УДК 531.36, 531.38

ПРО СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ ВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДВОХ ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ

Кононов Ю. М.[1]

[1]*Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України*

Анотація. Виведені рівняння обертання вільної системи двох твердих тіл, з'єднаних пружним сферичним шарніром або шарніром Гука. У припущені, що центр мас твердих тіл знаходиться на третій головній осі інерції, виписані рівняння збуреного руху розглядуваної механічної системи у вигляді восьмі звичайних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. У випадку двох гіроскопів Лагранжа отримано характеристичне рівняння четвертого поряку. На підставі критерія Льєнара–Шіпара, записаного в іннорному вигляді, отримані необхідні умови стійкості рівномірних обертань гіроскопів Лагранжа у вигляді системи трьох неравенств. Проведені аналітичні дослідження цих умови стійкості. Доведено, що перша нерівність завжди виконана. Із третьої нерівності слідує, що коли гіроскопи мають рівні осьові моменти інерції і обертаються з однаковими кутовими швидкостями в різні сторони або відсутня пружність у шарнірі, то характеристичне рівняння має кратне коріння і питання про стійкість вимагає додаткових досліджень. Виписані умови стійкості відносно кінетичніх моментів і показано, що старші коефіцієнти цих двох нерівностей додатні звідки випливає, що стійкість завжди буде можлива при досить великих значеннях одного обо двух кінетичніх моментів. Аналогічні висновки отримані і у випадку шарніра Гука, а також показано, що коли гіроскопи однакові, то характеристичне рівняння розпадається на два рівняння. Перше і друге рівняння описують стійки вільні обертання одного гіроскопа на який діє відновлювальний момент, тільки у одному із рівнянні треба до екваторіального моменту додати момент маси другого гіроскопа. При відсутності пружність у шарнірі з'являється кратні нульові коріня і питання про стійкість вимагає додаткових досліджень.

Ключові слова: вільне обертання пов'язаної системи двох твердих тіл, що пружно відновлює сферичний шарнір, шарнір Гука, гіроскопи Лагранжа, рівномірне обертання, асимптотична стійкість.

ON THE STABILITY OF ROTATION OF A FREE SYSTEM OF TWO ELASTICLY CONNECTED RIGID BODIES

Yu. Kononov[1]

[1]*Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine*

Abstract. The equations of rotation of the free system of two rigid bodies connected by an elastic spherical joint or a Hook joint are derived. Assuming that the center of mass of the rigid bodies is located on the third main axis of inertia, the equations of the disturbed motion of the mechanical system under consideration are written in the form of eight ordinary differential equations with periodic coefficients . In the case of two Lagrangian gyroscopes, a characteristic equation of the fourth order is obtained. On the basis of the Lénar-Schipar criterion, written in innor form, the necessary conditions for the stability of uniform rotations of Lagrange gyroscopes in the form of a system of three inequalities are obtained. Analytical studies of these stability conditions were carried out. It is proved that the first inequality is always satisfied. It follows from the third inequality that when gyroscopes have equal axial moments of inertia and rotate with the same angular velocities in different directions or there is no elasticity in the hinge, then the characteristic equation has multiple roots and the question of stability requires additional research. The conditions of stability with respect to kinetic moments are written and it is shown that the older coefficients of these two inequalities are positive, from which it follows that stability will always be possible with sufficiently large values of one of the two kinetic moments. Similar conclusions were obtained in the case of Hook's hinge, and it was also shown that when the gyroscopes are the same, the characteristic equation breaks down into two equations. The first and second equations describe the steady free rotation of one gyroscope on which the restoring moment acts, only in one of the equations it is necessary to add the mass moment of the second gyroscope to the equatorial moment. In the absence of elasticity in the joint, multiple zero roots appear and the question of stability requires additional research.

Keywords: free rotation of a coupled system of two rigid bodies, elastically restoring spherical joint, Hooke's joint, Lagrange gyroscopes, uniform rotation, asymptotic stability.

1 ВСТУП

На даний час є велика кількість робіт у яких досліджується динаміка та стійкість руху систем зв'язаних твердих тіл. Досить хороший огляд цих робіт наведено в монографіях [1-4]. Наприклад робота [2] міститься 351 посилань. В монографії [1] з єдиних позицій викладено підхід до задач про рух систем твердих тіл. Розглянуто моделі, що допускають різноманітні з’єднання тіл та їх загальні просторові рухи. Однак, задачі про вільний рух систем пов'язаних твердих тіл далекі до свого завершення. Мабуть, одними з перших це були роботи [5-7]. У статті [5] вивчається положення рівноваги двох зв’язаних твердих тіл відносно орбітальної системи координат. Автором визначено всі положення відносної рівноваги та отримано достатні умови стійкості. Модель супутника, представленого двома однаковими несиметричними тілами, пов’язаними невагомим стрижнем, розглядається в статті [6]. У роботі [7] модель супутника представляється системою n твердих тіл і гіростатів, зв'язаними сферичними шарнірами. Проведено чисельне інтегрування рівнянь руху, що дозволило визначити стійкі відносні положення рівноваги. Наведемо лише роботи, які найближчі до розглядуваної у статті задачі. У загальній постановці задача про рух у середовищі з опором вільної системи двох зв’язаних твердих тіл розглядається в монографії [8]. В ній та у статті [9] наголошується, що в залежності від вибору основного тіла будуть представлені різні види рівняння руху вільної системи твердих тіл. У статті [10] досліджені необхідні умови стійкості рівномірних обертань двох вільних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною, та показано, як з рівнянь для невільної системи гіроскопів слідують рівняння для вільної системи. Робота [11] узагальнюї результати статті [10] на випадок n гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною. Дослідження впливу дисипативного і постійного моментів на стійкість рівномірного обертання двох пружно зв’язаних вільних гіроскопів Лагранжа проведено у роботі [12]. У статті [13] показана можливість стабілізації нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною другим обертовим гіроскопом. В роботі [14] розглядається динаміка і орієнтація твердого тіла при вході в атмосферу, динаміка і управління коаксіальними гіростатами супутників та багато інших оригінальних задач космічної механіки. В [15] представлений уніфікований і добре розроблений підхід до динаміки кутових рухів твердих тіл, що зазнають моментів збурення різної фізичної природи. Детально розглядається дія різних моментів збурень, як зовнішніх (гравітаційний, аеродинамічний, сонячний тиск), так і внутрішніх (завдяки в’язкій рідині в резервуарах, пружним і в’язкопружним властивостям тіла). Новий клас обертань динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки з урахуванням нестаціонарного збурюючого моменту і повільно змінного з часом відновлюючого моменту вивчається у роботі [16]. В статті [17] розглянуто рух навколо центру мас сфероїда з порожниною, заповненою в’язкою рідиною. Момент сил, що діють на тіло з боку в’язкої рідини в порожнині, визначають за методикою, розробленою в роботах Ф. Л. Черноуська. Асимптотичний підхід дозволяє отримати деякі якісні результати та описати нелінійну еволюцію кутового руху за допомогою спрощених усереднених рівнянь. Слід зазначити, що математичний аппарат та методи дослідженя, які були розроблені в роботах [14-17], знайшли застосування в багатьох задачах динаміки та стійкості руху систем зв'язаних твердих тіл.

У даній статті продовжуються дослідження стійкості руху вільної системи двох твердих, які були розпочаті в роботах [8-13] .

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

Розглянемо вільний рух двох пружно зв'язаних твердих тіл S_1 і S_2. Тілами S_1 і S_2 мають спільну точку O_2. Запишемо теорему про зміну моменту кількості руху і кількості руху для тіла S_i $(i=1,2)$. Для цього звільнимось від в'язів в точках O_2. Позначимо через $\mathbf{R}_1$ і $\mathbf{L}_1$ головний вектор і головний момент сил реакції в'язі, що діють на тіло S_1 з боку тіла S_2. Рівняння руху центру мас та рівняння зміни моменту кількості руху тіла S_i відносно центру мас тіла, точки C_i мають вигляд [8, 10]:

$$m_i\dot{\mathbf{V}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i+1}; \tag{1}$$

$$(\mathbf{J}_i\boldsymbol{\omega}_i)^{\cdot} + \mathbf{c}_i \times m_i\dot{\mathbf{V}}_i = \mathbf{M}_i + \mathbf{L}_i - \mathbf{L}_{i+1} - \mathbf{s}_i \times \mathbf{R}_{i+1} \quad (i=1,2). \tag{2}$$

Тут $\mathbf{J}_i$ – центральний тензор інерції тіла S_i; $\boldsymbol{\omega}_i$ – кутова швидкість твердого тіла S_i ; $m = m_1 + m_2$ – маса всієї системи, $\mathbf{c}_1 = \overrightarrow{C_1O_2}$, $\mathbf{c}_2 = \overrightarrow{O_2C_2}$, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_3 = 0$, $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_3 = 0$; точкою «$\cdot$» позначена абсолютна похідна.

Система рівнянь (2), з урахуванням (1), буде мати вигляд:

$$(\mathbf{J}_1\boldsymbol{\omega}_1)^{\cdot} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{L}_2 - \mathbf{c}_1 \times \left(m_2\mathbf{F}_1 - m_1\mathbf{F}_2 + m_2\dot{\mathbf{f}}_2\right)/m;$$

$$(\mathbf{J}_2\boldsymbol{\omega}_2)^{\cdot} = \mathbf{M}_2 + \mathbf{L}_2 - \left[\mathbf{c}_2 \times \left(m_2\mathbf{F}_1 - m_1\mathbf{F}_2\right) - \mathbf{c}_2 \times \dot{\mathbf{f}}_2\right]/m, \tag{3}$$

де $\mathbf{f}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times m_1\mathbf{c}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times m_1\mathbf{c}_2$.

Зв'яжемо з кожним із тіл S_i незмінно базис $\mathbf{e}_1^i\mathbf{e}_2^i\mathbf{e}_3^i$ з вершиною в точці C_i, осі якого направимо по головних осях тензора інерції $\mathbf{J}_i$ і введемо нерухомий базис $\mathbf{e}_1^0\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$, вектор $\mathbf{e}_3^0$ якого протилежний вектору прискорення вільного падіння. Будемо вважати, що треті головні осі інерції проходять для тіл S_1 і S_2 через точку O_2, тобто будемо вважати, що центр мас тіл S_i лежить на цих осях. Нехай тверди тіла S_1 і S_2 пов'язані в точці O_2 пружним відновлювальним сферичним шарніром $\boldsymbol{L}_2 = -k\,\boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{c}_2 / \left(|\boldsymbol{c}_1||\boldsymbol{c}_2|\right),\ k \geq 0$.

Векторні рівняння (3) в проекціях на осі рухомого базису $\mathbf{e}_1^i\mathbf{e}_2^i\mathbf{e}_3^i$ приймуть вигляд:

$$\begin{gathered}
A_1'\dot{p}_1 + (C_1 - B_1')r_1q_1 + \mu\left[(\dot{p}_2 - r_2q_2)\alpha_{22}^{12} - (\dot{q}_2 + r_2p_2)\alpha_{21}^{12} + (p_2^2 + q_2^2)\alpha_{23}^{12}\right] = -k\alpha_{32}^{21};\\
B_1'\dot{q}_1 - (C_1 - A_1')r_1p_1 - \mu\left[(\dot{p}_2 - r_2q_2)\alpha_{12}^{12} - (\dot{q}_2 + r_2p_2)\alpha_{11}^{12} + (p_2^2 + q_2^2)\alpha_{13}^{12}\right] = -k\alpha_{31}^{21};\\
C_1\dot{r}_1 + \left(B_1' - A_1'\right)p_1q_1 = 0;\\
A_2'\dot{p}_2 + (C_2 - B_1')r_2q_2 + \mu\left[(\dot{p}_1 - r_1q_1)\alpha_{22}^{21} - (\dot{q}_1 + r_1p_1)\alpha_{21}^{21} + (p_1^2 + q_1^2)\alpha_{23}^{21}\right] = -k\alpha_{32}^{21};\\
B_2'\dot{q}_2 - (C_2 - A_2')\omega_{02}p_2 - \mu\left[(\dot{p}_1 - r_1q_1)\alpha_{12}^{21} - (\dot{q}_1 + r_1p_1)\alpha_{11}^{21} + (p_1^2 + q_1^2)\alpha_{23}^{21}\right] = -k\alpha_{31}^{21};\\
C_2\dot{r}_2 + \left(B_2' - A_2'\right)p_2q_2 = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Тут p_i, q_i, r_i – проекції вектора кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}_i$ на вісі $\mathbf{e}_1^i\mathbf{e}_2^i\mathbf{e}_3^i$; $A_1' = A_1 + m_1m_2c_1^2/m$; $B_1' = B_1 + m_1m_2c_1^2/m$; $A_2' = A_2 + m_2m_1c_2^2/m$; $B_2' = B_2 + m_2m_1c_2^2/m$;

$\mu = m_1 m_2 c_1 c_2 / m$; $\alpha_{\mu\kappa}^{ij} = \mathbf{e}_\mu^i \cdot \mathbf{e}_\kappa^j$ – напрямні косинуси. Коефіцієнти $\alpha_{\mu\kappa}^{ij}$ можна виразити через $\alpha_{\mu\sigma}^{i0}$ і $\alpha_{\mu\sigma}^{j0}$ наступним чином $\alpha_{\mu\kappa}^{ij} = \sum_{\sigma=1}^{3} \alpha_{\mu\sigma}^{i0} \alpha_{k\sigma}^{j0}$ [8].

До системи рівнянь (4) потрібно додати рівняння для напрямних косинусів [8]:

$$\begin{aligned}
&\dot{\alpha}_{11}^{i0} = -q_i \alpha_{31}^{i0} + r_i \alpha_{21}^{i0}; \quad \dot{\alpha}_{21}^{i0} = p_i \alpha_{31}^{i0} - r_i \alpha_{11}^{i0};\\
&\dot{\alpha}_{12}^{i0} = -q_i \alpha_{32}^{i0} + r_i \alpha_{22}^{i0}; \quad \dot{\alpha}_{22}^{i0} = p_i \alpha_{32}^{i0} - r_i \alpha_{12}^{i0};\\
&\dot{\alpha}_{13}^{i0} = -q_i \alpha_{33}^{i0} + r_i \alpha_{23}^{i0}; \quad \dot{\alpha}_{23}^{i0} = p_i \alpha_{33}^{i0} - r_i \alpha_{13}^{i0};\\
&\dot{\alpha}_{31}^{i0} = -p_i \alpha_{21}^{i0} + q_i \alpha_{11}^{i0}; \quad \dot{\alpha}_{32}^{i0} = -p_i \alpha_{22}^{i0} + q_i \alpha_{12}^{i0};\\
&\dot{\alpha}_{33}^{i0} = -p_i \alpha_{23}^{i0} + q_i \alpha_{13}^{i0}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Система (4), (5) допускає розв’язки:

$$p_i = q_i = 0; \ r_i = \omega_{0i};$$

$$\alpha_{11}^{i0} = \cos\omega_{0i}t; \ \alpha_{12}^{i0} = \sin\omega_{0i}t; \ \alpha_{13}^{i0} = 0;$$

$$\alpha_{21}^{i0} = -\sin\omega_{0i}t; \ \alpha_{22}^{i0} = \cos\omega_{0i}t; \ \alpha_{23}^{i0} = 0; \alpha_{31}^{i0} = 0; \ \alpha_{32}^{i0} = 0; \ \alpha_{33}^{i0} = 1,$$

які відповідають рівномірним обертанням твердих тіл S_i $(i = 1,2)$ з кутовими швидкостями ω_{0i} навколо вертикалі.

Запишемо рівняння (4), (5) для збуреного руху, зберігаючи для змінних їхні попередні позначення:

$$\begin{aligned}
&A_1'\dot{p}_1 + (C_1 - B_1')\omega_{01}q_1 + \mu\left[(\dot{p}_2 - \omega_{02}q_2)\alpha_{22}^{12} - (\dot{q}_2 + \omega_{02}p_2)\alpha_{21}^{12}\right] = -k\alpha_{23}^{10};\\
&B_1'\dot{q}_1 - (C_1 - A_1')\omega_{01}p_1 - \mu\left[(\dot{p}_2 - \omega_{02}q_2)\alpha_{12}^{12} - (\dot{q}_2 + \omega_{02}p_2)\alpha_{11}^{12}\right] = -k\alpha_{13}^{10};\\
&A_2'\dot{p}_2 + (C_2 - B_1')\omega_{02}q_2 + \mu\left[(\dot{p}_1 - \omega_{01}q_1)\alpha_{22}^{21} - (\dot{q}_1 + \omega_{01}p_1)\alpha_{21}^{21}\right] = -k\alpha_{23}^{20};\\
&B_2'\dot{q}_2 - (C_2 - A_2')\omega_{02}p_2 - \mu\left[(\dot{p}_1 - \omega_{01}q_1)\alpha_{12}^{21} - (\dot{q}_1 + \omega_{01}p_1)\alpha_{11}^{21}\right] = -k\alpha_{13}^{20};\\
&\dot{\alpha}_{13}^{i0} = \omega_{0i}\alpha_{23}^{i0} - q_i; \ \dot{\alpha}_{23}^{i0} = -\omega_{0i}\alpha_{13}^{i0} + p_i \ \ (i = 1,2).
\end{aligned} \tag{6}$$

Тут $\alpha_{11}^{ik} = \cos\varphi_{ki}$; $\alpha_{12}^{ik} = -\sin\varphi_{ki}$; $\alpha_{21}^{ik} = \sin\varphi_{ki}$; $\alpha_{22}^{ik} = \cos\varphi_{ki}$; $\varphi_{ki} = \varphi_k - \varphi_i$; $\varphi_i = \omega_{0i}t$; $(i,k = 1,2)$.

Таким чином, отримані вісім звичайних диференціальних рівнянь (6) із періодичними коефіцієнтами описують збурений рух у середовищі з опором системи двох пружно пов'язаних твердих тіл у припущенні, що їх центри мас знаходяться на третій головної осі інерції. Через динамічну ($B_i' \neq A_i'$) несиметрію дослідження цих рівнянь стає досить складним. У цьому зв'язку проведемо далі аналітичні дослідження для двох гіроскопів Лагранжа ($B_i' = A_i'$).

3 УМОВИ СТІЙКОСТІ РІВНОМІРНИХ ОБЕРТАНЬ ДВОХ ГІРОСКОПІВ ЛАГРАНЖА

Перейдемо до нових змінних p_i', q_i', α_{13}^i, α_{23}^i [8, 11]:

$$p_i' = p_i \sin\varphi_i + q_i \cos\varphi_i;\; q_i' = p_i \cos\varphi_i - q_i \sin\varphi_i;$$

$$\alpha_{13}^{i} = \alpha_{13}^{0i} \sin\varphi_i + \alpha_{23}^{0i} \cos\varphi_i;\; \alpha_{23}^{i} = \alpha_{13}^{0i} \cos\varphi_i - \alpha_{23}^{0i} \sin\varphi_i .$$

Нехай $\Omega_i = q_i' - ip_i'$, $\gamma_i = \alpha_{13}^i + i\alpha_{23}^i$ $(i = 1,2)$, тоді система рівнянь (6) у нових змінних може бути записана наступним чином:

$$A_1'\ddot{\gamma}_1 + (i\tilde{C}_1 + k)\dot{\gamma}_1 + \mu\ddot{\gamma}_2 = 0;$$

$$A_2'\ddot{\gamma}_2 + (i\tilde{C}_2 + k)\dot{\gamma}_2 + \mu\ddot{\gamma}_1 = 0, \qquad (7)$$

де $\tilde{C}_i = C_i\omega_{0i}$.

Представивши шукані функції у вигляді $e^{i\sigma t}$, запишемо характеристичне рівняння збуреного руху (10):

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu\lambda^2 \\ \mu\lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

або

$$a_4\sigma^4 + b_3\sigma^3 - a_2\sigma^2 - b_1\sigma + a_0 = 0, \qquad (9)$$

де $F_i = A_i'\lambda^2 + (i\tilde{C}_i + D_i)\lambda + k$;

$$a_4 = A_1'A_2' - \mu^2 = (A_1 + c_1^2 m_1)(A_2 + c_2^2 m_2) + A_2 s_1^2 m_2 > 0;$$

$$a_3 = 0;\; b_3 = A_1'\tilde{C}_2 + A_2'\tilde{C}_1;$$

$$a_2 = -\tilde{C}_1\tilde{C}_2 + \left(A_1' + A_2'\right)k;\; b_2 = 0;$$

$$a_1 = 0;\; b_1 = \left(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2\right)k;$$

$$a_0 = k^2;\; b_0 = 0.$$

Для того, щоб всі нулі рівняння (9) були різні і лежали на дійсній осі, згідно критерію Льєнара–Шіпара, записаного в іннорному вигляді [18, с. 39], необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, яка складена з коефіцієнтів цього рівняння, була іннорно-позитивною, тобто щоб були позитивно визначені матриці $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5$ і Δ_7:

$$I_1 = |\Delta_1| = 4a_4 > 0;$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & b_3 & -a_2 \\ 0 & 4a_4 & 3b_3 \\ 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 \end{vmatrix} = a_4\tilde{I}_3 > 0; \qquad (10)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 \\ 0 & 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 \\ 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & 0 \\ 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_4\tilde{I}_5 > 0; \qquad (11)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & -b_1 \\ 0 & 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & -b_1 & 0 \\ 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & -b_1 & 0 & 0 \\ 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & -b_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_4 b_1 \tilde{I}_7 > 0. \quad (12)$$

Так як $a_4 > 0$, то $I_1 > 0$ і стійкість рівномірних обертань двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа визначається трьома нерівностями (10)–(12).

Із нерівності (12) слідує, що коли $\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 = 0$ або $k = 0$ ($b_1 = 0$) маємо $I_7 = 0$ і рівняння (9) має кратні кореня. В цьому разі умови стійкості потребують додаткових досліджень. Випадок $\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 = C_1\omega_{01} + C_2\omega_{02} = 0$ означає, що тверди тіла повині обертатися в різні сторони з однаковим по моделю кінетичними моментами.

Запишемо умови стійкості відносно коефіцієнта пружності сферичного шарніру k:

$$\tilde{I}_{31}k + \tilde{I}_{30} > 0\,; \quad (13)$$

$$\tilde{I}_{53}k^3 + \tilde{I}_{52}k^3 + \tilde{I}_{51}k + \tilde{I}_{50} > 0\,; \quad (14)$$

$$\left(\tilde{I}_{73}k^3 + \tilde{I}_{72}k^2 + \tilde{I}_{71}k + \tilde{I}_{70}\right)\left(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2\right)k^2 > 0\,, \quad (15)$$

де

$$\tilde{I}_{31} = 8(A_1' + A_2')a_4 > 0;\ \tilde{I}_{30} = \left(\tilde{C}_1 A_2' + \tilde{C}_2 A_1'\right)^2 + 2(\tilde{C}_1^2 A_2'^2 + \tilde{C}_2^2 A_1'^2) + 8\tilde{C}_1\tilde{C}_2\mu^2 > 0; \quad (16)$$

$$\tilde{I}_{53} = 8\left[(A_1' - A_2')^2 + 4\mu^2\right]a_4 > 0;$$

$$\tilde{I}_{73} = 4\left\{(A_1' - A_2')\left[\left(A_1'^2 - 5A_1'A_2' - 4A_2'^2\right)\tilde{C}_1 + \left(4A_1'^2 + 5A_1'A_2' - A_2'^2\right)\tilde{C}_2\right] + 20(A_1' + A_2')\mu^2\right\}a_4.$$

Інші коефіцієнти не наведено через їхню громіздкість.

Із (16) випливаї, що нерівність (13) і відповідно (10) завжди виконані. Таким чином, необхідні умови стійкості рівномірних обертань двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа визначаються двома нерівностями (11), (12) і відповідно (14), (15) .

Умови стійкості відносно кінетичних моментів $\tilde{C}_i$ $(i = 1,2)$ будуть мати вигляд:

$$I_{i54}\tilde{C}_i^4 + I_{i53}\tilde{C}_i^3 + \cdots + I_{i51}\tilde{C}_i + I_{i50} > 0\,; \quad (17)$$

$$\left(I_{i75}\tilde{C}_i^5 + I_{i74}\tilde{C}_i^4 + \cdots + I_{i71}\tilde{C}_i + I_{i70}\right)\left(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2\right)k^2 > 0\,. \quad (18)$$

Тут

$$\begin{aligned} &I_{154} = 2A_2'^2\left(\tilde{C}_2^2 + 3A_2'k\right) > 0;\ I_{254} = 2A_1'^2\left(\tilde{C}_1^2 + 3A_2'k\right) > 0; \\ &I_{175} = A_2'^2\left(\tilde{C}_2^2 + 4A_2'k\right) > 0;\ I_{275} = A_2'^2\left(\tilde{C}_2^2 + 4A_2'k\right) > 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Із нерівностей (19) слідує, що старші коефіцієнти нерівностей (17), (18) додатні звідки випливає, що стійкість завжди буде можлива при досить великих значеннях одного або двох кінетичних моментів.

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2023-5-2-6-15

У випадку шарнирів Гука, згідно роботи [8], треба покласти $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$. У цілому разі умови стійкості (11), (12) відносно квадрата кутової швидкості $x = \omega_0^2$ мають вигляд:

$$I_{53}x^3 + I_{52}x^2 + I_{51}x + I_{50} > 0; \tag{20}$$

$$\left(I_{73}x^3 + I_{72}x^2 + I_{71}x + I_{70}\right)\left(C_1 + C_2\right)k^2\omega_0^2 > 0, \tag{21}$$

де

$$I_{53} = 2C_1^2C_2^2\left[\left(C_1A_2' - C_2A_1'\right)^2 + 4\mu^2C_1C_2\right]a_4 > 0; \tag{22}$$

$$I_{73} = 2\left(C_1 + C_2\right)C_1^2C_2^2\left[\left(C_1A_2' - C_2A_1'\right)^2 + 4\mu^2C_1C_2\right] > 0. \tag{23}$$

Із нерівностей (22), (23) випливає, що старші коефіцієнти нерівностей (20), (21) додатні і стійкість завжди буде можлива при досить великій кутовій швидкості.

З характеристичного рівняння (13) слідує, що коли гіроскопи однакові ($A_2' = A_1'$, $C_2 = C_1, m_2 = m_1, c_2 = c_1$) і обертаються з однаковими кутовими швидкостями ($\omega_{02} = \omega_{01} = \omega_0$), то $F_2 = F_1$ і це рівняння розпадається на два рівняння

$$A_1\sigma^2 + C_1\omega_0\sigma - k = 0 \text{ і } \left(A_1 + m_1c_1^2\right)\sigma^2 + C_1\omega_0\sigma - k = 0.$$

Слід зазначати, що перше і друге рівняння при $k \neq 0$ описують стійкі обертання одного вільного гіроскопа на який діє відновлювальний момент, тільки у другому рівнянні до екваторіального моменту інерції додається момент інерції маси другого гіроскопа. При відсутності пружність у шарнірі ($k = 0$) з'являються кратні нульові коріння і питання про стійкість вимагає додаткових досліджень.

4 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

Виведені рівняння обертання вільної системи двох твердих тіл, з’єднаних пружним сферичним шарніром або шарніром Гука. У припущені, що центр мас твердих тіл знаходиться на третій головній осі інерції, виписані рівняння збуреного руху механічної системи у вигляді восьмі звичайних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. У випадку двох гіроскопів Лагранжа отримано характеристичне рівняння четвертого поряку. На підставі критерія Льєнара–Шіпара, записаного в іннорному вигляді, отримані умови стійкості рівномірних обертань гіроскопів Лагранжа у вигляді системи трьох нерівностей. Проведені аналітичні дослідження цих умов стійкості. Доведено, що перша нерівність завжди виконана. Із третьої нерівності слідує, що коли гіроскопи мають рівні осьові моменти інерції і обертаються з однаковими кутовими швидкостями в різні сторони або відсутня пружність у шарнірі, то характеристичне рівняння має кратне коріння і питання про стійкість вимагає додаткових досліджень. Виписані умови стійкості відносно кінетичніх моментів і показано, що старші коефіцієнти цих двох нерівностей додатні, звідки випливає, що стійкість завжди буде можлива при досить великих значеннях одного обо двух кінетичніх моментів. Аналогічні висновки отримані і у випадку шарніра Гука, а також показано, що коли гіроскопи однакові, то характеристичне рівняння розпадається на два рівняння. Перше і друге рівняння описують стійки вільні обертання одного гіроскопа, на який діє відновлювальний момент, тільки у одному із рівнянні треба до екваторіального моменту додати масу другого гіроскопа. При відсутності пружності у шарнірі з'являється кратний нульовий корінь, і питання про стійкість вимагає додаткових досліджень.

Дослідження виконані в рамках програмно-цільової та конкурсної тематики НАН України № 2-19-П (науково дослідна робота за темою ВБ-15-18-21/479) і були частково підтримані грантом від Фонду Сімонса (Нагорода 1160640, Президентські дискреційні гранти на підтримку України, одержувач Кононов Ю.М.).

Література

1. Болграбская И. А. Динамика систем связанных твёрдых тел / И. А. Болграбская, М. Е. Лесина, Д. А. Чебанов. – Серия "Задачи и методы: математика, механика, кибернетика". – ИПММ НАН Украины, Том 9. К.: Наукова Думка.– 2012.– 395 с.
2. Bauchau O. A. Flexible Multibody Dynamics / O. A. Bauchau.– Springer. – 2011.– 730 p.
3. Chaudhary H. Dynamics and Balancing of Multibody Systems / H. Chaudhary, S.K. Saha.– Springer. – 2009.– 176 p.
4. Wittenburg J. Dynamics of Multibody Systems / Wittenburg J.– Springer. – 2008.– 223 p.
5. Сарычев В. А. Положение относительного равновесия двух тел, соединенных сферическим шарниром, на круговой орбите / В. А. Сарычев // Космич. исслед.– 1967.–Т.5, № 3.– С. 360–364.
6. Robe T. R. Stability of two tethered unsymmetrical Earth-Pointing bodies / T.R. Robe // AIAA Journal.–1968.– V.6, № 12.– P. 2282–2288.
7. Wittenburg J. Die numerische bestimmung Stabiler Gleichgewichslagen von Vielkorper-Satellitensystem / J. Wittenburg // Ingh. –Arch.– 1970.– V.39, № 3.– P. 201–208.
8. Савченко А. Я. Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел / А. Я. Савченко, И. А. Болграбская, Г. А. Кононыхин. К.: Наук. думка. 1991. – 166 с.
9. Савченко А. Я. Устойчивость равномерных вращений свободной связки n гироскопов Лагранжа / А. Я. Савченко, И. А. Болграбская // Математическа физика и нелинейная механика.– 1984.– Т. 36, № 2.– С. 9–14.
10. Кононов Ю. Н. О движения системы двух твердых тел с полостями, содержащими жидкость / Ю. Н. Кононов // Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр. – 1997. – Вып. 29. – С. 76– 85.
11. Кононов Ю. Н. Об устойчивости движения системы n связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость / Ю. Н. Кононов // Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр. – 2006. – Вып. 36. – С. 75– 82.
12. Кононов Ю. Н. Вплив дисипативного і постійного моментів на стійкість рівномірного обертання двох пружно зв'язаних вільних гіроскопів Лагранжа / Ю. Н. Кононов, Я. І. Святенко / Праці інституту прикл. матем. і мех. НАНУ.– 2019. – 33. – С. 132 – 141.
13. Kononov Yu. M. Stabilization of spinning Lagrange gyroscope filled with ideal fluid in a resisting medium / Yu. M. Kononov, Ya. I. Sviatenko // Int. Appl. Mech. – 2023. – 59, № 2. – P. 207 – 217.
14. Aslanov V. S. Rigid Body Dynamics for Space Applications / Aslanov V. S. – Butterworth Heinemann, Oxford.– 2017.– 410 p.
15. Chernousko F. L. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass / F. L. Chernousko, L. D. Akulenko, D. D. Leshchenko. Springer.– 2017.– 260 p.
16. Leshchenko D. D. Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques / D. D. Leshchenko, S. V. Ershkov, T. A. Kozachenko // Nonlinear Dyn. – 2021.– P. 1517–1528. DOI: 10.1007/s11071-020-06195-0.
17. Leshchenko D. Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque / D. Leshchenko, S. Ershkov, T. Kozachenko // J. Appl. Comput. Mech. – 2022. – 8, N 3 – P. 1023–1031.
18. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем / Джури Э. М.: Наука.– 1979.– 304 С.

References

1. Bolgrabskaya, I. A., Lesina, M.E., Chebanov, D. A. (2012). Dinamika sistem svyazannyh tvyordyh tel . Seriya “Zadachi i metody: matematika, mekhanika, kibernetika”. IPMM NAN Ukrainy, Tom 9. K.: Naukova Dumka, 395 [in Ukraine].
2. Bauchau, O. A. (2011). Flexible Multibody Dynamics. Springer, 730.
3. Chaudhary, H., Saha, S. K. (2009). Dynamics and Balancing of Multibody Systems. Springer, 176.
4. Wittenburg, J. (2008). Dynamics of Multibody Systems. Springer, 223.
5. Saryichev, V. A.(1967). Polozhenie otnositelnogo ravnovesiya dvuh tel, soedinennyih sfericheskim sharnirom, na krugovoy orbite. Kosmich. issled.V.5, № 3, 360–364 [in Russian].
6. Robe, T. R. (1968). Stability of two tethered unsymmetrical Earth-Pointing bodies. AIAA Journal. 6, № 12, 2282–2288.
7. Wittenburg, J. (1970). Die numerische bestimmung Stabiler Gleichgewichslagen von Vielkorper-Satellitensystem. Ingh. –Arch. 39, № 3, 201–208.
8. Savchenko, A. Ya., Bolgrabskaya, I. A., Kononyhin, G. A. (1991). Ustojchivost' dvizheniya sistem svyazannyh tvyordyh tel. K.: Nauk. Dumka,166 [in Ukraine].
9. Savchenko, A. Ya., Bolgrabskaya, I. A. (1984). Ustoychivost ravnomernyih vrascheniy svobodnoy svyazki giroskopov Lagranzha. Matematicheska fizika i nelineynaya mehanika. 1984. 36, № 2, 9–14 [in Ukraine].
10. Kononov, Yu. M. (1997). O dvizheniya sistemyi dvuh tverdyih tel s polostyami, soderzhaschimi zhidkost. Mehanika tverdogo tela. Mezhved. sb. nauch. tr. 29, 76– 85 [in Ukraine].
11. Kononov, Yu. M. (2006). Ob ustoychivosti dvizheniya sistemyi *n* svyazannyih tverdyih tel s polostyami, soderzhaschimi zhidkost. Mehanika tverdogo tela. Mezhved. sb. nauch. tr. 36, 75–82 [in Ukraine].
12. Kononov, Yu. M., Sviatenko, Ya. I. (2019). Vplyv dysypatyvnoho i postiinoho momentiv na stiikist rivnomirnoho obertannia dvokh pruzhno zviazanykh vilnykh hiroskopiv Lahranzha. Pratsi instytutu prykl. matem. i mekh. NANU. 33, 132–141 [in Ukraine].
13. Kononov, Yu. M., Sviatenko, Ya. I. (2023). Stabilization of spinning Lagrange gyroscope filled with ideal fluid in a resisting medium. Int. Appl. Mech.59, № 2, 207–217.
14. Aslanov, V. S. (2017). Rigid Body Dynamics for Space Applications. Butterworth Heinemann, Oxford, 410.
15. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer, 260.
16. Leshchenko, D. D., Ershkov, S. V., Kozachenko, T.A. (2021). Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques. Nonlinear Dyn. 1517–1528. DOI: 10.1007/s11071-020-06195-0.
17. Leshchenko, D., Ershkov, S. V., Kozachenko, T. (2022). Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque. J. Appl. Comput. Mech.8, N 3. 1023–1031.
18. Jury, E. I. (1979). Innory i ustojchivost' dinamicheskih sistem. M.: Nauka, 1979, 304 [in Ukraine].

Кононов Юрій Микитович
Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України
д.ф.-м.н., професор
вул. Добровольського, 1, Слов'янськ, Україна, 84100
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1609-0253

Для посилань:
Кононов Ю. М. Про стійкість обертання вільної системи двох пружно зв’язаних твердих тіл. Механіка та математичні методи, 2023. Т. 5. № 2. С. 6–15.

For references:
Yu. Kononov. (2023). On the stability of rotation of a free system of two elasticly connected rigid bodies. Mechanics and Mathematical Methods. 5 (2). 6–15.