УДК 539.3

ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛІ БАЛІСТИЧНОГО МАЯТНИКА В АНАЛІЗІ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ КРАНОВИХ СИСТЕМ

Човнюк Ю. В. [1], **Чередніченко П. П.** [1], **Шудра Н. С.** [1], **Козуплиця С. І.** [2]
[1]*Київський Національний університет будівництва та архітектури*
[2]*Національний авіаційний університет*

Анотація. Проведений аналіз низки факторів, які впливають на точність експериментального визначення малих швидкостей маятникових коливань вантажу на канаті вантажопідйомного механізму крана, що виникають при пуску, гальмуванні чи реверсуванні кранової системи. Канат при цьому розглядається як пружна нитка. Теоретично проаналізований вплив скінченої маси та згинної пружності виска на частоту власних коливань маятника. Показано, що основним фактором, який впливає на власну частоту, є згинна пружність нитки виска, а вплив маси нитки (канату) балістичного маятника можна звести до мінімуму. Отриманий точний аналітичний вираз для власної частоти реального маятника за довільної жорсткості легкого виска. Для невеликої маси вантажу й швидкості руху при імпульсному впливі на кранову систему (пуск, гальмування, реверсування) виникають певні труднощі щодо врахування скінченої маси й жорсткості виска задля розрахунку власної частоти коливань маятника. За ідеальної ситуації масу виска можна зробити надто малою у порівнянні з масою маятника (вантаж та канат), але при короткій довжині канату збільшується власна частота маятника, що знижує чутливість системи до зовнішніх імпульсних впливів, і зростає вплив пружності нитки (канату) на цю частоту. Тому у реальній ситуації маса маятника, його довжина (канату) та жорсткість виска завжди повинні бути обрані і враховані у точних дослідженнях (і розрахунках) виходячи компромісних міркувань.

У даному дослідженні теоретично оцінюється у наближенні малого параметру степінь впливу вказаних вище факторів на власну частоту коливань маятника (тобто, по суті, вантажу на канаті).

Отримані у даному дослідженні результати можуть у подальшому бути використані для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку та аналізу перехідних процесів (пуску, гальмування, реверсування та ін.) кранових систем як на стадіях їх проектування, так і у режимах реальної експлуатації задля оптимізації роботи вказаних вище систем (та механізмів).

Ключові слова: модель, балістичний маятник, аналіз, перехідні процеси, кранові системи, коливання, пуск, гальмування.

USE OF THE BALLISTIC PENDULUM MODEL IN THE ANALYSIS OF CRANE SYSTEM TRANSIENTS

Yu. Chovniuk[1], **P. Cherednichenko,** N. **Shudra**[1], **S. Kozupitsa** [2]
[1] *Kyiv National University of Civil Engineering and Architecture*
[2] *National Aviation University*

Abstract. A number of factors affecting the accuracy of experimental determination of small velocities of pendulum vibrations of the load on the rope of the crane hoisting mechanism, arising at start-up, braking or reversing of the crane system, have been analyzed. The rope is considered as an elastic thread. The influence of finite mass and bending elasticity of the viscus on the frequency of natural oscillations of the pendulum is theoretically analyzed. It is shown that the main factor influencing the natural frequency is the bending elasticity of the viscus thread, and the influence of the mass of the thread (rope) of the ballistic pendulum can be minimized. An exact analytical expression

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2023-5-2-80-91

for the natural frequency of a real pendulum at arbitrary stiffness of the lightweight viscus is obtained. For small mass of cargo and speed of movement at impulse influence on the crane system (starting, braking, reversing) there are certain difficulties in taking into account the final mass and stiffness of the viscus for calculation of natural frequency of pendulum oscillations. In an ideal situation, the mass of the temple can be made too small compared to the mass of the pendulum (load and rope), but with a short length of rope increases the natural frequency of the pendulum, which reduces the sensitivity of the system to external impulsive influences, and increases the influence of the elasticity of the thread (rope) on this frequency. Therefore, in a real situation, the mass of the pendulum, its length (of the rope) and the stiffness of the temple should always be chosen and taken into account in accurate studies (and calculations) based on compromise considerations.

In this study, the degree of influence of the above factors on the natural frequency of oscillation of a pendulum (i.e., essentially a weight on a rope) is theoretically evaluated in the small-parameter approximation.

The results obtained in this study can be further used to refine and improve the existing engineering methods of calculation and analysis of transients (start-up, braking, reversing, etc.) of crane systems both at the stages of their design and in the modes of real operation to optimize the performance of the above systems (and mechanisms).

Keywords: model, ballistic pendulum, analysis, transients, crane systems, oscillations, starting, braking.

1 ВСТУП

У процесах пуску, гальмування, реверсування кранових систем у останніх неминуче виникають маятникові коливання вантажу на канаті вантажопідйомного механізму, які, зрозуміла, є небажаними, оскільки можуть призвести до аварійних ситуацій. Використання сучасних мехатронних систем управління рухом, зокрема, приводом кранового механізму підйому вантажу, дозволяють суттєво зменшити негативний вплив розгойдування вантажу на канаті у процесах пуску/гальмування чи реверсування. Однак для адекватного гасіння вказаних коливань треба мати інформацію про їх характеристики, причому оперативну і доволі точну. Саме ця проблема і розглянута у даному дослідженні.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Аналіз впливу пружних властивостей стрижня/канату при згині, маси виска, вантажу проведений у роботах [1, 2]. Автори [3-15] досліджують різноманітні аспекти динаміки вантажопідйомних механізмів кранів, проте користуються моделями пружних елементів (канатів), які не враховують масу виска та згинну жорсткість канату. У даному дослідження вперше використана модель балістичного маятника для детального і всебічного дослідження виникаючих у кранових системах коливань.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Робота полягає у обґрунтуванні фізико-механічної моделі маятникових коливань вантажу на канаті вантажопідйомного механізму крана.

4 МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕНЬ

Використана модель балістичного маятника, методи математичної фізики, апарат диференціальних рівнянь у частинних похідних для знаходження власних частот маятникових коливань у наближенні малої маси й жорсткості виска (канату). Власне маятник (канат і вантаж, який на ньому закріплений) у даній роботі розглянуті як система з розподіленими параметрами (дискретно-континуальне наближення). Крім того, для проведення дослідження застосовуються елементи математичного апарату класичного варіаційного числення, теоретичної механіки, оптимального управління, а також математичного моделювання, які використовуються у численних роботах вітчизняних та зарубіжних авторів.

5 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо зосереджену масу m (вантаж), яка закріплена на тонкому гнучкому стрижні (модель канату), для котрого задані довжина L, радіус r (круговий поперечний переріз), щільність матеріалу ρ , модуль Юнга E . Стрижень закріплений й зафіксований на одному кінці та вільний на кінці із прикріпленою до нього масою (вантаж). Якщо у задачі ми нехтуємо згинною пружністю стрижня, тоді ми будемо його називати ниткою. Силою тертя з повітрям нехтуємо.

Рівняння згинних коливань розтягнутого вагою вантажу пружного стрижня при невеликих згинах (коли можна знехтувати обертальним рухом елементів стрижня) має відомий вид [2]:

$$
\begin{cases}
EI \cdot \dfrac{\partial^4 z}{\partial x^4} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}\right) + \rho \cdot S \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0, \\
T = \rho \cdot S \cdot g(L - x) + mg, \quad S = \pi r^2, \quad I = \int z^2 ds' = \dfrac{\pi r^4}{4}.
\end{cases} \tag{1}
$$

Тут I – момент інерції поперечного перерізу стрижня. Як показують прості оцінки, технічно неважко виготовити стрижень так, щоб його сумарна маса $\rho \cdot S \cdot L$ була набагато меншою за масу підвішеного вантажу m. У цьому випадку сила натягу стрижня може вважатись постійною $T \approx mg$, а рівняння (1) суттєво спрощується. Будемо у подальшому розв'язувати задачу саме у цьому наближенні.

Для зручності аналізу рівняння перейдемо до безрозмірних змінних, коли координата y нормована на довжину стрижня, а час τ на частоту коливань математичного маятника. У цьому випадку рівняння (1) може бути записане наступним чином:

$$
\begin{cases}
\varepsilon^2 \cdot \dfrac{\partial^4 z}{\partial y^4} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \mu \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} = 0, \\
y = \dfrac{x}{L}, \quad \tau = \omega_0 \cdot t = t \cdot \sqrt{\dfrac{g}{l}}, \quad \varepsilon^2 = \dfrac{\pi \cdot r^4 \cdot E}{4mgL^2}, \quad \mu = \dfrac{\rho SL}{m} << 1.
\end{cases} \tag{2}
$$

Тут безрозмірний параметр ε характеризує пружні властивості стрижня при згині, а μ – безрозмірну масу виска. Зазначимо, що при повному нехтуванні згинною жорсткістю

$(\varepsilon = 0)$, матимемо замість (2) хвильове рівняння для коливань гнучкої масивної, однорідно розтягнутої нитки. Фазова швидкість біжучої вздовж нитки поперечної хвилі буде дорівнювати $C_\perp = \omega_0 \cdot L \cdot \sqrt{\mu} = \sqrt{\mu \cdot g \cdot L}$.

Для кутових параметрів виска (сталевий канат радіусом $r = 3 \cdot 10^{-2}$ м, довжиною $L = 10$ м, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $m = 10^4$ кг, $\rho = 7{,}8 \cdot 10^{+3}$ кг/м^3) $\varepsilon \approx 0{,}1$ та $\mu \approx 0{,}02$. Виходячи з цих оцінок, будемо нижче вважати обидва параметри μ та ε малими у порівнянні з 1, тобто $(\varepsilon, \mu) << 1$.

Хоча параметр пружності ε набагато менше 1, він стоїть перед похідною 4-го порядку, і навіть за невеликих згинів стрижня (модель канату) цією складовою рівняння нехтувати не можна. Аналогічно за малості параметра μ член з похідною у часі також може бути суттєвим, якщо частоти згинних коливань високі у порівнянні з частотою коливань математичного маятника.

Рівняння (2) слід доповнити граничними умовами. На лівому кінці стрижня $(y = 0)$ – це умова закріпленого (зафіксованого) кінця, а на правому кінці $(y = 1)$, де прикріплений вантаж (маса), дорівнює нулю згинний момент (інерцією вантажу по відношенню до обертань завдяки малості розмірів нехтуємо):

$$
z(0, \tau) = 0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{y=0,\tau} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{y=1,\tau} = 0. \tag{3}
$$

Четверта умова зв'язує рівнодіючу силу (перерізуюча сила плюс проекція сили натягу) на правому кінці виска й прискорення закріпленою на стрижні вантажу:

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2023-5-2-80-91

$$\left(EI\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}-mg\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=L,t}=m\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\Bigg|_{x=L,t}\to\left(\varepsilon^2\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=1,\tau}=\frac{\partial^2 z}{\partial\tau^2}\Bigg|_{y=1,\tau}. \quad (4)$$

Рівняння (2) з граничними умовами (3), (4) дозволяє знайти власні частоти коливань маятника, котрі можна характеризувати безрозмірною величиною $\Omega(\varepsilon,\mu)$ – відношенням частоти реального маятника до частоти математичного маятника $\omega_0=\sqrt{g/L}$.

Будемо розв'язувати рівняння (2) методом розділення змінних, подаючи шукану функцію у вигляді $Z(y,\tau)=\xi(y)\cdot\theta(\tau)$. Позначаючи константу розділення як Ω^2, матимемо два рівняння для часового $\theta(\tau)$ й координатного факторів $\xi(y)$:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\theta}{d\tau^2}+\Omega^2\cdot\theta=0, \qquad \varepsilon^2\cdot\dfrac{d^4\xi}{dy^4}-\dfrac{d^2\xi}{dy^2}+\mu\Omega^2\cdot\xi=0.\end{cases} \quad (5)$$

Розв'язок $\theta(\tau)$ першого рівняння системи (5) має вид звичайний гармонічних функцій часу з частотою Ω . Розв'язок другого рівняння (5) будемо шукати у вигляді експоненти $\xi(y)\sim exp(\alpha\cdot y)$. Тоді маємо характеристичне рівняння для коефіцієнтів α, а його наближений розв'язок запишемо, скориставшись малими значеннями параметрів μ та ε:

$$\begin{cases}\varepsilon^2\cdot\alpha^4-\alpha^2+\mu\Omega^2=0,\ \ \alpha^2=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\mu\varepsilon^2\Omega^2}}{2\varepsilon^2},\ \ \alpha_1^2\approx\dfrac{1}{\varepsilon^2}>>1,\\ \alpha_2^2\approx\Omega^2\mu<<1.\end{cases} \quad (6)$$

При записі коренів характеристичного рівняння ми вважали, що дискримінант рівняння додатній й усі корені дійсні, оскільки у розглядуваній задачі очікувана основна власна частота маятника $\Omega\approx 1$. Високочастотні моди, коли:

$$\Omega>\Omega_{hf}=\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\mu}}>>1, \quad (7)$$

призводять до уявних коренів характеристичного рівняння. Зрозуміло, що можна припустити наступне: амплітуда таких високочастотних мод навіть при імпульсному впливі на маятник порівняно мала, і вони додадуть ефекти другого порядку малості у порівнянні з регулярними коливаннями маятника на основній частоті $\Omega\approx 1$.

Можна записати фундаментальний розв'язок для координатного рівняння (5) у вигляді:

$$\xi(y)=C_1\cdot sinh(\alpha_1 y)+C_2\cdot cosh(\alpha_1 y)+C_3\cdot sinh(\alpha_2 y)+C_4\cdot cosh(\alpha_2 y). \quad (8)$$

Підставляючи (8) у три граничних умови (3), можна виключити три константи інтегрування, після чого матимемо розв'язок з точністю до амплітуди:

$$\begin{aligned}\xi(y)=&\left(sinh\alpha_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot sinh\alpha_2\right)\cdot\left(cosh(\alpha_1 y)-cosh(\alpha_2 y)\right)-\\ &-\left(cosh\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}cosh\alpha_2\right)\cdot\left(sinh(\alpha_1 y)-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}sinh(\alpha_2 y)\right).\end{aligned} \quad (9)$$

Використовуючи четверту граничну умову (4), отримаємо рівняння для визначення власних частот коливань маятника Ω:

$$\left.\left(-\varepsilon^2\cdot\frac{\partial^3\xi}{\partial y^3}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\right|_{y=1}=\Omega^2\cdot\xi(1),\tag{10}$$

або

$$\begin{aligned}&\left(-\varepsilon^2\right)\cdot\left\{\left(sh\alpha_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot sh\alpha_2\right)\cdot\left(\alpha_1^3\cdot sh\alpha_1-\alpha_2^3\cdot sh\alpha_2\right)-\right.\\&\left.-\left(ch\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\cdot ch\alpha_2\right)\cdot\left(\alpha_1^3\cdot ch\alpha_1-\alpha_1\cdot\alpha_2^2\cdot ch\alpha_2\right)\right\}+\\&+\left(sh\alpha_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot sh\alpha_2\right)\cdot\left(\alpha_1\cdot sh\alpha_1-\alpha_2\cdot sh\alpha_2\right)-\\&-\left(ch\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\cdot ch\alpha_2\right)\cdot\left(\alpha_1\cdot ch\alpha_1-\alpha_1\cdot ch\alpha_2\right)=\\&=\Omega^2\cdot\left\{\left(sh\alpha_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot sh\alpha_2\right)\cdot\left(ch\alpha_1-ch\alpha_2\right)-\left(ch\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\cdot ch\alpha_2\right)\cdot\left(sh\alpha_1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot sh\alpha_2\right)\right\}.\end{aligned}\tag{11}$$

У трансцендентному рівнянні (11) для Ω прийняті наступні позначення:

$$sinh(U)=sh(U)=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{+U}-e^{-U}\right);\quad ch(U)=cosh(U)=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{+U}+e^{-U}\right)\tag{12}$$

Проаналізуємо тепер можливість отримання наближеного розв'язку для власної частоти Ω реального маятника у наближенні малості маси й жорсткості виска. Розглянемо спочатку ситуацію абсолютну гнучкого виска (нитка або ланцюжок), коли параметр згинної жорсткості $\varepsilon=0$. Тоді при відносно малому значенні μ розв'язок другого рівняння (5) буде давати майже лінійне рішення:

$$\begin{aligned}&\xi(y)=C_1\cdot sh\left(\Omega\cdot\sqrt{\mu}\cdot y\right)+C_2\cdot ch\left(\Omega\cdot\sqrt{\mu}\cdot y\right)=\\&=\left(C_1\cdot\Omega\cdot\sqrt{\mu}\cdot y+C_2\right)\cdot\left(1+O\left(\mu\Omega^2\right)\right)\rightarrow\xi(y)\approx y.\end{aligned}\tag{13}$$

Лінійна функція $\xi(y)$ – це коливання математичного маятника. Тому власна частота коливань, визначена з рівняння (10) чи (11), при підстановці у нього функції (13) $\Omega=1$, як і повинно бути.

Для подальшого аналізу, залишаючись у межах цієї точності розрахунку, можна у (9) покласти $\alpha_2=0$. Тоді замість (9) матимемо форму пружного виска у вигляді наступної функції:

$$\xi(y)\approx y+\frac{sh\left(\alpha_1\cdot[1-y]\right)-sh\alpha_1}{\alpha_1\cdot ch\alpha_1}.\tag{14}$$

Тут друга складова у правій частині (14) забезпечує виконання другої умови (3) для закріпленого кінця виска, а нормування у (14) обрано так, щоб виконувалась рівність $\xi(1)=1$.

Підставляючи тепер (14) у рівняння (10) чи (11) й враховуючи, що $\alpha_1 = \xi^{-1}$, отримаємо наступний вираз для основної частоти коливань реального маятника $(\mu \to 0)$:

$$\Omega^2 = \frac{1}{1-\varepsilon \cdot th(1/\varepsilon)}, \quad th(U) = \frac{sh(U)}{ch(U)}. \tag{15}$$

Із урахуванням скінченної маси виска (власне канату) можна отримати більш загальний наближений вираз для власної частоти реального маятника при $(\mu,\varepsilon) << 1$:

$$\Omega = 1 + \varepsilon/2 + \frac{\mu}{6} + O(\varepsilon\mu) + O(\varepsilon^2) + O(\mu\sqrt{\mu}). \tag{16}$$

Як видно, частота коливань реального маятника буде залежати не тільки від речовини й форми виска (тобто канату), але й від маси вантажу й виска.

Слід зазначити, що використання формули (15) у «зворотному» граничному випадку, коли $\varepsilon >> 1$, дозволяє досить коректно оцінити власну частоту коливань вантажу маси m, закріпленого на кінці (кругового перерізу) легкого пружного стрижня, але за умови відсутності сили тяжіння. Дійсно, при $g \to 0$ параметр $\varepsilon \to \infty$, й з (15):

$$\begin{cases} \Omega^2 = (1-\varepsilon \cdot th(1/\varepsilon))^{-1} \xrightarrow{\varepsilon\to\infty} 3\varepsilon^2 \cdot \left(1 + O\left(\varepsilon^{-2}\right)\right), \\ \omega = \Omega \cdot \sqrt{\dfrac{g}{L}} \xrightarrow{g\to 0} \dfrac{r^2}{2L}\sqrt{\dfrac{3\pi\varepsilon}{mL}}. \end{cases} \tag{17}$$

Цей факт говорить про те, що формула (15) для основної частоти коливань реального маятника може бути справедливою для довільного (!) параметру ε, поки можна знехтувати масою виска.

Критерій малості маси виска для випадку, коли $\varepsilon > 1$, легко отримати з тієї вимоги, щоб у виску не збуджувались згинні коливання з частотами, близькими до основної частоти маятника. Ця вимога відображена у нерівності (7). Тому критерій коректності формули (15) для маси виска має вид:

$$\mu << \frac{1}{4\varepsilon^2\Omega^2} = \frac{1-\varepsilon \cdot th\left(1/\varepsilon\right)}{4\varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon>>1} \mu << \frac{1}{12 \cdot \varepsilon^4}. \tag{18}$$

Виконання критерію (18) залишає коректними усі наведені вище міркування, які були зроблені після отримання точних коренів характеристичного рівняння (6), а значить і вираз(15).

Таким чином, для обчислення основної частоти коливань реального маятника на легкому однорідному виску $(\mu << 1)$ з довільною формою поперечного перерізу слід спочатку оцінити величину параметра ε. Якщо маса виска задовольняє критерію (18), тоді основну частоту маятника ω можна знайти за формулою:

$$\omega^2 \approx \frac{g}{L} \cdot \frac{\left(1 + \mu/3\right)}{\left\{1 - \varepsilon th\left(1/\varepsilon\right)\right\}}, \quad \varepsilon = \frac{1}{L} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot I_p \cdot E}{mg}}, \quad \mu << \frac{m_p}{m} << 1, \tag{19}$$

де m_p та I_p – маса виска і момент інерції його поперечного перерізу. Слід зазначити, що ніяких обмежень на величину параметра ε у формулі (19) не накладається! У цьому

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2023-5-2-80-91

випадку високочастотні коливання практично будуть відсутні, оскільки корені характеристичного рівняння (6) дійсні, форма натягнутого виска має вид монотонної залежності (9) від координати $Z(x)$, а рівняння (10) дає єдиний розв'язок для власної частоти маятника.

Якщо критерій (18) не виконується або $\mu \sim 1$, тоді у виску можуть збуджуватись згинні коливання і хвилі з неспіввимірними частотами, а спектр коливань вантажу також матиме високочастотні гармоніки. Маятник у цьому режимі здійснює нерегулярні коливання, що не дозволяє використовувати його (як балістичний маятник) задля діагностики й динамічного аналізу малих імпульсів збудження руху (кранової системи).

Розглянемо цю ситуацію більш детально.

Величину Ω_{hf} (7) із урахуванням введених у (2) ε та μ можна подати наступним чином:

$$\Omega_{hf} = \frac{m \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{L}}{\sqrt{\rho} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \sqrt{E}}. \tag{20}$$

Для істинного значення ω_{hf} тоді маємо:

$$\omega_{hf} = \Omega_{hf} \cdot \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{m \cdot g}{\sqrt{\rho} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \sqrt{E}}. \tag{21}$$

Отже, величина ω_{hf} не залежить від довжини виска L. Умова виникнення резонансних (з частотою вільних коливань маятника) явищ набуває вигляду:

$$\Omega_{hf} = 1 \Leftrightarrow \frac{m \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{L}}{\sqrt{\rho} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \sqrt{E}} = 1. \tag{22}$$

З умови (22) легко отримати значення довжини виска $\left(L^*\right)$, за якого виникають резонанси між маятниковою частотою коливань вантажу на канаті $\left(\sqrt{g/L}\right)$ та частотою згинних коливань виска (тобто самого канату):

$$L^* = L_{res} = \frac{\rho \cdot \pi^2 \cdot r^6 \cdot E}{m^2 \cdot g}, \tag{23}$$

тобто за цієї довжини виска L^* існує резонанс:

$$\omega_{hf} = \sqrt{\frac{g}{L}}. \tag{24}$$

При частотах $\Omega > \Omega_{hf}$ $\left(\omega > \omega_{hf}\right)$ вподовж виска (канату) розповсюджуються високочастотні згинні коливання і хвилі. Ці згинні коливання експоненціально зростають по амплітуді вподовж виска (канату) й мають просторовий період коливань. Описують ці коливні та хвильові процеси у виску (канаті) наступні залежності:

$$\xi(y) \sim exp(\alpha\, y), \quad \alpha^2 = \frac{1 \pm i \cdot \sqrt{4\mu\varepsilon^2\Omega^2 - 1}}{2\varepsilon^2}, \tag{25}$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2023-5-2-80-91

або:

$$\xi(y) \sim exp\{k_{Re} \cdot x\} \cdot \begin{Bmatrix} sin \\ cos \end{Bmatrix} (k_{Im} \cdot x), \tag{26}$$

де:

$$\begin{cases} k_{Re} = \dfrac{\sqrt[4]{\mu} \cdot \sqrt{\Omega}}{\sqrt{\varepsilon} \cdot L} \cdot cos\left\{\dfrac{1}{2} \cdot arctg\sqrt{4\mu\varepsilon^2\Omega^2 - 1}\right\}; \\ k_{Im} = \dfrac{\sqrt[4]{\mu} \cdot \sqrt{\Omega}}{\sqrt{\varepsilon} \cdot L} \cdot sin\left\{\dfrac{1}{2} \cdot arctg\sqrt{4\mu\varepsilon^2\Omega^2 - 1}\right\}. \end{cases} \tag{27}$$

Нижче, у табл. 1 подані чисельні оцінки Ω_{hf}, ω_{hf} для різних значень довжини виска (канату) L й заданих параметрів матеріалу (сталевий канат):

$\rho = 8 \cdot 10^3$ кг/м^3; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $r = 5 \cdot 10^{-2}$ м, $g = 9{,}81$ м/с^2; $m = 10^4$ кг.

Канат має круговий переріз $\left(S = \pi r^2\right)$. Для величини ω_{hf} маємо (незалежно від L) наступне значення:

$\omega_{hf} \cong 6{,}26$ с$^{-1}$.

Таблиця 1

Залежність Ω_{hf} від довжини виска (канату) L

L, м	Ω_{hf}
10	6,32
20	8,94
50	14,14
100	20,00
500	44,72
1000	63,25
10000*	200,00

*Примітка. $L = 10000$ м відповідає довжині виска (канату), на якому закріплений батискаф для дослідження Маріїнської западини.

Зазначимо, що $L > 50$ м характерні для шахтних підйомників (при заляганні вугілля на великих глибинах).

У Таблиці 2 наведені значення L_{res} для різних мас вантажу й наступних параметрів матеріалу виска (канату): $\rho = 8 \cdot 10^3$ кг/м^3; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $r = 3 \cdot 10^{-2}$ м, $g = 9{,}81$ м/с^2.

Таблиця 2

Залежність L_{res} від m вантажу

m, кг	L_{res}, м
100	117,300
200	29,325
500	4,692
800	1,833
1000	1,173

Результати наведені у табл. 2 дозволяють стверджувати, що небажані резонансні явища у канатах вантажопідйомних механізмів (коли співпадають частоти згинних та маятникових коливань) виникають при незначних навантаженнях (до 500 кг) на довжинах виска (від 4,7 м до 117,3 м). Цю обставину слід обов'язково враховувати при проектуванні подібних механізмів задля запобігання виникненню аварійних ситуацій.

5 ВИСНОВКИ

1. Обґрунтована фізико-механічна модель балістичного маятника, яка адекватно описує маятникові коливання вантажу на канатах кранової системи.
2. Встановлені режими пуску та гальмування кранової системи, які керуються мехатронними системами управління і забезпечують мінімальні амплітуди небажаних маятникових коливань вантажу й ситуації, за якої виникають резонанси маятникових коливань зі згинними коливаннями власне вантажу на канаті крану.
3. Встановлені основні критерії, які забезпечують справедливість застосування формул для власної частоти (згинно-ма ятникових) коливань вантажу на канаті, а також умови, за яких у канатах кранової системи можуть збуджуватись згинні коливання та хвилі із неспіввимірними частотами, а спектр коливань власне вантажу має у своєму складі високочастотні гармоніки. Маятник (вантаж на канаті) у таких режимах функціонування вантажопідйомного механізму крана здійснює нерегулярні коливання, де не існує можливостей управління ними ззовні. Наведені чисельні оцінки для вказаних ситуацій функціонування кранів.
4. Отримані у роботі результати можуть у подальшому бути використані для уточнення й вдосконалення інженерних методів розрахунку кранових систем, шахтних підйомників (з горизонтів глибокого залягання), вантажопідйомних механізмів, які працюють в умовах глибокого занурення (на морі, в океані) як на стадіях проектування вказаних вище систем, так і у режимах їх реальної експлуатації.

Література

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Механика. Т. 1. – М.: Наука, 1988. 216 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. §25.
3. Румянцев Б. П., Будиков Л.Я. О влиянии жёсткости металлоконструкций моста и грузовых канатов на величину динамических нагрузок. Локомотивостроение. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1971. Вып. 3. С. 30-37.
4. Будиков Л.Я. Многопараметрический анализ динамики грузоподъёмных кранов мостового типа. – Луганск: Изд-во ВУТУ, 1997. 210 с.
5. Кожевников С.Н. Динамика машин с упругими звеньями. – К.: Изд-во АН УССР, 1961. 160 с.
6. Ловейкин В. С. Расчёты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин. – К.: УМК ВО, 1990. 166 с.
7. Ловейкін В. С., Човнюк Ю. В., Діктерук М. Г., Пастушенко С. І. Моделювання динаміки механізмів вантажопідйомних машин. – К. – Миколаїв: РВВ МДАУ, 2004. 286 с.
8. Човнюк Ю. В., Приймаченко О. В., Чередніченко П.П., Остапущенко О.П., Кравченко І.М. Аналіз пружних хвилеутворень у канатах вантажопідйомних кранів. Сучасне будівництво і архітектура. Зб. наук. праць. Одеса: ОДАБА, 2023. Вип. 4. С. 23–32.
9. Човнюк Ю. В., Приймаченко О. В., Чередніченко П. П., Шудра Н. С. Моделювання та оптимізація процесів переміщення і розгону вантажного візка мостового крана у режимі гасіння некерованих коливань вантажу. Сучасне будівництво і архітектура. Зб. наук. праць. Одеса: ОДАБА, 2023. Вип. 4. С. 33–40.
10. Човнюк Ю. В., Кравчук В. Т,, Чередніченко П. П., Остапущенко О. П., Кравченко І. М. Аналіз коливань, виникаючих у мостовому крані при його наїзді на кінцеві упори. Містобудування і територіальне планування. – К.: КНУБА, 2023. Вип. №83. С. 366–373.

11. Човнюк, Ю., Діктерук, М., & Комоцька, С. Метод усереднення у нелінійних задачах оптимального управління маятниковими коливаннями вантажу на канаті мостового крана. Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. 2017. Вип. 90. С. 85–91.
12. Ловейкін В. С. Динаміка і оптимізація режимів руху мостових кранів. Монографія / В.С. Ловейкін, Ю. О. Ромасевич. – К.: ЦП „КОМПРІНТ", 2016. – 310 с.
13. Ловейкін В. С., Човнюк Ю. В., Кадикало І. О. АНАЛІЗ УМОВ ІСНУВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМІВ (АВТОКОЛИВАНЬ) ПРИ РОБОТІ МОСТОВИХ КРАНІВ Подъемно-транспортная техника. 2016. Вип. №3 (51). С. 4-15.
14. Човнюк Ю. Діктерук М., Комоцька С. Аналіз нелінійних маятникових коливань вантажу на канаті мостового крана при вібраціях точки підвісу. Подъемно-транспортная техника. 2016. Вип. №3 (51). С. 15–18.
15. Ловейкін В. С., Ромасевич Ю. О., Човнюк Ю. В., Кадикало І. О. Динаміка й оптимізація підйомно-транспортних машин. − К.: ЦП "Компрінт", 2019. − 292 с.

References

1. Landau L. D., Lyfshyts E. M. Mekhanyka. T. 1. – M.: Nauka, 1988. P. 216.
2. Landau L. D., Lyfshyts E. M. Teoryia upruhosty. – M.: Nauka, 1987. §25.
3. Rumiantsev B. P., Budykov L. Ia. O vlyianyy zhëstkosty metallokonstruktsyi mosta y hruzovыkh kanatov na velychynu dynamycheskykh nahruzok. Lokomotyvostroenye. – Kharkov: Yzd-vo KhHU, 1971. V. 3. S. 30–37.
4. Budykov L. Ia. Mnohoparametrycheskyi analyz dynamyky hruzopodъёmnыkh kranov mostovoho typa. – Luhansk: Yzd-vo VUTU, 1997. P. 210.
5. Kozhevnykov S. N. Dynamyka mashyn s upruhymy zveniamy. – K.: Yzd-vo AN USSR, 1961. P. 160.
6. Loveikyn V. S. Raschëty optymalnыkh rezhymov dvyzhenyia mekhanyzmov stroytelnыkh mashyn. – K.: UMK VO, 1990. 166 s.
7. Loveikin V. S., Chovniuk Yu. V., Dikteruk M. H., Pastushenko S. I. Modeliuvannia dynamiky mekhanizmiv vantazhopidiomnykh mashyn. – K. – Mykolaiv: RVV MDAU, 2004. 286 s.
8. Chovniuk Yu. V., Pryimachenko O. V., Cherednichenko P. P., Ostapushchenko O. P., Kravchenko I. M. Analiz pruzhnykh khvyleutvoren u kanatakh vantazhopidiomnykh kraniv. Suchasne budivnytstvo i arkhitektura. Zb. nauk. prats. Odesa: ODABA, 2023. Vyp. 4. S. 23–32.
9. Chovniuk Yu. V., Pryimachenko O. V., Cherednichenko P. P., Shudra N. S. Modeliuvannia ta optymizatsiia protsesiv peremishchennia i rozghonu vantazhnoho vizka mostovoho krana u rezhymi hasinnia nekerovanykh kolyvan vantazhu. Suchasne budivnytstvo i arkhitektura. Zb. nauk. prats. Odesa: ODABA, 2023. Vyp. 4. S. 33–40.
10. Chovniuk Yu. V., Kravchuk V. T,, Cherednichenko P. P., Ostapushchenko O. P., Kravchenko I. M. Analiz kolyvan, vynykaiuchykh u mostovomu krani pry yoho naizdi na kintsevi upory. Mistobuduvannia i terytorialne planuvannia. – K.: KNUBA, 2023. Vyp. №83. S. 366–373.
11. Chovniuk, Yu., Dikteruk, M., & Komotska, S. METOD USEREDNENNIa U NELINIINYKh ZADAChAKh OPTYMALNOHO UPRAVLINNIa MAIaTNYKOVYMY KOLYVANNIaMY VANTAZhU NA KANATI MOSTOVOHO KRANA. Hirnychi, budivelni, dorozhni ta melioratyvni mashyny. 2017. Vyp. 90. S. 85–91.
12. Loveikin V. S. Dynamika i optymizatsiia rezhymiv rukhu mostovykh kraniv. Monohrafiia / V.S. Loveikin, Yu. O. Romasevych. – K.: TsP „KOMPRINT", 2016. – 310 s.
13. Loveikin V. S., Chovniuk Yu. V., Kadykalo I. O. ANALIZ UMOV ISNUVANNIa STATSIONARNYKh REZhYMIV (AVTOKOLYVAN) PRY ROBOTI MOSTOVYKh KRANIV Podъemno-transportnaia tekhnyka. 2016. Vyp. №3 (51). S. 4–15.
14. Chovniuk Yu. Dikteruk M., Komotska S. Analiz neliniinykh maiatnykovykh kolyvan vantazhu na kanati mostovoho krana pry vibratsiiakh tochky pidvisu. Podъemno-transportnaia tekhnyka. 2016. Vyp. №3 (51). S. 15–18.
15. Loveikin V. S., Romasevych Yu. O., Chovniuk Yu. V., Kadykalo I. O. Dynamika y optymizatsiia pidiomno-transportnykh mashyn. − K.: TsP "Komprint", 2019. − 292 s.

Човнюк Юрій Васильович
Київський Національний університет будівництва та архітектури
к.т.н., доцент
Повітрофлотський пр., 31, м. Київ, Україна, 03037
ychovnyuk@ukr.net
ORCID: 0000-0002-0608-0203,
Чередніченко Петро Петрович
Київський Національний університет будівництва та архітектури
доцент
Повітрофлотський пр., 31, м. Київ, Україна, 03037
petro_che@ukr.net
ORCID: 0000-0001-7161-661X
Шудра Наталія Сергіївна
Київський Національний університет будівництва та архітектури
старший викладач
Повітрофлотський пр., 31, м. Київ, Україна, 03037
Shudra_n@ukr.net
ORCID: 0000-0001-5416-7680
Козупиця Сергій Іванович
Національний авіаційний університет
доцент
Любомира Гузара пр., 1, м. Київ, Україна, 03058
sirko58@ukr.net
ORCID: 0000-0003-3038-4431,

Для посилань:
Човнюк Ю. В., Чередніченко П. П., Шудра Н. С., Козупиця С. І. Використання моделі балістичного маятника в аналізі перехідних процесів кранових систем. Механіка та математичні методи, 2023.Т. V. №. 2. С. 80–91.

For references:
Yu. Chovniuk, P. Cherednichenko, N. Shudra, S. Kozupitsa. (2023). Use of the ballistic pendulum model in the analysis of crane system transients. Mechanics and Mathematical Methods. V(2). 80–91.