УДК 531.381

ЗБУРЕНІ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА З РУХОМОЮ МАСОЮ В СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ

Лещенко Д. Д.[1], Козаченко Т. О.[1]
[1]Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація. Досліджуються різні випадки руху твердого тіла з внутрішніми степенями вільності. Розглянуто рухи тіла, яке містить лінійні пружні та дисипативні елементи. Зокрема, досліджені рухи тіла, що несе маси, з'єднані з ним за допомогою пружних сил з лінійним демпфіруванням. Ця ситуація моделює наявність нежорстко закріплених деталей на космічному апараті, що відповідно чинить суттєвий вплив на його рух відносно центра мас.

Розвиток досліджень задач динаміки твердих тіл навколо його центра мас йде в напрямку врахування того факту, що ці тіла не є ідеально твердими, а досить близькими до ідеальних моделей. Необхідність аналізу впливу різних неідеальностей обумовлена зростанням вимог до точності розв'язань практичних задач космонавтики, гіроскопії, тощо. Вплив неідеальностей може бути виявленим за допомогою асимптотичних методів нелінійної механіки (усереднення, сингулярних збурень та ін.). Він зводиться до наявності додаткових збурюючих моментів в рівняннях руху Ейлера деякого фіктивного твердого тіла. У [1, 6] одержано векторне рівняння, яке описує зміну вектора $\bar{\omega}$ в системі координат, пов'язаної з тілом. Функція $\bar{\Phi}(\bar{\omega})$ є поліномом, що містить четвертий і п'ятий степені $\bar{\omega}$.

Ряд робіт присвячено аналізу різних проблем динаміки космічних апаратів, що містять внутрішні маси. Вивчались питання стійкості та нестійкості, а також проблеми керування та стабілізації рухів. В космічному польоті іноді виникає потреба заглушити хаотичне обертання, яке виникає з будь яких причин. Для цього використовують переміщення рухомих мас.

Ми досліджуємо задачу про рух в середовищі з опором динамічно симетричного твердого тіла з рухомою точковою масою, яка з'єднана з тілом пружною в'яззю за наявності в'язкого тертя. За допомогою асимптотичного підходу рівняння руху тіла з масою були спрощені. Нелінійна еволюція кутових рухів тіла проаналізована за допомогою усереднених рівнянь та чисельного інтегрування. Побудовано графіки величин квадратів екваторіальної та осьової компонент кутової швидкості. Результати, які представлені в цій роботі дають можливість аналізувати кутові рухи штучних супутників під дією малих збурюючих моментів.

Ключові слова: тверде тіло, середовище з опором, рухома маса.

PERTURBED MOTIONS OF A RIGID BODY WITH A MOVABLE MASS IN A RESISTIVE MEDIUM

D. Leshchenko[1], T. Kozachenko[1]
[1]Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract. Various cases of the rigid body motion having internal degrees of freedom was studied. In particular, the motions of a body carrying masses which are attached to it by means of elastic forces with linear damping was investigated. This situation simulates the presence of loosely fixed components on a spacecraft, having a significant influence on its motion about its center of mass.

The development of research in dynamics of rigid body motions about its center of mass goes in the direction of taking into account the fact that these bodies are not perfectly rigid but are rather close to perfect models. The need for the analysis of the influence of various deviations from perfectness is caused by growing accuracy requirements in space exploration, gyroscopy, etc. The influence of imperfections can be revealed using asymptotic methods of nonlinear mechanics (averaging, singular perturbations and others). This influence reduces the additional terms in the Euler equations of motion of a fictitious rigid body. In the space flight, there arises sometimes a necessity to suppress the chaotic

rotation that occurs for one reason to another. To this end, the relative displacements of movable masses are used.

A number of works are devoted to the analysis of various problems of the dynamics of space vehicles containing internal masses. The issues of stability and instability and the problems of control and stabilization of motions have been studied. In [1, 6] vector equation which describes the change of vector $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ in the system of coordinates connected with the body was obtained. Function $\bar{\Phi}(\bar{\boldsymbol{\omega}})$ in the right-hind side of this equation is a polynomial containing the fourth and fifth powers of $\bar{\boldsymbol{\omega}}$.

We study the problem of the motion in a resistive medium of a dynamically symmetric rigid body carrying a movable point mass, connected with the body by an elastic coupling in the presence of viscous friction. By means of asymptotic approach equations of motion of body with mass are simplified. Nonlinear evolution of angular motions of the body is analyzed using averaged equations and numerical integration. Results summed up in this paper make it possible to analyze angular motions of artificial satellites under the influence of small internal perturbation torques.

Keywords: rigid body, resistive medium, movable mass.

1 ВСТУП

На рух штучного супутника відносно центра мас діють моменти, які обумовлені рухом деяких мас всередині тіла. Ці рухи можуть бути обумовленими різними причинами: наявністю в тілі обертових мас (роторів, гіроскопів), а також переміщенням екіпажу в випадку пілотованого апарата.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Велика кількість робіт, присвячена дослідженню обертання твердого тіла з рухомими внутрішніми масами з пружними та дисипативними елементами. Огляд робіт з цієї тематики представлений в [1-6].

В роботах [1, 6] розглянуті деякі випадки руху твердого тіла, які містять рухомі внутрішні маси, з'єднані з тілом за допомогою пружних та дисипативних елементів.

В книзі [7] виведені рівняння руху твердої оболонки з коливними точковими масами. Деякі якісні аспекти задачі про рух навколо нерухомої точки твердого тіла з рухомою масою досліджувались в [8]. В [9] розглядається тверде тіло з нерухомою точкою, в якому вздовж прямолінійного жолоба, який проходить через цю точку, здійснює коливання прикріплена до пружини точка з заданою масою.

В статтях [10-12] розглядається рух твердого тіла, до якого в точці нерухомо зв'язаною з тілом, прикріплена за допомогою пружинної в'язі з квадратичним тертям рухома маса. Вивчається рух динамічно симметричного твердого тіла зі сферичною порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, несучого рухому масу, яка прикріплена за допомогою пружної в'язі з в'язким тертям на осі симетрії. Розглядається рух навколо центра інерції близькою до динамічно сферичного твердого тіла, яке містить в'язкопружний елемент.

В роботі [13] оцінено вплив рухомих точкових мас (лінійних осциляторів), які здійснюють коливання вздовж осі симетрії вовчка або вздовж осей, ортогональних осі симетрії, на стійкість рівномірного руха вовчка Лагранжа.

В роботах [10, 14, 15] розв'язана задача про оптимальну за швидкодією стабілізацію вільного твердого тіла з рухомою масою, яка з'єднана з тілом в'язкопружним чином. Досліджена задача про оптимальне за швидкодією гальмування твердого тіла зі сферичною порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, та рухомою точковою масою, з'єднаною сильним демпфером з корпусом. Розглянута задача про оптимальне за швидкодією гальмування в середовищі з опором твердого тіла з рухомою точковою масою, з'єднаною демпфером з корпусом. В [16, 17] досліджена задача квазіоптимального за швидкодією керування обертань динамічно симетричного тіла з в'язкопружним елементом в середовищі з опором. Розглянута задача квазіоптимального за швидкодією гальмування обертань динамічно симетричного твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною, та з в'язкопружним елементом в середовищі з опором. В [18-21] розглянуті задачі про рух твердого тіла відносно центра мас в середовищі з опором.

Розглядаються обертальні рухи динамічно симетричного тіла з рухомою точковою масою, яка прикріплена в'язкопружним демпфером до точки на осі симетрії (в недеформованому стані) [1, 6], в середовищі з опором. Будемо вважати, що моменти сил опору є лінійними та дисипативними [1, 18-21]:

$$M_1^r = -\varepsilon I_1 p,\ M_2^r = -\varepsilon I_1 q,\ M_3^r = -\varepsilon I_3 r,\ I_1, I_3 > 0, \tag{1}$$

де I_1, I_3 – деякі постійні коефіцієнти пропорційності, які залежать від властивостей середовища та форми тіла.

З урахуванням (1) наближена система рівнянь збуреного руху в проекціях на головні центральні осі інерції має вигляд [1, 6, 18-21]

$$\begin{aligned} &A\dot{p} + \left(C - A\right)qr = -\varepsilon I_1 p + Lqr + Spr^4, \\ &A\dot{q} + \left(A - C\right)pr = -\varepsilon I_1 q - Lpr + Sqr^4, \\ &C\dot{r} = -\varepsilon I_3 r - AC^{-1}Sr^3(p^2 + q^2). \end{aligned} \tag{2}$$

де p, q, r – проекції вектора абсолютної кутової швидкості $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ на зв'язані осі, $\mathbf{J} = \mathrm{diag}(A,\ A, C)$ – тензор інерції незбуреного тіла.

Коефіцієнти $L,\ S$ в (2) виражаються через параметри системи наступним чином:

$$\begin{aligned} &L = m\rho^2\Omega^{-2}A^{-3}C\left(A^2p^2 + A^2q^2 + C^2r^2\right), \\ &S = m\rho^2\lambda\Omega^{-4}C^3(A - C)A^{-4} \end{aligned} \tag{3}$$

Коефіцієнти L, S характеризують збурюючі моменти сил, які обумовлені наявністю в’язкопружного елемента, m – маса рухомої точки, ρ – відстань від центра мас недеформованої системи до точки кріплення, яка знаходиться, за припущенням, на осі динамічної симетрії цього тіла. Сталі $\Omega^2 = c/m,\ \lambda = \delta/m$ визначають частоту коливань і швидкість їх згасання відповідно; c – жорсткість (коефіцієнт пружності), δ – коефіцієнт в’язкості демпфера.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ціллю роботи є дослідження різних випадків руху твердого тіла з внутрішніми степенями вільності.

Досліджується випадок потужного демпфера, коли коефіцієнти $\Omega,\ \lambda$ зв’язані нерівностями [1, 6]:

$$\Omega^2 \gg \lambda\omega \gg \omega^2 \tag{4}$$

Умова (4) дозволяє ввести малий параметр в (3) і вважати вказані збурюючі моменти малими з метою застосування асимптотичного метода усереднення [22].

Крім того, нерівності (4) дозволяють нехтувати ділянками вільних коливань рухів маси, які обумовлені початковими відхиленнями, внаслідок їх швидкого згасання і врахувати вимушені квазістаціонарні рухи, викликані обертанням тіла.

Будемо вважати, що $\Omega^2 \gg \varepsilon,\ \ \lambda\Omega^{-4} \sim \varepsilon$.

Коли $\varepsilon = 0,\ \ \Omega^2 = 0,\ \ \lambda\Omega^{-4} = 0$ система (1) інтегрується, при цьому $r = r_0$.

Припустимо, що $r_0 \neq 0$. В цьому випадку змінні $p,\ q$ здійснюють гармонічні коливання, частота яких $\left|(C - A)r_0\right|$ залежить від r_0. Тоді система рівнянь (1) нелінійна.

Загальний породжувальний розв’язок системи (1) [23]

$$p = a\cos\varphi,\quad q = a\sin\varphi,\quad r = r_0 \tag{5}$$

застосуємо як перетворення до змінних $a,\ r$, де $a > 0,\ a = \mathrm{const},\ \varphi = r(C - A)A^{-1}t.$

З (5) одержимо, що $\dot{a} = \dot{p}\cos\varphi + \dot{q}\sin\varphi$. Підставимо в цей вираз $\dot{p}$ і $\dot{q}$ з перших двох рівнянь (1). В результаті усереднення одержаного рівняння для a за фазою φ [22] і, враховуючи, що $a^2 = p^2 + q^2$ запишемо рівняння (1) для r у вигляді (крапка – похідна за часом t):

$$\dot{a} = -\varepsilon I_1 A^{-1} a + SA^{-1} r^4 a,$$
$$\dot{r} = -\varepsilon I_3 C^{-1} r - AC^{-2} S r^3 a^2. \qquad (6)$$

Здійснюючи заміну змінних $x = a^2$, $y = r^2 > 0$ систему (6) приведемо до наступного вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = -2x\left[\varepsilon I_1 A^{-1} - SA^{-1} y^2\right],$$
$$\frac{dy}{dt} = -2y\left[\varepsilon I_3 C^{-1} + AC^{-2} Sxy\right]. \qquad (7)$$

В цій системі x, y – повільні змінні.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Система (7) проінтегрована чисельно за початкових умов $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ та параметрів $\rho = 1$, $m = 1$, $\lambda = 98$, $\Omega = 10$, $\varepsilon = 0.1$, $I_3 = 1.0$. Чисельний розв'язок системи отримано в математичному пакеті Maple, з застосуванням метода Рунге-Кутти-Фельберга п'ятого порядку точності.

На рис. 1 – 4 зображено графіки величин $x = a^2$ і $y = r^2$ квадратів екваторіальної та осьової компонент кутової швидкості твердого тіла у випадках: 1) $A = 1.5$, $C = 1$ та $I_1 = 1.25$ або $I_1 = 2.5$ (рис. 1, 3); 2) $A = 4$, $C = 2$ та $I_1 = 1.25$ або $I_1 = 2.5$ (рис. 2, 4).

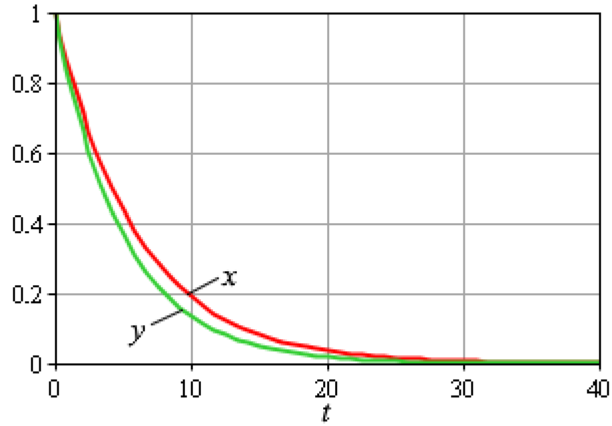

Рис. 1. Графіки змінних x і y в випадку $A = 1.5$, $C = 1$, $I_1 = 1.25$

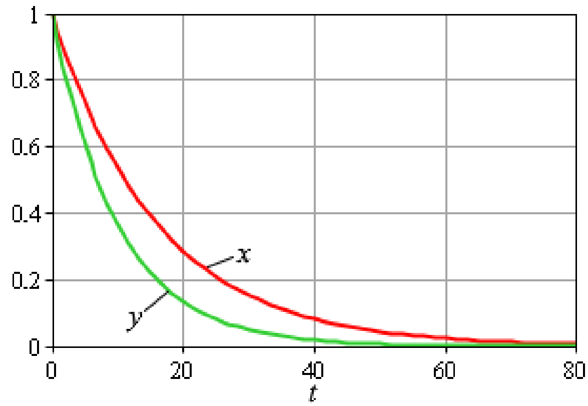

Рис. 2. Графіки змінних x і y в випадку $A = 4$, $C = 2$, $I_1 = 1.25$

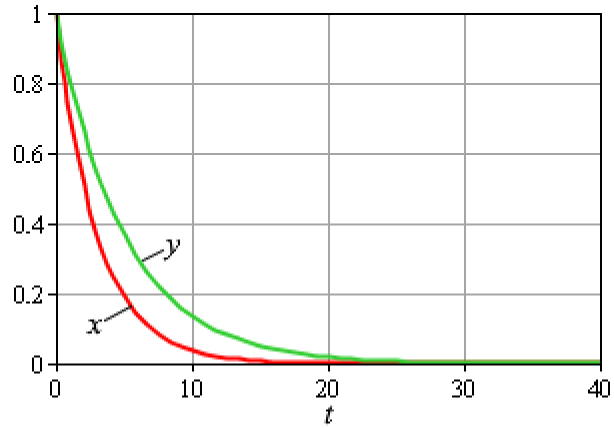

Рис. 3. Графіки змінних x і y в випадку $A = 1.5,\ C = 1,\ I_1 = 2.5$

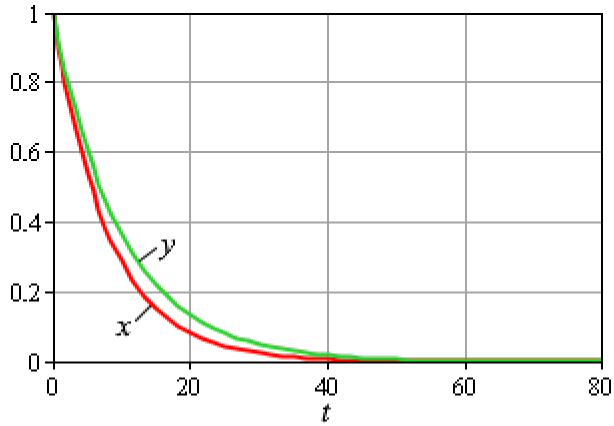

Рис. 4. Графіки змінних x і y в випадку $A = 4,\ C = 2,\ I_1 = 2.5$

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Як бачимо, з рис. 1–4 змінні $x = a^2$ та $y = r^2$ спадають асимптотично наближаючись до нуля. У випадку виконання співвідношення $A/C = I_1/I_3$, система (7) має єдиний розв’язок $x = y$. При виконані нерівності $A/C > I_1/I_3$ змінна y швидше прагне до нуля ніж x. Якщо ж $A/C < I_1/I_3$ навпаки, змінна x спадає швидше ніж y.

Також характер спадання величин квадратів екваторіальної та осьової компонент кутової швидкості твердого тіла залежить від співвідношення між моментами інерції. При зростанні величини A/C (при однакових інших параметрах) спадання змінних $x = a^2$ та $y = r^2$ відбувається повільніше.

6 ВИСНОВКИ

В результаті дослідження руху в середовищі з опором близького до динамічно сферичного твердого тіла з рухомою масою, зв’язаною з тілом пружною в’яззю при наявності в’язкого тертя одержано систему рівнянь руху в стандартній формі. Після одержання усередненої системи знайдено чисельний розв’язок задачі. Еволюція руху твердого тіла описується розв’язками, які можуть бути використаними, при дослідженні орієнтації та стабілізації руху супутника відносно центра мас.

Література

1. Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer, Cham, 2017.
2. He L., Sheng T., Kumar K. D., Zhac Y., Ran D., Chen X. Attitude maneuver of a satellite using moving masses. Acta Astonaut. 2020. 176. P. 464–475.
3. Li T., Gao C., Li C., Ting W. A survey of moving mass control theory. Aerospace Science and Technology. 2018. 82-83. P. 594–606.
4. Ogunwa T., Abdullah F., Chahl T. Modeling and Control of an Articulated Multibody Aircraft. Applied Sciences. 2022. 12. 1162.
5. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л., Зинкевич Я. С. Возмущенные и управляемые вращения твердого тела. Одесса: ОНУ им. И.И. Мечникова, 2013. 287с.
6. Черноусько Ф. Л. О движении твердого тела с подвижными массами. Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1973. №4. С.33–44.
7. Lurie A. I. Analytical Mechanics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York. 2002.
8. Month L. A., Rand R. H. Stability of a rigid body with an oscillating particle. An application of MACSYMA. Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 1985. 52. P. 686–692.
9. Christov O. On the non-integrability of a system describing the motion of a rigid body with a fixed point and particle oscillating in it. Bulletin des Sciences Mathematiques. 1994. 118. P. 385–401.
10. Akulenko L. D., Leshchenko D. D. Some problems of the motion of a solid with a moving mass. Mechanics of Solids. 1978. 13 (5). P. 24–28.
11. Leshchenko D. D., Sallam S. N. Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. International Applied Mechanics. 1992. 28 (8). P. 524–528.
12. Akulenko L., Leshchenko D., Kushpil T., Timoshenko I. Problems of evolution of rotations of a rigid body under the action of perturbing moments. Multibody System Dynamics. 2001. 6 (1). P. 3–16.
13. Kononov Yu. N. Spin stability of a Lagrange top containing linear oscillators. Journal of Mathematical Sciences. 2001. 103 (1). P. 38–42.
14. Akulenko L. D., Leshchenko D. D. Optimal braking of the rotations of a solid body with internal degrees of freedom. Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996. 34 (3). P. 127–135.
15. Akulenko L. D., Zinkevich Ya. S., Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L. Optimal rotation deceleration of a dynamically symmetric body with movable mass in a resistant medium. Journal of Computer and Systems Sciences International. 2011. 50 (2). P. 198–204.
16. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Shchetinina Yu. S. Quasi-optimal deceleration of rotations of a rigid body with a moving mass in a resistive medium. Journal of Computer and Systems Sciences International. 2017. 56 (2). P. 186–191.
17. Akulenko L. D., Kozachenko T. A., Leshchenko D. D. Time quasi-optimal deceleration of rotations of a gyrostat with moving mass in a resistive medium. Journal of Computer and Systems Sciences International. 2019. № 58 (5). P. 667–673.
18. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 288с.
19. Routh E. J. Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part II New York: Dover Publications, 1955.
20. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Деякі задачі про рух твердого тіла у середовищі з опором. Механіка та математичні методи. 2021. Т. 3. № 2. С. 6–17.
21. Kononov Yu. N. On the stability of the uniform rotations of the asymmetric rigid body in the resistive medium under the action of constant moment. International Applied Mechanics. 2021. 54 (4). 432–439.
22. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. К.: Наукова Думка, 1971. 440с.
23. Ландау Л. Д., Мифинц Е. М. Теоретическая физика. Т1. Механика. М.: Наука, 1973. 208с.

References

1. Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. D. (2017). *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*. Springer, Cham.

2. He L., Sheng T., Kumar K. D., Zhac Y., Ran D., Chen X. (2020). Attitude maneuver of a satellite using moving masses. *Acta Astonaut*. 176. 464–475.
3. Li T., Gao C., Li C., Ting W. (2018). A survey of moving mass control theory. *Aerospace Science and Technology*. 82-83. 594–606.
4. Ogunwa T., Abdullah F., Chahl T. (2022). Modeling and Control of an Articulated Multibody Aircraft. *Applied Sciences*. 12. 1162.
5. Akulenko L. D., Leschenko D. D., Rachinskaya A. L., Zinkevich Ya. S. (2013). *Vozmuschennyie i upravlyaemyie vrascheniya tverdogo tela* [Perturbed and controlled rotations of a rigid body]. Odessa: OHU im. I.I. Mechnikova. [in Ukrainian].
6. Chernousko F. L. (1973). O dvizhenii tverdogo tela s podvizhnyimi massami [On the motion of a rigid body with moving masses]. *Izv. AN SSSR. Mehanika tverdogo tela*. No.4. 33–44.
7. Lurie A. I. (2002). *Analytical Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
8. Month L. A., Rand R. H. (1985). Stability of a rigid body with an oscillating particle. An application of MACSYMA. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 52. 686–692.
9. Christov O. (1994). On the non-integrability of a system describing the motion of a rigid body with a fixed point and particle oscillating in it. *Bulletin des Sciences Mathematiques*. 118. 385–401.
10. Akulenko L. D., Leshchenko D. D. (1978). Some problems of the motion of a solid with a moving mass. *Mechanics of Solids*. 13 (5). 24–28.
11. Leshchenko D. D., Sallam S. N. (1992). Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*. 28 (8). 524–528.
12. Akulenko L., Leshchenko D., Kushpil T., Timoshenko I. (2001). Problems of evolution of rotations of a rigid body under the action of perturbing moments. *Multibody System Dynamics*. 6 (1). 3–16.
13. Kononov Yu. N. (2001). Spin stability of a Lagrange top containing linear oscillators. *Journal of Mathematical Sciences*. 103 (1). 38–42.
14. Akulenko L. D., Leshchenko D. D. (1996). Optimal braking of the rotations of a solid body with internal degrees of freedom. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 34 (3). 127–135.
15. Akulenko L. D., Zinkevich Ya. S., Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L. (2011). Optimal rotation deceleration of a dynamically symmetric body with movable mass in a resistant medium. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 50 (2). 198–204.
16. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Shchetinina Yu. S. (2017). Quasi-optimal deceleration of rotations of a rigid body with a moving mass in a resistive medium. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 56 (2). 186–191.
17. Akulenko L. D., Kozachenko T. A., Leshchenko D. D. (2019). Time quasi-optimal deceleration of rotations of a gyrostat with moving mass in a resistive medium. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 58 (5). 667–673.
18. Koshlyakov V. N. (1985). *Zadachi dinamiki tverdogo tela i prikladnoj teorii giroskopov: Analiticheskie metody* [Problems in Dynamics of Solid Bodies and in Applied Gyroscope Theory: Analytical Methods]. Nauka, Moskva. [in Russian].
19. Routh E. J. (1955). *Dynamics of a System of Rigid Bodies*. Part II New York: Dover Publications.
20. Leshchenko D., Kozachenko T. (2021). Some problems about the motion of a rigid body in a resistive medium. *Mechanics and Mathematical Methods*. 3 (2). 6–17. [in Ukrainian].
21. Kononov Yu. N. (2021). On the stability of the uniform rotations of the asymmetric rigid body in the resistive medium under the action of constant moment. *International Applied Mechanics*. 54 (4). 432–439.
22. Mitropolskiy Yu. A. (1971). *Metod usredneniya v nelineynoy mehanike* [Averaging method in nonlinear mechanics]. Kyiv, Naukova Dumka. [in Ukrainian].
23. Landau, L. D., Lifshic, E. M. (1973). *Teoreticheskaya fizika. T.1. Mehanika* [Theoretical physics. T.1. Mechanics]. Nauka, Moskva. [in Russian].

Лещенко Дмитро Давидович
Одеська державна академія будівництва та архітектури
д.ф.-м.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029

leshchenko_d@ukr.net,
ORCID: 0000-0003-2436-221X
Козаченко Тетяна Олександрівна
Одеська державна академія будівництва та архітектури
к.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
kushpil.t.a@gmail.com
ORCID: 0000-0001-9034-3776

Для посилань:
Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи твердого тіла з рухомою масою в середовищі з опором Механіка та математичні методи, 2023. Т. 5. № 2. С. 16–24.

For references:
D. Leshchenko, T. Kozachenko. (2023). Perturbed motions of a rigid body with a movable mass in a resistive medium. Mechanics and Mathematical methods. 5 (2). 16–24.