. Цементы и бетоны на основе топливных зол и шлаков. Киев: Экспресс-Полиграф, 2012. 258с.
2. Дворкін Л. Й., Дворкін О.Л., Мироненко А.В., Степасюк Ю.О. Бетон на малоклінкерному шлакопортландцементі. Будівельні матеріали та виробы, 2013. №4 С.15–18.
3. Саницький М. А., Кропивницька Т.П., Гев'юк І.М. Швидкотверднучі портландцементи з добавкою вапняку. Будівельні матеріали та виробы, 2019. №1/2 (100). С.34–37.
4. Соболев Х. С. Концепція застосування модифікованих композиційних цементів у будівельному виробництві. Вісник НУЛП. Теорія і практика будівництва, 2004. №520. С.179–182.
5. Токарчук В. В., Сокольников В. Ю., Свідерський В. А. Особливості тверднення композиційних цементів з силікатними добавками різного походження. Східно-Європейський журнал передових технологій, 2015. №3/11 (75) С.9–14.
6. Krivenko P., Sanytsky M., Kropyvnytska T. The effect of nano-silica on the early strength of alkali-activated Portland composite cements. *Solid State Phenomena*. 2018. 296. P.21–26.
7. Троян В. В. Добавки для бетонів і будівельних розчинів. Київ: Аспект-Полиграф, 2010. 228с.
8. Дворкін Л. Й., Марчук В.В. Композиційні цементы низької водопотреби і бетони на їх основі. Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди, 2015. Вип. 31. С.59–67.
9. Саницький М. А., Соболев Х. С., Марків Т. Є. Модифіковані композиційні цементы. Львів: НУЛП, 2001. 130с.
10. Рунова Р. Ф., Носовський Ю.Л. Технологія модифікованих будівельних розчинів. Київ: КНУБА, 2007. 256с.
11. Гоц В. І. Бетони і будівельні розчини. Київ: УВПК ЕксОб, 2003. 468с.
12. Пірогов Д. О., Барабаш І.В. Вплив режиму активації на властивості цементу, цементного тіста та каменю на його основі. Структуроутворення та руйнування композиційних будівельних матеріалів та конструкцій, 2023. С.109–110.

## References

1. Krivenko, P. V., Pushkaryova, K.K., Gots, V.I., Kovalchuk, G.Yu. (2012). *Tsementi i betoni na osnovе toplivnikh zol i shlakov*. [Cements and concretes based on fuel ashes and slags]. (monograph). Kyiv. Ekspress-Poligraf. [in Russian].
2. Dvorkin, L. I., Dvorkin, O.L., Myronenko, A.V., Stepasiuk, Yu.O. (2013). Beton na maloklinkernomu shlakoportlandtsementi. [Concrete on low-clinker slag portland cement]. *Building materials and products*. (4). 15–18. [in Ukraine].

3. Sanytskyi, M.A., Kropyvnytska, T.P., Heviuk, I.M. (2019). Shvidkotverdnuchi portlandtsementi z dobavkoju vapnyaku. [Quick-hardening Portland cements with the addition of limestone]. *Building materials and products*. 1/2 (100). 34–37. [in Ukraine].
4. Sobol, Kh. S. (2004). Kontsepsiya zastosuvannya modifikovanikh kompozitsiynikh tsementiv u budivelnomu virobnitstvi. [The concept of using modified composite cements in construction production]. *Bulletin NULP. Theory and Building Practice*. (520). 179–182. [in Ukraine].
5. Tokarchuk, V. V., Sokoltsov, V.Iu., Sviderskyi, V.A. (2015). Osoblivosti tverdnennya kompozitsiynikh tsementiv z silikatnimi dobavkami riznogo pokhodzhennya. [Features of hardening of composite cements with silicate additives of various origins]. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 3/11 (75). 9–14. [in Ukraine].
6. Krivenko, P., Sanytsky, M., Kropyvnytska, T. (2018). The effect of nano-silica on the early strength of alkali-activated Portland composite cements. *Solid State Phenomena*. (296). 21–26.
7. Troian, V. V. (2010). *Dobavki dlya betoniv i budivelnykh rozchiniv*. [Additives for concrete and mortars]. Kyiv. Aspekt-Poligraf. [in Ukraine].
8. Dvorkin, L. I., Marchuk, V.V. (2015). Kompozitsiini tsementi nizkoї vodopotrebi i betoni na ikh osnovi. [Composite cements of low water consumption and concrete based on them]. *Resource-saving materials, structures, buildings and structures*. no. 31. 59–67. [in Ukraine].
9. Sanytskyi, M. A., Sobol, Kh.S., Markiv, T.Ie. (2001). *Modifikovani kompozitsiini tsementi*. [Modified composite cements]. Lviv. NULP. [in Ukraine].
10. Runova, R. F., Nosovskyi, Yu.L. (2007). *Tekhnologiya modifikovanikh budivelnykh rozchiniv*. [Technology of modified construction mortars]. Kyiv. KNUBA. [in Ukraine].
11. Hots, V.I. (2003). *Betoni i budivelni rozchini*. [Concretes and mortars]. Kyiv. UVPK EksOb. [in Ukraine].
12. Pirohov, D. O., Barabash, I.V. (2023). Vpliv rezhimu aktivatsii na vlastivosti tsementu, tsementnogo tista ta kamenyu na yogo osnovi. [The influence of the activation mode on the properties of cement, cement paste and stone based on it]. *Structure formation and destruction of composite building materials and structures*. 109–110. [in Ukraine].

**Барабаш Іван Васильович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури  
д.т.н., професор  
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029  
dekansti@ukr.net,  
ORCID: 0000-0003-0241-4728

**Пірогов Дмитро Олексійович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури  
аспірант  
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029  
pirogovdima45@gmail.com,  
ORCID: 0009-0003-4096-3186

*Для посилань:*

Барабаш І. В., Пірогов Д. О. Вплив механохімічної активації композиційного цементу на міцність будівельного розчину. *Механіка та математичні методи*, 2023. Т. V. № 2. С. 51–59.

*For references:*

I. Barabash, D. Pirogov (2023). Influence of mechanochemical activation of composite cement for the strength of mortar. *Mechanics and Mathematical Methods*. V(2). 51–59.

UDC 614.841

## SIMULATION OF HUMAN EVACUATION IN CASE OF FIRE USING PATHFINDER SOFTWARE

E. Shcholokov<sup>1</sup>, Yu. Otrosh<sup>1</sup>, N. Rashkevich<sup>1</sup>, R. Melezhyk<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National University of Civil Defence of Ukraine

**Abstract.** This research analyses scientific publications that highlight the problems of evacuation of people during emergencies and the latest methods, techniques and strategies. It is determined that the PATHFINDER software complex gives a more accurate calculation compared to the simplified analytical model. The PATHFINDER software complex allows to simulate evacuation in various buildings and areas. Moreover it gives a wider range of possibilities, such as: simulation of evacuation of people with disabilities; ability to set and adjust the speed of agents in different sections of the escape route; the presence of a function that regulates the onset of movement of agents in a given behaviour.

In this work the computer simulation of the actual time of evacuation of people from the integral property complex of industrial and household facilities was carried out. The duration of the evacuation of people from the rooms of buildings and structures bases on the model of the movement of people to the exit in one of the following ways: based on a simplified analytical model of human flow; based on a mathematical model of the individual-flowing movement of people from a building or structure; based on a simulation-stochastic model of human flows.

These calculations were performed in accordance with the recommendations and instructions using the PATHFINDER software for the two most likely fire scenarios. According to the scenario, the fire occurred in the room with the highest fire-hazardous load or in the room with the smallest volume: scenario 1 - fire occurs in the hot shop; scenario 2 - a fire occurs in the administrative room.

The software provides an opportunity to quickly calculate various ways of evacuating people from the rooms. The use of PATHFINDER software gives more accurate results than the calculation given in regulatory document, due to the greater detalization of the evacuation calculation, and also helps to avoid possible errors and reduce calculation errors.

**Keywords:** fire, evacuation time, combustion products, modeling, PATHFINDER.

## МОДЕЛЮВАННЯ ЕВАКУАЦІЇ ЛЮДЕЙ ПРИ ПОЖЕЖІ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ PATHFINDER

Щолоков Е. Е.<sup>1</sup>, Отрош Ю. А.<sup>1</sup>, Рашкевич Н. В.<sup>1</sup>, Мележик Р. С.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Національний університет цивільного захисту України

**Анотація.** У цьому дослідженні проводиться аналіз наукових публікацій, які висвітлюють проблемні питання евакуації людей під час надзвичайних ситуацій та новітні методи та стратегії, що спрямовані на забезпечення безпеки. Авторами визначено, що програмний комплекс PATHFINDER дає більш точний розрахунок порівняно зі спрощеною аналітичною моделлю. Програмний комплекс PATHFINDER дозволяє імітувати евакуацію в різних будівлях і зонах. Крім того, це дає більш широкий спектр можливостей, таких як: імітація евакуації людей з обмеженими можливостями; можливість встановлювати та регулювати швидкість агентів на різних ділянках шляху евакуації; наявність функції, яка регулює початок руху агентів у певній поведінці.

В даній роботі проведено комп'ютерне моделювання фактичного часу евакуації людей з цілісного майнового комплексу промислових і побутових об'єктів. Тривалість евакуації людей визначається на основі моделювання руху людей до виходу назовні одним з наступних



способів: за спрощеною аналітичною моделлю руху людського потоку; за математичною моделлю індивідуально-потокowego руху людей з будівлі чи споруди; за імітаційно-стохастичною моделлю руху людських потоків.

Наведені розрахунки були виконані відповідно до рекомендацій та інструкцій з використанням програмного забезпечення PATHFINDER для двох найбільш імовірних сценаріїв пожежі. За сценарієм пожежа виникла в приміщенні з найбільшим пожежонебезпечним навантаженням або в приміщенні з найменшим об'ємом: сценарій 1 – пожежа виникає в гарячому цеху; сценарій 2 – пожежа виникає в адміністративному приміщенні.

Програмний комплекс PATHFINDER дає можливість швидко розраховувати різні способи евакуації людей з приміщень. Результати розрахунків є точнішими ніж за ДСТУ 8828:2019, завдяки більшій деталізації розрахунку евакуації, а також дозволяє уникнути можливих помилок та зменшити похибки розрахунків.

**Ключові слова:** пожежа, час евакуації, продукти горіння, моделювання, PATHFINDER.

## 1 INTRODUCTION

Every day in Ukraine, on average, occur 277 fires, material damage from which amounts to 34 million 445 thousand (UAH). Every day, as a result of fires, 4 people are killed or get injured, 77 buildings (structures) and 14 pieces of technical equipment are destroyed or damaged by fire. Direct losses from one fire are from 26 thousand (UAH) [1].

According to statistics, the largest proportion of fire deaths is caused by exposure of fire hazards. An important component of saving people's lives is to ensure the correct and timely evacuation from the rooms affected by fire [1].

It is a global practice to use for evacuation calculations not only regulatory documents, but also computer softwares, such as PATHFINDER. It is used for simulation of evacuation in emergency situations with consideration of the possibility of rescuing people.

Among the advantages of the software is the immediacy of calculations, the ability to change the parameters at any time and get the result immediately.

In recent years, there has been an increase in cases of unprofessional calculation of evacuation time by incompetent organisations. As a result, it can lead to death or injury of people in case of realisation of emergency scenarios. The professional calculation of evacuation time forms an appropriate fire safety action plan.

Thus, a relevant scientific and technical task is to improve the calculation methodology using the PATHFINDER software - to model human behaviour in various fire scenarios and calculate evacuation times. This will help to minimise the number of victims of fire or avoid them completely.

## 2 ANALYSIS OF LITERARY DATA AND PROBLEM STATEMENT

It is noted in [2] that estimating evacuation time is a non-trivial problem due to the interaction between thousands of individual agents, which generates various collective phenomena such as bottlenecks, interrupted flow, and stop-and-go waves. However, it would be advisable to use specialised software such as PATHFINDER, which allows modelling and analysing evacuation processes in complex spatial environments such as buildings and structures.

In [3], the purpose of the study is to emphasise the importance of safety in crowded spaces, such as airports, railway stations, amusement parks, etc. during hours of maximum concentration of people or during large-scale events. The paper reviews the complexity of the evacuation process and sets a task of developing new methods and tools aimed at improving safe evacuation strategies. Particular attention is paid to understanding the dynamics of evacuation, solving the complexity of decision-making during evacuation and using hierarchical models and visual observations to predict people's movements and optimise safe exit routes. However, the PATHFINDER features, that allow to calculate the behaviour of people, which in the program is the set of actions that the agent performs, are not used.

In [4], recognising human behaviour and monitoring real-world environments is a challenging research task. Time series analysis methods, including hidden Markov models, have been used to solve such problems. However in many complex cases they are not effective, because some types of behaviour are much more difficult to model. This is the case, in particular, when there is a lack of raw data. It is advisable to use stochastic models of human behaviour, which are represented by a mathematical model in PATHFINDER.

In [5], it is noted that it is advisable to combine building information modelling technology with geographic information system technology to build a three-dimensional spatial scene of evacuation in case of a fire in a building. It is possible to use a graphical interface to set a graphical data, as well as 2D and 3D visualisation tools. This approach

allows for a quantitative analysis of qualitative indicators related to evacuation and provides an effective visualisation of emergency situations management. The PATHFINDER software allows to use a graphical interface to meet the design and visualisation objectives of the evacuation process.

In [6], the modelling of fire development and the dynamics of people's movement during emergency evacuation is considered. There are three different ways to model fire development: two-zone fire models; computational fluid dynamics (CFD) and stochastic models. PATHFINDER supports two simulation modes. In control mode, agents move independently towards their goal, avoiding other passengers and obstacles. The flow rate through the doors is not defined, but is the result of the interaction of the occupants with each other and with the boundaries of the rooms.

Paper [7] analyses human behaviour in case of a fire in buildings using computer modelling of evacuation. Unpredictable human behaviour in critical situations is at the core of all problems related to the fire safety of buildings, regardless of their purpose. The PATHFINDER software makes it possible to simulate evacuation and program certain agent behaviour, which allows to make such calculations.

In [8], it is proposed to simulate evacuation in emergency situations using a program that contains a graphical interface for creating models and a module for viewing animated three-dimensional results, simulating the rescue of non-mobile groups of people, contours of the density of human flow and a grid for simulating movement.

In [9], the calculation of evacuation was carried out according to the two most likely fire scenarios. When selecting a fire scenario, the following options were assumed: a fire occurs in a room with the highest fire hazardous load or in a room with the smallest volume.

One of the main factors in ensuring the safety of people's lives is the correct calculation of the evacuation of people from the rooms. According to the analysis of fire statistics, the majority of people who die in a fire are those who have been poisoned by toxic combustion products.

The analysis of the publications has shown that the vast majority of works related to evacuation investigate patterns of human behaviour in emergency situations.

### 3 MATERIALS AND METHODS

The calculation of estimated duration of the evacuation of people from the rooms of buildings and structures bases on the model of the movement of people to the exit in one of the following ways:

- based on a simplified analytical model of human flow;
- based on a mathematical model of the individual-flowing movement of people from a building or structure;
- based on a simulation-stochastic model of human flows.

**Calculation of the estimated duration of evacuation of people from the rooms of buildings and structures using a simplified analytical model of the movement of the human flow.** The estimated duration of evacuation of people from the rooms of buildings is determined by calculating the duration of movement of one or more human flows through the evacuation exits from the most distant locations of people. During the calculation, the entire path of the human flow is divided into sections (passage, corridor, doorway, flight of stairs, vestibule). The initial sections are the passages between workplaces, equipment, rows of chairs, etc.

**Calculation of the estimated time of the evacuation of people from the rooms of buildings and structures using a mathematical model of individual flow.** The estimated time of evacuation of people from a building is set by the time the last person leaves it. Before starting the simulation of the evacuation process, the layout of evacuation routes in the



building is set. All evacuation routes are divided into evacuation sections. The length and width of each section of the escape route for buildings under design are taken according to the project, and for constructed buildings - according to the actual value. The length of the path through stairways is measured by the length of the flight of stairs. The path length in a doorway is assumed to be zero. Evacuation areas can be horizontal and inclined (stairs to the bottom, stairs to the top and a ramp). When calculating the dimensions of a person, the area of their horizontal projection is taken as the size of the person. The coordinates of each person are set - the distance from the centre of the projection to the end of the evacuation area where they are located.

**Software calculation.** PATHFINDER is a computer program that implements an individual model of people's movement during evacuation. The program has a graphical interface for setting the initial data, as well as tools for 2D and 3D visualisation of the results.

PATHFINDER has two modes of motion simulation. In "guided motion" mode, agents use a motion control system to move and interact with each other. This mode attempts to mimic human behaviour as closely as possible.

Agents can be represented by different models. They can be represented by simple shapes, including discs or cylinders. They can also be displayed as mannequin shapes or as human avatars specified in profiles. Settings are available in the "View" menu, "Agents" submenu.

In addition, agents can be painted in different colours through the "View" - "Agent Colour" menu:

- by default. If an individual colour is set for an agent, it is used; otherwise, the colour from the agent profile is used.

- by a motion group. The same colour will be used for all agents of the motion group. The colour of the group is set in the properties panel of the motion group. If the agent is not part of the group, the default colour is used for it.

- by a motion group template. If the agent is part of a motion group that is created using a group template, the agent is coloured according to the template colour for its motion group. Otherwise, the default colour will be used.

- by behaviour. Agents are coloured in accordance with the colour set for their behaviour.

- by profile. Agents are coloured according to the colour specified for their profile.

The main components of evacuation are: rooms bounded by walls; doors connecting rooms on the same level; stairs/ramps connecting rooms on different levels; elevators connecting multiple levels. Rooms can have any polygonal shape and cannot overlap on the same level.

PATHFINDER has two tools for creating new rooms. The "polygonal rooms" tool allows to create complex shape rooms with any number of vertices.

Stairs in PATHFINDER modelled as a single straight stairway and can be created using two tools. One tool creates a staircase between two parallel room boundaries; the other allows to create a staircase with specified parameters, such as a certain number of steps, height difference, etc., at each of the room boundaries.

In PATHFINDER, agents are defined by two groups of parameters: profiles and behaviours.

Profiles define fixed characteristics of agents, such as maximum speed, radius, avatar, and colour. Behaviour: defines a list of actions that the agent performs during the simulation, such as moving to a safe zone, waiting, moving to the exit.

The priority level of the agent. The higher the value, the higher the priority. When moving, agents with a low priority will move out of the way of agents with a higher priority.

The diameter of the cylinder that describes the agent, is its "shoulder width". It is used for path calculation during simulation and collision processing. This value also determines how many agents can be added to a room without overlapping.

Compression ratio. A controlled mode parameter that sets how much agents can shrink when passing each other in narrow corridors. This coefficient must be greater than 0 and less or equal to 1. It makes it possible to take advantage of the elliptical shape of the agents (the ability to turn sideways), as opposed to using exclusively round agents in the calculation.

Behaviours in PATHFINDER are a set of actions that agents perform through the time of simulation. As soon as an agent has completed all its actions, it is removed from the model. Additional actions can make the agent wait, or go to its assignment place, such as a room or a point to an exit.

Thus, to use PATHFINDER, it is necessary to have experience with object modelling software.

According to [10] and many years of experience in calculating the evacuation of people, it is possible to identify the main necessary conditions for the correct formation of an evacuation report:

1. First of all, it is required to study carefully the location of people, employees or visitors in the plans of the rooms of the calculation object.

2. Study the specifics of the factory, institution, organisation, as there are different approaches of calculating evacuation, for example, in school and at manufacture.

3. Mark exits, including emergency exits, on the floor plans to create evacuation routes and flows of people.

4. Check the availability of fire protection systems for early detection and prevention of the spread of fires or other hazardous situations.

5. Calculate the time of evacuation of people to the moment of leaving the building structure.

6. Calculate the fire hazardous components.

7. Obtain the necessary time for the safe evacuation of people.

This is a brief sequence of the process of calculating the required evacuation time.

## 4 RESEARCH RESULTS

For the calculation, we assume a fire occurrence scenario that realises the worst conditions for evacuating people and/or the highest dynamics of the growth of hazardous fire components.

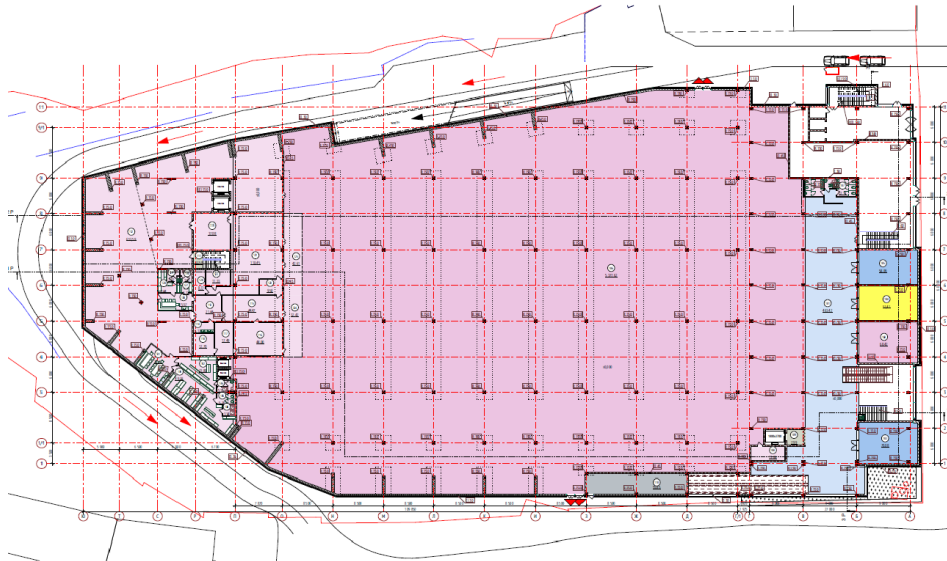
When choosing a fire scenario, we proceed from the following: a fire occurs in the room with the highest fire hazardous load or in the room with the smallest volume.

Scenario 1 - a fire occurs in a hot shop at +10,900 between the C-Ю/5-6 axis. The area of the room is 113.67 m<sup>2</sup>. The hazardous fire components slowly spread throughout the hot shop and to the floor corridor (room 402), the area of the floor corridor is 53.01 m<sup>2</sup>, the fire develops on a vertical or horizontal surface in the form of a burning rectangle.

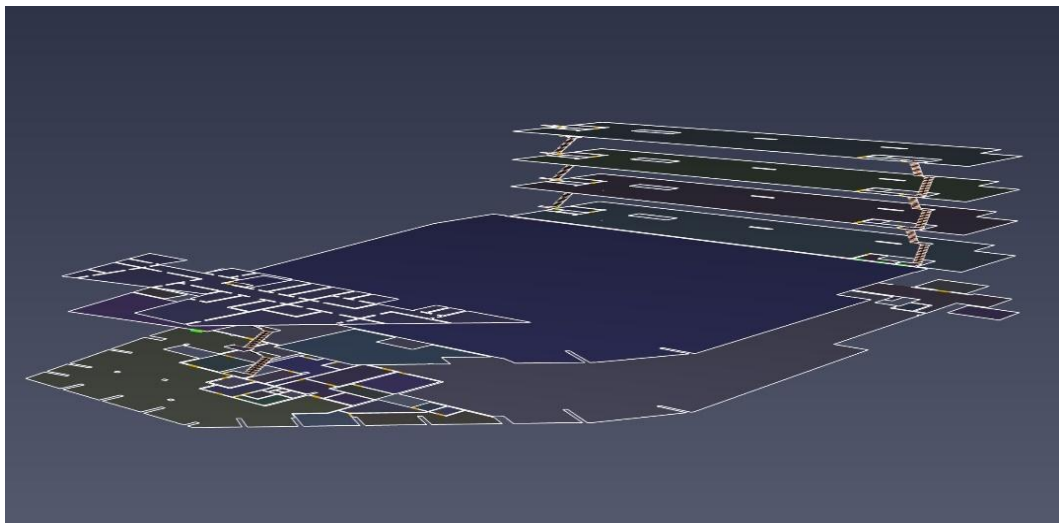
Scenario 2 - a fire occurs in an administrative room at the area +10,900-25,600 between the axes Г-А/1-11. The area of the room is 1581 m<sup>2</sup>. The fire factors spread throughout the administrative room. The fire evolves on a horizontal or vertical combustion surface in the form of a combustion rectangle.

When determining the number of people to be evacuated from apartments, we use the standards for residential buildings (the area standard is 8 m<sup>2</sup> per person) [10].

The calculation does not take into account technical rooms, bathrooms, kitchens and other rooms where, according to the project documentation, no people are expected to be present and there are no workplaces and compliance with the requirements for the arrangement of escape routes and exits is considered sufficient to ensure safe evacuation from such rooms.



**Fig. 1.** The plan of the first floor at the point 0,000



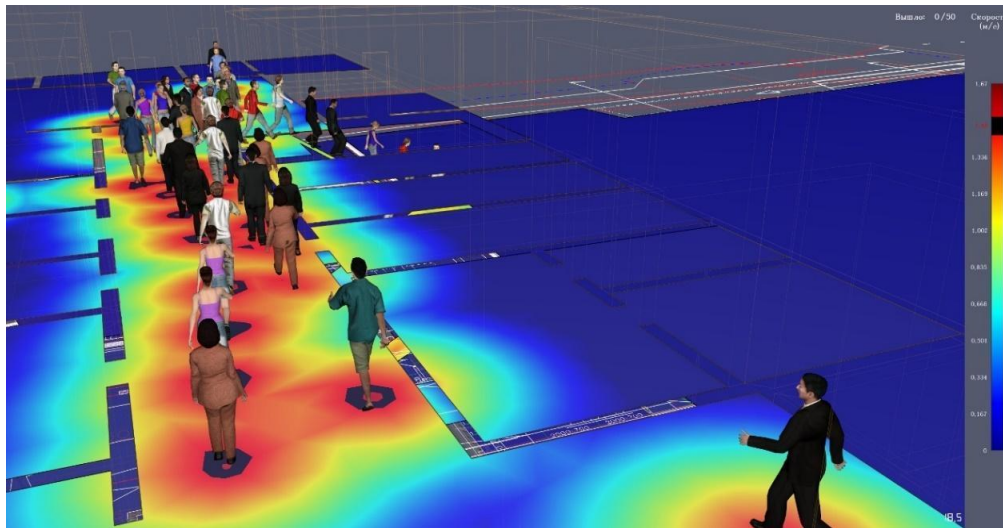
**Fig. 2.** Simulation of escape routes

For the calculation of the actual evacuation time, a model of the building from which the evacuation will be carried out was created in the PATHFINDER program. Underlays from DWG files were used to build.

A practical calculation of the evacuation time in an integral property complex of industrial and household facilities along Glybochitskaya Street, 44 and Kosogorny Lane, 4 in the district Shevchenkivskyi in Kyiv was made. The required evacuation time and the actual evacuation time was determined. These calculations were made in accordance with [10].

For the calculation, we accepted the scenario of a fire causing, in which the worst conditions for the evacuation of people and (or) the highest dynamics of the growth of dangerous fire factors are realised.

The maximum speed of 100 m/min (1.67 m/s) was set. It adjusts automatically for all possible obstacles. In the stream, the speed reached 1.5 m/s, and when overcoming stairs, it reached 1 m/s.



**Fig. 3.** Agents movement in flow

During evacuation, the human flow has the greatest density near the doorways. As a result of the software calculation, the maximum agent density on area was 3 person per m<sup>2</sup>.

**Table 1.1.**

Calculation results of the required evacuation time

№	Option	Results according to selected scenarios	
		№1	№2
1	Required time for evacuation of people from rooms, sec	198	81

Verifying the fulfilment of the condition of safe evacuation of people (table 1.2).

**Table 1.2.**

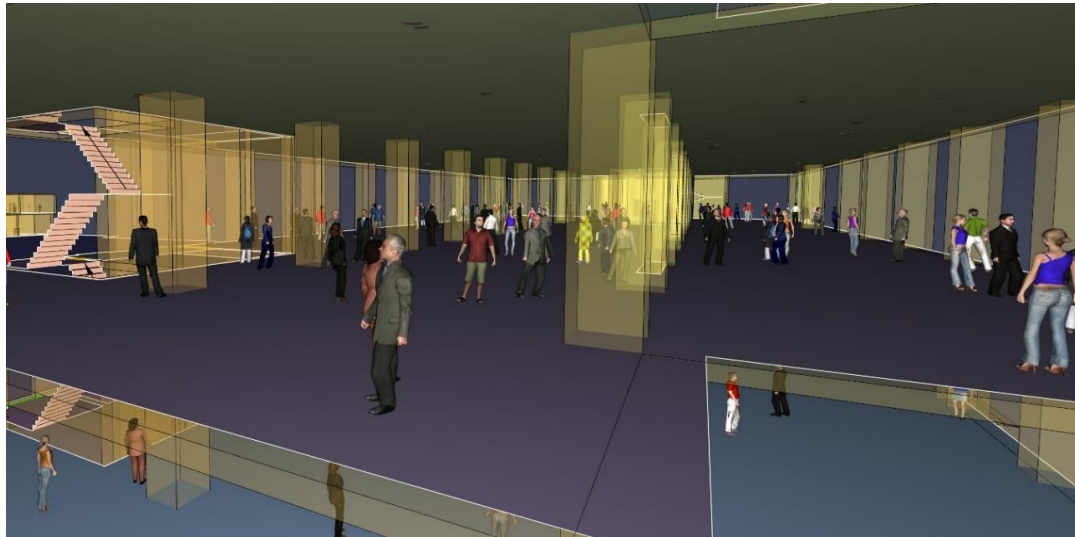
Verifying the conditions for safe evacuation of people

№	Name of the room	Required evacuation time, sec	Evacuation start time, sec	Estimated evacuation time, sec	Verifying conclusion
Administrative building					
1	5th floor	198	20	75	Performed
Technological building					
2	3rd floor	81	20	54	Performed

The two most likely fire scenarios were calculated. When choosing a fire occurring scenario, we proceeded from the following: a fire occurs in a room with the highest fire-hazardous load or in a room with the smallest volume:

- scenario 1 – fire occurs in the hot shop;
- scenario 2 – fire occurs in the administrative room.

The following results were obtained. For Scenario 1, the estimated evacuation time is 54 sec. For Scenario 2, the estimated evacuation time is 75 sec. The actual evacuation time from the third floor of the office building is 120 sec.



**Fig 3.** Agents simulation. Scenario 2 “Office building”

A computer simulation of the actual evacuation time was carried out. These calculations were made in accordance with the recommendations and user guides for the PATHFINDER software package. Scenarios:

- scenario 1 – fire occurs in the hot shop;
- scenario 2 – a fire occurs in the administrative room.

The actual evacuation time for the first scenario was 73 sec, and for the second scenario 120 sec.

## 5 CONCLUSIONS

Based on the results of the studies, the following conclusions were made.

1. Meeting the requirements of regulatory documents to ensure the safe evacuation of people from the buildings during an emergency situation will help minimise the number or even avoid victims that may be the result of a fire.

One of the main factors in ensuring the safety of people's lives is a correctly made calculation of the evacuation of people from the buildings. Since, according to the analysis of statistical data on fires, the main number of those killed in the fire are people who were poisoned by toxic combustion products. Therefore, it is important to evacuate before the onset of extreme fire conditions.

Scientific publications, that investigate problems of evacuation during different emergency situations and new methods, techniques and strategies, were analysed.

2. Computer simulation on the actual time of evacuation of people from the integral property complex of industrial and household facilities on the street Glybochitskaya, 44 and prov. Kosogorny, 4 in the Shevchenko district of Kyiv was carried out. These calculations are made in accordance with the recommendations and instructions for users of the PATHFINDER software.

The calculation was made for the two most likely fire occurring scenarios. Scenarios:

- scenario 1 – fire occurs in the hot shop;
- scenario 2 – a fire occurs in the administrative room.

The actual evacuation time for the first scenario was 73 sec, and for the second scenario 120 sec.

A practical calculation of the evacuation time in an integral property complex of industrial and household facilities along Glybochitskaya Street, 44 and Kosogorny Lane, 4 in

the district Shevchenkivskyi in Kyiv was made. The required evacuation time and the actual evacuation time was determined. These calculations were made in accordance with [10].

The two most likely fire scenarios were calculated. When choosing a fire occurring scenario, we proceeded from the following: a fire occurs in a room with the highest fire-hazardous load or in a room with the smallest volume:

- scenario 1 – fire occurs in the hot shop;
- scenario 2 – fire occurs in the administrative room.

The following results were obtained. For Scenario 1, the estimated evacuation time is 54 sec. For Scenario 2, the estimated evacuation time is 75 sec.

Using the PATHFINDER software complex allows to simulate evacuation in various buildings and rooms with the possibility of taking into account such factors as: simulation of evacuation of people with disabilities; ability to set and adjust the speed of agents in different sections of the escape route; the presence of a function that regulates the onset of movement of agents in a given behaviour.

Thus, the use of PATHFINDER software gives more accurate results than the calculation given in regulatory document [10], due to the greater detalization of the evacuation calculation, and also helps to avoid possible errors and reduce calculation errors.

## References

1. Analitichna dovidka pro pozhezhi ta yikh naslidky v Ukraini za 12 misiatsiv 2020 roku. [https://idundcz.dsns.gov.ua/files/2020/Nauka/STATYSTYKA/Analitichna%20dovidka%20pro%20pojeji\\_12.2020.pdf](https://idundcz.dsns.gov.ua/files/2020/Nauka/STATYSTYKA/Analitichna%20dovidka%20pro%20pojeji_12.2020.pdf)
2. Kunwar, B., Simini, F., & Johansson, A. (2016). Evacuation time estimate for total pedestrian evacuation using a queuing network model and volunteered geographic information. *Physical Review E*, 93(3), 032311.
3. Doulamis, N. (2009, June). Evacuation planning through cognitive crowd tracking. In 2009 16th International Conference on Systems, Signals and Image Processing (pp. 1–4). IEEE.
4. Doulamis, N. D., Voulodimos, A. S., Kosmopoulos, D. I., & Varvarigou, T. A. (2010, October). Enhanced human behavior recognition using hmm and evaluative rectification. In Proceedings of the first ACM international workshop on Analysis and retrieval of tracked events and motion in imagery streams (pp. 39–44).
5. Liu, J., Zhang, R., Yan, W., & Sun, L. (2021, June). Evacuation of building fire personnel based on BIM+ GIS: A review. In IOP Conference Series: Earth and Environmental Science (Vol. 787, No. 1, p. 012173). IOP Publishing.
6. Coelho, A. L., & Almeida, J. E. Buildings' Fire Development and Evacuation Modelling.
7. Şuvar, M. C., Kovacs, I., Păsculescu, V. M., Vlasin, N. I., & Florea, G. D. (2019). Analysis of human behavior and evacuation in building fires using computer evacuation models. *Environmental Engineering & Management Journal (EEMJ)*, 18(4).
8. Shcholokov E.E., Otrosh Yu.A. Vyrishennia problem pozheznoi bezpeky za dopomohoiu prohramnoho zabezpechennia PATHFINDER. Materialy mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii molodykh uchenykh «Problemy ta perspektyvy zabezpechennia tsyvilnoho zakhystu». m. Kharkiv: NUTsZ Ukrainy, 2021. S. 185.
9. Shcholokov E.E., Otrosh Yu.A., Maiboroda R.I. Modeliuvannia evakuatsii liudei pry pozhezhi za dopomohoiu prohramnoho zabezpechennia PATHFINDER. Materialy kruhloho stolu (vebinaru) «Zapobihannia nadzvychainym sytuatsiiam ta yikh likvidatsiia». m. Kharkiv: NUTsZ Ukrainy, 2022. C. 127–129.
10. DSTU 8828:2019 Pozhezha bezpeka. Zahalni polozhennia. [https://zakon.isu.net.ua/sites/default/files/normdocs/dstu\\_8828\\_2019.pdf](https://zakon.isu.net.ua/sites/default/files/normdocs/dstu_8828_2019.pdf)

## Література

1. Аналітична довідка про пожежі та їх наслідки в Україні за 12 місяців 2020 року. [https://idundcz.dsns.gov.ua/files/2020/Nauka/STATYSTYKA/Analitichna%20dovidka%20pro%20pojeji\\_12.2020.pdf](https://idundcz.dsns.gov.ua/files/2020/Nauka/STATYSTYKA/Analitichna%20dovidka%20pro%20pojeji_12.2020.pdf)

2. Kunwar, B., Simini, F., & Johansson, A. (2016). Evacuation time estimate for total pedestrian evacuation using a queuing network model and volunteered geographic information. *Physical Review E*, 93(3), 032311.
3. Doulamis, N. (2009, June). Evacuation planning through cognitive crowd tracking. In 2009 16th International Conference on Systems, Signals and Image Processing (pp. 1–4). IEEE.
4. Doulamis, N. D., Voulodimos, A. S., Kosmopoulos, D. I., & Varvarigou, T. A. (2010, October). Enhanced human behavior recognition using hmm and evaluative rectification. In Proceedings of the first ACM international workshop on Analysis and retrieval of tracked events and motion in imagery streams (pp. 39–44).
5. Liu, J., Zhang, R., Yan, W., & Sun, L. (2021, June). Evacuation of building fire personnel based on BIM+ GIS: A review. In IOP Conference Series: Earth and Environmental Science (Vol. 787, No. 1, p. 012173). IOP Publishing.
6. Coelho, A. L., & Almeida, J. E. Buildings' Fire Development and Evacuation Modelling.
7. Şuvar, M. C., Kovacs, I., Păsculescu, V. M., Vlasin, N. I., & Florea, G. D. (2019). Analysis of human behavior and evacuation in building fires using computer evacuation models. *Environmental Engineering & Management Journal (EEMJ)*, 18(4).
8. Щолоков Е.Е., Отрош Ю.А. Вирішення проблем пожежної безпеки за допомогою програмного забезпечення PATHFINDER. Матеріали міжнародної науково-практичної конференції молодих учених «Проблеми та перспективи забезпечення цивільного захисту». м. Харків: НУЦЗ України, 2021. С. 185. <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/13494>
9. Щолоков Е.Е., Отрош Ю.А., Майборода Р.І. Моделювання евакуації людей при пожежі за допомогою програмного забезпечення PATHFINDER. Матеріали круглого столу (вебінару) «Запобігання надзвичайним ситуаціям та їх ліквідація». м. Харків: НУЦЗ України, 2022. С. 127–129. <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/15056>
10. ДСТУ 8828:2019 Пожежна безпека. Загальні положення. [https://zakon.isu.net.ua/sites/default/files/normdocs/dstu\\_8828\\_2019.pdf](https://zakon.isu.net.ua/sites/default/files/normdocs/dstu_8828_2019.pdf)

**Shcholokov Eduard**

National University of Civil Defence of Ukraine  
Lecturer of the Department  
Chernyshevskaya str., 94, Kharkiv, Ukraine, 61023  
eduard.shcholokov2020@gmail.com  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9923-1487>

**Otrosh Yurii**

National University of Civil Defence of Ukraine  
Doctor of Technical Sciences, Professor  
Chernyshevskaya str., 94, Kharkiv, Ukraine, 61023  
yuriyotrosh@gmail.com  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0698-2888>

**Rashkevich Nina**

National University of Civil Defence of Ukraine  
PhD  
Lecturer of the Department  
Chernyshevskaya str., 94, Kharkiv, Ukraine, 61023  
nine291085@gmail.com  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5124-6068>

**Roman Melezhyk**

National University of Civil Defence of Ukraine  
Chernyshevskaya str., 94, Kharkiv, Ukraine, 61023  
<https://orcid.org/0000-0001-6425-414>

*For references:*

E. Shcholokov, Yu. Otrosh, N. Rashkevich, R. Melezhyk. (2023). Calculation of reinforced -concrete frame for stability under the action of aggressive environment. *Mechanics and Mathematical Methods*. V(2). 60–70.

*Для посилань:*

Щолоков Е. Е., Отрош Ю. А., Рашкевич Н. В., Мележик Р. С. Механіка та математичні методи, 2023. Т. V. №. 2. С. 60–70.

УДК 004.9:536.2

## ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ ОЦІНЮВАННЯ ТЕПЛОІЗОЛЯЦІЇ БАГАТОШАРОВИХ СТІН

Рачинська А. Л.<sup>1</sup>, Царенко О. П.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одеський національний університет імені І.І.Мечникова

**Анотація.** В умовах сьогодення проблема ізоляції поверхонь є дуже актуальною для широких кіл населення України. Всім відомо, що ізоляція поверхні дозволяє зменшити тепловіддачу за рахунок використання матеріалів із низькою теплопровідністю. У разі відсутності постійного опалення дуже актуальним є питання теплоізоляції циліндричних труб. Питання підбору ізоляції та розробки конструктиву потребує комплексного та професійного підходу. Для розрахунку задачі теплоізоляції фахівцю необхідно мати інструментарій для проведення розрахунку температурного поля із збереженням отриманих результатів для подальшого аналізу.

У роботі представлено розроблену інформаційну технологію, що дозволяє фахівцю проводити розрахунок температурного поля для багатошарових циліндричних труб. Для побудови інструментарію ІТ використовувалася об'єктно-орієнтована мова програмування C# та інтегроване середовище розробки Microsoft Visual Studio.

Слід зазначити, що при проведенні розрахунків немає необхідності задавати характеристики матеріалів труб та ізоляції, оскільки всі дані зберігаються у БД ІТ. Для побудови модуля даних використовувалася об'єктно-реляційна система управління базами даних – PostgreSQL. Після проведення розрахунків усі побудовані розрахункові моделі та отримані числові моделі результатів так само зберігаються у БД. Це дозволяє в разі потреби не проводити повторний розрахунок, а використовувати дані, що вже є.

Для аналізу результатів розроблений інструментарій дозволяє будувати графіки зміни температури багатошарової стінки. При цьому вибір необхідних розрахункових моделей користувач здійснює самостійно з даних БД ІТ. Для візуальної наочності розрахунків числової моделі використовують пакет засобів розробки тривимірної графіки DirectX. Авторами розроблено алгоритм побудови кольорового температурного поля згідно з проведеними розрахунками. Для найвищої температури поля вибирається червоний колір, а найнижчої температури – синій.

Особливістю запропонованої інформаційної технології є те, що її функціонал дозволяє працювати з інструментарієм трьом користувачам із різним рівнем доступу: адміністратору БД, інженеру побудови математичних моделей та фахівцеві аналізу числових моделей.

**Ключові слова:** інформаційна технологія, бази даних, температурне поле, теплопровідність, багатошарова циліндрична труба.

## INFORMATION TECHNOLOGY FOR ASSESSING THERMAL INSULATION OF MULTI-LAYER WALLS

A. Rachinska, O. Tsarenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Odesa I.I. Mechnikov National University

**Abstract.** In today's conditions, the problem of insulation of surfaces is very relevant for wide circles of the population of Ukraine. Everyone knows that surface insulation allows to reduce heat transfer due to the use of materials with low thermal conductivity. In the absence of permanent heating, the issue of thermal insulation of cylindrical pipes is very relevant. The issue of insulation selection and structural design requires a complex and professional approach. To calculate the problem of thermal insulation, a specialist needs to have a toolkit for calculating the temperature field and saving the obtained results for further analysis.





The work presents the developed information technology that allows a specialist to calculate the temperature field for multilayer cylindrical pipes. The object-oriented programming language C# and the Microsoft Visual Studio integrated development environment were used to build the IT toolkit.

It should be noted that when making calculations, there is no need to specify the characteristics of pipe and insulation materials, since all data is stored in the IT database. The object-relational database management system - PostgreSQL was used to build the data module. After the calculations, all the built calculation models and the received numerical models of the results are also stored in the database. This allows you not to recalculate if necessary, but to use the data that is already available.

To analyze the results, the developed toolkit allows you to plot temperature changes of a multilayer wall. At the same time, the user selects the necessary calculation models independently from IT database data. The DirectX three-dimensional graphics development tool package is used for visual representation of numerical model calculations. The authors developed an algorithm for constructing a color temperature field according to the calculations. Red is chosen for the highest field temperature, and blue for the lowest temperature.

A feature of the proposed information technology is that its functionality allows three users with different levels of access to work with the toolkit: a database administrator, a mathematical model construction engineer, and a numerical model analysis specialist.

**Keywords:** information technology, databases, temperature field, thermal conductivity, multilayer cylindrical pipe.

## 1 ВСТУП

Розрахунок процесів теплопровідності є одним із важливих розділів сучасних інженерних досліджень у технологічних процесах. Широке застосування у всіх галузях промисловості та господарської діяльності людини має теплова ізоляція. Її правильне застосування значною мірою визначає можливість підтримки необхідних технологічних процесів і зрештою робить вирішальний вплив на показники енергоефективності та експлуатації.

Зростання вартості енергії та нові вимоги сьогодення до теплового захисту існуючих будівель та теплотрас визначає необхідність використання інформаційних технологій розрахунку ізоляції багат шарових конструкцій.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Більшість технологічних процесів здійснюються з виділенням або поглинанням теплоти. Інженер у своїй діяльності має справу з різними тепловими процесами і їх конструктивним оформленням у вигляді теплотехнічного обладнання, яке вбудоване в технологічні процеси. Тому він повинен вміти грамотно і ефективно використовувати таке обладнання, керувати теплоенергетичними схемами у виробництві за допомогою інформаційних технологій. Фахівець повинен добре знати теплові процеси та проводити розрахунок технічних конструкцій, що використовуються на практиці.

Проблемі розрахунку процесів теплопровідності присвячено багато робіт сучасних інженерних досліджень в машинобудівній та атомній промисловості, в технологічних процесах теплоенергетичних галузей господарської діяльності.

В [1-4] розглянуто проблему теплопровідності багат шарових стін різної форми. Отримані математичні моделі теплопровідності плоскої, циліндричної та сферичної стін.

Розглянемо багат шарове тіло простої форми, що складається з однорідних шарів, між якими має місце ідеальний тепловий контакт. Будемо вважати, що температура тіла, що розглядається, змінюється вздовж однієї координати, а теплопровідність  $\lambda_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) кожного з шарів постійна. У цьому випадку тепловий потік, що проходить через будь-яку ізотермічну поверхню тіла, дорівнює:  $Q = Q_i = \text{const}$ .

Нехай на поверхнях, що обмежують тіло, задані граничні умови III-го роду, а температури зовнішніх середовищ  $T_{C_1}$  і  $T_{C_2}$  підпорядковуються нерівності  $T_{C_1} > T_{C_2}$ . Позначимо температури граничних шарів  $T_{S_i}$ , розміри кожного шару вважаємо заданими. Вочевидь, температури зовнішніх поверхонь тіла мають індекси «1» і «m+1».

Через постійність теплових потоків на ізотермічних поверхнях для зовнішніх меж тіла можна записати

$$Q = \alpha_1 S_1 (T_{C_1} - T_{S_1}), \quad Q = \alpha_2 S_{m+1} (T_{S_{m+1}} - T_{C_2}), \quad (1)$$

де  $\alpha_1, \alpha_2$  - коефіцієнт тепловіддачі внутрішнього та зовнішнього шару з середовищем відповідно, а  $S_i$  - площа  $i$ -ої поверхні.

Такий же тепловий потік передається через кожен із шарів багат шарового тіла. Тоді відповідно до закону Фур'є отримаємо

$$Q = \frac{\lambda_i (T_{S_i} - T_{S_{i+1}})}{\int_{n_i}^{n_{i+1}} \frac{dn}{S(n)}}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

Позначимо

$$\int_{n_i}^{n_{i+1}} \frac{dn}{S(n)} = N_{n_i}^{n_{i+1}} = F_i$$

та об'єднаємо рівності (1) та (2) у систему рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = \alpha_1 S_1 (T_{C_1} - T_{S_1}), \\ Q = \lambda_1 \frac{(T_{S_1} - T_{S_2})}{F_1}, \\ Q = \lambda_2 \frac{(T_{S_2} - T_{S_3})}{F_2}, \\ \dots \\ Q = \lambda_m \frac{T_{S_m} - T_{S_{m+1}}}{F_m}, \\ Q = \alpha_2 S_{m+1} (T_{S_{m+1}} - T_{C_2}), \end{array} \right. \quad \text{або} \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{C_1} - T_{S_1} = \frac{Q}{\alpha_1 S_1}, \\ T_{S_1} - T_{S_2} = \frac{F_1}{\lambda_1} Q, \\ T_{S_2} - T_{S_3} = \frac{F_2}{\lambda_2} Q, \\ \dots \\ T_{S_m} - T_{S_{m+1}} = \frac{F_m}{\lambda_m} Q, \\ T_{S_{m+1}} - T_{C_2} = \frac{Q}{\alpha_2 S_{m+1}}. \end{array} \right. \quad (3)$$

Складемо почленно праві та ліві частини рівнянь (3) та отримаємо наступне вираження для теплового потоку:

$$Q = \eta_* \cdot (T_{C_1} - T_{C_2}), \quad \eta_* = \left( \frac{1}{\alpha_1 S_1} + \sum_{i=1}^m \frac{F_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2 S_{m+1}} \right)^{-1}. \quad (4)$$

Величину  $\eta_*$  називають повним коефіцієнтом теплопередачі багат шарової стінки. Вираз (4) для теплового потоку  $Q$  через багат шарову стінку подібно до виразу теплового потоку для одно шарової стінки. Відмінність полягає лише в записі коефіцієнта теплопередачі стінки, причому одно шарова стінка є окремий випадок (4) при  $m = 1$ . Для зручності порівняння процесів теплопровідності в багат шаровій та однорідній стінках вводять еквівалентну теплопровідність багат шарової стінки

$$\lambda_{ек} = \frac{\sum_{i=1}^m F_i}{\sum_{i=1}^m \frac{F_i}{\lambda_i}}. \quad (5)$$

Використовуючи це позначення, рівність (4) можна записати у вигляді, що формально збігається з виразом теплового потоку для однорідної стінки:

$$Q = (T_{C_1} - T_{C_2}) \left/ \left( \frac{1}{\alpha_1 S_1} + \frac{N_{n_i}^{n_{m+1}}}{\lambda_{ек}} + \frac{1}{\alpha_2 S_{m+1}} \right) \right.$$

Однак коефіцієнт  $\lambda_{ек}$  тут вже не є константою, а залежить, як це впливає з (5), від числа шарів, їх теплопровідностей та розмірів, а також від геометричної форми

багатошарової стінки. Вирішуючи систему рівнянь (3), отримуємо, що температури на межах шарів  $S_i$  та на зовнішніх поверхнях стінки  $S_1$  й  $S_{m+1}$  визначаються виразами:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{S_1} = T_{C_1} - Q \frac{1}{\alpha_1 S_1}, \\ T_{S_2} = T_{C_1} - Q \left[ \frac{1}{\alpha_1 S_1} + \frac{F_1}{\lambda_1} \right], \\ \dots \\ T_{S_{i+1}} = T_{C_1} - Q \left[ \frac{1}{\alpha_1 S_1} + \sum_{k=1}^i \frac{F_k}{\lambda_k} \right], \\ \dots \\ T_{S_m} = T_{C_1} - Q \left[ \frac{1}{\alpha_1 S_1} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{F_k}{\lambda_k} \right], \\ T_{S_{m+1}} = T_{C_2} + Q \frac{1}{\alpha_2 S_{m+1}}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Розподіли температур у кожному конкретному шарі знаходяться з використанням формули

$$T = T_{S_1} - (T_{S_1} - T_{S_2}) \frac{N_{n_1}^n}{N_{n_1}^{n_2}},$$

де в якості температур на межі шару беруться значення (6).

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Проведемо дослідження для циліндричної багатошарової стінки:

$$F_i = \frac{1}{2\pi L} \ln \left( \frac{r_{i+1}}{r_i} \right), \quad S_i = 2\pi r_i L = \pi L d_i^2.$$

Підставляючи ці значення до рівності (4)-(6), отримуємо такі розрахункові формули:

- для потоку теплоти, що проходить через одиницю довжини циліндричної стінки:

$$q_L = \frac{Q}{L} = \pi \tilde{\eta}_z (T_{C_1} - T_{C_2}) = \frac{1}{\tilde{R}_z} \pi (T_{C_1} - T_{C_2}), \quad (7)$$

де  $\tilde{\eta}_z$  - коефіцієнт теплопередачі багатошарової циліндричної стінки, а

$$\tilde{R}_z = \frac{1}{\tilde{\eta}_z} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\lambda_i} \ln \left( \frac{d_{i+1}}{d_i} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_{m+1}} - \text{повний термічний опір теплопередачі}$$

багатошарової циліндричної стінки;

- для температур на межах шарів:

$$T_{S_{i+1}} = T_{C_1} - \frac{q_L}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{k=1}^i \frac{1}{2\lambda_k} \ln \left( \frac{d_{k+1}}{d_k} \right) \right), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (8)$$

- для температури на зовнішній межі  $S_{m+1}$  циліндричної стінки

$$T_{S_{m+1}} = T_{C_1} - \frac{q_L}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_{\text{ЭК}}} \ln \left( \frac{d_{m+1}}{d_1} \right) \right), \quad (9)$$

де  $\lambda_{\text{ЭК}} = \ln \left( \frac{d_{m+1}}{d_1} \right) / \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_i} \ln \left( \frac{d_{i+1}}{d_i} \right)$  - еквівалентна теплопровідність багат шарової циліндричної стінки.

В роботі ставиться ціль для існуючої математичної моделі (7)-(9) побудувати інформаційну технологію розрахунку температурного поля циліндричної багат шарової стінки. Розроблена інформаційна технологія може бути використана фахівцями для розрахунку технічних конструкцій, що використовуються на практиці.

Для досягнення цілі необхідно розглянути наступні задачі:

- задача розробки архітектурного рішення інформаційної технології;
- задача візуалізації температурного поля циліндричної багат шарової стінки;
- задача оптимального збереження вхідних та вихідних даних.

#### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

В роботі побудовано інформаційну технологію [5-6] розрахунку температурного поля циліндричної багат шарової стінки з архітектурним рішенням виду [7]:

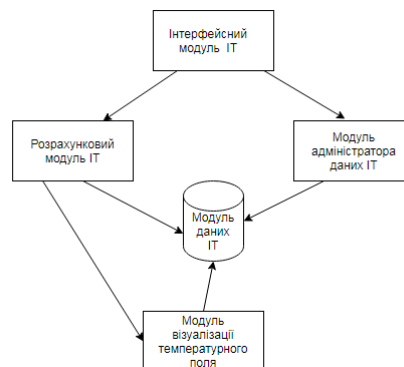


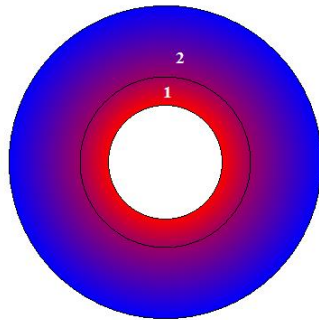
Рис.1. Архітектура інформаційної технології розрахунку

Побудована ІТ дозволяє за допомогою інтерфейсного модуля створювати різні математичні моделі циліндричної багат шарової стіни. Під час побудови математичної моделі в інтерфейсному модулі обирається, по-перше, матеріал кожного шару, а його характеристики завантажують з БД модуля даних. Модифікація БД [8] характеристик матеріалів виконується за допомогою модуля адміністратора даних ІТ. По-друге, в інтерфейсному модулі задаються температури зовнішнього та внутрішнього шарів стіни та від відстані до центру циліндричної труби для кожного шару. Побудована математична модель зберігається в БД модуля даних, якщо такої моделі в БД ще не існує.

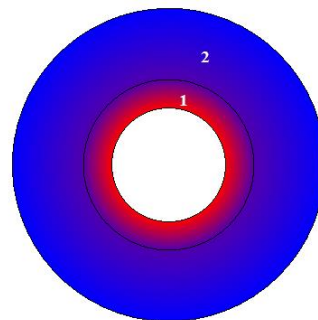
Розрахунковий модуль ІТ отримує чисельний результат температурного поля побудованої математичної моделі у вигляді розрахункової моделі, яка буде внесена до модуля даних у якості вхідних даних, якщо такий розрахунок робиться вперше.

Результати чисельного дослідження візуалізуються за допомогою відповідного графічного модуля [9-10]. Інтерфейсний модуль має функціонал, що дозволяє аналізувати існуючі математичні та розрахункові моделі без нового розрахунку.

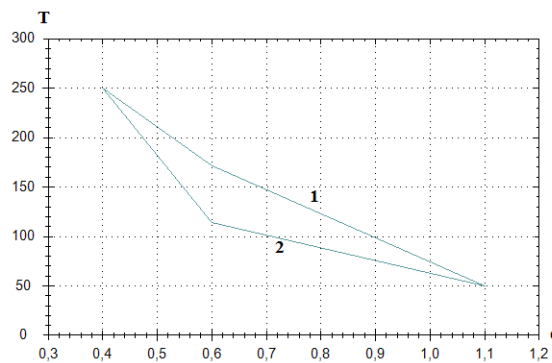
На рис. 2-5 представлено температурне поле та графік залежності температури від відстані до центру циліндричної труби для різних моделей багат шарової циліндричної стінки. Червоний колір відповідає більш високим температурам, а синій – більш низьким.



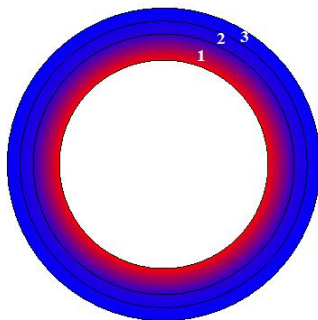
**Рис. 2.** Температурне поле двошарової труби: алюміній – повсть



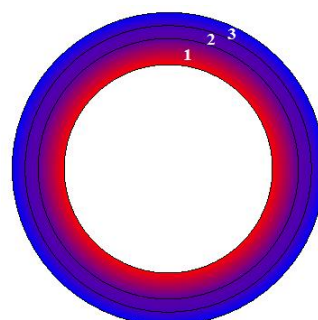
**Рис. 3.** Температурне поле двошарової труби: поліпропілен – азбест



**Рис. 4.** Графік зміни температури в залежності від відстані до центру двошарової труби



**Рис. 5.** Температурне поле тришарової труби: поліпропілен – азбест-масляна краска



**Рис. 6.** Температурне поле тришарової труби: алюміній – масляна краска – повсть

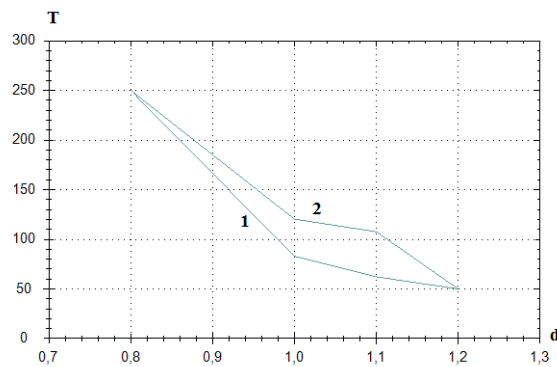


Рис. 7. Графік зміни температури в залежності від відстані до центру тришарової труби

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

На рис. 4 представлено графік зміни температури ( $^{\circ}\text{C}$ ) двошаровій стіні для різних матеріалів. Крива 1 відповідає температурному полю рис.2, в крива 2 – температурному полю рис.3. При проведенні обчислення моделі задавалися наступні параметри: температура внутрішнього середовища  $T_{C_1} = 250^{\circ}\text{C}$ , температура зовнішнього середовища  $T_{C_2} = 50^{\circ}\text{C}$ , геометрія конструкції –  $d_1 = 0.4\text{ м}$ ,  $d_2 = 0.6\text{ м}$ ,  $d_3 = 1.1\text{ м}$ , коефіцієнти тепловіддачі  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

Проведено чисельний експеримент для тришарової циліндричної труби для тих самих параметрів зовнішнього та внутрішнього середовищ. Геометрія конструкції:  $d_1 = 0.8\text{ м}$ ,  $d_2 = 1.0\text{ м}$ ,  $d_3 = 1.2\text{ м}$ ,  $d_4 = 1.3\text{ м}$ . На рис.7 представлено графік зміни температури ( $^{\circ}\text{C}$ ) тришаровій стіні для різних матеріалів. Крива 1 відповідає температурному полю рис.5, в крива 2 – температурному полю рис.6.

Видно, що при однаковій геометрії конструкції для більш сучасного матеріалу циліндричних труб – поліпропілену, теплоізоляція конструкції досягається краще, навіть при використанні азбесту.

## 6 ВИСНОВКИ

Розроблено інформаційну технологію дослідження багатошарової циліндричної стіни, яка може бути використана фахівцями для розрахунку та дослідження температурного поля циліндричних труб.

Функціонал інтерфейсного модуля дозволяє інтуїтивно просто провести процес моделювання задачі для користувача без спеціальної підготовки. Всі розраховані моделі зберігаються в базі даних програмного забезпечення ІТ. Використання тривимірної графіки дає можливість візуалізувати розраховане температурне поле.

Особливістю розробленої інформаційної технології є те, що в ній є три незалежні функціональні модулі: робота з базою даних, побудова моделі та аналіз даних. Це дозволяє використовувати її трьом користувачам для вирішення різних задач дослідження.

## Література

1. Лабай В. Й. Тепломасообмін. Львів: Тріада Плюс, 2004. 258 с.
2. Погорелов А. І. Тепломасообмін. Львів: Новий Світ, 2006. 144 с.
3. Лыков В. А. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
4. Беляев Н. М. Основы теплопередачи. К.: Выща шк. Головное изд-во, 1989. 343 с.

5. Peter Bernus, Kai Mertins, Gunter Schmidt. Handbook on Architectures of Information Systems. Berlin: Springer, 2016. 886 p.
6. Авраменко В.С., Авраменко А.С. Проектування інформаційних систем. Черкаси: Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького, 2017. 434 с.
7. Daniel Solis. Illustrated C# 2012. Berkeley: APress, 2012. 732 p.
8. Elmasri R., Navathe S. B. Fundamentals of Database Systems. Pearson, 2015. 1280 p.
9. Маценко В. Г. Комп'ютерна графіка. Чернівці: Рута, 2009. 343 с.
10. Пічугін М. Ф., Канкін І. О., Воротніков В. В. Комп'ютерна графіка. Київ: Центр учбової літ., 2013. 346 с.

## References

1. Labay V. Y. (2004). *Teplomasoobmin*. [Heat and mass transfer]. (monograph). Lviv: Triada Plus. [in Ukraine].
2. Pogorelov A.I. (2006). *Teplomasoobmin*. [Heat and mass transfer]. (monograph). Lviv: New World. [in Ukraine].
3. Lykov V. A. (1967). *Teoriya teploprovodnosti*. [Theory of thermal conductivity]. (monograph). M.: Higher School. [in Russian].
4. Belyaev N. M. (1989). *Osnovy teploperedachi*. [Fundamentals of heat transfer]. (monograph). K.: High school. Head publishing house. [in Russian].
5. Peter Bernus, Kai Mertins, Gunter Schmidt. (2016). *Handbook on Architectures of Information Systems*. (monograph). Berlin: Springer.
6. Avramenko V.S., Avramenko A.S. (2017). *Proektuvannya informacijnih system*. [Design of information systems]. (monograph). Cherkasy: Cherkasy National University named after. B. Khmelnytsky. [in Ukraine].
7. Daniel Solis. (2012). *Illustrated C# 2012*. (monograph). Berkeley: APress.
8. Elmasri R., Navathe S. B. (2015). *Fundamentals of Database Systems*. (monograph). Pearson.
9. Matsenko V. G. (2009). *Komp'yuterna grafika*. [Computer graphics]. (monograph). Chernivtsi: Ruta. [in Ukraine].
10. Pichugin M.F., Kankin I.O., Vorotnikov V.V. (2013). [Computer graphics]. (monograph). Kyiv: Center for educational literature. [in Ukraine].

### **Рачинська Алла Леонідівна**

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова  
к.ф.-м.н., доцент  
вул. Дворянська, 2 Одеса, Україна 65082  
[rachinskaya@onu.edu.ua](mailto:rachinskaya@onu.edu.ua),  
ORCID: 0000-0003-2430-9603

### **Царенко Олексій Павлович**

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова  
старший викладач  
вул. Дворянська, 2 Одеса, Україна 65082  
[tsarenko@onu.edu.ua](mailto:tsarenko@onu.edu.ua),  
ORCID: 0000-0001-8023-1236

### *Для посилань:*

Рачинська А. Л., Царенко О. П. Інформаційна технологія оцінювання теплоізоляції багатошарових стін. Механіка та математичні методи, 2023. Т. V. №. 2. С. 71–79.

### *For references:*

A. Rachinska, O. Tsarenko (2023). Information technology for assessing thermal insulation of multi-layer walls. Mechanics and Mathematical methods. V(2). 71–79.



УДК 539.3

## ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛІ БАЛІСТИЧНОГО МАЯТНИКА В АНАЛІЗІ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ КРАНОВИХ СИСТЕМ

Човнюк Ю. В.<sup>1</sup>, Чередніченко П. П.<sup>1</sup>, Шудра Н. С.<sup>1</sup>, Козупиця С. І.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Київський Національний університет будівництва та архітектури

<sup>2</sup>Національний авіаційний університет

**Анотація.** Проведений аналіз низки факторів, які впливають на точність експериментального визначення малих швидкостей маятникових коливань вантажу на канаті вантажопідйомного механізму крана, що виникають при пуску, гальмуванні чи реверсуванні кранової системи. Канат при цьому розглядається як пружна нитка. Теоретично проаналізований вплив скінченої маси та згинної пружності виска на частоту власних коливань маятника. Показано, що основним фактором, який впливає на власну частоту, є згинна пружність нитки виска, а вплив маси нитки (канату) балістичного маятника можна звести до мінімуму. Отриманий точний аналітичний вираз для власної частоти реального маятника за довільної жорсткості легкого виска. Для невеликої маси вантажу й швидкості руху при імпульсному впливі на кранову систему (пуск, гальмування, реверсування) виникають певні труднощі щодо врахування скінченої маси й жорсткості виска задля розрахунку власної частоти коливань маятника. За ідеальної ситуації масу виска можна зробити надто малою у порівнянні з масою маятника (вантаж та канат), але при короткій довжині канату збільшується власна частота маятника, що знижує чутливість системи до зовнішніх імпульсних впливів, і зростає вплив пружності нитки (канату) на цю частоту. Тому у реальній ситуації маса маятника, його довжина (канату) та жорсткість виска завжди повинні бути обрані і враховані у точних дослідженнях (і розрахунках) виходячи компромісних міркувань.

У даному дослідженні теоретично оцінюється у наближенні малого параметру степінь впливу вказаних вище факторів на власну частоту коливань маятника (тобто, по суті, вантажу на канаті).

Отримані у даному дослідженні результати можуть у подальшому бути використані для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку та аналізу перехідних процесів (пуску, гальмування, реверсування та ін.) кранових систем як на стадіях їх проектування, так і у режимах реальної експлуатації задля оптимізації роботи вказаних вище систем (та механізмів).

**Ключові слова:** модель, балістичний маятник, аналіз, перехідні процеси, кранові системи, коливання, пуск, гальмування.

## USE OF THE BALLISTIC PENDULUM MODEL IN THE ANALYSIS OF CRANE SYSTEM TRANSIENTS

Yu. Chovniuk<sup>1</sup>, P. Cherednichenko, N. Shudra<sup>1</sup>, S. Kozupitsa<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Kyiv National University of Civil Engineering and Architecture

<sup>2</sup> National Aviation University

**Abstract.** A number of factors affecting the accuracy of experimental determination of small velocities of pendulum vibrations of the load on the rope of the crane hoisting mechanism, arising at start-up, braking or reversing of the crane system, have been analyzed. The rope is considered as an elastic thread. The influence of finite mass and bending elasticity of the viscus on the frequency of natural oscillations of the pendulum is theoretically analyzed. It is shown that the main factor influencing the natural frequency is the bending elasticity of the viscus thread, and the influence of the mass of the thread (rope) of the ballistic pendulum can be minimized. An exact analytical expression

for the natural frequency of a real pendulum at arbitrary stiffness of the lightweight viscous is obtained. For small mass of cargo and speed of movement at impulse influence on the crane system (starting, braking, reversing) there are certain difficulties in taking into account the final mass and stiffness of the viscous for calculation of natural frequency of pendulum oscillations. In an ideal situation, the mass of the temple can be made too small compared to the mass of the pendulum (load and rope), but with a short length of rope increases the natural frequency of the pendulum, which reduces the sensitivity of the system to external impulsive influences, and increases the influence of the elasticity of the thread (rope) on this frequency. Therefore, in a real situation, the mass of the pendulum, its length (of the rope) and the stiffness of the temple should always be chosen and taken into account in accurate studies (and calculations) based on compromise considerations.

In this study, the degree of influence of the above factors on the natural frequency of oscillation of a pendulum (i.e., essentially a weight on a rope) is theoretically evaluated in the small-parameter approximation.

The results obtained in this study can be further used to refine and improve the existing engineering methods of calculation and analysis of transients (start-up, braking, reversing, etc.) of crane systems both at the stages of their design and in the modes of real operation to optimize the performance of the above systems (and mechanisms).

**Keywords:** model, ballistic pendulum, analysis, transients, crane systems, oscillations, starting, braking.

## 1 ВСТУП

У процесах пуску, гальмування, реверсування кранових систем у останніх неминуче виникають маятникові коливання вантажу на канаті вантажопідйомного механізму, які, зрозуміла, є небажаними, оскільки можуть призвести до аварійних ситуацій. Використання сучасних мехатронних систем управління рухом, зокрема, приводом кранового механізму підйому вантажу, дозволяють суттєво зменшити негативний вплив розгойдування вантажу на канаті у процесах пуску/гальмування чи реверсування. Однак для адекватного гасіння вказаних коливань треба мати інформацію про їх характеристики, причому оперативну і доволі точну. Саме ця проблема і розглянута у даному дослідженні.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Аналіз впливу пружних властивостей стрижня/канату при згині, маси виска, вантажу проведений у роботах [1, 2]. Автори [3-15] досліджують різноманітні аспекти динаміки вантажопідйомних механізмів кранів, проте користуються моделями пружних елементів (канатів), які не враховують масу виска та згинну жорсткість канату. У даному дослідженні вперше використана модель балістичного маятника для детального і всебічного дослідження виникаючих у кранових системах коливань.

## 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Робота полягає у обґрунтуванні фізико-механічної моделі маятникових коливань вантажу на канаті вантажопідйомного механізму крана.

## 4 МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕНЬ

Використана модель балістичного маятника, методи математичної фізики, апарат диференціальних рівнянь у частинних похідних для знаходження власних частот маятникових коливань у наближенні малої маси й жорсткості виска (канату). Власне маятник (канат і вантаж, який на ньому закріплений) у даній роботі розглянуті як система з розподіленими параметрами (дискретно-континуальне наближення). Крім того, для проведення дослідження застосовуються елементи математичного апарату класичного варіаційного числення, теоретичної механіки, оптимального управління, а також математичного моделювання, які використовуються у численних роботах вітчизняних та зарубіжних авторів.

## 5 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо зосереджену масу  $m$  (вантаж), яка закріплена на тонкому гнучкому стрижні (модель канату), для котрого задані довжина  $L$ , радіус  $r$  (круговий поперечний переріз), щільність матеріалу  $\rho$ , модуль Юнга  $E$ . Стрижень закріплений й зафіксований на одному кінці та вільний на кінці із прикріпленою до нього масою (вантаж). Якщо у задачі ми нехтуємо згинною пружністю стрижня, тоді ми будемо його називати ниткою. Силою тертя з повітрям нехтуємо.

Рівняння згинних коливань розтягнутого вагою вантажу пружного стрижня при невеликих згинах (коли можна знехтувати обертальним рухом елементів стрижня) має відомий вид [2]:

$$\begin{cases} EI \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left( T \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \rho \cdot S \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0, \\ T = \rho \cdot S \cdot g(L-x) + mg, \quad S = \pi r^2, \quad I = \int z^2 ds' = \frac{\pi r^4}{4}. \end{cases} \quad (1)$$

Тут  $I$  – момент інерції поперечного перерізу стрижня. Як показують прості оцінки, технічно неважко виготовити стрижень так, щоб його сумарна маса  $\rho \cdot S \cdot L$  була набагато меншою за масу підвешеного вантажу  $m$ . У цьому випадку сила натягу стрижня може вважатись постійною  $T \approx mg$ , а рівняння (1) суттєво спрощується. Будемо у подальшому розв'язувати задачу саме у цьому наближенні.

Для зручності аналізу рівняння перейдемо до безрозмірних змінних, коли координата унормована на довжину стрижня, а час  $\tau$  на частоту коливань математичного маятника. У цьому випадку рівняння (1) може бути записане наступним чином:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} = 0, \\ y = \frac{x}{L}, \quad \tau = \omega_0 \cdot t = t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \varepsilon^2 = \frac{\pi \cdot r^4 \cdot E}{4mgL^2}, \quad \mu = \frac{\rho SL}{m} \ll 1. \end{cases} \quad (2)$$

Тут безрозмірний параметр  $\varepsilon$  характеризує пружні властивості стрижня при згині, а  $\mu$  – безрозмірну масу виска. Зазначимо, що при повному нехтуванні згинною жорсткістю

( $\varepsilon = 0$ ), матимемо замість (2) хвильове рівняння для коливань гнучкої масивної, однорідно розтягнутої нитки. Фазова швидкість біжучої вздовж нитки поперечної хвилі буде дорівнювати  $C_{\perp} = \omega_0 \cdot L \cdot \sqrt{\mu} = \sqrt{\mu \cdot g \cdot L}$ .

Для кутових параметрів виска (сталевий канат радіусом  $r = 3 \cdot 10^{-2}$  м, довжиною  $L = 10$  м,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $m = 10^4$  кг,  $\rho = 7,8 \cdot 10^{+3}$  кг/м<sup>3</sup>)  $\varepsilon \approx 0,1$  та  $\mu \approx 0,02$ . Виходячи з цих оцінок, будемо нижче вважати обидва параметри  $\mu$  та  $\varepsilon$  малими у порівнянні з 1, тобто  $(\varepsilon, \mu) \ll 1$ .

Хоча параметр пружності  $\varepsilon$  набагато менше 1, він стоїть перед похідною 4-го порядку, і навіть за невеликих згинів стрижня (модель канату) цією складовою рівняння нехтувати не можна. Аналогічно за малості параметра  $\mu$  член з похідною у часі також може бути суттєвим, якщо частоти згинних коливань високі у порівнянні з частотою коливань математичного маятника.

Рівняння (2) слід доповнити граничними умовами. На лівому кінці стрижня ( $y = 0$ ) – це умова закріпленого (зафіксованого) кінця, а на правому кінці ( $y = 1$ ), де прикріплений вантаж (маса), дорівнює нулю згинний момент (інерцією вантажу по відношенню до обертань завдяки малості розмірів нехтуємо):

$$z(0, \tau) = 0, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{y=0, \tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{y=1, \tau} = 0. \quad (3)$$

Четверта умова зв'язує рівнодіючу силу (перерізуюча сила плюс проекція сили натягу) на правому кінці виска й прискорення закріпленою на стрижні вантажу:

$$\left( EI \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - mg \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) \Big|_{x=L,t} = m \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \Big|_{x=L,t} \rightarrow \left( \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) \Big|_{y=1,\tau} = \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} \Big|_{y=1,\tau} . \quad (4)$$

Рівняння (2) з граничними умовами (3), (4) дозволяє знайти власні частоти коливань маятника, котрі можна характеризувати безрозмірною величиною  $\Omega(\varepsilon, \mu)$  – відношенням частоти реального маятника до частоти математичного маятника  $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ .

Будемо розв'язувати рівняння (2) методом розділення змінних, подаючи шукану функцію у вигляді  $Z(y, \tau) = \xi(y) \cdot \theta(\tau)$ . Позначаючи константу розділення як  $\Omega^2$ , матимемо два рівняння для часового  $\theta(\tau)$  й координатного факторів  $\xi(y)$ :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \Omega^2 \cdot \theta = 0, & \varepsilon^2 \cdot \frac{d^4 \xi}{dy^4} - \frac{d^2 \xi}{dy^2} + \mu \Omega^2 \cdot \xi = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Розв'язок  $\theta(\tau)$  першого рівняння системи (5) має вид звичайний гармонічних функцій часу з частотою  $\Omega$ . Розв'язок другого рівняння (5) будемо шукати у вигляді експоненти  $\xi(y) \sim \exp(\alpha \cdot y)$ . Тоді маємо характеристичне рівняння для коефіцієнтів  $\alpha$ , а його наближений розв'язок запишемо, скориставшись малими значеннями параметрів  $\mu$  та  $\varepsilon$ :

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \cdot \alpha^4 - \alpha^2 + \mu \Omega^2 = 0, & \alpha^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\mu\varepsilon^2 \Omega^2}}{2\varepsilon^2}, & \alpha_1^2 \approx \frac{1}{\varepsilon^2} \gg 1, \\ \alpha_2^2 \approx \Omega^2 \mu \ll 1. \end{cases} \quad (6)$$

При записі коренів характеристичного рівняння ми вважали, що дискримінант рівняння додатний й усі корені дійсні, оскільки у розглядуваній задачі очікувана основна власна частота маятника  $\Omega \approx 1$ . Високочастотні моди, коли:

$$\Omega > \Omega_{hf} = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\mu}} \gg 1, \quad (7)$$

призводять до уявних коренів характеристичного рівняння. Зрозуміло, що можна припустити наступне: амплітуда таких високочастотних мод навіть при імпульсному впливі на маятник порівняно мала, і вони додадуть ефекти другого порядку малості у порівнянні з регулярними коливаннями маятника на основній частоті  $\Omega \approx 1$ .

Можна записати фундаментальний розв'язок для координатного рівняння (5) у вигляді:

$$\xi(y) = C_1 \cdot \sinh(\alpha_1 y) + C_2 \cdot \cosh(\alpha_1 y) + C_3 \cdot \sinh(\alpha_2 y) + C_4 \cdot \cosh(\alpha_2 y). \quad (8)$$

Підставляючи (8) у три граничних умови (3), можна виключити три константи інтегрування, після чого матимемо розв'язок з точністю до амплітуди:

$$\begin{aligned} \xi(y) = & \left( \sinh \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \sinh \alpha_2 \right) \cdot (\cosh(\alpha_1 y) - \cosh(\alpha_2 y)) - \\ & - \left( \cosh \alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \cosh \alpha_2 \right) \cdot \left( \sinh(\alpha_1 y) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \sinh(\alpha_2 y) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Використовуючи четверту граничну умову (4), отримаємо рівняння для визначення власних частот коливань маятника  $\Omega$  :

$$\left( -\varepsilon^2 \cdot \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \Big|_{y=1} = \Omega^2 \cdot \xi(1), \quad (10)$$

або

$$\begin{aligned} & \left( -\varepsilon^2 \right) \cdot \left\{ \left( sh\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot sh\alpha_2 \right) \cdot \left( \alpha_1^3 \cdot sh\alpha_1 - \alpha_2^3 \cdot sh\alpha_2 \right) - \right. \\ & \left. - \left( ch\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \cdot ch\alpha_2 \right) \cdot \left( \alpha_1^3 \cdot ch\alpha_1 - \alpha_1 \cdot \alpha_2^2 \cdot ch\alpha_2 \right) \right\} + \\ & + \left( sh\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot sh\alpha_2 \right) \cdot \left( \alpha_1 \cdot sh\alpha_1 - \alpha_2 \cdot sh\alpha_2 \right) - \\ & - \left( ch\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \cdot ch\alpha_2 \right) \cdot \left( \alpha_1 \cdot ch\alpha_1 - \alpha_1 \cdot ch\alpha_2 \right) = \\ & = \Omega^2 \cdot \left\{ \left( sh\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot sh\alpha_2 \right) \cdot \left( ch\alpha_1 - ch\alpha_2 \right) - \left( ch\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \cdot ch\alpha_2 \right) \cdot \left( sh\alpha_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot sh\alpha_2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

У трансцендентному рівнянні (11) для  $\Omega$  прийняті наступні позначення:

$$\sinh(U) = sh(U) = \frac{1}{2} \cdot (e^{+U} - e^{-U}); \quad ch(U) = cosh(U) = \frac{1}{2} \cdot (e^{+U} + e^{-U}) \quad (12)$$

Проаналізуємо тепер можливість отримання наближеного розв'язку для власної частоти  $\Omega$  реального маятника у наближенні малості маси й жорсткості виска. Розглянемо спочатку ситуацію абсолютну гнучкого виска (нитка або ланцюжок), коли параметр згинної жорсткості  $\varepsilon = 0$ . Тоді при відносно малому значенні  $\mu$  розв'язок другого рівняння (5) буде давати майже лінійне рішення:

$$\begin{aligned} \xi(y) &= C_1 \cdot sh(\Omega \cdot \sqrt{\mu} \cdot y) + C_2 \cdot ch(\Omega \cdot \sqrt{\mu} \cdot y) = \\ &= (C_1 \cdot \Omega \cdot \sqrt{\mu} \cdot y + C_2) \cdot (1 + O(\mu\Omega^2)) \rightarrow \xi(y) \approx y. \end{aligned} \quad (13)$$

Лінійна функція  $\xi(y)$  – це коливання математичного маятника. Тому власна частота коливань, визначена з рівняння (10) чи (11), при підстановці у нього функції (13)  $\Omega = 1$ , як і повинно бути.

Для подальшого аналізу, залишаючись у межах цієї точності розрахунку, можна у (9) покласти  $\alpha_2 = 0$ . Тоді замість (9) матимемо форму пружного виска у вигляді наступної функції:

$$\xi(y) \approx y + \frac{sh(\alpha_1 \cdot [1 - y]) - sh\alpha_1}{\alpha_1 \cdot ch\alpha_1}. \quad (14)$$

Тут друга складова у правій частині (14) забезпечує виконання другої умови (3) для закріпленого кінця виска, а нормування у (14) обрано так, щоб виконувалась рівність  $\xi(1) = 1$ .

Підставляючи тепер (14) у рівняння (10) чи (11) й враховуючи, що  $\alpha_1 = \xi^{-1}$ , отримаємо наступний вираз для основної частоти коливань реального маятника ( $\mu \rightarrow 0$ ):

$$\Omega^2 = \frac{1}{1 - \varepsilon \cdot th(1/\varepsilon)}, \quad th(U) = \frac{sh(U)}{ch(U)}. \quad (15)$$

Із урахуванням скінченної маси виска (власне канату) можна отримати більш загальний наближений вираз для власної частоти реального маятника при  $(\mu, \varepsilon) \ll 1$ :

$$\Omega = 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\mu}{6} + O(\varepsilon\mu) + O(\varepsilon^2) + O(\mu\sqrt{\mu}). \quad (16)$$

Як видно, частота коливань реального маятника буде залежати не тільки від речовини й форми виска (тобто канату), але й від маси вантажу й виска.

Слід зазначити, що використання формули (15) у «зворотному» граничному випадку, коли  $\varepsilon \gg 1$ , дозволяє досить коректно оцінити власну частоту коливань вантажу маси  $m$ , закріпленого на кінці (кругового перерізу) легкого пружного стрижня, але за умови відсутності сили тяжіння. Дійсно, при  $g \rightarrow 0$  параметр  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , й з (15):

$$\begin{cases} \Omega^2 = (1 - \varepsilon \cdot th(1/\varepsilon))^{-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \infty} 3\varepsilon^2 \cdot (1 + O(\varepsilon^{-2})), \\ \omega = \Omega \cdot \sqrt{\frac{g}{L}} \xrightarrow{g \rightarrow 0} \frac{r^2}{2L} \sqrt{\frac{3\pi\varepsilon}{mL}}. \end{cases} \quad (17)$$

Цей факт говорить про те, що формула (15) для основної частоти коливань реального маятника може бути справедливою для довільного (!) параметру  $\varepsilon$ , поки можна знехтувати масою виска.

Критерій малості маси виска для випадку, коли  $\varepsilon > 1$ , легко отримати з тієї вимоги, щоб у виску не збуджувались згинні коливання з частотами, близькими до основної частоти маятника. Ця вимога відображена у нерівності (7). Тому критерій коректності формули (15) для маси виска має вид:

$$\mu \ll \frac{1}{4\varepsilon^2\Omega^2} = \frac{1 - \varepsilon \cdot th(1/\varepsilon)}{4\varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon \gg 1} \mu \ll \frac{1}{12 \cdot \varepsilon^4}. \quad (18)$$

Виконання критерію (18) залишає коректними усі наведені вище міркування, які були зроблені після отримання точних коренів характеристичного рівняння (6), а значить і вираз(15).

Таким чином, для обчислення основної частоти коливань реального маятника на легкому однорідному виску ( $\mu \ll 1$ ) з довільною формою поперечного перерізу слід спочатку оцінити величину параметра  $\varepsilon$ . Якщо маса виска задовольняє критерію (18), тоді основну частоту маятника  $\omega$  можна знайти за формулою:

$$\omega^2 \approx \frac{g}{L} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\mu}{3}\right)}{\left\{1 - \varepsilon th\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right\}}, \quad \varepsilon = \frac{1}{L} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot I_p \cdot E}{mg}}, \quad \mu \ll \frac{m_p}{m} \ll 1, \quad (19)$$

де  $m_p$  та  $I_p$  – маса виска і момент інерції його поперечного перерізу. Слід зазначити, що ніяких обмежень на величину параметра  $\varepsilon$  у формулі (19) не накладається! У цьому

випадку високочастотні коливання практично будуть відсутні, оскільки корені характеристичного рівняння (6) дійсні, форма натягнутого виска має вид монотонної залежності (9) від координати  $Z(x)$ , а рівняння (10) дає єдиний розв'язок для власної частоти маятника.

Якщо критерій (18) не виконується або  $\mu \sim 1$ , тоді у виску можуть збуджуватись згинні коливання і хвилі з неспіввимірними частотами, а спектр коливань вантажу також матиме високочастотні гармоніки. Маятник у цьому режимі здійснює нерегулярні коливання, що не дозволяє використовувати його (як балістичний маятник) задля діагностики й динамічного аналізу малих імпульсів збудження руху (кранової системи).

Розглянемо цю ситуацію більш детально.

Величину  $\Omega_{hf}$  (7) із урахуванням введених у (2)  $\varepsilon$  та  $\mu$  можна подати наступним чином:

$$\Omega_{hf} = \frac{m \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{L}}{\sqrt{\rho \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \sqrt{E}}}. \quad (20)$$

Для істинного значення  $\omega_{hf}$  тоді маємо:

$$\omega_{hf} = \Omega_{hf} \cdot \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{m \cdot g}{\sqrt{\rho \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \sqrt{E}}}. \quad (21)$$

Отже, величина  $\omega_{hf}$  не залежить від довжини виска  $L$ . Умова виникнення резонансних (з частотою вільних коливань маятника) явищ набуває вигляду:

$$\Omega_{hf} = 1 \Leftrightarrow \frac{m \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{L}}{\sqrt{\rho \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \sqrt{E}}} = 1. \quad (22)$$

З умови (22) легко отримати значення довжини виска ( $L^*$ ), за якого виникають резонанси між маятниковою частотою коливань вантажу на канаті  $\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\right)$  та частотою згинних коливань виска (тобто самого канату):

$$L^* = L_{res} = \frac{\rho \cdot \pi^2 \cdot r^6 \cdot E}{m^2 \cdot g}, \quad (23)$$

тобто за цієї довжини виска  $L^*$  існує резонанс:

$$\omega_{hf} = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (24)$$

При частотах  $\Omega > \Omega_{hf}$  ( $\omega > \omega_{hf}$ ) вповодж виска (канату) розповсюджуються високочастотні згинні коливання і хвилі. Ці згинні коливання експоненціально зростають по амплітуді вповодж виска (канату) й мають просторовий період коливань. Описують ці коливні та хвильові процеси у виску (канаті) наступні залежності:

$$\xi(y) \sim \exp(\alpha y), \quad \alpha^2 = \frac{1 \pm i \cdot \sqrt{4\mu\varepsilon^2\Omega^2 - 1}}{2\varepsilon^2}, \quad (25)$$



або:

$$\xi(y) \sim \exp\{k_{Re} \cdot x\} \cdot \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} (k_{Im} \cdot x), \quad (26)$$

де:

$$\begin{cases} k_{Re} = \frac{\sqrt[4]{\mu} \cdot \sqrt{\Omega}}{\sqrt{\varepsilon} \cdot L} \cdot \cos \left\{ \frac{1}{2} \cdot \arctg \sqrt{4\mu\varepsilon^2\Omega^2 - 1} \right\}; \\ k_{Im} = \frac{\sqrt[4]{\mu} \cdot \sqrt{\Omega}}{\sqrt{\varepsilon} \cdot L} \cdot \sin \left\{ \frac{1}{2} \cdot \arctg \sqrt{4\mu\varepsilon^2\Omega^2 - 1} \right\}. \end{cases} \quad (27)$$

Нижче, у табл. 1 подані чисельні оцінки  $\Omega_{hf}$ ,  $\omega_{hf}$  для різних значень довжини виска (канату)  $L$  й заданих параметрів матеріалу (сталевий канат):

$$\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}; r = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}, g = 9,81 \text{ м/с}^2; m = 10^4 \text{ кг}.$$

Канат має круговий переріз ( $S = \pi r^2$ ). Для величини  $\omega_{hf}$  маємо (незалежно від  $L$ ) наступне значення:

$$\omega_{hf} \cong 6,26 \text{ с}^{-1}.$$

**Таблиця 1**

Залежність  $\Omega_{hf}$  від довжини виска (канату)  $L$

$L$ , м	$\Omega_{hf}$
10	6,32
20	8,94
50	14,14
100	20,00
500	44,72
1000	63,25
10000*	200,00

\*Примітка.  $L = 10000$  м відповідає довжині виска (канату), на якому закріплений батискаф для дослідження Маріїнської западини.

Зазначимо, що  $L > 50$  м характерні для шахтних підйомників (при заляганні вугілля на великих глибинах).

У Таблиці 2 наведені значення  $L_{res}$  для різних мас вантажу й наступних параметрів матеріалу виска (канату):  $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ;  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ;  $r = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

**Таблиця 2**

Залежність  $L_{res}$  від  $m$  вантажу

$m$ , кг	$L_{res}$ , м
100	117,300
200	29,325
500	4,692
800	1,833
1000	1,173

Результати наведені у табл. 2 дозволяють стверджувати, що небажані резонансні явища у канатах вантажопідйомних механізмів (коли співпадають частоти згинних та маятникових коливань) виникають при незначних навантаженнях (до 500 кг) на довжинах виска (від 4,7 м до 117,3 м). Цю обставину слід обов'язково враховувати при проектуванні подібних механізмів задля запобігання виникненню аварійних ситуацій.

## 5 ВИСНОВКИ

1. Обґрунтована фізико-механічна модель балістичного маятника, яка адекватно описує маятникові коливання вантажу на канатах кранової системи.

2. Встановлені режими пуску та гальмування кранової системи, які керуються мехатронними системами управління і забезпечують мінімальні амплітуди небажаних маятникових коливань вантажу й ситуації, за якої виникають резонанси маятникових коливань зі згинними коливаннями власне вантажу на канаті крану.

3. Встановлені основні критерії, які забезпечують справедливість застосування формул для власної частоти (згинно-маятникових) коливань вантажу на канаті, а також умови, за яких у канатах кранової системи можуть збуджуватись згинні коливання та хвилі із неспіввимірними частотами, а спектр коливань власне вантажу має у своєму складі високочастотні гармоніки. Маятник (вантаж на канаті) у таких режимах функціонування вантажопідйомного механізму крана здійснює нерегулярні коливання, де не існує можливостей управління ними ззовні. Наведені чисельні оцінки для вказаних ситуацій функціонування кранів.

4. Отримані у роботі результати можуть у подальшому бути використані для уточнення й вдосконалення інженерних методів розрахунку кранових систем, шахтних підйомників (з горизонтів глибокого залягання), вантажопідйомних механізмів, які працюють в умовах глибокого занурення (на морі, в океані) як на стадіях проектування вказаних вище систем, так і у режимах їх реальної експлуатації.

## Література

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Механика. Т. 1. – М.: Наука, 1988. 216 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. §25.
3. Румянцев Б. П., Будиков Л.Я. О влиянии жёсткости металлоконструкций моста и грузовых канатов на величину динамических нагрузок. Локомотивостроение. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1971. Вып. 3. С. 30-37.
4. Будиков Л.Я. Многопараметрический анализ динамики грузоподъёмных кранов мостового типа. – Луганск: Изд-во ВУТУ, 1997. 210 с.
5. Кожевников С.Н. Динамика машин с упругими звеньями. – К.: Изд-во АН УССР, 1961. 160 с.
6. Ловейкин В. С. Расчёты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин. – К.: УМК ВО, 1990. 166 с.
7. Ловейкин В. С., Човнюк Ю. В., Діктерук М. Г., Пастушенко С. І. Моделивання динаміки механізмів вантажопідйомних машин. – К. – Миколаїв: РВВ МДАУ, 2004. 286 с.
8. Човнюк Ю. В., Приймаченко О. В., Чередніченко П.П., Остапушенко О.П., Кравченко І.М. Аналіз пружних хвилеутворень у канатах вантажопідйомних кранів. Сучасне будівництво і архітектура. Зб. наук. праць. Одеса: ОДАБА, 2023. Вип. 4. С. 23–32.
9. Човнюк Ю. В., Приймаченко О. В., Чередніченко П. П., Шудра Н. С. Моделивання та оптимізація процесів переміщення і розгону вантажного візка мостового крана у режимі гасіння некерованих коливань вантажу. Сучасне будівництво і архітектура. Зб. наук. праць. Одеса: ОДАБА, 2023. Вип. 4. С. 33–40.
10. Човнюк Ю. В., Кравчук В. Т., Чередніченко П. П., Остапушенко О. П., Кравченко І. М. Аналіз коливань, виникаючих у мостовому крані при його наїзді на кінцеві упори. Містобудування і територіальне планування. – К.: КНУБА, 2023. Вип. №83. С. 366–373.

11. Човнюк, Ю., Діктерук, М., & Комоцька, С. Метод усереднення у нелінійних задачах оптимального управління маятниковими коливаннями вантажу на канаті мостового крана. Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. 2017. Вип. 90. С. 85–91.
12. Ловейкін В. С. Динаміка і оптимізація режимів руху мостових кранів. Монографія / В.С. Ловейкін, Ю. О. Ромасевич. – К.: ЦП „КОМПРИНТ”, 2016. – 310 с.
13. Ловейкін В. С., Човнюк Ю. В., Кадикало І. О. АНАЛІЗ УМОВ ІСНУВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМІВ (АВТОКОЛИВАНЬ) ПРИ РОБОТІ МОСТОВИХ КРАНІВ Підъемно-транспортная техника. 2016. Вип. №3 (51). С. 4-15.
14. Човнюк Ю. Діктерук М., Комоцька С. Аналіз нелінійних маятникових коливань вантажу на канаті мостового крана при вібраціях точки підвісу. Підъемно-транспортная техника. 2016. Вип. №3 (51). С. 15–18.
15. Ловейкін В. С., Ромасевич Ю. О., Човнюк Ю. В., Кадикало І. О. Динаміка й оптимізація підйомно-транспортних машин. – К.: ЦП “Компрінт”, 2019. – 292 с.

## References

1. Landau L. D., Lyfshyts E. M. Mekhanyka. T. 1. – М.: Nauka, 1988. P. 216.
2. Landau L. D., Lyfshyts E. M. Teoryia upruhosty. – М.: Nauka, 1987. §25.
3. Rumiantsev V. P., Budykov L. Ia. O vlyianyy zhestkosti metallokonstruktsyi mosta y hruzovyykh kanatov na velychynu dynamycheskykh nahruzok. Lokomotyvostroeny. – Kharkov: Yzd-vo KhNU, 1971. V. 3. S. 30–37.
4. Budykov L. Ia. Mnoparametrycheskyi analiz dynamyky hruzopod'yemnykh kranov mostovoho tyra. – Luhansk: Yzd-vo VUTU, 1997. P. 210.
5. Kozhevnykov S. N. Dynamyka mashyn s upruhymy zveniyamy. – К.: Yzd-vo AN USSR, 1961. P. 160.
6. Loveikyn V. S. Raschety optimalnykh rezhymov dyzheniya mekhanizmov stroitelnykh mashyn. – К.: UMK VO, 1990. 166 s.
7. Loveikin V. S., Chovniuk Yu. V., Dikteruk M. H., Pastushenko S. I. Modeliuvannia dynamiky mekhanizmiv vantazhopidomnykh mashyn. – К. – Mykolaiv: RVV MDAU, 2004. 286 s.
8. Chovniuk Yu. V., Pryimachenko O. V., Cherednichenko P. P., Ostapushchenko O. P., Kravchenko I. M. Analiz pruzhnykh khvylevtvoren u kanatakh vantazhopidomnykh kraniv. Suchasne budivnytstvo i arkhitektura. Zb. nauk. prats. Odesa: ODABA, 2023. Vyp. 4. S. 23–32.
9. Chovniuk Yu. V., Pryimachenko O. V., Cherednichenko P. P., Shudra N. S. Modeliuvannia ta optymizatsiia protsesiv peremishchennia i rozghonu vantazhnoho vizka mostovoho kрана u rezhymi hasinnia nekerovanykh kolyvan vantazhu. Suchasne budivnytstvo i arkhitektura. Zb. nauk. prats. Odesa: ODABA, 2023. Vyp. 4. S. 33–40.
10. Chovniuk Yu. V., Kravchuk V. T., Cherednichenko P. P., Ostapushchenko O. P., Kravchenko I. M. Analiz kolyvan, vynykaiuchykh u mostovomu krani pry yoho naizdi na kintsevi upory. Mistobuduvannia i terytorialne planuvannia. – К.: KNUBA, 2023. Vyp. №83. S. 366–373.
11. Chovniuk, Yu., Dikteruk, M., & Komotska, S. METOD USEREDNENNIa U NELINIINYKh ZADACHAkH OPTYMALNOHO UPRAVLINNIa MAIaTNYKOVYMY KOLYVANNIaMY VANTAZhU NA KANATI MOSTOVOHO KRANA. Hirnychi, budivelni, dorozhni ta melioratyvni mashyny. 2017. Vyp. 90. S. 85–91.
12. Loveikin V. S. Dynamika i optymizatsiia rezhymiv rukhu mostovykh kraniv. Monohrafiia / V.S. Loveikin, Yu. O. Romasevych. – К.: TsP „КОМПРИНТ”, 2016. – 310 с.
13. Loveikin V. S., Chovniuk Yu. V., Kadykalo I. O. ANALIZ UMOV ISNUVANNIa STATSIONARNYKh REZHYMIV (AVTOKOLYVAN) PRY ROBOTI MOSTOVYKh KRANIV Подъемно-транспортная техника. 2016. Vyp. №3 (51). S. 4–15.
14. Chovniuk Yu. Dikteruk M., Komotska S. Analiz neliniinykh maiatnykovykh kolyvan vantazhu na kanati mostovoho kрана pry vibratsiiakh tochky pidvisu. Подъемно-транспортная техника. 2016. Vyp. №3 (51). S. 15–18.
15. Loveikin V. S., Romasevych Yu. O., Chovniuk Yu. V., Kadykalo I. O. Dynamika y optymizatsiia pidiomno-transportnykh mashyn. – К.: TsP “Komprint”, 2019. – 292 с.

**Човнюк Юрій Васильович**

Київський Національний університет будівництва та архітектури  
к.т.н., доцент

Повітрофлотський пр., 31, м. Київ, Україна, 03037

[ychovnyuk@ukr.net](mailto:ychovnyuk@ukr.net)

ORCID: 0000-0002-0608-0203,

**Чередніченко Петро Петрович**

Київський Національний університет будівництва та архітектури  
доцент

Повітрофлотський пр., 31, м. Київ, Україна, 03037

[petro\\_che@ukr.net](mailto:petro_che@ukr.net)

ORCID: 0000-0001-7161-661X

**Шудра Наталія Сергіївна**

Київський Національний університет будівництва та архітектури  
старший викладач

Повітрофлотський пр., 31, м. Київ, Україна, 03037

[Shudra\\_n@ukr.net](mailto:Shudra_n@ukr.net)

ORCID: 0000-0001-5416-7680

**Козупиця Сергій Іванович**

Національний авіаційний університет  
доцент

Любомира Гузара пр., 1, м. Київ, Україна, 03058

[sirko58@ukr.net](mailto:sirko58@ukr.net)

ORCID: 0000-0003-3038-4431,

*Для посилань:*

Човнюк Ю. В., Чередніченко П. П., Шудра Н. С., Козупиця С. І. Використання моделі балістичного маятника в аналізі перехідних процесів кранових систем. Механіка та математичні методи, 2023.Т. V. №. 2. С. 80–91.

*For references:*

Yu. Chovniuk, P. Cherednichenko, N. Shudra, S. Kozupitsa. (2023). Use of the ballistic pendulum model in the analysis of crane system transients. Mechanics and Mathematical Methods. V(2). 80–91.

УДК 624.04

## ГРАНИЧНИЙ СТАН АРМОВАНИХ ДВОШАРНІРНИХ АРОК ДВОТАВРОВОГО ПЕРЕРІЗУ

Сорока М. М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація.** Розглядається методика визначення граничного навантаження для двошарнірних арок. Розрахунок виконується із використанням методу граничної рівноваги. Поперечний переріз арки прийнятий у вигляді армованого двотавра. Напружено деформований стан матеріалу двотавра описується діаграмою Прандтля. Але на відміну від класичної діаграми має різні границі текучості при розтягуванні і стиску. Матеріал арматури описується класичною діаграмою Прандтля із однаковими границями текучості при розтягуванні і стиску.

У більшості випадків гранична рівновага перерізу базується на використанні одного фактору – пластичного моменту, при досягненні якого переріз переходить у пластичний стан із можливістю необмеженого деформування. Але для арки такий підхід не може бути прийнятий, так як у її перерізах виникають значні поздовжні сили. Ігнорування поздовжніх сил приводить до помилок у визначенні граничного навантаження. Тому для арок при визначенні граничного стану поперечного перерізу важливо враховувати і згинальний момент і поздовжню силу. Тобто, для переходу перерізу у граничний стан до нього потрібно прикласти граничний момент, якому відповідає певна поздовжня сила. Це приводить до поняття області міцності перерізу, побудовану в координатах згинальний момент – поздовжня сила. Границя цієї області вказує на граничний стан перерізу і описується умовами текучості, які можна одержати, розглянувши пластичну рівновагу перерізу. Використовуючи умови текучості, рівняння рівноваги арки і деякі обмеження можна скласти оптимізаційну задачу для знаходження граничного навантаження. Граничне навантаження (цільова функція) це найменше навантаження, яке задовольняє рівнянням рівноваги арки, умовам текучості і обмеженням. Змінною проекту є координата перерізу, яке переходить у пластичну стадію. Розв'язок такої задачі для арок постійної і змінної жорсткості виконувався за допомогою електронних таблиць. Також були виконані розрахунки арок у ПК Ліра-САПР. Порівняння результатів розрахунку показало задовільну збіжність.

**Ключові слова:** арки, пружнопластичне тіло, двотавровий армований перетин, область міцності, розрахунок за граничною рівновагою.

## LIMIT STATE OF REINFORCED DOUBLE-HINGED ARCHES OF I-SECTION

M. Soroka<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract.** The method of determining the limit load for double-hinged arches is considered. The calculation is performed using the limit equilibrium method. The cross-section of the arch is taken in the form of a reinforced I-beam. The strain-deformed state of the I-beam material is described by the Prandtl diagram. But unlike the classical diagram, it has different yield points under tension and compression. The reinforcement material is described by the classic Prandtl diagram with the same yield strength in tension and compression. In most cases, the ultimate equilibrium of the cross-section is based on the use of one factor – the plastic moment, upon reaching which the cross-section enters a plastic state with the possibility of unlimited deformation. But such an approach cannot be adopted for an arch, as significant longitudinal forces arise in its sections. Ignoring longitudinal forces leads to errors in determining the ultimate load. Therefore, for arches, when determining the limit state of the cross section, it is important to take into account both the bending moment and the longitudinal force. That is, for the transition of the section to the limit state, it is necessary to apply a limit moment to it,



which corresponds to a certain longitudinal force. This leads to the concept of the region of cross-sectional strength, constructed in the coordinates of the bending moment - longitudinal force. The boundary of this region indicates the limit state of the cross-section and is described by the flow conditions, which can be obtained by considering the plastic equilibrium of the cross-section. Using the flow conditions, the equilibrium equation of the arch and some constraints, it is possible to formulate an optimization problem for finding the limit load. Limit load (objective function) is the smallest load that satisfies the arch equilibrium equation, yield conditions and constraints. The project variable is the coordinate of the cross-section that enters the plastic stage. The solution of this problem for arches of constant and variable stiffness was performed using electronic spreadsheets. Arch calculations were also performed in PC Lira-CAD. A comparison of the calculation results showed a satisfactory convergence.

**Keywords:** arches, elastoplastic body, reinforced I-section, strength area, calculation by limit equilibrium.

## 1 ВСТУП

Арки досить часто використовуються як несучі конструкції будівель і споруд. Досить часто інженерів цікавить несуча здатність арок, тобто таке навантаження при якому арка перетвориться у механізм. Виконання такого розрахунку для арки спрощується тим, що вісь арки описується безперервною функцією, що дозволяє частину розрахунків виконувати аналітично. Для арки можна одержати залежності для визначення зусиль у вигляді аналітичних формул. Це спрощує подальші розрахунки граничного навантаження. У даній роботі представлена методика розрахунку несучої здатності арки із використанням EXCEL. Аналіз результатів розрахунку дозволить зробити висновки щодо сильних і слабких сторін обраної методики.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Проблема теоретичного визначення руйнівного навантаження для споруд виникла досить давно. Таку задачу вперше сформулював Галілей. Але через відсутність математичного апарату коректне вирішення задачі тоді було неможливо. І лише першій половині ХХ століття розв'язок задачі знаходження граничного навантаження було отримано у працях [1-4] та інших дослідників. У перших роботах вважалося, що визначальне значення у виникненні граничного стану вносить згинальний момент. Вплив поздовжньої сили вважався незначним. Подальші дослідження показали, що поздовжню силу не завжди можна ігнорувати. Для арованих систем поздовжня сила робить помітний внесок у величину граничного навантаження [3-6]. При розв'язанні задач граничної рівноваги з урахуванням моменту та поздовжньої сили використовується поняття області міцності перерізу. Така область є замкнутою площиною в координатах момент - поздовжня сила. Відповідно до гіпотези теорії граничної рівноваги всередині області міцності матеріал перерізу працює в пружній стадії, а на її межі момент і поздовжня сила досягають граничних значень і з'являється можливість необмеженого пластичного деформування. Графічне зображення області міцності для не армованих перерізів різної форми представлено в [3], [4], [6]. Области міцності прямокутних армованих перерізів представлені в [5], [7-9].

При розв'язку задач граничної рівноваги досить зручними є два методи. Перший метод полягає у складанні та вирішенні екстремальної задачі для знаходження мінімального значення навантаження, що задовольняє рівнянням статички та умов пластичності [3], [5]. Іноді, для спрощення задачі границю області міцності представляють у вигляді багатокутника [5].

Другий метод передбачає послідовне виключення з роботи перерізів, які перейшли у пластичний стан [11]. Це дозволяє досліджувати послідовність появи пластичних зон зі збільшенням навантаження.

## 3 МЕТА ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даного дослідження є апробація методики обчислення граничного навантаження для армованої двохарнійної арки двотаврового перерізу. Поставлена задача розрахунку арок постійної і змінної жорсткості. Розв'язок подібної задачі для арок, які мають прямокутний поперечний переріз, представлено у [12]. Граничне навантаження для арок передбачається визначати двома способами. Шляхом формування аналітичних залежностей екстремальної задачі з подальшим розв'язанням чисельним способом з допомогою електронних таблиць і шляхом чисельного розв'язку

задачі методом скінчених елементів у ПК Ліра-САПР із наступним аналізом отриманих результатів.

#### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянемо двошарнірну кругову арку постійної жорсткості, завантажену рівномірно розподіленим вертикальним навантаженням (рис. 1). Граничне навантаження будемо визначати при врахуванні двох факторів – згинального моменту і поздовжньої сили. Так як система симетрична, то граничний стан арки може бути досягнутий при переході у пластичний стан, або перерізу на осі симетрії арки, або одночасно у двох перерізах, розташованих симетрично відносно осі симетрії.

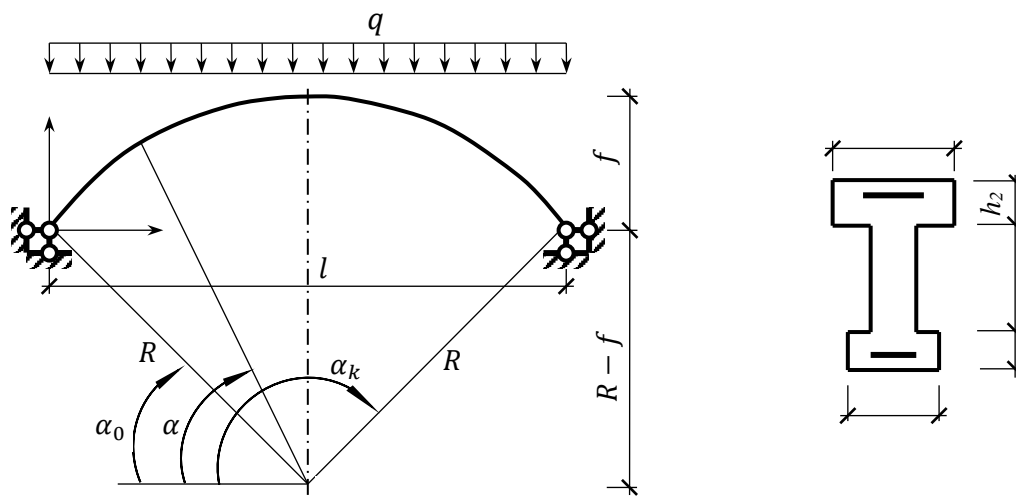


Рис. 1. Розрахункова схем арки

Визначення граничного навантаження для арки базується на розв'язку екстремальної задачі – знайти значення мінімального навантаження, при якому одночасно виконуються умови статичності і умови пластичності. Під умовами статичності розуміємо вирази, одержані при статичному розрахунку арки, які дозволяють визначити момент і поздовжню силу у будь якому перерізі [12]. Умови пластичності для двотаврового перерізу записані із врахуванням згинального моменту і поздовжньої сили. Ці умови мають різний вигляд в залежності від положення центру згину перерізу – у межах верхньої чи нижньої полиці, або у межах стінки двотавра. Тому при розв'язанні задачі знаходження граничного навантаження для арки на кожній ітерації потрібно використовувати умови пластичності відповідно до положення центру згину. Цільовою функцією задачі є значення граничного навантаження, змінними проекту є координата перерізу  $\alpha$ , який переходить у пластичний стан і координата центру згину перерізу. До обмежень задачі відносяться рівняння статичності, умови пластичності, фізичні характеристики матеріалів. Також накладаються обмеження на значення координати перерізу і центру згину.

Для двошарнірної арки постійної жорсткості задача записується у вигляді (1). У цьому виразі позначено;  $M_b$  і  $N_b$  – граничні момент і поздовжня сила у перерізі, який перейшов у пластичний стан;  $H$  – горизонтальна опорна реакція арки, яка визначається за методом сил;  $N_s$  і  $N'_s$  – зусилля у нижній і верхній арматурі.



$$\left. \begin{aligned}
 & q \rightarrow \min; \\
 & M_b = \frac{q}{2} \left( \frac{l^2}{4} - R^2 \cos^2 \alpha \right) - H (R \sin \alpha - R + f); \\
 & N_b = -qR \cos^2 \alpha - H \sin \alpha; \\
 & \text{центр згину у верхній полиці двотавра } h/2 \leq y \leq (h_2 + h/2): \\
 & N_b = -\sigma_{cy} b_2 \left( \frac{h}{2} + h_2 - y \right) + \sigma_{ty} \left[ b_1 h_1 + t h + b_2 \left( y - \frac{h}{2} \right) \right] - N'_s + N_s; \\
 & M_b = \sigma_{cy} \frac{b_2}{2} \left( \frac{h}{2} + h_2 - y \right)^2 + \sigma_{ty} \left[ b_1 h_1 \left( \frac{h_1 + h}{2} + y \right) + t h y + \frac{b_2}{2} \left( y - \frac{h}{2} \right)^2 \right] + \\
 & \quad + N'_s \left( h_2 - a' + \frac{h}{2} - y \right) + N_s \left( h_1 - a + \frac{h}{2} + y \right) - N_b y; \\
 & \text{центр згину у стінці двотавра } -h/2 \leq y \leq h/2: \\
 & N_b = -\sigma_{cy} \left[ b_2 h_2 + t \left( \frac{h}{2} - y \right) \right] + \sigma_{ty} \left[ b_1 h_1 + t \left( \frac{h}{2} + y \right) \right] - N'_s + N_s; \\
 & M_b = \sigma_{cy} \left[ b_2 h_2 \left( \frac{h + h_2}{2} - y \right) + \frac{t}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right)^2 \right] + \sigma_{ty} \left[ b_1 h_1 \left( \frac{h_1 + h}{2} + y \right) + \frac{t}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right)^2 \right] + \\
 & \quad + N'_s \left( h_2 - a' + \frac{h}{2} - y \right) + N_s \left( h_1 - a + \frac{h}{2} + y \right) - N_b y; \\
 & \text{центр згину у нижній полиці двотавра } -(h_1 + h/2) \leq y \leq -h/2: \\
 & N_b = -\sigma_{cy} \left[ b_2 h_2 + t h - b_1 \left( \frac{h}{2} + y \right) \right] + \sigma_{ty} b_1 \left( \frac{h}{2} + h_1 + y \right) - N'_s + N_s; \\
 & M_b = \sigma_{cy} \left[ b_2 h_2 \left( \frac{h_2 + h}{2} - y \right) - t h y + \frac{b_1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right)^2 \right] + \frac{\sigma_{ty} b_1}{2} \left( \frac{h}{2} + h_1 + y \right)^2 + \\
 & \quad + N'_s \left( h_2 - a' + \frac{h}{2} - y \right) + N_s \left( h_1 - a + \frac{h}{2} + y \right) - N_b y; \\
 & \alpha_0 < \alpha \leq \pi/2.
 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

При розгляді арки змінної жорсткості вважалося, що закон зміни моменту інерції поперечного перерізу прийнятий у вигляді:

$$I(\alpha) = I_0 \sin \alpha, \quad (2)$$

де  $I_0$  – момент інерції поперечного перерізу арки на осі симетрії.

Також вважалося, що жорсткість поперечного перерізу арки, відповідно до (2), змінюється за рахунок зміни висоти стінки двотавра  $h$ . Тоді формально для арки змінної жорсткості екстремальна задача залишається у вигляді (1). Але потрібно пам'ятати, що висота стінки двотаврового перерізу залежить від його координати, тобто  $h = h(\alpha)$ . Зважаючи на закон зміни моменту інерції поперечного перерізу двотавра (2), для визначення висоти стінки потрібно розв'язати рівняння:

$$h^3(\alpha) + \bar{a}h^2(\alpha) + \bar{b}h(\alpha) + \bar{c} = 0, \quad (3)$$

де  $\bar{a} = \frac{3}{t} [b_1h_1 + b_2h_2 + \bar{v}(A_s + A')]$ ;

$$\bar{b} = \frac{12}{t} \left[ \frac{b_1h_1^2 + b_2h_2^2}{2} + \bar{v}A_s(h_1 - a) + \bar{v}A'_s(h_2 - a') \right];$$

$$\bar{c} = \frac{4(b_1h_1^3 + b_2h_2^3)}{t} + \frac{12\bar{v}}{t} [A_s(h_1 - a)^2 + A'_s(h_2 - a')^2] - \frac{12I_0}{t} \sin \alpha;$$

$$\bar{v} = E_s/E.$$

**Приклад 1.** Розрахунок арки постійної жорсткості прольотом 20 м із змінною стрілою підйому.

Поперечний переріз арки прийнято у вигляді двотавра із характеристиками:

$$b_1 = 0.4\text{ м}; h_1 = 0.2\text{ м}; b_2 = 0.4\text{ м}; h_2 = 0.2\text{ м}; h_0 = 0.8\text{ м}; t = 0.15\text{ м};$$

$$A_s = 0.001232\text{ м}^2; A'_s = 0.000628\text{ м}^2; a = 0.03\text{ м}; a' = 0.03\text{ м};$$

$$\sigma_{cy} = 14500\text{ кН/м}^2; \sigma_{ty} = 1300\text{ кН/м}^2; \sigma_{sy} = 365000\text{ кН/м}^2;$$

$$E = 2.3 \cdot 10^7\text{ кН/м}^2; E_s = 2.1 \cdot 10^8\text{ кН/м}^2.$$

Розв'язок задачі виконувався у пакеті EXCEL за допомогою функції «Пошук рішення». Ця функція дозволяє досить просто розв'язувати екстремальні задачі із нелінійними залежностями.

Результати розрахунку арки із різним значенням стріли підйому за допомогою EXCEL представлено у табл. 1 і на рис. 2. Для порівняння у таблиці представлені результати нелінійного розрахунку такої ж арки у ПК Ліра-САПР. При використанні ПК Ліра-САПР вісь арки розбивалась на 80 однакових скінчених елементів.

**Таблиця 1**

Результати розрахунку двохарнірної арки постійної жорсткості

Стріла підйому $f$ , м	Граничне навантаження (EXCEL) $q$ , кН/м	Відстань до перерізу із пластиною м	Граничне навантаження (Ліра-САПР) $q$ , кН/м	Збіжність %
1	81.935	10.000	98.4	20.09
2	163.964	10.000	187.74	14.50
3	246.283	10.000	259.2	5.24
4	300.380	1.180	299.77	0.20
5	306.667	1.439	316.8	3.30
6	292.341	1.497	306.9	4.98
7	263.638	1.461	274.96	4.29
8	225.713	1.359	227.25	0.68
9	181.838	10.000	182	0.09
10	129.432	10.000	140.4	8.47

Як бачимо із табл. 1, для арок із стрілою підйому  $4\text{ м} \leq f \leq 8\text{ м}$  у граничному стані утворюються дві симетрично розташовані пластичні зони; для арок  $1\text{ м} \leq f \leq 3\text{ м}$  і  $f = 9\text{ м}$ ,  $f = 10\text{ м}$  утворюється одна зона пластичності на осі симетрії арки. Збіжність граничного навантаження, одержаного за допомогою EXCEL і ПК Ліра-САПР не задовільна для дуже пологих арок і задовільна для інших арок.

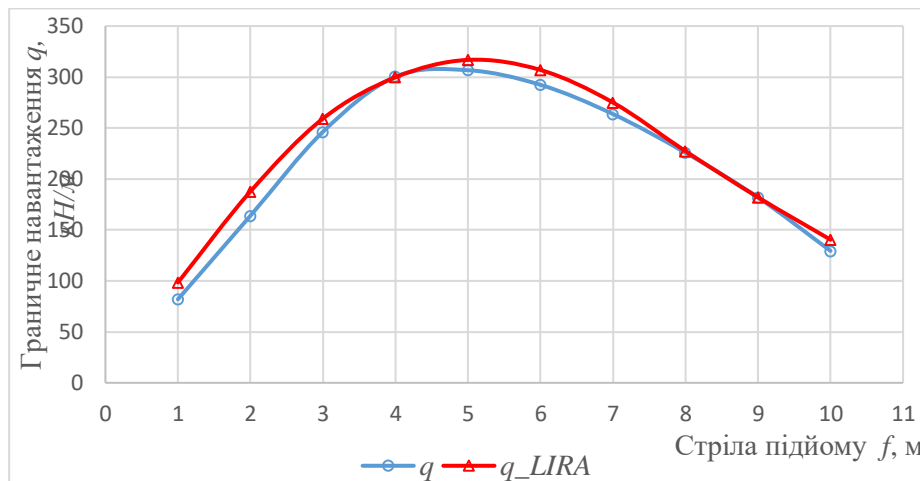


Рис. 2. Граничне навантаження для двохарнірної арки постійної жорсткості

**Приклад 2.** Розрахунок арки змінної жорсткості прольотом 20 м із змінною стрілою підйому.

Поперечний переріз арки прийнято у вигляді двотавра із характеристиками:

$$b_1 = 0.4\text{ м}; h_1 = 0.2\text{ м}; b_2 = 0.4\text{ м}; h_2 = 0.2\text{ м}; h_0 = 0.8\text{ м}; t = 0.15\text{ м};$$

$$A_s = 0.001232\text{ м}^2; A'_s = 0.001232\text{ м}^2; a = 0.03\text{ м}; a' = 0.03\text{ м};$$

$$\sigma_{cy} = 14500\text{ кН/м}^2; \sigma_{ty} = 1300\text{ кН/м}^2; \sigma_{sy} = 365000\text{ кН/м}^2;$$

$$E = 2.3 \cdot 10^7\text{ кН/м}^2; E_s = 2.1 \cdot 10^8\text{ кН/м}^2.$$

Результати розрахунку арки представлені у табл. 2 і на рис. 3.

Таблиця 2

Результати розрахунку двохарнірної арки змінної жорсткості

Стріла підйому $f$ , м	Граничне навантаження (EXCEL) $q$ , кН/м	Відстань до перерізу із пластикою м	Граничне навантаження (Ліра-САПР) $q$ , кН/м	Збіжність %
1	81.717	10.000	98.10	20.05
2	163.741	10.000	185.50	13.29
3	245.029	10.000	250.92	2.40
4	284.266	1.046	284.10	0.06
5	282.286	1.183	288.00	2.02
6	257.628	1.223	268.95	4.39
7	218.921	1.113	223.79	2.22
8	175.194	0.949	170.46	2.70
9	121.617	10.000	122.46	0.69

Як і для арки постійної жорсткості, для арки змінної жорсткості характерна велика розбіжність результатів, одержаних за допомогою EXCEL і ПК Ліра-САПР, для дуже пологих арок.

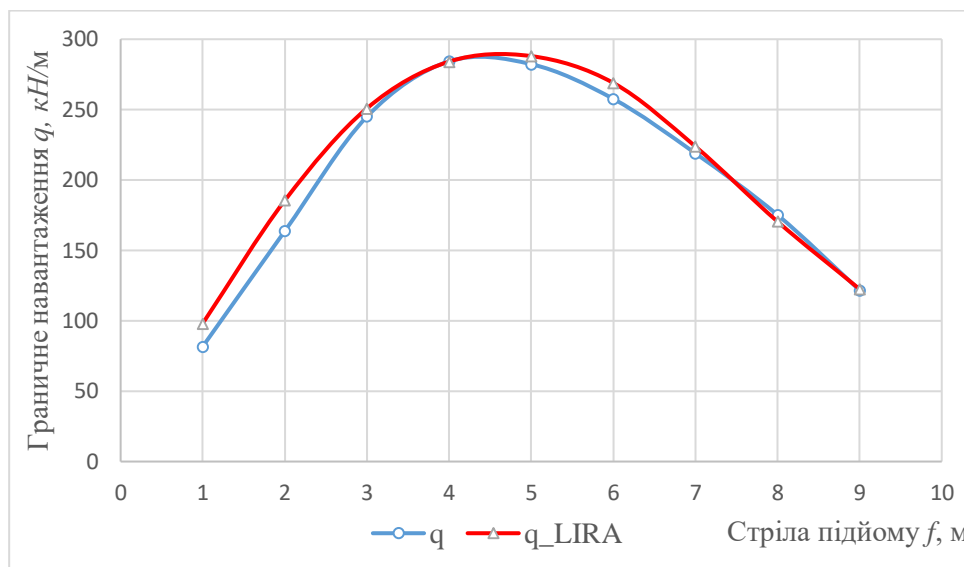


Рис. 3. Граничне навантаження для двох шарнірної арки змінної жорсткості

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянута методика визначення граничного навантаження для симетричних арок із використання пакета EXCEL дозволяє швидко одержати результат. Але для цього потрібно в аналітичному вигляді сформулювати умови статичності і умови пластичності. При наявності цих двох компонентів можна швидко одержати результат. Дану методику можна рекомендувати для розрахунку симетричних арочних систем. У випадку арок із несиметричним навантаженням задача стає значно складнішою. Розв'язок такої задачі потрібно проводити у декілька етапів на кожному із яких потрібно міняти розрахункову схему і формувати нові рівняння статичності. Для того, щоб розраховувати несиметричні арочні і рамні системи потрібно створити інший алгоритм знаходження граничного навантаження. І такий алгоритм, на думку автора, можна створити із використанням методу скінчених елементів для статичного розрахунку арки із будь-яким навантаженням. Переріз, де виникають пластичні деформації і значення відповідного навантаження визначаються із використанням умов пластичності. Для цього потрібно написати відповідну програму розрахунку. Дуже добре для цієї мети підходить ПК ANSYS, який надає можливість писати програми на APDL.

## 6 ВИСНОВКИ

1. Використання EXCEL дозволяє досить просто визначати граничне навантаження для симетричної арочної системи. Але потрібно зауважити, що для різних навантажень потрібно записувати свої умови статичності, тобто у кожному випадку потрібно аналітично розрахувати статично невизначувану арку.

2. При несиметричному завантаженні двох шарнірної арки розрахунок доведеться виконувати у два етапи. На першому етапі визначаються місце де переріз переходить у пластичний стан і відповідне навантаження, на другому – змінити розрахункову схему арки і записати нові рівняння статичності.

3. При розв'язку екстремальної задачі із заданою точністю визначаються як граничне навантаження, так і координата перерізу, у якому виникають пластичні деформації. Точність розрахунку арки методом скінчених елементів у ПК Ліра-САПР залежить від степені дискретизації осі арки.

4. Як показує аналіз рис. 2 і рис. 3, найбільш оптимальним із точки зору несучої здатності арки із двотавровим поперечним перерізом є співвідношення стріли підйому до прольоту що дорівнює  $1/4$ .

## Література

1. Гвоздев А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. Москва: Стройиздат, 1949, 248 с.
2. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов Москва: Гостехиздат, 1954, 287 с.
3. Чирас А. А. Строительная механика, теория и алгоритмы. Москва: Стройиздат, 1989, 256 с.
4. Пиковский А. А. Статика стержневых систем со сжатыми элементами. М.: Физматгиз, 1961. – 394с.
5. Проценко А. М., Власов В. В. Статический принцип предельного равновесия и определение деформированного состояния статически неопределимых железобетонных конструкций в стадии исчерпания их несущей способности. //В сб. НИИЖБ, - «Воздействие статических, динамических и многократно повторяющихся нагрузок на бетон и элементы железобетонных конструкций» –М.: Стройиздат, 1972. – с. 191 – 220.
6. Mykola Soroka The limit state of non-hinged arch with a cross-section in the form of an idealized I-beam, <http://www.enggjournals.com/ijet/vol10issue6.html>
7. Mykola Soroka Bearing capacity of structures made of materials with different tensile and compression strengths: 6th International Conference "Actual Problems of Engineering Mechanics", (APEM 2019), Volume 968, pp. 200–208.
8. Russell Bridge & Andrew Wheeler 2000 *Cross-section Strength of Columns*. (Part 1: AS 3600 Design) OneSteel Reinforcing Pty Ltd CAN 004 148 289.
9. Vrouwenvelder A.C.W.M. & Witteveen J. 2003 Plasticity Ct 4150. The plastic behaviour and the calculation of the plates subjected to bending. Technical University Delft Faculty of Civil Engineering and Geosciences p. 121.
10. Сорока М. М. Граничний стан двотаврового армованого перерізу з використанням пружнопластичних діаграм деформування матеріалів. Механіка та математичні методи, 2023. Т. 5. №. 1. С. 72–83.
11. Дарков А. В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. М: «Высшая школа», 1986, 607с.
12. Mykola Soroka Limit State of Arches Made of Elastoplastic Material: IX International Conference "Actual Problems of Engineering Mechanics", (APEM 2022).

## References

1. Gvozdev A. A. Raschet nesushchey sposobnosti konstruktsiy po metodu predel'nogo ravnovesiya. Moscow: Stroyizdat, (1949), – 248 p. [in Russian]
2. Rzhantsyn A. R. Raschet sooruzheniy s uchetom plasticheskikh svoystv materialov. Moscow: The state publishing house of literature on construction and architecture, (1954), 287 p.
3. Chiras A. A. Stroitel'naya mekhanika, teoriya i algoritmi. Moscow: Stroyizdat, (1989), 256 p.
4. Pikovskiy A. A. Statika sterzhnevih system so szhatimy elementamy. Moscow: State publishing house of physical and mathematical literature, (1961), 394 p. [in Russian]
5. Protsenko A. M., Vlasov V.V. Sticheskiy printsip predel'nogo ravnovesiya i opredeleniye deformirovannogo sostoyaniya staticheski neopredelimykh zhelezobetonnykh konstruktsiy v stadii ischerpaniya ikh nesushchey / // V sb. NIIZHB, - «Vozdeystviye staticheskikh, dinamicheskikh i mnogokratno povtoryayushchikhsya nagruzok na beton i elementy zhelezobetonnykh konstruktsiy», Moscow: Stroyizdat, (1972), - p. 191-220 [in Russian].

6. Mykola Soroka The limit state of non-hinged arch with a cross-section in the form of an idealized I-beam, <http://www.enggjournals.com/ijet/vol10issue6.html>
7. Mykola Soroka Bearing capacity of structures made of materials with different tensile and compression strengths: 6th International Conference "Actual Problems of Engineering Mechanics", (APEM 2019), Volume 968, pp. 200-208.
8. Russell Bridge & Andrew Wheeler 2000 *Cross-section Strength of Columns*. (Part 1: AS 3600 Design) OneSteel Reinforcing Pty Ltd CAN 004 148 289.
9. Vrouwenvelder A.C.W.M. & Witteveen J. 2003 Plasticity Ct 4150. The plastic behaviour and the calculation of the plates subjected to bending. Technical University Delft Faculty of Civil Engineering and Geosciences p. 121.
10. Soroka M. M. Granychnyj stan dvotavrovogo armovanogo pereryzu z vykorystannam prugnoplastychnyh diagram deformuvanna materialiv. *Mechanyka ta matematichni metodi*, 2023. T. 5. # 1. С. 72-83.
11. Darkov A. V., Shaposhnikov N.N. *Stroitel'naya mekhanika* Moscow: "Higher school", (1986), 607 p. [in Russian]
12. Mykola Soroka Limit State of Arches Made of Elastoplastic Material: IX International Conference "Actual Problems of Engineering Mechanics", (APEM 2022).

**Сорока Микола Миколайович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури  
к.т.н., доцент  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029  
[soroka@odaba.edu.ua](mailto:soroka@odaba.edu.ua),  
ORCID: 0000-0002-9551-9475

*Для посилань:*

Сорока М. М. Граничний стан армованих двохарнірних арок двотаврового перерізу. *Механіка та математичні методи*, 2023. Т. V. №. 2. С. 92–101.

*For references:*

M. Soroka. (2023). Limit state of reinforced double-hinged arches of i-section. *Mechanics and Mathematical Methods*. V(2). 92–101.

УДК 614.8

## ОЦІНКА ВПЛИВУ ТРІЩИН НА ВОГНЕСТІЙКІСТЬ ЗГИНАЛЬНИХ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Васильченко О. В.<sup>1</sup>, Данілін О. М.<sup>1</sup>, Дармофал Е. А.<sup>2</sup>, Луценко Т. О.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Національний університет цивільного захисту України

<sup>2</sup>Харківська державна академія фізичної культури

**Анотація.** Запропоновано удосконалену методику розрахунку межі вогнестійкості згинальних залізобетонних конструкцій за наявності в них тріщин. У зв'язку з цим розглянуто можливі сценарії появи тріщин при нагріванні та їх вплив на вогнестійкість на прикладі згинальної залізобетонної конструкції (балки). Показано, що якщо розрахункова критична температура арматури менша за критичну температуру бетону (це говорить про значне навантаження на конструкцію), то тріщини в розтягнутій зоні бетону утворюються після досягнення II стадії напружено-деформованого стану. Бетон захисного шару не встигає деградувати, глибина тріщини залишається постійною і межа вогнестійкості розраховується з урахуванням того, що товщина захисного шару бетону зменшена на глибину розкриття тріщини. Якщо розрахункова критична температура арматури більша за критичну температуру бетону (це говорить про незначне навантаження на конструкцію), то тріщини утворюються внаслідок деградації поверхневого шару бетону. Їхня глибина повинна постійно збільшуватися разом із просуванням межі прогрівання шару бетону до критичної температури. Розрахунок межі вогнестійкості в цьому випадку можна проводити не враховуючи утворення тріщин. На підставі розглянутих припущень запропоновано методику оцінки впливу тріщин на межу вогнестійкості згинальних залізобетонних конструкцій, яка полягає в аналізі можливості утворення відкритих тріщин (чому сприяє нагрівання) та оцінці їх глибини. На наступному етапі оцінюється час прогріву шару бетону на глибину розкриття тріщини  $\tau_{\Delta 1}$  і температура в тріщині через цей час. Далі оцінюється час до настання критичної температури арматури  $\tau_{\Delta 2}$  при прогріванні шару бетону від дна тріщини до арматури. Межа вогнестійкості визначається як сума  $\tau_{\Delta 1}$  і  $\tau_{\Delta 2}$ . Результати розрахунків за запропонованою методикою показали, що наявність відкритих тріщин у згинальних залізобетонних конструкціях здатне майже удвічі знизити їхню межу вогнестійкості. Запропонована методика дає змогу у кожному конкретному випадку обґрунтовано запроваджувати заходи щодо підвищення вогнестійкості згинальних залізобетонних конструкцій шляхом застосування для них вогнезахисних покриттів.

**Ключові слова:** межа вогнестійкості, критична температура, утворення тріщин у бетоні, розкриття тріщин

## ESTIMATION OF INFLUENCE OF CRACKS IN BENDING REINFORCED CONCRETE ELEMENTS ON THEIR FIRE RESISTANCE

O. Vasilchenko<sup>1</sup>, O. Danilin<sup>1</sup>, E. Darmofal<sup>2</sup>, T. Lutsenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National University of Civil Defence of Ukraine

<sup>2</sup>Kharkiv State Academy of Physical Culture

**Abstract.** The paper considers possible scenarios of cracking during heating and their impact on fire resistance using the example of a bending reinforced concrete structure (beam). It is shown that if the calculated critical temperature of reinforcement is less than the critical temperature of concrete (this indicates a significant load on the structure), then cracks in the tensile zone of concrete are formed after reaching the second stage of the stress-strain state. The concrete of the protective layer does not have time to degrade, the depth of the crack remains constant, and the fire resistance limit is calculated taking into account that the thickness of the protective layer of concrete is reduced by the depth of the crack opening. If the calculated critical temperature of the reinforcement is greater than

the critical temperature of the concrete (this indicates a slight load on the structure), then cracks are formed as a result of the degradation of the surface layer of concrete. Their depth should constantly increase with the progression of the concrete layer heating to the critical temperature. In this case, the calculation of the fire resistance limit can be performed without taking into account the formation of cracks. Based on the considered assumptions, a methodology for assessing the impact of cracks on the fire resistance limit of bending reinforced concrete structures is proposed, which consists in analyzing the possibility of open cracks (which is facilitated by heating) and estimating their depth. At the next stage, the heating time of the concrete layer to the crack opening depth  $\tau_{\Delta 1}$  and the temperature in the crack after this time are estimated. Next, the time until the critical temperature of the reinforcement  $\tau_{\Delta 2}$  is estimated when the concrete layer is heated from the bottom of the crack to the reinforcement. The fire resistance limit is defined as the sum of  $\tau_{\Delta 1}$  and  $\tau_{\Delta 2}$ . The results of the calculations according to the proposed methodology showed that the presence of open cracks in bending reinforced concrete structures can almost halve the fire resistance limit.

**Keywords:** fire resistance limit, critical temperature, cracking in concrete, crack opening in concrete.



## 1 ВСТУП

У промислових будинках із залізобетонним каркасом для підтвердження їх ступеня вогнестійкості обов'язково проводиться перевірка меж вогнестійкості основних конструктивних елементів. При цьому конструктивні елементи будівель, що належать до потенційно небезпечних об'єктів (ПНО) або об'єктів підвищеної небезпеки (ОПН), необхідно перевіряти з урахуванням можливих поєднань особливих навантажень або інших негативних факторів. До особливих навантажень, наслідки яких здатні зробити додатковий вплив на вогнестійкість, можна віднести вибухи, що викликають деформацію конструкцій, різні наднормативні механічні впливи. Також не можна скидати з рахунків вплив корозії.

Усі ці фактори впливають на стійкість будівельних конструкцій. Їх потрібно передбачати під час проектування будівель ОПН, а також враховувати під час обстеження будівель після аварій для прогнозування можливості подальшої експлуатації.

Експериментальні методи визначення вогнестійкості залізобетонних конструкцій не завжди придатні, по-перше, через масштабний фактор; по-друге, під час обстеження вже існуючих споруд; по-третє, через неможливість відтворити негативні впливи та їх поєднання. Тому великого значення набувають розрахункові методи визначення вогнестійкості, в яких можна спробувати врахувати якщо не всі, то хоча б найважливіші фактори, що впливають на результат [1, 2].

Одним із таких важливих факторів є наявність тріщин. Небезпека значних як тривалих, так і короткочасних деформацій залізобетонних конструкцій складається в тому, що вони викликають утворення і розкриття тріщин в бетоні. Також тріщини можуть утворюватися внаслідок корозії бетону. Процеси утворення та розвитку тріщин усугубляють вплив високої температури під час пожежі [3, 4].

Методи розрахунку вогнестійкості, що використовуються, не враховують можливого впливу тріщин на отриманий результат. Але якщо вплив існує, його не можна ігнорувати.

Таким чином, актуальною проблемою є неврахування наявності тріщин в залізобетонних конструкціях при розрахунку їх меж вогнестійкості. Ця проблема загострюється при оцінюванні вогнестійкості залізобетонних конструкцій в реальних умовах, особливо коли конструкції при експлуатації піддавалися впливу корозії чи були пошкоджені внаслідок удару або вибуху. Розроблення методу розрахунку меж вогнестійкості залізобетонних конструкцій, який враховував би наявність у них тріщин, дало б змогу точніше оцінювати стійкість конструкцій ОПН на випадок пожежі і, відповідно, підвищити їх надійність.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Метод оцінки вогнестійкості заснований на класичній методиці розрахунку конструкції за граничним станом, коли її несуча здатність під дією високої температури знижується до величини робочого навантаження [1, 2]. Вважається, що для згинальних залізобетонних елементів міцність в основному забезпечується станом сталеві арматури. У статичній частині розрахунку визначається критична температура сталеві арматури, а теплотехнічній – час, протягом якого досягається ця критична температура, при прогріванні захисного шару бетону.

Мета такого розрахунку – якнайбільше наблизитися до експериментального визначення меж вогнестійкості залізобетонного згинального елемента, якби це було можливо. Зіставлення результатів експериментального та теоретичного визначення

межі вогнестійкості в різних роботах [2, 5, 6] показує, що повний збіг не досягається. Причиною цього можна назвати неможливість передбачити при теоретичних розрахунках усі особливості дійсного стану досліджуваних зразків. Тут насамперед мається на увазі наявність різних недосконалостей у реальних залізобетонних зразках, що не піддаються точному обліку. Однією з таких недосконалостей, які, проте, можна певною мірою передбачити, є наявність тріщин.

Аварійне утворення тріщин у залізобетонних конструкціях може відбуватися внаслідок або механічного впливу, або теплового (коли температура бетону перевищує критичну) або при поєднанні цих факторів.

При механічному впливі тріщини починають утворюватися у розтягнутій зоні бетону згинального елемента після досягнення II стадії напружено-деформованого стану [7, 8, 9]. З подальшим збільшенням навантаження відбувається зростання та розкриття тріщин. У роботах [4, 7] зазначено, що у важкому бетоні тріщини шириною 1 мм поширюються в глибину на 10–20 мм. Але в цих роботах розглядалося тільки утворення тріщин при перевантаженні зразків у нормальних умовах і не розглядається вплив нагрівання на цей процес.

При тепловому впливі тріщини в залізобетонних конструкціях утворюються після досягнення критичної температури бетону  $t_{bc}$ . Для бетону з силікатним наповнювачем це приблизно 575 °С (що відповідає поліморфному структурному переходу β-кварцу в α-кварц) [10]. У роботі [11] показано, що таке перетворення викликає деградацію поверхневого шару бетону, що проявляється у появі сітки тріщин на його поверхні. Також вказано, що додатковою причиною цього є збільшення внутрішніх напружень як між компонентами бетону, так і між зернами цементного каменю. Але в цій роботі крім температури не розглянуто одночасний вплив механічного навантаження на зразки, що випробувались. І тому є підстави припустити, що у зразках спостерігалось лише утворення тріщин на поверхні бетону без їх розкриття.

Таким чином, невирішеною частиною проблеми є визначення особливостей утворення тріщин в згинальній залізобетонній конструкції при одночасній дії високої температури і навантаження в аспекті з'ясування ступеня впливу цих тріщин на розрахунок межі вогнестійкості конструкції.

### 3 ЦІЛІ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою роботи є удосконалення методики розрахунку межі вогнестійкості згинальної залізобетонної конструкції з урахуванням можливості утворення в ній тріщин.

Для досягнення мети дослідження необхідно вирішити наступні завдання:

1. Проаналізувати особливості утворення тріщин у згинальному залізобетонному елементі в залежності від співвідношення між критичними температурами бетону та сталевих арматур.
2. Запропонувати удосконалений спосіб урахування швидкості прогрівання захисного шару бетону залежно від механізму утворення тріщин.
3. Перевірити запропонований удосконалений спосіб розрахунку вогнестійкості на прикладі згинального залізобетонного елемента з тріщинами.

### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

#### 4.1 Аналіз особливостей утворення тріщин у згинальному залізобетонному елементі

Розглянемо це завдання на прикладі згинальної залізобетонної конструкції. Як об'єкт дослідження з'ясуємо вплив тріщин, що утворилися в залізобетонній балці з

різних причин на розрахункову межу вогнестійкості.

Якщо припустити, що в місці розкритої тріщини товщина захисного шару бетону зменшується, то в цьому місці зменшиться і час прогріву сталеві арматури до критичної температури, коли утворюється пластичний шарнір і відбувається руйнування згинальної залізобетонної конструкції. Тут можливі два сценарії розвитку подій:

1) якщо розрахункова критична температура арматури менша за  $575\text{ }^{\circ}\text{C}$  (це говорить про значне навантаження на конструкцію), то тріщини (якщо вони не виникли раніше) можуть утворюватися в розтягнутій зоні бетону тільки після досягнення II стадії напружено-деформованого стану. В цьому випадку можна припустити, що за час, необхідний для прогрівання сталеві арматури до критичної температури, бетон захисного шару не встигає деградувати і глибина тріщини залишається постійною. Тоді необхідно провести розрахунок на розкриття тріщин та з припущення, що глибина розкриття тріщини залежить від її ширини як  $h_{cre} \approx (10...20) \cdot a_{cre}$ , обчислити межу вогнестійкості з урахуванням того, що товщина захисного шару бетону зменшена на глибину розкриття тріщини;

2) якщо розрахункова критична температура арматури більша за  $575\text{ }^{\circ}\text{C}$  (це говорить про незначне навантаження на конструкцію), то тріщини можуть утворюватися внаслідок деградації поверхневого шару бетону. Їхня глибина повинна постійно збільшуватися разом із просуванням межі прогрівання шару бетону до критичної температури. Можна навіть очікувати, що швидкість розвитку тріщин перевищуватиме швидкість просування межі прогрівання бетону до критичної температури, оскільки термічний опір у районі стінок тріщини менший, ніж від поверхні залізобетонної конструкції. Таким шляхом може відбуватися розвиток вже існуючих тріщин, що утворилися раніше. Тим не менш, розкриття тріщин (якщо воно відбуватиметься) навряд чи має впливати як фактор на швидкість прогріву захисного шару бетону, оскільки воно у цьому випадку буде вторинним. Тобто, коли тріщини утворюються і розкриваються по мірі прогрівання бетону, то розтріскування йде поступово (пошарово) одночасно з прогріванням бетону до критичної температури, і у цьому випадку тріщиноутворення не впливає на швидкість прогріву. Таким чином, у розглянутому випадку товщина захисного шару бетону буде безперервно зменшуватися на глибину розвитку тріщини разом з шаром, що прогривається, і тріщиноутворення не повинно враховуватися при розрахунку межі вогнестійкості.

Також, узагальнюючи обидва сценарії, можна дійти висновку, що якщо до початку вогневого впливу тріщин у захисному шарі бетону згинального залізобетонного елемента не було, то під час розрахунку межі вогнестійкості немає сенсу враховувати зменшення товщини захисного шару бетону, тому що на момент утворення тріщин цей шар уже можна вважати досить прогрітим.

#### **4.2. Удосконалення методики розрахунку межі вогнестійкості згинальної залізобетонної конструкції**

Розрахунок межі вогнестійкості згинальної залізобетонної конструкції з урахуванням можливості утворення та розкриття тріщин пропонується виконати за методом, що виражається в наступній послідовності:

1. Визначення критичної температури арматури при відповідному навантаженні.
  2. Визначення ширини тріщин, що розкрилися при нагріванні, та оцінка їх глибини.
- Якщо розкриті тріщини утворилися до нагрівання, слід перейти до пункту 5.
3. Визначення часу прогрівання захисного шару бетону на глибину розкриття тріщини.
  4. Визначення температури в тріщині за час прогрівання захисного шару бетону на її глибину.
  5. Визначення часу прогрівання до критичної температури арматури залишкового

шару бетону (від дна тріщини до арматури).

6. Визначення межі вогнестійкості як суми часів за пунктами 3 та 5.

Застосуємо запропонований метод розрахунку межі вогнестійкості на прикладі залізобетонної балки перерізом  $0,7 \times 0,3$  м з товщиною захисного шару  $a_s = 0,035$  м з бетону В25 ( $R_b = 14,5$  МПа) із силікатним наповнювачем зі сталеву арматурою в розтягнутій зоні  $8\emptyset 18$  А400С та в стиснутій зоні –  $4\emptyset 18$  А400С ( $R_s = 340$  МПа). Балка рівномірно навантажена по усій довжині.

Згідно попередньому аналізу розглядається випадок, коли навантаження, за яким утворюється згинальний момент, підбирається таким, щоб розрахункова критична температура арматури не перевищувала  $575$  °С. Також до уваги береться припущення, що тріщини в захисному шарі бетону розкриваються тільки, коли його поверхня прогріється на певну глибину до критичної температури бетону.

За цими умовами виконується розрахунок межі залізобетонної балки з урахуванням можливості утворення та розкриття тріщин за запропонованим методом.

1. Критична температура арматури  $t_{scr}$  визначається таблично на основі співвідношення:

$$\gamma_{st} = \frac{M_p}{R_s \cdot A_s \cdot h_0 (1 - 0,5\xi)}, \quad (1)$$

де  $\gamma_{st}$  – коефіцієнт зниження опору сталі;  $M_p$  – згинальний момент балки в середині прольоту;  $A_s$  – площа перерізу арматури в розтягнутій зоні,  $A_s = 20,36$  см<sup>2</sup>;  $\xi$  – коефіцієнт відносної висоти стиснутої зони бетону.

Межа вогнестійкості залізобетонної балки без урахування тріщин визначається зі співвідношення за [7]:

$$\operatorname{erf} \frac{k\sqrt{a_b + x}}{2\sqrt{a_b \cdot \theta}} = \frac{t_1 - t_2}{t_3 - t_4}, \quad (2)$$

де  $k$  – коефіцієнт густини бетону;  $a_b$  – коефіцієнт теплопровідності бетону;  $x \equiv a_s$  – товщина захисного шару;  $\theta \equiv \tau_s$  – межа вогнестійкості;  $t_1 \equiv t_l$  та  $t_3 \equiv t_l$  – температура стандартної пожежі,  $t_l = 1250$  °С;  $t_2 \equiv t_{scr}$  – критична температура арматури;  $t_4 \equiv t_0$  – початкова температура на поверхні, що обігривається,  $t_0 = 20$  °С.

2. Ширина розкриття тріщин  $a_{crc}$  обчислюється за [7]:

$$a_{crc} = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \psi \frac{\sigma_s}{E_s} \sqrt[3]{d}, \quad (3)$$

де  $\varphi_1 = 1$ ,  $\varphi_2 = 1$ ,  $\varphi_3 = 1$  – коефіцієнти, що залежать від тривалості дії навантаження, виду арматури, виду навантаження;  $E_s$  – модуль пружності,  $E_s = 210000$  МПа;  $\sigma_s$  – напруження в поздовжній розтягнутій арматурі:

$$\sigma_s = \frac{M_p}{z_s (A_s + A'_s)}, \quad (4)$$

де  $z_s$  – відстань від центру тяжіння розтягнутої арматури до точки прикладання рівнодійної зусиль у стиснутій зоні елемента,  $z_s = 0,5$  м;  $A'_s$  – площа перерізу арматури в стиснутій зоні,  $A'_s = 10,18$  см<sup>2</sup>;  $\psi$  – коефіцієнт, що враховує нерівномірний розподіл відносних деформацій розтягнутої арматури між тріщинами в бетоні:

$$\psi = 20 \left( 3,5 - 100 \frac{(A_s + A'_s)}{h_0 \cdot b} \right), \quad (5)$$

де  $b$  – ширина балки;  $h_0$  – корисна товщина бетону.

3. Час прогрівання шару бетону на глибину розкриття тріщини  $\tau_{\Delta 1}$  визначається, виходячи зі співвідношення (2), де  $x = \delta$  – границя прогріву бетону до температури  $t_{bcr}$ ;  $\theta = \tau_{\Delta 1}$ ;  $t_1 = t_l$  та  $t_3 = t_l$ ;  $t_2 \equiv t_{bcr}$  – критична температура бетону,  $t_{bcr} = 575^\circ \text{C}$ ;  $t_4 = t_0$ .

4. Температура в тріщині  $t_{\Delta 1}$  за час прогрівання захисного шару бетону на її глибину  $\tau_{\Delta 1}$  визначається за формулою:

$$t_{\Delta 1} = 345 \lg(8\tau_{\Delta 1} + 1) + t_0. \quad (6)$$

5. Час прогрівання  $\tau_{\Delta 2}$  до критичної температури арматури  $t_{scr}$  шару бетону  $\Delta a$  (від дна тріщини до арматури) визначається, виходячи зі співвідношення (2), де

$$x = \Delta a = a_s - \delta; t_2 = t_{bcr}; t_1 = t_{\Delta 1}; t_2 = t_{scr}; t_3 = t_1; t_4 = t_{\Delta 1}.$$

6. Межу вогнестійкості згинальної залізобетонної конструкції з урахуванням розкриття тріщин  $\tau_{s.cr}$  можна визначити як:

$$\tau_{s.cr} = \tau_{\Delta 1} + \tau_{\Delta 2} \quad (7)$$

Для обраної балки розраховано за запропонованим методом залежно від величини згинального моменту ширину розкриття тріщин, критичну температуру арматури і межу вогнестійкості без урахування тріщин.

Розрахунки межі вогнестійкості з урахуванням тріщин, виконано за запропонованим методом за випадком, коли розрахункова критична температура арматури менша за  $575^\circ \text{C}$ . Їх виконано з припущенням, що тріщини в захисному шарі бетону розкриваються тільки, коли його поверхня прогріється на певну глибину до критичної температури бетону. Глибину тріщин прийнято залежно від їх ширини з допущення  $h_{crc} \approx (10 \dots 20) \cdot a_{crc}$ .

Результати розрахунків наведено в табл. 1.

**Таблиця 1**

Розрахункові характеристики залізобетонної балки залежно від величини згинального моменту і глибини тріщин

Найменування характеристики	Згинальний момент, $M$ , МН·м		
	0,25	0,3	0,35
Коефіцієнт зниження опору сталевій арматурі, $\gamma_{st}$	0,60	0,732	0,87
Критична температура робочої арматури, $t_{scr}$ , $^\circ\text{C}$	550	506	470
Межа вогнестійкості без урахування тріщин, $\tau$ , хв	126	108	96
Розрахункова ширина розкриття тріщин, $a_{crc}$ , мм	0,08	0,10	0,112
Межа вогнестійкості при глибині тріщини 10 мм, $\tau$ , хв	86	74	66
Межа вогнестійкості при глибині тріщини 15 мм, $\tau$ , хв	69	59	53
Межа вогнестійкості при глибині тріщини 20 мм, $\tau$ , хв	54	47	41

Результати, наведені в табл. 1, показують, що наявність розкритих тріщин у згинальних залізобетонних конструкціях здатна сильно впливати на їхню вогнестійкість.

При рівномірному навантаженні балки найбільші напруження і, відповідно, утворення тріщин відбуваються у її середній частині. Ширина і глибина тріщин, а

також критична температура арматури залежать від величини навантаження, яке характеризується величиною згинального моменту. Саме з цієї причини зі збільшенням згинального моменту зменшується критична температура арматури, ширше розкриваються тріщини у розтягнутій зоні бетону і збільшується їх глибина, локально зменшуючи шар бетону біля арматури, який прогривається. Все це прискорює утворення пластичного шарніру в арматурі при нагріванні та, відповідно, руйнування балки.

## 6 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розрахунки показали, що для обраного випадку, коли розрахункова критична температура арматури менша за  $575\text{ }^{\circ}\text{C}$ , зниження межі вогнестійкості згинальних залізобетонних конструкцій залежно від глибини відкритих тріщин можна приблизно оцінити за показником  $3,0\text{ хв}\cdot\text{мм}^{-1}$  порівняно з межею вогнестійкості без урахування тріщин  $\tau_s$ . Тобто, знаючи глибину відкритих тріщин в захисному шарі бетону згинальної залізобетонної конструкції, можна приблизно оцінити її межу вогнестійкості як  $\tau_{s,cr}=\tau_s-3,0\cdot h_{cr}$ . Ця приблизна оцінка має перспективу подальшого дослідження у сенсі визначення коефіцієнту вогнестійкості, що залежить від стану пошкодження згинальної залізобетонної конструкції.

Наведені результати підтверджують небезпеку перевантаження згинальних залізобетонних конструкцій, тому що це спричиняє появу і розкриття в них тріщин, що призводить до швидшого прогрівання захисного шару бетону в місцях утворення тріщин. Розрахунки за запропонованою методикою дають змогу у кожному конкретному випадку обґрунтовувати заходи щодо підвищення вогнестійкості згинальних залізобетонних конструкцій шляхом застосування для них вогнезахисних покриттів. Крім того, можна рекомендувати у випадках використання залізобетонних конструкцій на об'єктах підвищеної небезпеки для зменшення тріщиноутворення в захисному шарі бетону підвищувати його пластичність, застосовуючи просочення спеціальними полімерними складами. Також з цією метою можна при виготовленні відповідальних згинальних залізобетонних конструкцій виконувати захисний шар з фібробетону як указано в [12].

## 7 ВИСНОВКИ

1. У роботі розглянуто два сценарія впливу тріщин, що утворюються за різних причин в розтягнутій зоні бетону згинальної залізобетонної конструкції, на розрахункову межу вогнестійкості. Показано, що тріщини можуть суттєво впливати на межу вогнестійкості згинальної залізобетонної конструкції, якщо розрахункова критична температура арматури менша за  $575\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

2. У роботі запропоновано удосконалену методику розрахунку межі вогнестійкості згинальних залізобетонних конструкцій за наявності в них тріщин, яка включає наступне визначення:

- критичної температури арматури;
- ширини розкриття тріщин та оцінка глибини тріщин, що розкрилися;
- часу прогрівання захисного шару бетону на глибину розкриття тріщини;
- температури в тріщині за час прогрівання захисного шару бетону на її глибину;
- часу прогрівання до критичної температури арматури шару бетону від дна тріщини до арматури;
- остаточний розрахунок межі вогнестійкості.

3 Оціночні розрахунки показали, що за наявності відкритих тріщин у захисному

шарі бетону вогнестійкість згинальних залізобетонних конструкцій знижується порівняно з межею вогнестійкості без урахування тріщин приблизно за показником  $3,0 \text{ хв} \cdot \text{мм}^{-1}$  залежно від глибини тріщин.

## Література

1. Kovalov A., Otrosh Yu., Surianinov. M., Kovalevska T. Experimental and computer researches of ferroconcrete floor slabs at high-temperature influences. *Materials Science Forum*. 2019. Vol. 968. P. 361–367. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.361>
2. Otrosh Yu., Surianinov M., Holodnov O., Starova O. Experimental and computer researches of ferroconcrete beams at high-temperature influences. *Materials Science Forum*. 2019. Vol. 968. P. 355–360. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.355>
3. Cramer J., Javidmehr S., Empelmann M. Simulation of Crack Propagation in Reinforced Concrete Elements. *Appl. Sci*. 2021. Vol. 11. P. 785. <https://doi.org/10.3390/app11020785>
4. Chiu C. K., Chi K. N., Ho B.T. Experimental Investigation on Flexural Crack Control for High-Strength Reinforced-Concrete Beam Members. *Int. J. Concr. Struct. Mater.* 2018. Vol. 12. P. 41. <https://doi.org/10.1186/s40069-018-0253-8>
5. Jason L., Torre-Casanova A., Davenne L., Pinelli X. Cracking behavior of reinforced concrete beams: experiment and simulations on the numerical influence of the steel-concrete bond. *International Journal of Fracture*, Springer Verlag. 2013. Vol. 180, No 2, P. 243–260. <https://doi.org/10.1007/s10704-013-9815-6>. hal-01411075
6. [Srimook P.](#), [Maruyama I.](#), [Shibuya K.](#), [Tomita S.](#), [Igarashi G.](#), [Yo Hibino Y.](#), [Yamada K.](#) Evaluation of thermal crack width and crack spacing in massive reinforced concrete structures subject to external restraints using RBSM. *Engineering Fracture Mechanics*. 2022. Vol. 274. 108800. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2022.108800>
7. Vasilchenko A., Danilin O., Lutsenko T., Ruban A. Features of Evaluation of Fire Resistance of Reinforced Concrete Ribbed Slab under Combined [Effect](#) "Explosion-Fire". *Materials Science Forum*. 2021. Vol. 1038. P. 492-499. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.1038.492>
8. Dahmani, L., Khennane, A. & Kaci, S. Crack identification in reinforced concrete beams using ANSYS software. *Strength Mater.* 2010. Vol. 42. P. 232–240. <https://doi.org/10.1007/s11223-010-9212-6>
9. Zhang X., Shen Q.-Q., Li Zh.-Y., Tang S.-H., Luo Y.-Sh. Experimental Study on Fire Resistance of Reinforced Concrete Frame Structure. *International Conference on Mechanics and Civil Engineering*. P. 1031-1037. <https://doi.org/10.2991/icmce-14.2014.186>
10. Anders Hösthagen. Thermal Crack Risk Estimation and Material Properties of Young Concrete Division of Structural and Fire Engineering. Department of Civil, Environmental and Natural Resources Engineering Luleå University of Technology. 2017. ISSN 1402-1757
11. Srisoros W., Nakamura H., Kunieda M., Ishikawa Y. Analysis of Crack Propagation due to Thermal Stress in Concrete Considering Solidified Constitutive Model. *Journal of Advanced Concrete Technology*. 2007. Vol. 5. № 1. P. 99–112. <https://doi.org/10.3151/jact.5.99>
12. Vasilchenko Alexey, Doronin Evgeny, Chernenko Oleksandr, Ponomarenko Ivan. Estimation of fire resistance of bending reinforced concrete elements based on concrete with disperse fibers. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2019, 708, 012075. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/708/1/012075>

## References

1. Kovalov, A., Otrosh, Yu., Surianinov, M., & Kovalevska, T. (2019). Experimental and computer researches of ferroconcrete floor slabs at high-temperature influences. *Materials Science Forum*, 968, 361–367. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.361>
2. Otrosh, Yu., Surianinov, M., Holodnov, O., & Starova, O. (2019). Experimental and computer researches of ferroconcrete beams at high-temperature influences. *Materials Science Forum*, 968, 355–360. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.355>
3. Cramer, J., Javidmehr, S., & Empelmann, M. (2021). Simulation of Crack Propagation in Reinforced Concrete Elements. *Applied Science*, 11, 785. <https://doi.org/10.3390/app11020785>
4. Chiu, C.K., Chi, K.N., & Ho, B.T. (2018). Experimental Investigation on Flexural Crack Control for High-Strength Reinforced-Concrete Beam Members. *International Journal Concrete Structure Materials*, 12, 41. <https://doi.org/10.1186/s40069-018-0253-8>

5. Jason, L., Torre-Casanova, A., Davenne, L., & Pinelli, X. (2013). Cracking behavior of reinforced concrete beams: experiment and simulations on the numerical influence of the steel-concrete bond. *International Journal of Fracture*, Springer Verlag, 180(2), 243–260. <https://doi.org/10.1007/s10704-013-9815-6>. hal-01411075
6. [Srimook](#), P., [Maruyama](#), I., [Shibuya](#), K., [Tomita](#), S., [Igarashi](#), G., [Yo. Hibino](#), Y., & [Yamada](#), K. (2022). Evaluation of thermal crack width and crack spacing in massive reinforced concrete structures subject to external restraints using RBSM. *Engineering Fracture Mechanics*, 274, 108800. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2022.108800>
7. Vasilchenko, A., Danilin, O., Lutsenko, T., & Ruban A. (2021). Features of Evaluation of Fire Resistance of Reinforced Concrete Ribbed Slab under Combined [Effect](#) "Explosion-Fire". *Materials Science Forum*, 1038, 492–499. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.1038.492>
8. Dahmani, L., Khennane, A., & Kaci, S. (2010). Crack identification in reinforced concrete beams using ANSYS software. *Strength Materials*, 42, 232–240. <https://doi.org/10.1007/s11223-010-9212-6>
9. Zhang, X., Shen, Q.-Q., Li, Zh.-Y., Tang, S.-H., & Luo, Y.-Sh. (2014). Experimental Study on Fire Resistance of Reinforced Concrete Frame Structure. *International Conference on Mechanics and Civil Engineering*, 1031-1037. <https://doi.org/10.2991/icmce-14.2014.186>
10. Hösthagen, Anders. (2017). Thermal Crack Risk Estimation and Material Properties of Young Concrete Division of Structural and Fire Engineering. Department of Civil, Environmental and Natural Resources Engineering Luleå University of Technology. ISSN 1402–1757
11. Srisoros, W., Nakamura, H., Kunieda, M., & Ishikawa, Y. (2007). Analysis of Crack Propagation due to Thermal Stress in Concrete Considering Solidified Constitutive Model. *Journal of Advanced Concrete Technology*, 5(1), 99–112. <https://doi.org/10.3151/jact.5.99>
12. Vasilchenko, A., Doronin, E., Chernenko, O., & Ponomarenko, I. (2019). Estimation of fire resistance of bending reinforced concrete elements based on concrete with disperse fibers. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 708, 012075. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/708/1/012075>

**Васильченко Олексій Володимирович**

Національний університет цивільного захисту України

к.т.н., доцент

вул. Чернишевська, 94, м. Харків, Україна, 61023

[avas2006@ukr.net](mailto:avas2006@ukr.net)

ORCID: 0000-0002-5806-4029

**Данілін Олександр Миклайович**

Національний університет цивільного захисту України

к.т.н., доцент

вул. Чернишевська, 94, м. Харків, Україна, 61023

[danilin7887@gmail.com](mailto:danilin7887@gmail.com)

ORCID: 0000-0002-4474-7179

**Дармофал Елеонора Анатоліївна**

Харківська державна академія фізичної культури

к.т.н., доцент

вул. Клочківська, 99, м. Харків, Україна, 61058

[elyadarmofal@gmail.com](mailto:elyadarmofal@gmail.com)

ORCID: 0000-0001-9868-0486





**Луценко Тетяна Олексіївна**

Національний університет цивільного захисту України

к.н. держ.упр., доцент

вул. Чернишевська, 94, м. Харків, Україна, 61023

[lutsenkota13@nuczu.edu.ua](mailto:lutsenkota13@nuczu.edu.ua)

ORCID: 0000-0001-7373-4548

*Для посилань:*

Васильченко О. В., Данілін О. М., Дармофал Е. А., Луценко Т. О. Оцінка впливу тріщин на вогнестійкість згинальних залізобетонних елементів. Механіка та математичні методи, 2023. Т. V. № 2. С. 103–112.

*For references:*

O. Vasilchenko, O. Danilin, E. Darmofal, T. Lutsenko. (2023). Estimation of influence of cracks in bending reinforced concrete elements on their fire resistance. Mechanics and Mathematical Methods. V(2). 103–112.

Наукове видання

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ  
MECHANICS AND MATHEMATICAL METHODS

Науковий журнал

(українською та англійською мовами)

Відповідальний за випуск: Ковров А. В.

Підписано до друку 22.12.2023 р.  
Формат 60×84/8 Папір офісний Гарнітура Times  
Цифровий друк. Ум.-друк. арк. 13,37.  
Наклад 50 прим. Зам. №23-33Е

Видавець і виготовлювач:  
**Одеська державна академія будівництва та архітектури**  
Свідоцтво ДК № 4515 від 01.04.2013 р.  
Україна, 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 4.  
тел.: (048) 729-85-34, e-mail: [rio@odaba.edu.ua](mailto:rio@odaba.edu.ua)

---

Надруковано в авторській редакції з готового оригінал-макету  
в редакційно-видавничому відділі ОДАБА