

ISSN 2618-0650 (Print)  
ISSN 2664-1364 (Online)

---

**Механіка**



**та математичні методи**

---

**Mechanics  
and Mathematical Methods**

**Науковий журнал  
The scientific journal**

**VI/2/2024**

УДК 531 : 51-7 (05)  
М55

# МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

Науковий журнал



Засновник і видавець:

**Одеська державна академія будівництва та архітектури**

**Том VI  
№2  
2024**

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: Серія КВ №23478–13318 Р від 13.07.2018 р.

Рішення Національної ради №1162 від 26.10.2023 р.,  
протокол №24; ідентифікатор медіа: R30-01810

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
Серія ДК №4515 від 01.04.2013 р.

**М55**      **Механіка та математичні методи** : науковий журнал. — Одеса : ОДАБА, 2024. —  
Том VI. — №2. — 184 с.

В науковому журналі публікуються статті і огляди за спеціальностями:

- 111 Математика;
- 112 Статистика;
- 113 Прикладна математика;
- 121 Інженерія програмного забезпечення;
- 122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології;
- 124 Системний аналіз;
- 131 Прикладна механіка;
- 192 Будівництво та цивільна інженерія.

---

**Рекомендовано до друку Вченою радою Одеської державної академії будівництва та архітектури, протокол №2 від 25.09.2024 р.**

---

**Адреса:**    редакція журналу «Механіка та математичні методи»  
Одеська державна академія будівництва та архітектури  
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029

**Телефони:** (048)7234937, (048)7323402, (048)7298563

**E-mail:** mmm@odaba.edu.ua

**Web:** mmm-journal.com.ua

---

УДК 531 : 51-7 (05)  
М55

ISSN 2618-0650 (Print)  
ISSN 2664-1364 (Online)

Одеська державна академія  
будівництва та архітектури, 2024

---

## Редакційна колегія:

**Головний редактор:** Ковров А. В., к.т.н., проф., ректор Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

**Заступники головного редактора:**

Крутій Ю. С., д.т.н., проф., професор кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Сур'янінов М. Г., д.т.н., проф., завідувач кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

**Відповідальний секретар:** Кіосак В. А., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

- Бербюк В. Є., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри механіки та морських наук, Технічний університет Чалмерса, Гетеборг, Швеція;
- Ватуля Г. Л., д.т.н., проф., професор кафедри будівельної механіки та гідравліки Українського державного університету залізничного транспорту, Харків, Україна;
- Горик О. В., д.т.н., проф., професор кафедри будівництва та професійної освіти Полтавської державної аграрної академії, Полтава, Україна;
- Куріазопоулос А., к.т.н., доц., професор кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Кода Е., д.т.н., проф., декан факультету будівництва та інженерії середовища Варшавського природничого університету, Варшава, Польща;
- Кононов Ю. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач відділу теорії керуючих систем інституту прикладної математики та механіки НАН України, Слав'янск, Україна;
- Круглов В. Є., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна;
- Кучер М. К., д.т.н., проф., завідувач відділу конструкційних матеріалів інституту проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна;
- Лазарева Д. В., к.т.н., доцент кафедри динаміки машин та механічної інженерії національного університету «Одеська політехніка», Одеса, Україна;
- Лесечко О. В., к.ф.-м.н., доц., завідувач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Лещенко Д. Д., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри теоретичної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Ляшенко Т. В., д.т.н., проф., професорка кафедри процесів та апаратів в технології будівельних матеріалів Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Максимович О. В., д.т.н., проф., професорка кафедри зварювального виробництва, діагностики та відновлення металоконструкцій Національного університету "Львівська політехніка", Львів, Україна;
- Мікуліч О. А., д.т.н., проф., завідувачка кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна;
- Отрош Ю. А., д.т.н., проф., начальник кафедри пожежної профілактики в населених пунктах Національного університету цивільного захисту України, Харків, Україна;
- Пастернак Я. М., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри комп'ютерних наук та кібербезпеки Волинського національного університету імені Лесі Українки, Луцьк, Україна;
- Пневматікос Н., к.т.н., доц., доцент кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Савченко О. Г., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, Херсон, Україна;
- Трач В. М., д.т.н., проф., завідувач кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування, Рівне, Україна.

**Технічний редактор:** Теорло Наталя Анатоліївна, аспірантка

**Лінгвістичний радник з англійської мови:** Мар'яно Яніна Георгіївна, к.ф.н, доц.,  
завідувачка кафедри іноземних мов

---

## The composition of the editorial board:

**Chief Editor:** A. Kovrov, Ph.D., Professor, Rector of Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;

**Deputy Chief Editor:**

Yu. Krutii, Doctor of Technical Science, Professor, Professor of the Department of Information Technologies and Applied Mathematics of Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;

Suryaninov M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Mechanics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;

**Assistant Editor:** V. Kiosak, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Higher Mathematics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;

- V. Berbyuk, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor in Mechanical Systems, Division of Dynamics, Department of Mechanics and Maritime Sciences Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden;
- G. Vatulia, Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Structural Mechanics and Hydraulics Department, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine;
- O. Goryk, Doctor of Technical Science, Professor, Professor of the Department of Construction and Professional Education, Poltava State Agrarian Academy, Poltava, Ukraine;
- A. Kyriazopoulos, Ph.D., Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- E. Koda, Doctor of Technical Science, Professor, Dean of Construction and Environmental Engineering Faculty, University of Life Sciences, Warsaw, Poland;
- Y. Kononov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Control-system Theory Division, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Slavyansk, Ukraine;
- V. Kruglov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Chair of Methods of Mathematical Physics Odessa I. I. Mechnikov National University, Odesa, Ukraine;
- M. Kucher, Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Materials Division, G. S. Pisarenko Institute for Problems of Strength, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine;
- D. Lazareva, Ph.D., Associate Professor of the Department of Machine Dynamics and Mechanical Engineering of the Odesa Polytechnic National University, Odesa, Ukraine;
- O. Lesechko, Ph.D., Associate Professor, Head of Higher Mathematics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;
- D. Leshchenko, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Mechanics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;
- T. Lyashenko, Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Processes and Devices in Construction Materials Technology, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;
- O. Maksymovych, Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Welding Engineering, Diagnostics and Rebuilding of Metal Structures, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine;
- O. Mikulich, Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Engineering Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine;
- Y. Otrosh, Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Civil Protection Service, National University of Civil Defence of Ukraine, Kharkiv, Ukraine;
- Y. Pasternak, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of the of Computer Science and Cyber Security, Lesya Ukrainka Volyn National University, Lutsk, Ukraine;
- N. Pnevmatikos, Ph.D., Associate Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- O. Savchenko, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Algebra, Geometry and Mathematical Analysis Department, Kherson State University, Kherson, Ukraine;
- V. Trach, Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Bridges and Tunnels, Strength of Materials and Structural Mechanics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine.

**Technical Editor:** Natalia Teorlo, Postgraduate Student

**Linguistic Adviser in English language:** Yanina Marianko, Ph.D., Associate Professor,  
Head of the Department of Foreign Languages

---

## ЗМІСТ

### **Кононов Ю. М.**

Про стійкість обертання вільної системи двох пружно зв'язаних гіроскопів  
Лагранжа, один з яких має ідеальну рідину ..... 6

### **D. Leshchenko, T. Kozachenko**

Perturbed motions of a nearly dynamically spherical rigid body with a movable mass  
subject to constant body-fixed torque..... 18

### **Делявський М. В., Мікуліч С. Б.**

Аналіз рівноваги тонких ортотропних плита на трипараметричній пружній  
основі..... 31

### **Yu. Krutii, M. Surianinov, A. Perperi, V. Vakulenko, N. Teorlo**

Analytical calculation of a beam based on an elastic Winkler foundation with range  
inhomogeneity..... 47

### **V. Kiosak, V. Isaiev, V. Fedorenko, A. Gridasov**

Modeling the entry of air contaminants into a room..... 58

### **Барабаш І. В., Давідчук В. Г., Стрельцов К. О.**

Механоактивація портландцементу та її вплив на властивості будівельних  
композицій різного призначення..... 77

### **Сорока М. М.**

Механізми пластичного руйнування арок..... 88

### **Бекірова М. М.**

Стійкість залізобетонних стійок при короткочасній та тривалій дії навантаження..... 100

### **Олійник Н. В., Якушева Ю. В.**

Особливості оцінювання технологічної пошкоженості бетону..... 109

### **О. Pysarenko**

Dispersion of Lamb waves in multilayer structures..... 124

### **Кирилов С. О., Сікора Я. Б., Рябчун Ю. В.**

Розробка адаптивних алгоритмів розв'язку інтелекту у проектуванні та управлінні  
інженерними системами..... 136

### **Кирилов С. О., Кирилова Л. О., Суворова С. Г.**

Нейромережеві математичні моделі людиномашинного спілкування та  
розпізнавання..... 147

### **Майборода Р. І., Рашкевич Н. В., Отрош Ю. А., Балдук П. Г.**

Моделювання вогнезахисту світлопрозорих фасадних конструкцій з влаштуванням  
зрошувачів..... 160

### **Патрашку Є. В., Колесник С. М.**

Про обчислення інсоляції приміщень..... 175

---

## CONTENT

<b>Yu. Kononov</b> On the stability of the rotation of the free system of two elastic Lagrange gyroscopes, one of which has an ideal liquid.....	6
<b>D. Leshchenko, T. Kozachenko</b> Perturbed motions of a nearly dynamically spherical rigid body with a movable mass subject to constant body-fixed torque .....	18
<b>M. Delyavskyy, S. Mikulich</b> Equilibrium analysis of thin orthotropic plates on a triparametric elastic base.....	31
<b>Yu. Krutii, M. Surianinov, A. Perperi, V. Vakulenko, N. Teorlo</b> Analytical calculation of a beam based on an elastic Winkler foundation with range inhomogeneity .....	47
<b>V. Kiosak, V. Isaiev, V. Fedorenko, A. Gridasov</b> Modeling the entry of air contaminants into a room .....	58
<b>I. Barabash, V. Davidchuk, K. Streltsov</b> Mechanoactivation of portland cement and its influence on the characteristics of construction compositions for various purposes .....	77
<b>M. Soroka</b> Mechanisms of plastic destruction of arches.....	88
<b>M. Bekirova</b> Stability of reinforced concrete posts under short-term and long-term loading.....	100
<b>N. Oliynuk, Yu. Yakusheva</b> Features of assessment of technological damage of concrete.....	109
<b>O. Pysarenko</b> Dispersion of Lamb waves in multilayer structures .....	124
<b>S. Kyrylov, Ya. Sikora, Yu. Riabchun</b> Development of adaptive algorithms of swarm intelligence in design and management of engineering systems.....	136
<b>S. Kyrylov, L. Kyrylova, S. Suvorova</b> Neuronet mathematical models of human-machine communication and recognition.....	147
<b>R. Maiboroda, N. Rashkevich, Yu. Otrosh, P. Balduk</b> Modeling of fire protection of transparent facade structures with sprinklers.....	160
<b>E. Patrashku, S. Kolesnyk</b> On calculating the insolation of indoor spaces.....	175

УДК 531.36, 531.38

## ПРО СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ ВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДВОХ ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ ГІРОСКОПІВ ЛАГРАНЖА, ОДИН З ЯКИХ МАЄ ІДЕАЛЬНУ РІДИНУ

Кононов Ю. М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України*

**Анотація:** На підставі відомих рівнянь руху системи зв'язаних гіростатів П. В. Харламова і функції стану С. Л. Соболева виведені рівняння обертання вільної системи двох пружно пов'язаних гіроскопів Лагранжа, один із яких має довільну осесиметричну порожнину повністю заповнену ідеальною нестисливою рідиною. Тверді тіла з'єднані пружним відновлювальним сферичним шарніром. Виведено трансцендентне характеристичне рівняння збуреного рівномірного обертання розглядової механічної системи. З урахування основного тону коливання рідини отримано характеристичне рівняння п'ятого порядку. На підставі критерію Льєнара – Шіпара, записаного в інорному вигляді, виписані у вигляді системи чотирьох нерівностей необхідні умови стійкості рівномірного обертання гіроскопів Лагранжа та рідини. Відносно коефіцієнта пружності ці нерівності мають відповідно 1, 3, 6 та 8 ступені. Проведені аналітичні дослідження старших коефіцієнтів умов стійкості. Показано, що коли центр мас першого твердого тіла з рідиною або другого не співпадають з загальною точкою цих тіл, то при досить великих значеннях коефіцієнта пружності завжди будуть виконані необхідні умови стійкості. При відсутності пружності у шарнірі характеристичне рівняння має двократний нуловий корінь і в цьому разі умови стійкості потребують додаткових досліджень. Отримані умови стійкості є точними для еліпсоїдальної порожнини і наближеними для інших осесиметричних порожнин. Для уточнення отриманих умов стійкості в цьому разі потрібно враховувати додаткові тони коливання ідеальної рідини.

**Ключові слова:** вільна системи двох гіроскопи Лагранжа, ідеальна рідина, пружний сферичний шарнір, рівномірне обертання, необхідні умови стійкості.

## ON THE STABILITY OF THE ROTATION OF THE FREE SYSTEM OF TWO ELASTIC LAGRANGE GYROSCOPES, ONE OF WHICH HAS AN IDEAL LIQUID

Yu. Kononov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine*

**Abstract:** On the basis of the known equations of motion of the system of coupled gyrostats by P. V. Kharlamov and the state function by S. L. Sobolev, the equations of rotation of a free system of two elastically coupled Lagrange gyroscopes were derived, one of which has an arbitrary axisymmetric cavity completely filled with an ideal incompressible fluid. The rigid bodies are connected by an elastic restoring spherical hinge. A transcendental characteristic equation of the perturbed uniform rotation of the mechanical system under consideration is derived. Taking into account the fundamental tone of the fluid oscillation, a characteristic equation of the fifth order is obtained. On the basis of the Liénard – Chipart criterion written in the inor form, the necessary conditions for the stability of the uniform rotation of the Lagrange gyroscopes and the fluid are written out as a system of four inequalities. With respect to the elasticity coefficient, these inequalities have degrees 1, 3, 6 and 8, respectively. Analytical studies of the leading coefficients of these stability conditions are carried out. It is shown that when the center of mass of the first solid body with liquid or the second does not coincide with the common point of these bodies, then at sufficiently large



values of the elasticity coefficient the necessary stability conditions will always be satisfied. In the absence of elasticity in the hinge, the characteristic equation has a double zero root and in this case the stability conditions require additional studies. The obtained stability conditions are exact for an ellipsoidal cavity and approximate for other axisymmetric cavities. To clarify the obtained glass conditions for these voids, it is necessary to take into account additional tones of oscillation of an ideal liquid.

**Keywords:** the free system of two gyroscopes of Lagrange, an ideal liquid, an elastic spherical hinge, uniform rotation, the necessary conditions for stability.



## 1 ВСТУП

Данна стаття узагальнює результати роботи [1] на випадок, коли один із гіроскопів Лагранжа має довільну осесиметричну порожнину повністю заповнену ідеальною нестисливою рідиною. На підставі відомих рівнянь П. В. Харламова і функції стану С. Л. Соболева отримано трансцендентне характеристичне рівняння збуреного рівномірного обертання розглядової механічної системи. З урахування основного тону коливання ідеальної рідини отримано характеристичне рівняння п'ятого порядку ій проведено його аналітичне дослідження. У статті [1] проведено дуже добрий огляд робіт по дослідженню динаміка та стійкість руху систем зв'язаних твердих тіл та систем твердих тіл з рідиною. Доповнимо цей огляд тільки останніми та необхідними статтями.

У статтях [2, 3] та багато інших дослідження обертання твердого тіла та ідеальної рідини проводилися одночасно з рішенням рівнянь у частинних похідних, що дуже ускладнювало ці дослідження. Тому досить повно було проаналізовано лише випадок еліпсоїдальної порожнини. У роботах [4-6] аналогічні дослідження були проведені на підставі модального аналізу. Було отримано злічену систему ЗДР, коефіцієнти яких визначаються рішеннями крайових задач гідродинаміки, які не залежать від часу та параметрів обертального руху твердого тіла. Таке відділення тимчасової координати від просторових координат дозволяє розглядати довільний збурений рух твердого тіла, а рішення крайових завдань знаходити для порожнин довільної форми. Отримані крайові задачі мають щільний спектр власних значень, розташованих на позитивній та негативній частинах дійсної осі. Наведено аналітичне рішення цих крайових завдань для еліпсоїдальної, софокусно-еліпсоїдальної, циліндричної та конічної порожнин. Побудовані області нестійкості рівномірного обертання вільного твердого тіла з рідиною для еліпсоїдальної та циліндричної порожнин. Зроблено висновок про стійкість обертання твердого тіла щодо осі з найбільшим моментом інерції та слабкої нестійкості, крім головних областей сильної нестійкості при обертанні щодо осі найменшого моменту інерції. Показано, що у разі еліпсоїдальної порожнини та порожнини, утвореної софокусними еліпсоїдами обертання, з нескінченного спектру власних частот збуджується єдина гармоніка, а у разі циліндричних та конічних порожнин цих гармонік нескінченно багато. Слід зазначити добрий кількісний збіг теоретичних розрахунків [2-5] з експериментальними даними [6, 7].

На підставі відомих рівнянь руху системи гіростатів П. В. Харламова [8] і роботи [9] у статтях [10, 11] були узагальнені результати робіт [2-6] на системи зв'язаних твердих тіл з ідеальною рідиною. В монографії [12] з єдиних позицій викладено підхід до задач про рух систем твердих тіл. Розглянуто моделі, що допускають різноманітні з'єднання тіл та їх загальні просторові рухи. Стаття [13] присвячена дослідженню стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором вільної системи двох твердих тіл, з'єднаних пружним відновлювальним сферичним шарніром. У роботі [14] показана можливість стабілізації нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною другим гіроскопом. В [15] представлений уніфікований і добре розроблений підхід до динаміки кутових рухів твердих тіл, що зазнають моментів збурення різної фізичної природи. В статті [16] розглянуто рух навколо центру мас сфероїда з порожниною, заповненою в'язкою рідиною. Асимптотичний підхід дозволяє отримати деякі якісні результати та описати нелінійну еволюцію кутового руху за допомогою спрощених усереднених рівнянь.

У даній статті продовжуються дослідження стійкості руху вільної системи двох твердих, які були розпочаті в роботах [1, 9-14]. Слід зазначити, що в роботах [9-12, 14] був застасован пружний шарнір Гука, а в статтях [1, 13] – пружний сферичний шарнір. У цій статті враховуються такі властивості пружного сферичного шарніра, які

забезпечують рівність проекції кутових швидкостей гіроскопів на їхні осі симетрії. Це дозволяє дослідити вплив пружності шарніра на стійкість рівномірного обертання всієї системи.

## 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

Розглянемо вільний рух двох пружно зв'язаних осесиметричних твердих тіл  $S_1$  і  $S_2$ . Твердо тіло  $S_1$  має осесиметричну порожнину  $\tau$ , яка повністю заповнена нестисливою ідеальною рідиною. Тілами  $S_1$  і  $S_2$  мають спільну точку  $O_2$ . Розглядувана механічна система є системою гіростатів. Запишемо теорему про зміну моменту кількості руху і кількості руху для тіла  $S_i$  ( $i=1,2$ ). Для цього звільнимось від в'язів в точках  $O_2$ . Позначимо через  $-\mathbf{R}_2$  і  $-\mathbf{L}_2$  головний вектор і головний момент сил реакції в'язі, що діють на тіло  $S_1$  з боку тіла  $S_2$ . Рівняння руху центру мас та рівняння зміни моменту кількості руху тіла  $S_i$  відносно центру мас тіла, точки  $C_i$  мають вигляд [8-10, 13, 14]:

$$m_i \dot{\mathbf{V}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i+1}; \quad (1)$$

$$(\mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}_i + (2-i)\boldsymbol{\lambda})^{\square} = \mathbf{M}_i + \mathbf{L}_i - \mathbf{L}_{i+1} - \mathbf{c}_i \times (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i+1}) \quad (i=1,2). \quad (2)$$

Тут  $\mathbf{J}_i$  – центральний тензор інерції твердого тіла  $S_1$  з рідиною і відповідно твердого тіла  $S_2$ ;  $\boldsymbol{\lambda} = \rho \int_{\tau} \mathbf{r} \times \mathbf{u} d\tau$  – гіростатичний момент рідини;  $\mathbf{u}$  – вектор відносної швидкості рідини в порожнині  $\tau_i$ ;  $\boldsymbol{\omega}_i$  – кутова швидкість твердого тіла  $S_i$ ;  $m = m_1 + m_2$  – маса всієї системи,  $\mathbf{c}_1 = \overrightarrow{C_1 O_2}$ ,  $\mathbf{c}_2 = \overrightarrow{O_2 C_2}$ ,  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_3 = 0$ ,  $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_3 = 0$ ; точкою « $\square$ » позначена абсолютна похідна.

Система рівнянь (2), з урахуванням (1), буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_1 \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\lambda})^{\square} &= \mathbf{M}_1 - \mathbf{L}_2 - \mathbf{c}_1 \times (m_2 \mathbf{F}_1 - m_1 \mathbf{F}_2 + m_2 \dot{\mathbf{f}}_2) / m; \\ (\mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega}_2)^{\square} &= \mathbf{M}_2 + \mathbf{L}_2 - \mathbf{c}_2 \times (m_2 \mathbf{F}_1 - m_1 \mathbf{F}_2 + m_2 \dot{\mathbf{f}}_2) / m, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\mathbf{f}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times m_1 \mathbf{c}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times m_1 \mathbf{c}_2$ .

Зв'яжемо з кожним із тіл  $S_i$  незмінно базис  $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$  з вершиною в точці  $C_i$ , осі якого направимо по головних осях тензора інерції  $\mathbf{J}_i$  і введемо нерухомий базис  $\mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^0$ , вектор  $\mathbf{e}_3^0$  якого протилежний вектору прискорення вільного падіння. Будемо вважати, що треті головні осі інерції проходять для тіл  $S_1$  і  $S_2$  через точку  $O_2$ , тобто будемо вважати, що центр мас тіл  $S_i$  лежить на цих осях. Нехай тверді тіла  $S_1$  і  $S_2$  пов'язані в точці  $O_2$  пружним відновлювальним сферичним шарніром ( $\mathbf{L}_2 = -k \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 / (|\mathbf{c}_1| |\mathbf{c}_2|)$ ,  $k \geq 0$ ), який буде частково моделювати пружний шарнір Гука ( $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ ), де  $\omega_{0i} = \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{c}_i$ .

Векторні рівняння (3) в проекціях на осі рухомого базису  $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$  приймуть вигляд:

$$\begin{aligned}
 A'_1 \dot{p}_1 + (C_1 - A'_1) r_1 q_1 + \mu \left[ (\dot{p}_2 - r_2 q_2) \alpha_{22}^{12} - (\dot{q}_2 + r_2 p_2) \alpha_{21}^{12} + (p_2^2 + q_2^2) \alpha_{23}^{12} \right] + Q_1 &= -k \alpha_{32}^{21}; \\
 A'_1 \dot{q}_1 - (C_1 - A'_1) r_1 p_1 - \mu \left[ (\dot{p}_2 - r_2 q_2) \alpha_{12}^{12} - (\dot{q}_2 + r_2 p_2) \alpha_{11}^{12} + (p_2^2 + q_2^2) \alpha_{13}^{12} \right] + Q_2 &= -k \alpha_{31}^{21}; \\
 A'_2 \dot{p}_2 + (C_2 - A'_2) r_2 q_2 + \mu \left[ (\dot{p}_1 - r_1 q_1) \alpha_{22}^{21} - (\dot{q}_1 + r_1 p_1) \alpha_{21}^{21} + (p_1^2 + q_1^2) \alpha_{23}^{21} \right] &= -k \alpha_{32}^{21}; \quad (4) \\
 A'_2 \dot{q}_2 - (C_2 - A'_2) r_2 p_2 - \mu \left[ (\dot{p}_1 - r_1 q_1) \alpha_{12}^{21} - (\dot{q}_1 + r_1 p_1) \alpha_{11}^{21} + (p_1^2 + q_1^2) \alpha_{13}^{21} \right] &= -k \alpha_{31}^{21}; \\
 C_1 \dot{r}_1 + Q_3 &= 0; \quad C_2 \dot{r}_2 = 0. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Тут  $p_i, q_i, r_i$  – проєкції вектора кутової швидкості  $\omega_i$  на вісі  $e_1^i e_2^i e_3^i$ ;  $A'_i = A_i + m_1 m_2 c_i^2 / m$ ;  $\mu = m_1 m_2 c_1 c_2 / m$ ;  $Q_j = (\omega_1 \times \lambda + \dot{\lambda}) \cdot e_j^1$ ;  $\alpha_{\mu\kappa}^{ij} = e_\mu^i \cdot e_\kappa^j$  – напрямні косинуси. Коефіцієнти  $\alpha_{\mu\kappa}^{ij}$  можна виразити через  $\alpha_{\mu\sigma}^{i0}$  і  $\alpha_{\mu\sigma}^{j0}$  наступним чином

$$\alpha_{\mu\kappa}^{ij} = \sum_{\sigma=1}^3 \alpha_{\mu\sigma}^{i0} \alpha_{\kappa\sigma}^{j0} \quad [9].$$

До системи рівнянь (4) потрібно додати рівняння для напрямних косинусів [9]:

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha}_{11}^{i0} &= -q_i \alpha_{31}^{i0} + r_i \alpha_{21}^{i0}; \quad \dot{\alpha}_{21}^{i0} = p_i \alpha_{31}^{i0} - r_i \alpha_{11}^{i0}; \\
 \dot{\alpha}_{12}^{i0} &= -q_i \alpha_{32}^{i0} + r_i \alpha_{22}^{i0}; \quad \dot{\alpha}_{22}^{i0} = p_i \alpha_{32}^{i0} - r_i \alpha_{12}^{i0}; \\
 \dot{\alpha}_{13}^{i0} &= -q_i \alpha_{33}^{i0} + r_i \alpha_{23}^{i0}; \quad \dot{\alpha}_{23}^{i0} = p_i \alpha_{33}^{i0} - r_i \alpha_{13}^{i0}; \quad (6) \\
 \dot{\alpha}_{31}^{i0} &= -p_i \alpha_{21}^{i0} + q_i \alpha_{11}^{i0}; \quad \dot{\alpha}_{32}^{i0} = -p_i \alpha_{22}^{i0} + q_i \alpha_{12}^{i0}; \\
 \dot{\alpha}_{33}^{i0} &= -p_i \alpha_{23}^{i0} + q_i \alpha_{13}^{i0}.
 \end{aligned}$$

Система (4) – (6) допускає розв'язки:

$$\begin{aligned}
 p_i = q_i = 0; \quad r_i = \omega_0; \quad \mathbf{u} = 0 \quad (Q_j = 0), \\
 \alpha_{11}^{i0} = \cos \omega_0 t; \quad \alpha_{12}^{i0} = \sin \omega_0 t; \quad \alpha_{13}^{i0} = 0; \\
 \alpha_{21}^{i0} = -\sin \omega_0 t; \quad \alpha_{22}^{i0} = \cos \omega_0 t; \quad \alpha_{23}^{i0} = 0; \quad \alpha_{31}^{i0} = 0; \quad \alpha_{32}^{i0} = 0; \quad \alpha_{33}^{i0} = 1,
 \end{aligned}$$

які відповідають рівномірному обертанню твердих тіл і рідини як одного цілого з кутовою швидкістю  $\omega_0$  навколо вертикалі.

### 3 ЦІЛІ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

У даній статті будуть продовжені дослідження стійкості рівномірних обертань вільної системи двох твердих, які були розпочаті в роботах [1, 9-14]. Слід зазначити, що в роботах [9-12, 14] був застасован пружний шарнір Гука, а в статтях [1, 13] – пружний сферичний шарнір. У цій статті враховуються такі властивості пружного сферичного шарніра, які забезпечують рівність проєкції кутових швидкостей гіроскопів на їхні осі симетрії. Це дозволяє дослідити вплив пружності шарніра на стійкість рівномірного обертання всієї системи.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Отримано трансцендентне характеристичне рівняння збуреного рівномірного обертання системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа, один з яких має довільну осесиметричну порожнину, повністю заповнену ідеальною нестисливою рідиною. З урахуванням основного тону коливання рідини проведені аналітичні дослідження умов стійкості рівномірного обертання цієї системи. Показано, що коли центр мас першого твердого тіла з рідиною або другого не збігається з спільною точкою твердих тіл, то при досить великих значеннях коефіцієнта пружності завжди будуть виконуватися необхідні умови стійкості. Отримані умови стійкості є точними для еліпсоїдної порожнини та наближеними для інших осесиметричних порожнин.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ. УМОВИ СТІЙКОСТІ РІВНОМІРНИХ ОБЕРТАНЬ ДВОХ ГІРОСКОПІВ ЛАГРАНЖА

Нехай в збуреному русі  $\omega_i = \omega_0 + \Omega_i$ . де  $|\Omega_i|$  є величина першого порядку малості порівняно з  $|\omega_0|$ . В цьому випадку рівняння (5) відокремлюється від інших рівнянь.

Запишемо рівняння (4) – (6) для збуреного руху, зберігаючи для змінних їхні попередні позначення:

$$\begin{aligned} A_1' \dot{p}_1 + (C_1 - B_1') \omega_0 q_1 + \mu(\dot{p}_2 - \omega_0 q_2) + Q_1 &= -k \alpha_{23}^{10}; \\ A_1' \dot{q}_1 - (C_1 - A_1') \omega_0 p_1 - \mu(\dot{p}_2 - \omega_0 q_2) + Q_2 &= -k \alpha_{13}^{10}; \\ A_2' \dot{p}_2 + (C_2 - A_2') \omega_0 q_2 + \mu(\dot{p}_1 - \omega_0 q_1) &= -k \alpha_{23}^{20}; \\ A_2' \dot{q}_2 - (C_2 - A_2') \omega_0 p_2 - \mu(\dot{p}_1 - \omega_0 q_1) &= -k \alpha_{13}^{20}; \\ \dot{\alpha}_{13}^{i0} = \omega_0 \alpha_{23}^{i0} - q_i; \quad \dot{\alpha}_{23}^{i0} = -\omega_0 \alpha_{13}^{i0} + p_i \quad (i=1,2). \end{aligned} \quad (7)$$

Згідно робіт [4, 5], у разі осесиметричної порожнини  $\tau$  гіростатичний момент ідеальної рідини  $\lambda$  має вигляд  $\lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) \mathbf{a}_n$ ,  $\mathbf{a}_n = (a_n, -a_n)$ , де  $Q_2 = iQ_1$ ,  $Q_3 = 0$ ,  $Q_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\dot{S}_n - i\omega_0 S_n)$ ,  $\lambda_n = 2\omega_0 / \kappa_n$ , власним числам  $\kappa_n$ , що заповнюють всюди щільно область  $|\kappa_n| \geq 1$  дійсної осі, визначаються лише геометрією порожнини  $\tau$ .

Коефіцієнти розкладання  $S_n(t)$  знаходяться при розв'язуванні наступної зліченної системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь [4, 5]

$$N_n^2 (\dot{S}_n - i\lambda_n S_n) + \mathbf{a}_n \cdot \dot{\mathbf{Q}}_1 = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots, \infty). \quad (8)$$

Перейдемо до нових змінних  $\Omega_i = q_i' - ip_i'$ ,  $\gamma_i = \alpha_{13}^i + i\alpha_{23}^i$ ,  $S_n' = e^{-i\varphi} S_n$ ,  $p_i' = p_i \sin \varphi + q_i \cos \varphi$ ,  $q_i' = p_i \cos \varphi - q_i \sin \varphi$ ,  $\alpha_{13}^i = \alpha_{13}^{0i} \sin \varphi + \alpha_{23}^{0i} \cos \varphi$ ,  $\alpha_{23}^i = \alpha_{13}^{0i} \cos \varphi - \alpha_{23}^{0i} \sin \varphi$  ( $\varphi = \omega_0 t$ ), тоді система рівнянь (7)–(8) у нових змінних може бути записана наступним чином:

$$A_1' \ddot{\gamma}_1 + (i\tilde{C}_1 + k) \dot{\gamma}_1 + \mu \dot{\gamma}_2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \dot{S}_n' = 0;$$

$$A_2 \ddot{\gamma}_2 + (i\tilde{C}_2 + k)\dot{\gamma}_2 + \mu \dot{\gamma}_1 = 0; \quad (9)$$

$$\dot{S}'_n + i(\omega_0 - \lambda_n)S'_n + (\dot{\gamma}_1 + i\omega_0 \dot{\gamma}_1) a_n / N_n^2 = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

де  $\dot{\gamma}_i = \Omega_i$ ,  $\tilde{C}_i = C_i \omega_0$ .

Представивши шукані функції у вигляді  $a e^{\lambda t}$ , запишемо характеристичне рівняння збуреного руху (9)

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu \lambda^2 \\ \mu \lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Тут

$$F_1 = A_1' \lambda^2 + i\tilde{C}_1 \lambda + k - \lambda^2 (i\lambda - \omega_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{i\lambda - \tilde{\lambda}_n}, \quad E_n = \frac{2a_n^2}{N_n^2}; \quad \tilde{\lambda}_n = (1 - \lambda_n) \omega_0;$$

$$F_2 = A_2' \lambda^2 + i\tilde{C}_2 \lambda + k.$$

Із рівняння (10) слід, що при  $\mu = 0$  воно розпадається на два рівняння  $F_1 = 0$  і  $F_2 = 0$ . Перше рівняння описує коливання одного гіроскопа Лагранжа з рідиною на який діє відновлювальний момент, а друге – гіроскопа Лагранжа без рідини на який теж діє відновлювальний момент. Це може бути, коли центр мас першого тіла або другого співпадає з загальною точкою  $O_2$ :  $c_1 = 0$  або  $c_2 = 0$ .

У більшості практично важливих випадках основний ефект впливу рідини на рух твердого тіла можна врахувати, розглядаючи тільки основний тон коливання рідини  $\lambda_1$ . У роботі [5] було досліджено збіжність рядів у характеристичному рівнянні (10) для циліндричної порожнини і оцінено вплив більш високих тонів на стійкість обертання твердого тіла. Показано, що за певних умов додавання нових тонів коливань рідини призводить до незначної кількісної зміни області нестійкості. Як було зазначено у вступі, що у випадку еліпсоїдальної порожнини та порожнини, утвореної співфокусними еліпсоїдами, з нескінченного спектру власних частот  $\lambda_n$  на рух твердого тіла впливає лише основна частота  $\lambda_1$  ( $E_n = 0$  при  $n \neq 1$ ) [2-5].

При  $n = 1$  рівняння (10) отримає вигляд

$$a_5 \lambda^5 + ib_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + ib_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + ib_0 = 0. \quad (11)$$

Тут

$$a_5 = A_1^* A_2' - \mu^2 > 0; \quad b_4 = C_1^* A_2' + \tilde{C}_2 A_1^* + a_5 \tilde{\lambda}_1; \quad a_3 = (A_1^* + A_2') k - C_1^* \tilde{C}_2 - (\tilde{C}_1 A_2' + \tilde{C}_2 A_1') \tilde{\lambda}_1;$$

$$b_2 = (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) k + [(A_1' + A_2') k - \tilde{C}_1 \tilde{C}_2] \tilde{\lambda}_1; \quad a_1 = [k - (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) \tilde{\lambda}_1] k; \quad b_0 = \tilde{\lambda}_1 k^2;$$

$$A_1^* = A_1' - E_1 > 0; \quad C_1^* = \tilde{C}_1 - \tilde{E}_1; \quad \tilde{E}_1 = E_1 \omega_0.$$

Стійкість консервативних систем визначається тим, що корені рівняння (11) повинні знаходитися на уявній осі. Для цього в рівнянні (11) покладемо  $\lambda = i\sigma$  і це рівняння матиме вигляд

$$a_5 \sigma^5 + b_4 \sigma^4 - a_3 \sigma^3 - b_2 \sigma^2 + a_1 \sigma + b_0 = 0. \quad (12)$$

Для того, щоб всі нулі рівняння (12) були різні і лежали на дійсній осі, згідно критерію Льєнара-Шіпара, записаного в іннормному вигляді [17], необхідно і достатньо,

щоб матриця дев'ятого порядку, яка складена з коефіцієнтів цього рівняння, була іннерно-позитивною, тобто щоб були позитивно визначені матриці  $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5, \Delta_7$  і  $\Delta_9$ :

$$I_1 = |\Delta_1| = 5a_5 > 0;$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_5 & b_4 & -a_3 \\ 0 & 5a_5 & 4b_4 \\ 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 \end{vmatrix} > 0; \quad (13)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 \\ 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 \\ 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 \\ 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 \\ 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 \end{vmatrix} > 0; \quad (14)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 \\ 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 \\ 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 & 0 \\ 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0; \quad (15)$$

$$I_9 = |\Delta_9| = \begin{vmatrix} a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_5 \tilde{I}_9 k^2 > 0. \quad (16)$$

Так як  $a_5 > 0$ , то  $I_1 > 0$  і необхідні умови стійкості рівномірних обертань двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа, один із яких має рідину, визначається чотирма нерівностями (13)-(16).

При відсутності пружності у шарнірі ( $k = 0$ ) маємо  $b_0 = a_1 = 0$  і рівняння (11) має двократний нуловий корінь. В цьому разі умови стійкості потребують додаткових досліджень.

Запишемо умови стійкості (13)-(16) відносно коефіцієнта пружності сферичного шарніру  $k$ :

$$I_{31}k + I_{30} > 0;$$

$$I_{53}k^3 + I_{52}k^2 + I_{51}k + I_{50} > 0;$$

$$I_{76}k^6 + I_{75}k^5 + \dots + I_{71}k + I_{70} > 0; \quad (17)$$

$$\left( \tilde{I}_{98}k^8 + \tilde{I}_{97}k^7 + \dots + \tilde{I}_{91}k + \tilde{I}_{90} \right) k^2 > 0,$$

де

$$I_{31} = 5(A_1^* + A_2')a_5 > 0; I_{53} = 4a_5(f_5 + 10\mu^2);$$

$$I_{76} = 4a_5(10\mu^2 + f_5)(f_7 + 4\mu^2); \tilde{I}_{98} = 16a_5(f_7 + 4\mu^2)^2; \quad (18)$$

$$f_5 = 3A_1'^2 - 5A_1^*A_2' + 3A_2'^2 > 0; f_7 = (A_1^* - A_2')^2 > 0.$$

Інші коефіцієнти не наведено через їхню громіздкість.

Із нерівностей (18) випливає, що при  $\mu \neq 0$  старші коефіцієнти  $I_{31}, I_{53}, I_{76}$  і  $\tilde{I}_{98}$  нерівностей (17) додатні і при збільшенні коефіцієнта пружності  $k$  ці нерівності завжди будуть виконані.

Таким чином, необхідні умови стійкості рівномірного обертання двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа, один з яких має ідеальну рідину, завжди будуть виконані при досить великих значеннях коефіцієнта пружності шарніра за умови, що центр мас першого гіроскопа з рідиною або другого не збігається з їх загальною точкою.

## 6 ВИСНОВКИ

Виведені рівняння обертання вільної системи двох пружно пов'язаних гіроскопів Лагранжа, один із яких має довільну осесиметричну порожнину повністю заповнену ідеальною нестисливою рідиною. Тверди тіла з'єднані пружним відновлювальним сферичним шарніром. Виведено трансцендентне характеристичне рівняння збуреного рівномірного обертання розглядової механічної системи. Показано, що коли центр мас першого твердого тіла з рідиною або другого співпадають із загальною точкою цих твердих тіл, то характеристичне рівняння розпадається на два рівняння. Перше рівняння описує коливання одного гіроскопа Лагранжа з рідиною на який діє відновлювальний момент, а друге – одного гіроскопа Лагранжа без рідини на який теж діє відновлювальний момент. З урахування основного тону коливання рідини отримано характеристичне рівняння п'ятого порядку. На підставі критерію Льснара – Шіпара, записаного в іншому вигляді, виписані у вигляді системи чотирьох нерівностей необхідні умови стійкості рівномірного обертання гіроскопів Лагранжа та рідини. Відносно коефіцієнта пружності ці нерівності мають відповідно 1, 3, 6 та 8 ступені. Проведені аналітичні дослідження старших коефіцієнтів умов стійкості. Показано, що коли центр мас першого твердого тіла з рідиною або другого не збігаються із загальною точкою цих тіл, то при досить великих значеннях коефіцієнта пружності завжди будуть виконані необхідні умови стійкості. При відсутності пружності у шарнірі характеристичне рівняння має двократний нуловий корінь і в цьому разі умови стійкості потребують додаткових досліджень. Отримані умови стійкості є точними для еліпсоїдальної порожнини і наближеними для інших осесиметричних порожнин. Для уточнення отриманих умов стійкості в цьому разі потрібно враховувати додаткові тони коливання ідеальної рідини.

## 7 ПОДЯКИ

Дослідження виконані в рамках програмно-цільової та конкурсної тематики НАН України № 2-19-П (науково дослідна робота за темою ВБ-15-18-21/479) і були частково підтримана грантом від Фонду Сімонса (Нагорода 00010584, Президентські дискреційні гранти на підтримку України, одержувач Кононов Ю.М.).

## 8 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автор статті не має відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

## Література

1. Кононов Ю. М. Про стійкість обертання вільної системи двох пружно зв'язаних твердих тіл / Ю.Н. Кононов // Механіка та математичні методи. – 2023. – V(2) – С. 6– 15.
2. Соболев С. Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью / С. Л. Соболев // Журн. прикл. механики и техн. физики.–1960.–№ 3.– С. 20 –55.
3. Ишлинский А. Ю. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью / А. Ю. Ишлинский, М. Е. Темченко // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1960. – № 3. – С. 65–75.
4. Рвалов Р. В. О вращательном движении тела с полостью, содержащей жидкость / Р. В. Рвалов, В. М. Роговой // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 3. – С. 15–20.
5. Докучаев Л. В. Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, содержащей жидкость / Л. В. Докучаев, Р. В. Рвалов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.. – 1973. – № 2. – С. 6–14.
6. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами / Л. В. Докучаев. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
7. Десятков В. Т. Экспериментальное исследование устойчивости вращательного движения тел с жидким заполнением. Динамика космических аппаратов и исследование космического пространства / В. Т. Десятков. – М.: Машиностроение, 1986. – С. 254–261.
8. Харламов П. В. Об уравнениях движения системы твердых тел / П. В. Харламов // Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр.– 1972. – 4. – С. 52-73.
9. Савченко А. Я. Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел / А. Я. Савченко, И. А. Болграбская, Г. А. Кононыхин. К.: Наук. думка. 1991. – 166 с.
10. Кононов Ю. Н. О движения системы двух твердых тел с полостями, содержащими жидкость / Ю. Н. Кононов // Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр. – 1997. – Вып. 29. – С. 76– 85.
11. Кононов Ю. Н. Об устойчивости движения системы  $n$  связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость / Ю. Н. Кононов // Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр. – 2006. – Вып. 36. – С. 75– 82.
12. Болграбская И. А. Динамика систем связанных твёрдых тел / И. А. Болграбская, М. Е. Лесина, Д. А. Чебанов. – Серия “Задачи и методы: математика, механика, кибернетика”. – ИПММ НАН Украины, Том 9. К.: Наукова Думка.– 2012.– 395 с.
13. Кононов Ю. М. Про стійкість обертання у середовищі з опором вільної системи двох пружно зв'язаних твердих тіл / Ю. Н. Кононов // Праці ІПММ НАН України. – 2023.– 37, №2.– С. 75 –84.
14. Kononov Yu. M. Stabilization of spinning Lagrange gyroscope filled with ideal fluid in a resisting medium / Yu. M. Kononov, Ya. I. Sviatenko // Int. Appl. Mech. – 2023. – 59, № 2. – P. 207 – 217.
15. Chernousko F. L. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass / F. L. Chernousko, L. D. Akulenko, D. D. Leshchenko. Springer.– 2017.– 260 p.



16. Leshchenko D. Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque / D. Leshchenko, S. Ershkov, T. Kozachenko // J. Appl. Comput. Mech. – 2022. – 8, N 3 – P. 1023 – 1031.
17. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем / Э. Джури – М.: Наука.– 1979.– 304 с.
18. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем / Э. Джури – М.: Наука.– 1979.– 304 с.

## References

1. Kononov, Yu. M. (2023). Pro stikist obertannia vilnoi systemy dvokh pruzhno zviazanykh tverdykh til. Mekhanika ta matematichi metody. V(2), 6– 15 (in Ukraine).
2. Sobolev, S. L. (1960). O dvizhenii simmetrichnogo volchka s polost'yu, napolnennoy zhidko st'yu. Zhurn. prikl. mekhaniki i tekhn. fiziki. № 3, 20 –55 (In Russia).
3. Ishlinskiy, A. Yu, Temchenko, M. Ye. (1960). O malykh kolebaniyakh vertikal'noy osi volchka, imeyushchego po-lost', tselikom napolnennuyu ideal'noy neszhimayemoy zhidkost'yu. Zhurn. prikl. mekhaniki i tekhn. fiziki. № 3, 65–75 (In Russia).
4. Rvalov, R. V., Rohovoi, V.M. (1972). O vrashchatel'nom dvizhenii tela s polost'yu, sodержashchey zhidkost'. Izv. AN SSSR. Mekhanyka tverdoho tela. № 3, 15–20 (In Russia).
5. Dokuchaev, L. V., Rvalov, R.V.(1973). Ob ustoychivosti stacionarnogo vrashcheniya tverdogo tela s polost'yu, zhidkost'. Izv. AN SSSR. Mekhanyka tverdoho tela. № 2, 6–14 (In Russia).
6. Dokuchaev, L. V. (1987). Nelineynaya dinamika letatel'nykh apparatov s deformiruyemyimi elementami M.: Mashynostroenye, 232 (In Russia).
7. Desiatov, V. T. (1986). Eksperimental'noye issledovaniye ustoychivosti vrashchatel'nogo dvizheniya tel s zhidkim zapolneniyem. Dinamika kosmicheskikh apparatov i issledovaniye kosmiche-skogo prostranstva – M.: Mashynostroenye, 254–261 (In Russia).
8. Kharlamov, P. V. (1972). Ob uravneniyakh dvizheniya sistemy tverdykh tel . Mekhanyka tverdoho tela. Mezhved. sb. nauch. tr. 4, 52-73 (in Ukraine).
9. Savchenko, A. Ya., Bolgrabskaya, I.A., Kononyhin, G.A. (1991). Ustojchivost' dvizheniya sistem svyazannykh tvorydyh tel. K.: Nauk. Dumka, 166 (in Ukraine).
10. Kononov, Yu. M. (1997). O dvizheniya sistemy dvukh tverdykh tel s polostyami, sodержashchimi zhidkost'. Mehanika tverdogo tela. Mezhved. sb. nauch. tr. 29, 76– 85 (in Ukraine).
11. Kononov, Yu. M. (2006). Ob ustoychivosti dvizheniya sistemy svyazannykh tverdykh tel s polostyami, sodержashchimi zhidkost'. Mehanika tverdogo tela. Mezhved. sb. nauch. tr. 36, 75– 82 (in Ukraine).
12. Bolgrabskaya, I. A., Lesina, M.E., Chebanov, D.A. (2012). Dinamika sistem svyazannykh tvordykh tel. Seriya “Zadachi i metody: matematika, mekhanika, kibernetika”. IPMM NAN Ukrainy, Tom 9. K.: Naukova Dumka, 395 (in Ukraine).
13. Kononov, Yu. M. (2023). Pro stikist obertannia u seredovyshchi z oporom vilnoi systemy dvokh pruzhno zviazanykh tverdykh til. Pratsi IPMM NAN Ukrainy 37, №2, 75 –84 (in Ukraine).
14. Kononov, Yu. M., Sviatenko, Ya. I. (2023). Stabilization of spinning Lagrange gyroscope filled with ideal fluid in a resisting medium. Int. Appl. Mech.59, № 2, 207 – 217.
15. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer, 260.
16. Leshchenko, D., Ershkov, S. V., Kozachenko, T. (2022). Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque. J. Appl. Comput. Mech.8, № 3, 1023 – 1031.
17. Dzhuri, E. (1979). Innory i ustoychivost' dinamicheskikh sistem. – M.: Nauka, 304 (In Russia).



**Кононов Юрій Микитович**

Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України,  
д.ф.-м.н., професор  
вул. Добровольського, 1, Слов'янськ, Україна, 84100  
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-1609-0253

*Для посилань:*

Кононов Ю. М. Про стійкість обертання вільної системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа, один з яких має ідеальну рідину. Механіка та математичні методи, 2024. Т. 6. № 2. С. 6–17.

*For references:*

Yu. Kononov (2024). On the stability of the rotation of the free system of two elastic Lagrange gyroscopes, one of which has an ideal liquid. Mechanics and Mathematical Methods. 6 (2). 6–17.

UDC 531.381

## PERTURBED MOTIONS OF A NEARLY DYNAMICALLY SPHERICAL RIGID BODY WITH A MOVABLE MASS SUBJECT TO CONSTANT BODY-FIXED TORQUE

D. Leshchenko<sup>1</sup>, T. Kozachenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract:** The problem of motion of a rigid body about a fixed point is one of the classical problems of mechanics. The interest to the problems of the rigid body dynamics has increased in the second half of the XX century in connection with the development of rocket and space technologies. A spacecraft or satellite, while orbiting about its center of mass, experiences torques from forces of diverse physical nature. This includes torques generated by the motion of internal masses, which can arise from factors such as presence of rotating components (like rotors or gyroscopes), and the activities of crew members aboard the crew vehicle. The dynamics of rigid body incorporated moving masses is a significant focal point in classical mechanics. Extensive research is dedicated to investigating the rotation of a rigid body featuring motion of internal masses. It is assumed that the body contains a viscoelastic element that is modeled by a moving mass connected to the body by a strong damper. The moving mass model loosely attached elements in a space vehicles, which can significantly affect the vehicle's motion about its center of mass during a long period of time. Some cases are considered of the motion of a rigid body containing internal masses connected to the body by means of elastic and dissipative elements. A number of works are devoted to the analysis of various problems of the dynamics of space vehicles containing internal movable masses.

The paper develops an approximate solution by means of averaging method to the system of Euler's equation terms for a nearly dynamically spherical rigid body containing a viscoelastic element under the action of constant body-fixed torque. We obtained the system of motion equations in the standard form which refined in square-approximation by small parameter. Asymptotic approach permits to obtain some qualitative results and to describe evolution of angular motion using simplified averaged equations and numerical solution. The main objective of this paper is to extend the previous results for the problem of motion about a center of mass of a rigid body under the influence of small internal torque (cavity filled with a fluid of high viscosity) or external torque (resistive medium). The importance of the results is in progress of moving mass control motion of spinning projectiles.

**Keywords:** nearly dynamically spherical rigid body, moving mass, constant torque.

## ЗБУРЕНІ РУХИ БЛИЗЬКОГО ДО ДИНАМІЧНО СФЕРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА З РУХОМОЮ МАСОЮ ПІД ДІЄЮ ПОСТІЙНИХ МОМЕНТІВ В ЗВ'ЯЗАНИХ З ТІЛОМ ОСЯХ

Лещенко Д. Д.<sup>1</sup>, Козаченко Т. О.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація:** Проблема руху твердого тіла відносно нерухомої точки є однією з класичних задач механіки. Інтерес до задач динаміки твердого тіла посилюється в другій половині XX сторіччя в зв'язку з розвитком ракетно-космічної техніки.

Космічний корабель або супутник в своєму русі відносно центра мас зазнає вплив моментів сил різної фізичної природи. Це, наприклад, моменти, викликані рухом внутрішніх мас, які можуть виникати через такі фактори, як наявність обертових компонентів (роторів, гіроскопів), а також переміщенням екіпажу в випадку пілотованого апарату. Динаміка твердого тіла з рухомими масами це важлива проблема класичної механіки.

Велика кількість робіт присвячена дослідженню обертання твердого тіла з рухомими масами, з пружними та дисипативними елементами. Припускається що тіло містить в'язкопружний елемент, який моделюється рухомою масою з'єднаною демпфером з корпусом. Наявність рухомої маси моделює присутність нежорстко закріплених елементів на космічному апараті, що при тривалому періоді часу має суттєвий вплив на його рух відносно центра мас. Ряд публікацій присвячено аналізу різних проблем динаміки космічних апаратів, що містять внутрішні рухомі маси. Вивчалися проблеми стійкості та нестійкості, а також проблеми керування і стабілізації рухів.

В статті проведено асимптотичне розв'язування за допомогою методу усереднення системи рівнянь Ейлера з додатковими збурюючими моментами для близького до динамічно сферичного твердого тіла з в'язкопружним елементом під дією сталого моменту в зв'язаних з тілом осях. Одержано систему рівнянь руху в стандартній формі, яка уточнена в квадратичному наближенні за малим параметром.

За допомогою асимптотичного підходу одержані якісні результати та описана еволюція руху тіла з допомогою усереднених рівнянь і чисельного інтегрування. В роботі розвинуті результати досліджень попередніх задач, розглянутих авторами, про рух твердого тіла під дією моментів, обумовлених порожниною з рідиною великої в'язкості або середовища з опором. Одержані результати важливі в процесі управління рухом тіла з масою або для рухів обертових снарядів з масою.

**Ключові слова:** близьке до динамічно сферичного тверде тіло, рухома маса, постійний момент.

## 1 INTRODUCTION

The analysis of objects containing elements with distributed and lumped parameters is of interest both from the theoretical points of view. Constructive results for systems containing quasi-rigid bodies have been obtained. These models assume that the motion is close to the motion of perfectly rigid bodies. The influence of nonidealities can be taken into account using asymptotic methods of nonlinear mechanics. It is reduced to including additional disturbing torques in the Euler equations of the angular motion of a fictitious rigid body. The dynamics of the motion of rigid bodies with internal degrees of freedom were studied in number of publications.

## 2 ANALYSIS OF LITERATURE DATA AND RESOLVING THE PROBLEM

The dynamics of a rigid body incorporating moving masses is a significant focal point in classical mechanics. Extensive research is dedicated to investigating the rotation of a rigid body featuring motion of internal masses. A number of problems in the indicated field and the works in this direction are described in [1-8].

In [1, 9], scenarios involving the motion of a rigid body containing movement of internal masses are explored. Several problems concerning the motion of a rigid body incorporating elastic and dissipative components are investigated in [10-13]. [14] tackled the issue of minimum-time deceleration in a resistant medium for the rotation of a dynamically symmetric rigid body containing a viscous-elastic element. [15] focused on the challenge of achieving quasi-optimal time-based deceleration for a gyrostat featuring a moving mass in a medium with resistance.

In [16] the influence is estimated of the moving point masses (linear oscillations) on the stability of uniform rotation of the Lagrange top.

Paper [17] delved into the motion of a rigid body that is close to dynamically spherical, and houses a cavity filled with a highly viscous fluid. In [18], researchers explored the motion of a nearly dynamically spherical rigid body, also with a cavity containing viscous fluid but at a low Reynolds member. They provided insights into both the qualitative and quantitative aspects of its motion in a resistive medium. [19] focused on the motion about the center of mass of a nearly dynamically spherical rigid body with a cavity filled with highly viscous fluid, which was subjected to constant body-fixed torque. The motion of a nearly dynamically spherical rigid body with highly viscous fluid under the action of constant body-fixed torques is investigated in [20].

In [21] qualitative and quantitative results of motion of a nearly dynamically spherical rigid body with a moving mass attached to the body by means of elastic coupling were presented. Paper [22] extended the investigation of rigid body motion presented in [17] by adding another (third) component of the gyrostatic moment. In [23] the results of [17] was generalized to charged rigid body.

The paper [24] study the motion about the center of mass of a nonsymmetric rigid body influenced by two small perturbation torques: a constant one in the body-fixed axes and a linear dissipative one depending on the angular velocity.

In the works [25, 26] analytical solutions are obtained for the problem of a rigid body by a torque which is constant in the body-fixed axes.

In paper [27], the analytic solution has been introduced for the rotation of a rigid body having spherical ellipsoid of inertia subjected to a constant torque.

Let us examine the motion of a dynamically asymmetric rigid body about its center of inertia, featuring a movable point mass  $m$  connected via an elastic linkage to a point  $O_1$  located on one of its principal axes of inertia. We assume that the torques which is constant in the body-connected axes have the form

$$M_i^c = \varepsilon^2 M_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

where  $0 < \varepsilon \ll 1$  is a small parameter.

The origin of Cartesian coordinate system, connected with the rigid body, is placed at the center of inertia of the body with point mass, whereas the basic vectors  $e_1, e_2, e_3$  of the system are directed so that vector  $e_3$  coincides with axes on which point  $O_1$  is located. Then radius-vector of point  $O_1$ ,  $\rho = \rho e_3$  where, we assume  $\rho > 0$ .

In references [1, 9], a vector equation was derived to describe the alteration of the vector  $\omega$  within the coordinate system linked to the body.

$$J_0^* \cdot \omega + (\omega \cdot J_0^* \cdot \omega) = \Phi(\omega) + O(\Omega^{-4}, \lambda^2 \Omega^{-8}) \quad (2)$$

Here  $J_0^*$  denotes the inertia tensor of a rigid body containing a moving mass when referenced with respect to point  $O$ ,  $\omega$  is the absolute angular velocity of the body, vector function  $\Phi$  includes the terms of the orders of  $\Omega^{-2}$  and  $\lambda \Omega^{-4}$ . The quantities  $\Omega^2 = c/m$ ,  $\lambda = \delta/m$ , characterize the frequency and decay time of free oscillations,  $c$  is a stiffness coefficient, and  $\delta$  is a viscous friction coefficient.

Perturbation torques in (2) are small, provided

$$\Omega^2 \gg \lambda \omega \gg \omega^2 \quad (3)$$

Free oscillations of the system decaying long time before the body performs one revolution [1, 9].

To obtain equations (2) and assess their level of error, you can refer to [1, 9]. Function  $\Phi(\omega)$  is a polynomial containing the fourth and fifth order of  $\omega$  [1, 9].

Having evaluated the vector function  $\Phi$  as per [1, 9], the equation (2) for our problem, when expressed in terms of projections on axes  $e_1, e_2, e_3$ , takes the shape

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= -\rho^2 m \{ \Omega^{-2} qr(Q_1 p^2 + K_1 q^2 + L_1 r^2) + \\ &+ \lambda \Omega^{-4} p[q^2(M_1 p^2 + N_1 q^2 + R_1 r^2) + r^2(S_1 p^2 + T_1 r^2)] \} + \varepsilon^2 M_1 \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= -\rho^2 m \{ \Omega^{-2} pr(Q_2 q^2 + K_2 p^2 + L_2 r^2) + \\ &+ \lambda \Omega^{-4} q[r^2(M_2 q^2 + N_2 r^2 + R_2 p^2) + p^2(S_2 q^2 + T_2 p^2)] \} + \varepsilon^2 M_2 \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= -\rho^2 m \lambda \Omega^{-4} r^3 (A + C - B)(B + C - A) \times \\ &\times A^{-1} B^{-1} [(A - C)B^{-1} p^2 + (B - C)A^{-1} q^2] + \varepsilon^2 M_3 \end{aligned} \quad (4)$$

The tensor of inertia  $J_0^*$  of the rigid body, whose point mass  $m$  is superposed with  $O_1$ , obtains the form

$$J_0^* = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix}, \quad (5)$$

where  $A, B$  and  $C$  are the principal moments of inertia of the rigid body,  $p, q, r$  are the components of the absolute angular velocity  $\omega$ .

The right-hand sides of two equations (2) comprises coefficients  $Q_1, K_1, L_1, M_1, N_1, R_1, S_1, T_1, Q_2, K_2, L_2, M_2, N_2, R_2, S_2, T_2$  that are specific expressions containing  $A, B, C$ . For instance,

$$Q_1 = -1 - 5 \frac{A-C}{B} - 6 \frac{C-B}{A} - 3 \frac{B-A}{C} + 7 \frac{(A-C)(B-A)}{BC} + 4 \frac{(B-A)(C-B)(A-C)}{ABC}. \quad (6)$$

We have chosen not to reference in our paper other expressions from (4) such as  $K_1, \dots, T_2$  due to their drawbacks.

If  $A = B, \varepsilon = 0$  the system (4) reduces to the corresponding system in [1, 9].

### 3 PURPOSE AND TASKS OF THE STUDY

Take into consideration a nearly dynamically spherical rigid body, where the principal central moments of inertia of the unperturbed body can be expressed in the following manner

$$A = J_0 + \varepsilon A', \quad B = J_0 + \varepsilon B', \quad C = J_0, \quad (7)$$

where  $0 < \varepsilon \ll 1$  is a small parameter.

According to (2)  $\Omega^{-2}, \lambda\Omega^{-4}$  are small parameters in equations of motion (4). We assume that, i.e.  $\Omega^{-2} \sim \varepsilon^2, \lambda\Omega^{-4} \sim \varepsilon^2, \lambda\Omega^{-2} \sim 1$ .

For  $\varepsilon = 0$  equations of motion (4) depict the motion of a body exhibiting spherical symmetry.

We also make an assumption

$$|A - B| = O(\varepsilon^2 J_*), \quad |A' - B'| = O(\varepsilon J_*), \quad J_* \sim J_0. \quad (8)$$

Then, after (7), (8) the following equations are provided

$$A - B = \varepsilon(A' - B') = \varepsilon^2 J_*, \quad A - C = \varepsilon A', \quad B - C = \varepsilon B'. \quad (9)$$

After applying transformations to the system (4), we derive the perturbed Euler system. Relations (7)–(9) and transfer to show time  $\tau = \varepsilon t$  are considered (terms of order  $\varepsilon^3$  and higher are rejected):

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= \frac{B'}{J_0} \left( 1 - \varepsilon \frac{A'}{J_0} \right) qr + \varepsilon f_{1p}(p, q, r), & p(0) &= p_0, \\ \frac{dq}{d\tau} &= -\frac{A'}{J_0} \left( 1 - \varepsilon \frac{B'}{J_0} \right) pr + \varepsilon f_{1q}(p, q, r), & q(0) &= q_0, \\ \frac{dr}{d\tau} &= \frac{A' - B'}{J_0} pq + \varepsilon f_{1r}(p, q, r), & r(0) &= r_0. \end{aligned} \quad (10)$$

In the given equation,  $r$  is a slow variable. The set of differential equations in (10) constitutes a nonlinear system, wherein the frequency is contingent upon the slow variable. The perturbations were incorporated within (10).

$$\begin{aligned} \varepsilon f_{1p}(p, q, r) &= \frac{-\rho^2 m}{J_0} \left\{ \Omega^{-1} q r h_{11} + \frac{\Omega^{-2}}{J_0} q r (h_{12} - A' h_{11}) + \frac{\lambda \Omega^{-4}}{J_0} p (q^2 h_{21} + r^2 h_{31}) \right\} + \\ &+ \varepsilon \frac{M_1}{J_0} \left( 1 - \varepsilon \frac{A'}{J_0} \right), \\ \varepsilon f_{1q}(p, q, r) &= \frac{-\rho^2 m}{J_0} \left\{ \Omega^{-1} p r g_{11} - \frac{\Omega^{-2}}{J_0} p r (g_{12} + B' g_{11}) + \frac{\lambda \Omega^{-4}}{J_0} q (r^2 g_{21} + p^2 g_{31}) \right\} + \quad (11) \\ &+ \varepsilon \frac{M_2}{J_0} \left( 1 - \varepsilon \frac{B'}{J_0} \right), \\ \varepsilon f_{1r}(p, q, r) &= \frac{-\rho^2 m}{J_0^2} \lambda \Omega^{-4} r^3 (A' p^2 + B' q^2) + \varepsilon \frac{M_3}{J_0}, \\ g_{11} &= q^2 + p^2 + r^2, \quad g_{12} = A'(p^2 + 3r^2) + (3A' - 2B')q^2, \\ g_{21} &= 2(A' - B')p^2 - B'r^2, \quad g_{31} = (A' - B')(q^2 + p^2), \\ h_{11} &= -g_{11}, \quad h_{12} = B'(q^2 + 3r^2) - (2A' - 3B')p^2, \\ h_{21} &= (B' - A')(q^2 + p^2 + 2r^2), \quad h_{31} = -A'r^2. \end{aligned}$$

The perturbation torque of the influence of a movable mass in the rigid body is small [1, 9].

The solution of the unperturbed system (10) for  $\varepsilon = 0$  is as follows

$$p = a \cos \varphi, \quad q = -\frac{J_0 a w \sin \varphi}{B' r}, \quad r = r_0. \quad (12)$$

In the given equation,  $a = \sqrt{p_0^2 + (\dot{p}_0/w)^2}$  is the amplitude,  $\varphi = w\tau + \varphi_0$  is the phase,  $w = r\sqrt{A'B'}/J_0$ ,  $A'B' > 0$ ,  $\varphi_0$  is the initial phase,  $\cos \varphi_0 = p_0/a$ ,  $\sin \varphi_0 = -q_0\sqrt{B'/A'}/a$  supposedly.

We transition from the slow variables  $p, q, r$  to the standard slow variables  $a, r$  and the phase  $\varphi$  by implementing a change in variables:

$$p = a \cos \varphi, \quad q = -\frac{J_0 a w \sin \varphi}{B' r}, \quad r = r. \quad (13)$$

We differentiate equations (13) considering a perturbed system. Through a series of transformations, we arrive at the system in its standard form, where the point represents the time derivative of  $\tau$

$$\begin{aligned} \dot{a} \cos \varphi - a \dot{\varphi} \sin \varphi &= -a w(r) \sin \varphi + \varepsilon f_{2p}, \\ \dot{a} \sin \varphi + a \dot{\varphi} \cos \varphi &= a w(r) \cos \varphi - \sqrt{\frac{B'}{A'}} \varepsilon f_{2q}, \quad (14) \\ \dot{r} &= \frac{B' - A'}{J_0} a^2 \sqrt{\frac{A'}{B'}} \sin \varphi \cos \varphi + \varepsilon f_{2r}, \quad w(r) = \frac{r}{J_0} \sqrt{A'B'}, \\ \varepsilon f_{2p} &= \varepsilon \frac{aA'}{J_0} w(r) \sin \varphi + \varepsilon f_{1p}, \quad \varepsilon f_{2r} = \varepsilon f_{1r}, \quad \sqrt{\frac{B'}{A'}} \varepsilon f_{2q} = \varepsilon \frac{aB'}{J_0} w(r) \cos \varphi + \sqrt{\frac{B'}{A'}} \varepsilon f_{1q}. \end{aligned}$$

We will address the equations (14) with a focus on solving for  $\dot{a}$  and  $\dot{\varphi}$ , resulting in the derivation of a system:



$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon f_{2p} \cos \varphi - \varepsilon f_{2q} \sqrt{\frac{B'}{A'}} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= w(r) - \frac{1}{a} \varepsilon f_{2p} \sin \varphi - \frac{1}{a} \varepsilon f_{2q} \sqrt{\frac{B'}{A'}} \cos \varphi, \\ \dot{r} &= \frac{B' - A'}{J_0} a^2 \sqrt{\frac{A'}{B'}} \sin \varphi \cos \varphi + \varepsilon f_{2r}. \end{aligned} \quad (15)$$

We insert (13) into the third equation (11) for the variable  $r$ . With the standard transformations, we arrive at the system of equations:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon \frac{A' - B'}{J_0} a w \sin \varphi \cos \varphi + \varepsilon f_{1p} \cos \varphi - \varepsilon f_{1q} \sqrt{\frac{B'}{A'}} \sin \varphi, \\ \dot{r} &= \frac{B' - A'}{J_0} a^2 \sqrt{\frac{A'}{B'}} \sin \varphi \cos \varphi - \\ &\quad - \frac{\rho^2 m}{J_0^2} \lambda \Omega^{-4} r^3 (A' a^2 \cos^2 \varphi + B' (-\frac{J_0 a w}{B' r})^2 \sin^2 \varphi) + \varepsilon \frac{M_3}{J_0}, \\ \varepsilon f_{1p} \cos \varphi &= \frac{-\rho^2 m}{J_0} \cos \varphi \left\{ -\frac{J_0 a w \sin \varphi}{B'} [(\Omega^{-1} - \frac{\Omega^{-2}}{J_0} A')(-r^2 - a^2 \cos^2 \varphi - (\frac{J_0 a w}{B' r})^2 \sin^2 \varphi)] + \right. \\ &\quad + \frac{\Omega^{-2}}{J_0} [B'(3r^2 + (\frac{J_0 a w}{B' r})^2 \sin^2 \varphi) - (2A' - 3B')a^2 \cos^2 \varphi] + \frac{\lambda \Omega^{-4}}{J_0} a \cos \varphi \times \\ &\quad \left. \times [(\frac{J_0 a w}{B' r})^2 \sin^2 \varphi (-2r^2 - a^2 \cos^2 \varphi - (\frac{J_0 a w}{B' r})^2 \sin^2 \varphi) + A' r^4] \right\} + \varepsilon \frac{M_1}{J_0} (1 - \varepsilon \frac{A'}{J_0}) \cos \varphi, \\ \varepsilon f_{1q} \sin \varphi &= \frac{-\rho^2 m}{J_0} \sin \varphi \left\{ r a \cos \varphi [(\Omega^{-1} - \frac{\Omega^{-2}}{J_0} B')(r^2 + a^2 \cos^2 \varphi + (\frac{J_0 a w}{B' r})^2 \sin^2 \varphi) - \right. \\ &\quad - \frac{\Omega^{-2}}{J_0} (A'(3r^2 + a^2 \cos^2 \varphi) + (3A' - 2B')(\frac{J_0 a w}{B' r})^2 \sin^2 \varphi)] + \frac{\lambda \Omega^{-4}}{J_0} (-\frac{J_0 a w}{B' r} \sin \varphi) \times \\ &\quad \left. \times [r^2 (2a^2 \cos^2 \varphi (A' - B') - B' r^2) + a^2 \cos^2 \varphi (A' - B')(a^2 \cos^2 \varphi + (\frac{J_0 a w}{B' r})^2 \sin^2 \varphi)] \right\} + \\ &\quad + \varepsilon \frac{M_2}{J_0} (1 - \varepsilon \frac{B'}{J_0}) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (16)$$

In this system of equations, the value  $w(r) = r\sqrt{A'B'}/J_0$  represents the perturbed frequency of the converted system. If we average system (16) over the phase  $\varphi$  [28], we obtain:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \beta \gamma (\alpha a^5 + \eta a^3 r^2 - a r^4), \\ \dot{r} &= \beta A' a^2 r^3 + \varepsilon \frac{M_3}{J_0}. \end{aligned} \quad (17)$$

The notations are introduced at this point:

$$\beta = \frac{-\rho^2 m}{J_0^2} \lambda \Omega^{-4}, \quad \eta = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{A'}{B'} \right), \quad \alpha = \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{A'^2}{B'^2} \right), \quad \gamma = \frac{1}{2} (A' - B').$$

We transform system (17) to:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= 2\beta\gamma x(\alpha x^2 + \eta xy - y^2), \\ \frac{dy}{d\tau} &= 2\beta A' xy^2 + \varepsilon \frac{2M_3}{J_0} \sqrt{y}. \end{aligned} \tag{18}$$

Here we include the slow variables  $x = a^2$ ,  $y = r^2 > 0$  in system (18).

### 3 BASIC RESULTS

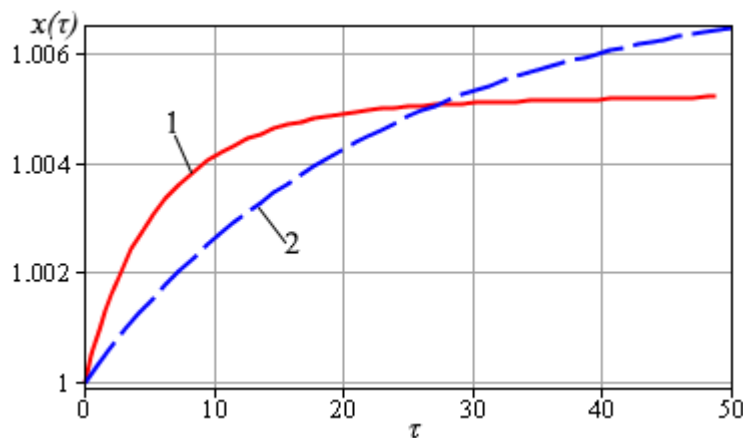
System (18) was numerically resolved using the initial conditions  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 1$  and task factors  $m = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ , constant moment projection  $M_3 = -0.135$ . The values of the components of the moments of inertia are presented in Table 1.

The graphical representations of the varying values  $x = a^2$  and  $y = r^2$  (the squared equatorial and axial components of the rigid body angular velocity vector) are represented in two cases (Fig. 1-4) when parameters are  $\lambda = 98$ ,  $\Omega = 10$  and  $\lambda = 9$ ,  $\Omega = 3$ .

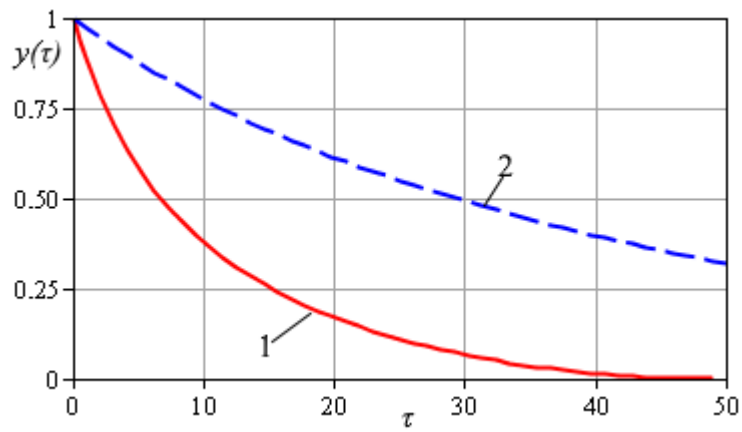
**Table 1**

Components of moments of inertia.

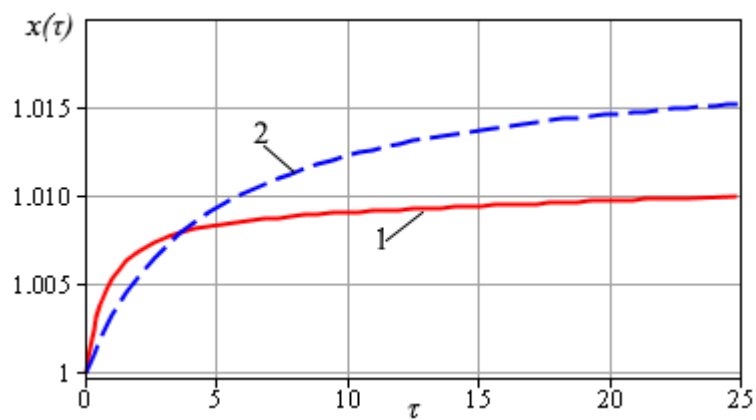
Case	$J_0$	$A'$	$B'$
1	1	0,51	0,5
2	3	0,83	0,8



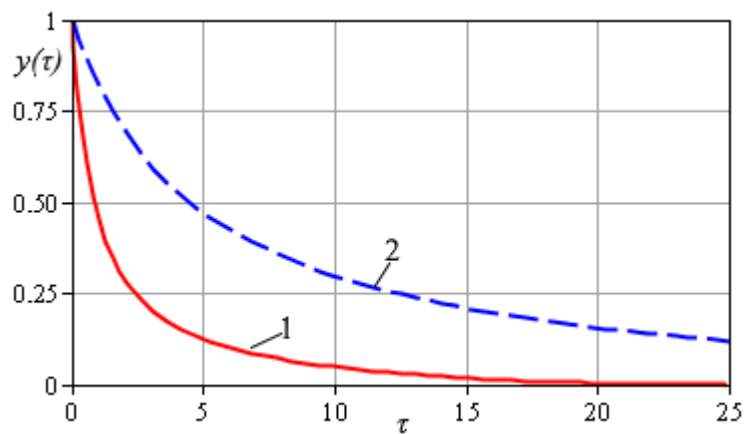
**Fig. 1.** The plots of changing value  $x$  in the cases (1) and (2) for  $\lambda = 98$ ,  $\Omega = 10$



**Fig. 2.** The plots of changing value  $y$  in the cases (1) and (2) for  $\lambda = 98, \Omega = 10$



**Fig. 3.** The plots of changing value  $x$  in the cases (1) and (2) for  $\lambda = 9, \Omega = 3$



**Fig. 4.** The plots of changing value  $y$  in the cases (1) and (2) for  $\lambda = 9, \Omega = 3$

## 4 DISCUSSION OF THE RESULTS OF THE STUDY

Variable  $x$  (Fig. 1, 3) has a slight increase, maximum value which is achieved in case 2 ( $A/C < 1.5$ ) at  $\lambda = 9$ ,  $\Omega = 3$  and is equal to  $x = 0.016$ . However, in case 1 ( $A/C \sim 1.5$ ), the growth rate is observed at the initial values of time, regardless of the values  $\lambda$ ,  $\Omega$ , satisfying the condition (3).

The variable  $y = r^2$  (Figs. 2, 4) asymptotically approaches zero. In the case of a ratio of moments of inertia  $A/C \sim 1.5$  (the first case), the decrease  $y$  occurs faster than in the case of  $A/C < 1.5$  (the second case). Also, the nature of the decrease of the axial component depends on the values of  $\lambda$ ,  $\Omega$ . When  $\lambda = 9$ ,  $\Omega = 3$  the axial component decreases faster than when  $\lambda = 98$ ,  $\Omega = 10$  (with the other parameters being the same).

## 5 CONCLUSIONS

The motion of a nearly dynamically spherical rigid body with a movable mass under the action of constant body-fixed torques is investigated. We obtain the system of motion equations in standard form, which refined in square approximation by small parameter.

The averaging method was applied to the nonlinear system of rotational motion equations. The evolution of rigid body motion is described. The importance of the results is to applications such as analyzing angular motions of spacecraft, in moving mass control, and reentry vehicles.

## 6 ETHICAL DECLARATIONS

The authors have no relevant financial or non-financial interests to report.

## References

1. Chernousko, F.L., Akulenko, L.D., Leshchenko, D.D. (2017). *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*. Cham: Springer International Publishing.
2. Lurie, A.I. (2002). *Analytical Mechanics*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
3. Thomson, W.T. (1986). *Introduction to Space Dynamics*. New York: Dower.
4. Hughes, P.C. (2004). *Spacecraft Attitude Dynamics*. Mineola, New York: Dower.
5. El-Gohary, A. (2004). On the orientation of a rigid body using point masses. *Applied Mathematics and Computation*. 151. 163–179.
6. He, L., Sheng, T., Kumar, K.D., Zhao, Y., Ran, D., Chen, X. (2020). Attitude maneuver of a satellite using movable masses. *Acta Astronaut.* 176. 464–475.
7. Li, T., Gao, C., Li, C., Ting, W. (2018). A survey of moving mass control technology. *Aerospace Science and Technology*. 82-83. 594–606.
8. Ogunwa, T., Abdullah, E., Chahl, T. (2022). Modeling and Control of an Articulated Multibody Aircraft. *Applied Sciences*. 12. 1162.
9. Chernousko, F. L. (1973). O dvizhenii tverdogo tela s podvizhnymi massami [On the motion of a rigid body with moving masses]. *Izv. AN SSSR. Mehanika tverdogo tela*. 4. 33–44.
10. Leshchenko, D.D. (1976). Motion of a rigid body with movable point mass. *Mechanics of Solids*. 11 (3). 33–36.
11. Akulenko, L.D., Leshchenko, D.D. (1978). Some problems of the motion of a solid with a moving mass. *Mechanics of Solids*. 13 (5). 24–28.
12. Leshchenko, D.D., Sallam, S.N. (1992). Some problems of the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*. 28 (8). 524–528.
13. Akulenko, L., Leshchenko, D., Kushpil, T., Timoshenko, I. (2001). Problems of evolution of rotations of a rigid body under the action of perturbing moment. *Multibody System Dynamics*. 6 (1). 3–16.

14. Akulenko, L.D., Zinkevich, Yu.S., Leshchenko, D.D., Rachinskaya, A.L. (2011). Optimal Rotation Deceleration of a Dynamically Symmetric Body with Movable Mass in a Resistant Medium. *Journal of Computer and System Sciences International*. 50 (2). 198–204.
15. Akulenko, L.D., Kozachenko, T.A., Leshchenko, D.D. (2019). Time Quasi-Optimal Deceleration of Rotations of a Gyrostat with a Moving Mass in a Resistive Medium. *Journal of Computer and System Sciences International*. 58 (5). 667–673.
16. Kononov, Y.N. (2001). Spin stability of a Lagrange top containing linear oscillators. *Journal of Mathematical Sciences*. 106 (1). 38–42.
17. Akulenko, L.D., Leshchenko, D.D., Paly, K.S. (2021). Perturbed rotational motions of a spheroid with cavity filled with a viscous fluid *Proc. IMechE. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 235 (20). 4833–4837.
18. Leshchenko, D.D., Kozachenko, T.O. (2021). Evolution of rotations of a spheroid with cavity containing a viscous fluid in a resistive medium. *Proceeding of IAMM NAS of Ukraine*. 35 (2). 152–160.
19. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2023). Perturbed rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid subject to constant body fixed torques. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 148. 104284.
20. Leshchenko, D., Kozachenko, T. (2022). Evolution of rotational motions in a resistive medium of a nearly dynamically spherical gyrostat subjected to constant body-fixed torques. *Mechanics and Mathematical Methods*. 4(2). 19–31.
21. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2024). Evolution of rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with a moving mass. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 133. 107916.
22. Farag, A.M., Amer, T.S., Abady, I.M. (2022). Modeling and analyzing the dynamical motion of a rigid body with a spherical cavity. *Journal of Vibration Engineering and Technologies*. 10 (5). 1637–1645.
23. He, J.H., Amer, T.S., Amer, W.S., Elkafly, H.F., Galal, A.A. (2023). Dynamical analysis of a rotating rigid body containing a viscous incompressible fluid. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*. 33 (8). 2800–2814.
24. Neishtadt, A.I. (1980). Evolution of rotation of a solid, acted upon by the sum of a constant and dissipative perturbing moments. *Mechanics of Solids*. 15 (6). 21–27.
25. Van der Ha, J.C. (1985). Perturbation solution of attitude motion under body-fixed torques. *Acta Astronaut*. 12 (10). 861–869.
26. Ayobi, M.A., Longuski, J.M. (2008). Analytical solution for translational motion of spinning-up rigid bodies subject to constant body-fixed forces and moments. *Journal of Applied Mechanics*. 75 (1). 011004/1-011004/8.
27. Romano, M. (2008). Exact analytic solution for a rotation of a rigid body having spherical ellipsoid of inertia and subjected to a constant torque. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 100. 181–189.
28. Bogoliubov, N.N., Mitropolsky, Yu.A. (1961). *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. New York: Gordon and Breach Science.

## Література

1. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Cham: Springer International Publishing, 2017.
2. Lurie A.I. Analytical Mechanics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2002.
3. Thomson W.T. Introduction to Space Dynamics. New York: Dower, 1986.
4. Hughes P.C. Spacecraft Attitude Dynamics. Mineola, New York: Dower, 2004.
5. El-Gohary A. On the orientation of a rigid body using point masses. Applied Mathematics and Computation. 2004. 151. P. 163–179.
6. He L., Sheng T., Kumar K.D., Zhao Y., Ran D., Chen X. Attitude maneuver of a satellite using movable masses. Acta Astronaut. 2020. 176. P. 464–475.
7. Li T., Gao C., Li C., Ting W. A survey of moving mass control technology. Aerospace Science and Technology. 2018. 82–83. P. 594–606.

8. Ogunwa T., Abdullah E., Chahl T. Modeling and Control of an Articulated Multibody Aircraft. *Applied Sciences*. 2022. 12. P. 1162.
9. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела с подвижными массами. *Изв. АН СССР Механика твердого тела*. 1973. 4. С. 33–44.
10. Leshchenko D.D. Motion of a rigid body with movable point mass. *Mechanics of Solids*. 1976. 11 (3). P. 33–36.
11. Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Some problems of the motion of a solid with a moving mass. *Mechanics of Solids*. 1978. 13 (5). P. 24–28.
12. Leshchenko D.D., Sallam S.N. Some problems of the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*. 1992. 28 (8). P. 524–528.
13. Akulenko L., Leshchenko D., Kushpil T., Timoshenko I. Problems of evolution of rotations of a rigid body under the action of perturbing moment. *Multibody System Dynamics*. 2001. 6 (1). P. 3–16.
14. Akulenko L.D., Zinkevich Yu.S., Leshchenko D.D., Rachinskaya A.L. Optimal Rotation Deceleration of a Dynamically Symmetric Body with Movable Mass in a Resistant Medium. *Journal of Computer and System Sciences International*. 2011. 50 (2). P. 198–204.
15. Akulenko L.D., Kozachenko T.A., Leshchenko D.D. Time Quasi-Optimal Deceleration of Rotations of a Gyrostat with a Moving Mass in a Resistive Medium. *Journal of Computer and System Sciences International*. 2019. 58 (5). P. 667–673.
16. Kononov Y.N. Spin stability of a Lagrange top containing linear oscillators. *Journal of Mathematical Sciences*. 2001. 106 (1). P. 38–42.
17. Akulenko L.D., Leshchenko D.D., Paly K.S. Perturbed rotational motions of a spheroid with cavity filled with a viscous fluid *Proc. IMechE. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2021. 235 (20). P. 4833–4837.
18. Leshchenko D.D., Kozachenko T.O. Evolution of rotations of a spheroid with cavity containing a viscous fluid in a resistive medium. *Proceeding of IAMM NAS of Ukraine*. 2021. 35 (2). P. 152–160.
19. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. Perturbed rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid subject to constant body fixed torques. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2023. 148. 104284.
20. Leshchenko D., Kozachenko T. Evolution of rotational motions in a resistive medium of a nearly dynamically spherical gyrostat subjected to constant body-fixed torques. *Механіка та математичні методи*. 2022. 4 (2). С. 19–31.
21. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. Evolution of rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with a moving mass. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2024. 133. 107916.
22. Farag A.M., Amer T.S., Abady I.M. Modeling and analyzing the dynamical motion of a rigid body with a spherical cavity. *Journal of Vibration Engineering and Technologies*. 2022. 10 (5). P. 1637–1645.
23. He J.H., Amer T.S., Amer W.S., Elkaflly H.F., Galal A.A. Dynamical analysis of a rotating rigid body containing a viscous incompressible fluid. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*. 2023. 33 (8). P. 2800–2814.
24. Neishtadt A.I. Evolution of rotation of a solid, acted upon by the sum of a constant and dissipative perturbing moments. *Mechanics of Solids*. 1980. 15 (6). P. 21–27.
25. Van der Ha J.C. Perturbation solution of attitude motion under body-fixed torques. *Acta Astronaut.* 1985. 12 (10). P. 861–869.
26. Ayobi M.A., Longuski J.M. Analytical solution for translational motion of spinning-up rigid bodies subject to constant body-fixed forces and moments. *Journal of Applied Mechanics*. 2008. 75 (1). 011004.
27. Romano M. Exact analytic solution for a rotation of a rigid body having spherical ellipsoid of inertia and subjected to a constant torque. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2008. 100. P. 181–189.
28. Bogoliubov N.N., Mitropolsky Yu.A. *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. New York: Gordon and Breach Science, 1961.



**Dmytro Leshchenko**

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
DSc. in Physics and Mathematics, Professor  
Didrikhson st. 4, Odesa, Ukraine, 65029  
leshchenko\_d@ukr.net,  
ORCID: 0000-0003-2436-221X

**Tetiana Kozachenko**

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Didrikhson st. 4, Odesa, Ukraine, 65029  
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor  
kushpil.t.a@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-9034-3776

*For references:*

D. Leshchenko, T. Kozachenko. (2024). Perturbed motions of a nearly dynamically spherical rigid body with a movable mass subject to constant body-fixed torque. *Mechanics and Mathematical methods*. 6 (2). 18–30.

*Для посилань:*

Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи близького до динамічно сферичного твердого тіла з рухомою масою під дією постійних моментів в зв'язаних з тілом осях. *Механіка та математичні методи*, 2024. Т. 6. № 2. С. 18–30.

УДК 539.3

## АНАЛІЗ РІВНОВАГИ ТОНКИХ ОРТОТРОПНИХ ПЛИТА НА ТРИПАРАМЕТРИЧНИЙ ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Делявський М. В.<sup>1</sup>, Мікуліч С. Б.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Луцький національний технічний університет

**Анотація:** У статті розв'язана задача про дослідження статичної рівноваги тонких ортотропних прямокутних плит, що спираються на трипараметричну пружну основу. Для розв'язання поставленої задачі у роботі побудовано математичну модель тонкої залізобетонної плити як однорідної ортотропної з усередненим модулем Губера. Запропоновано математичну модель трипараметричної пружної основи з урахуванням тертя між нижньою поверхнею плити та основою. Розроблений метод аналізу рівноваги таких плит дозволяє отримати точний розв'язок рівняння рівноваги з урахуванням граничних та поверхневих умов в окремих вузлах. Під час числової реалізації розробленого підходу запропоновано процедуру генерації таких вузлів. Розв'язок рівняння рівноваги представлено у вигляді суми силових функцій прогину та його функцій форми, помножених на невідомі параметри, які трактуються як ступінь свободи пластини. Такий підхід дозволив з високою точністю задовольнити граничні та поверхневі умови.

На основі отриманих розв'язків проведено аналіз напружено-деформованого стану тонкої однорідної ортотропної квадратної пластини, що повністю затиснута по контуру для випадку, коли плита піддається впливу розподіленого навантаження на її верхній частині та спирається на пружну основу. На основі отриманих у роботі розв'язків та формул, отриманих іншими авторами проведено порівняльний аналіз результатів для випадку трьох типів пружних основ: трипараметрична основа, основа Вінклера та плита з вільною нижньою поверхнею. На основі числових розрахунків встановлено, що пружна основа істотно зменшує прогин, нахил і момент у плиті. Результати, отримані для моделі Вінклера та трьох-параметричної моделі, відрізняються на 3% та 1,5% для прогинів на моментах відповідно. Встановлено, що результати, отримані в рамках запропонованої моделі, практично не залежать від коефіцієнта тертя між нижньою поверхнею плити та фундаментом.

**Ключові слова:** тонкі ортотропні пластини, трипараметрична основа, функції стану переміщень і напружень, функції форми та сили, крайові та поверхневі вузли.

## EQUILIBRIUM ANALYSIS OF THIN ORTHOTROPIC PLATES ON A TRIPARAMETRIC ELASTIC BASE

M. Delyavskyy<sup>1</sup>, S. Mikulich<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Lutsk National Technical University

**Abstract:** The paper deals with the problem of studying the static equilibrium of thin orthotropic rectangular plates resting on a three-parameter elastic base. To solve this problem, a mathematical model of a thin reinforced concrete slab as a homogeneous orthotropic plate with an averaged Huber's modulus is constructed. A mathematical model of a three-parameter elastic foundation is proposed, taking into account the friction between the lower surface of the plate and the foundation. The developed method for analyzing the equilibrium of such plates allows obtaining an exact solution of the equilibrium equation, taking into account the boundary and surface conditions at individual nodes. During the numerical implementation of the developed approach, a procedure for generating such nodes is proposed. The solution of the equilibrium equation is presented as the sum of the deflection force functions and its shape functions multiplied by unknown parameters, which are interpreted as the degree of freedom of the plate. This approach made it possible to satisfy the boundary and surface conditions with high accuracy.





On the basis of the obtained solutions, the stress-strain state of a thin homogeneous orthotropic square plate completely clamped along the contour is analyzed for the case when the plate is subjected to a distributed load on its upper part and rests on an elastic base. On the basis of the solutions obtained in this work and formulas obtained by other authors, a comparative analysis of the results for the case of three types of elastic bases is carried out: a three-parameter base, a Winkler base, and a plate with a free bottom surface. Based on numerical calculations, it was found that the elastic base significantly reduces the deflection, tilt and moment in the plate. The results obtained for the Winkler model and the three-parameter model differ by 3% and 1,5% for deflections and moments, respectively. It is established that the results obtained within the proposed model practically do not depend on the coefficient of friction between the lower surface of the plate and the foundation.

**Keywords:** thin orthotropic plates, three-parameter basis, state functions of displacements and stresses, shape and force functions, edge and surface nodes.

## 1 ВСТУП

Тонкі ортотропні пластини, що спираються на пружні основи, є моделями найбільш поширених елементів конструкцій, що використовуються в різних галузях промисловості та будівництва. Зокрема, такі пластини є моделями фундаментних балок і плит. Розробка методів оцінки прогинів прямокутних ортотропних пластин на пружній основі дозволяє впровадити отримані результати при проектуванні багатьох інженерно-геологічних споруд та конструкцій.

У літературі авторами використовуються різні моделі пружної основи. Найпростішою є модель Вінклера, що найбільш часто використовується в інженерних розрахунках. Це найпростіша модель, в якій передбачається лінійна залежність між прогином пластини та реакцією основи. Проте, використання цієї моделі дозволяє отримати точний розв'язок лише для балок на сталій пружній основі. У випадку побудови розв'язків задачі згину тонких пластин виникають певні труднощі, що пов'язані з наближеністю основних гіпотез при розв'язанні задач класичної теорії згину Кірхгофа. Це теорія деформування нульового порядку, оскільки тут нехтується вплив деформації зсуву.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Аналіз згину пластин Кірхгофа, що опираються на пружну основу Вінклера, виконано авторами у роботах [1] та [2] з використанням варіаційного методу Галоркіна-Власова. Методику розв'язання задачі про тонку прямокутну ортотропну пластину, що спирається на основу Вінклера, розроблено в роботі [3].

Аналіз згину довільно навантаженої повністю затиснутої ортотропної прямокутної пластини, що спирається на пружну основу, виконано також у роботі [4]. Розв'язок отримано в рамках класичної теорії пластин за допомогою методу скінченних інтегральних перетворень. Числові результати добре узгоджуються з іншими результатами, представленими в літературі. В роботі [5] проаналізовано динамічну поведінку пластини на основі Вінклера. Пластина навантажується силами, що виникають при посадці літака. Ефективність запропонованого підходу продемонстровано в чисельних дослідженнях.

У роботі [6] визначено основні недоліки моделі Вінклера: вихід ґрунту є не тільки під конструкцією, але й майже зовні; рівномірно навантажена конструкція не прогинається однаково, а згинається; коефіцієнт земляного полотна не є сталим, а залежить від конфігурації контактної поверхні та зовнішнього навантаження.

Використовуючи модель Власова, у роботах [7] та [8] вивчено поведінку прямокутної пластини на пружній основі. Дослідження виконувалися за допомогою методу скінченних елементів.

М. Celik та А. Saygun у [9] розробили концепцію скінченних елементів для пластин, що лежать на пружній основі, яка враховує деформації зсуву в поведінці пластини.

Найвідомішою моделлю пружної основи, яка широко використовується в інженерних розрахунках, є двопараметрична модель Вінклера-Пастернака. Вона має два параметри жорсткості: коефіцієнт поперечної жорсткості Вінклера і коефіцієнт зсувної жорсткості Пастернака.

У літературі отримано велику кількість розв'язків для круглих пластин. В роботі [10] розглядається задача згину круглої пластини, що спирається на двопараметричну пружну основу Власова. Розглядаються два типи моделей основи: поперечно ізотропна основа у вертикальному напрямку та основа Гібсона в

горизонтальному. Для розв'язання задачі використовується ітераційна процедура. Як приклад розглянуто пластину, що спирається на традиційну основу Власова, на яку діє зосереджена сила, прикладена в центрі пластини. В роботі [11] отримано розв'язок задачі згину круглої пластини, обпертої на двопараметричну модель пружної основи Вінклера – Пастернака, до нижньої поверхні якої прикладено горизонтальну та вертикальну сили тіла, що діють від основи. В роботі [12] в рамках модифікованої моделі Власова з використанням ітераційного методу розв'язано задачу дослідження статичної рівноваги кругових тонких пластин, що опираються на пружну основу Гібсона. Досліджено вплив неоднорідності ґрунту на згин пластини.

У роботі [13] авторами було дослідження задачі згину прямокутної пластини, що лежить на пружній основі, в рамках модифікованої моделі Власова. При дослідженні використано чотиривузловий згинальний елемент прямокутної пластини. Матриці жорсткості пластини та основи оцінювалися за допомогою МСЕ. Отримані результати добре узгоджуються з іншими результатами, доступними в літературі.

Р. Baofeng та ін. у [14] отримав розв'язок задачі про защемлену прямокутну тонку пластину, що спирається на пружну основу за допомогою методу симплектичної суперпозиції. Цей метод придатний для дослідження деформацій та зусиль у пластинчастих елементах за різних граничних умов.

Уточнена теорія тонких пластин, що опираються на пружну основу, розглянута С. Valabhan та А. Zenkour в роботах [15] та [16]. F. M-H. Huan та D. P. Thambiratnam у [17] проведено аналіз напруженого стану пластини на пружній основі за допомогою методу скінченних смуг.

М. Delyavskyy у працях [3], [18]-[21] розвинуто метод тримання розв'язків задач згину для тонких ортотропних пластинчастих елементів прямокутної форми на пружній основі Вінклера за використання макроелементного методу.

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

**Метою** дослідження є побудова розв'язків задачі про дослідження статичної рівноваги тонких ортотропних прямокутних плит, що спираються на трипараметричну пружну основу.

Для розв'язання поставленої задачі у роботі сформульовано та вирішено наступні **завдання**:

- 1) побудовано математичну модель тонкої залізобетонної плити як однорідної ортотропної з усередненим модулем Губера;
- 2) запропоновано математичну модель трипараметричної пружної основи з урахуванням тертя між нижньою поверхнею плити та основою;
- 3) розроблено метод аналізу рівноваги, що дозволяє отримати точний розв'язок задачі з урахуванням граничних та поверхневих умов в окремих вузлах;
- 4) запропоновано процедуру генерації вузлових елементів, що дозволяє ефективне проведення числового аналізу з високою точністю.

Розв'язок рівняння рівноваги представлено у вигляді суми силових функцій прогину та його функцій форми, помножених на невідомі параметри, які трактуються як ступінь свободи пластини. Такий підхід дозволив задовольнити граничні та поверхневі умови.

### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянемо задачу поперечного згину тонкої ортотропної прямокутної пластини товщиною  $h$ , що знаходиться під дією нормально розподіленого зовнішнього навантаження  $q(x_1, x_2)$  та  $p(x_1, x_2)$  прикладеного до верхньої та нижньої поверхні

пластини відповідно. Віднесемо її до декартової системи координат  $Ox_1x_2x_3$  розмістивши початок координат у центрі ваги пластини. Осі координат спрямуємо так, як показано на рис. 1.

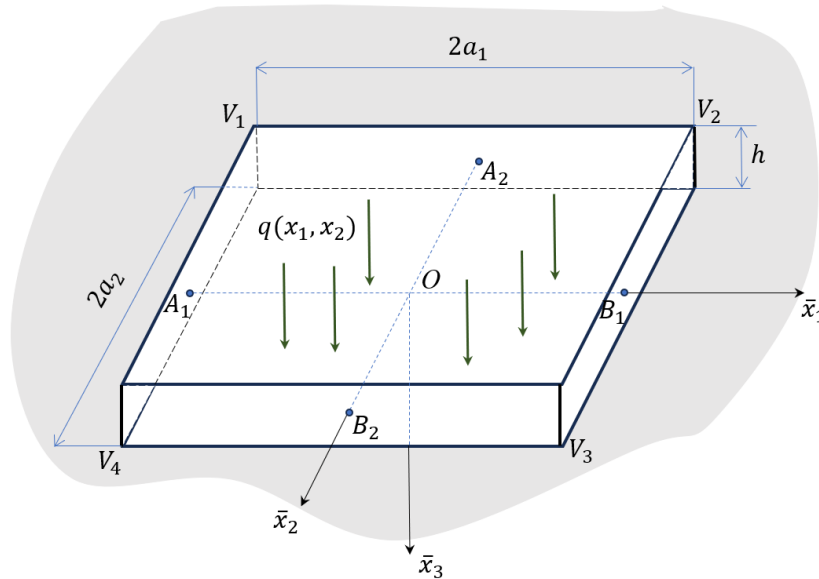


Рис. 1. Модель тонкої прямокутної пластини на пружній основі

Рівняння рівноваги такої пластини записуються у вигляді

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2D_{33} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = q - p, \quad (1)$$

де

$$D_{33} = (D_{12} + 2D_{66}). \quad (2)$$

Тут  $D_{11}$ ,  $D_{22}$  – згинальна жорсткість відносно осей  $x_1$  та  $x_2$ ,  $D_{66}$  – крутильна жорсткість,  $D_{12}$  – додаткова характеристика жорсткості,  $w(x_1, x_2)$  – прогин пластини. Пластина піддається дії зовнішнього розподіленого навантаження з інтенсивністю  $q(x_1, x_2)$ , що прикладене до верхньої межі пластини. До нижньої поверхні прикладені реакції основи  $r_{33}$ . Якщо пластина лежить на пружній основі (рис.1), то  $p(x_1, x_2) = r_{33}$ , тобто реакція основи, спрямована на нижню поверхню пластини, викликана прогином пластини.

Найпростішою моделлю пружної основи є модель Вінклера, де передбачається, що реакція основи пропорційна прогину плити

$$r_{33} = K_0 w, \quad (3)$$

де параметр  $K_0$  є коефіцієнтом жорсткості основи. Значення цього коефіцієнта для різних типів пружної основи наведено Z. Koczowski у [36].

Відповідно до моделі Вінклера, до нижньої поверхні плити прикладаються дотичні реакції,  $r_{\alpha 3}$ , ( $\alpha = 1, 2$ ) які викликані зсувами між нижньою поверхнею плити та фундаментом. Припустимо, що вони пропорційні дотичним переміщенням  $u_1, u_2$  нижньої поверхні пластини

$$r_{13} = -K_1 u_1|_{x_3=h/2}, \quad r_{23} = -K_2 u_2|_{x_3=h/2}. \quad (4)$$

Параметри  $K_0, K_1, K_2$  – коефіцієнти пружної основи. У цьому випадку маємо, що

$$p(x_1, x_2) = r_{33} + r_{13} + r_{23}. \quad (5)$$

Враховуючи, що в теорії тонких пластин дотичні переміщення визначають як похідну від прогину пластини, можна переписати співвідношення (4) у вигляді

$$r_{13} = \frac{h}{2} K_1 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad r_{23} = \frac{h}{2} K_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad (6)$$

де  $K_1, K_2$  – є зсувні жорсткості у двох взаємно перпендикулярних напрямках.

Підставляючи співвідношення (3), (6) в рівняння (1) отримаємо неоднорідне просторове диференціальне рівняння четвертого порядку, яке описує поведінку тонких ортотропних плит, обперних на трипараметричну пружну основу

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2D_{33} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + K_0 w + K_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + K_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} = q. \quad (7)$$

На відміну від відомих у літературі рівнянь, воно містить парні та непарні похідні прогину пластини, що істотно ускладнює модель.

Загальний розв'язок рівняння (1) подамо у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння  $w_0$  та частинного розв'язку неоднорідного  $w_*$

$$w = w_0 + w_* \quad (8)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння запишемо у тензорному вигляді

$$w_0 = f_{kps}(x_s) \cdot T_{kp(3-s)}(x_{3-s}). \quad (9)$$

де  $f_{kps}(x_s)$  є невідомими функціями і  $T_{kp(3-s)}(x_s)$  – задані тригонометричні функції

$$T_{k1s}(x_s) = \sin(\delta_{ks} x_s); T_{k2s}(x_s) = \cos(\delta_{ks} x_s) \quad (10)$$

Параметри  $\delta_{ks}$  розраховуються за наступними формулами

$$\delta_{ks} = \frac{(2k-1)\pi}{2a_s}, \quad (11)$$

де  $a_s$  - це розміри пластини,  $p = 1, 2; s = 1, 2; k = 1, \dots, K$ . Параметр  $K$  визначає точність розв'язку. Тут використовується правило підсумовування Ейнштейна.

Переписуючи вирази для (9) щодо індексів  $p, s$  отримуємо

$$w_0(x_1, x_2) = f_{k21}(x_1) \cos(\delta_{k2} x_2) + f_{k11}(x_1) \sin(\delta_{k2} x_2) + f_{k22}(x_2) \cos(\delta_{k1} x_1) + f_{k12}(x_2) \sin(\delta_{k1} x_1). \quad (12)$$

Підставляючи представлення (10) і (12) у однорідне рівняння, зведено задачу до розв'язання звичайного диференціального рівняння з чотирма невідомими функціями:

$$\begin{aligned} & D_{11} \left\{ f_{k21}^{(IV)}(x_1) \cos(\delta_{k2} x_2) + f_{k11}^{(IV)}(x_1) \sin(\delta_{k2} x_2) + \right. \\ & \left. D_{k1}^4 f_{k22}(x_2) \cos(\delta_{k1} x_1) + \gamma_{k1}^4 f_{k12}(x_2) \sin(\delta_{k1} x_1) \right\} - \\ & - 2D_{33} \left\{ \delta_{k2}^2 f_{k21}''(x_1) \cos(\delta_{k2} x_2) + \delta_{k2}^2 f_{k11}''(x_1) \sin(\delta_{k2} x_2) + \right. \\ & \left. + \delta_{k1}^2 f_{k22}''(x_2) \cos(\delta_{k1} x_1) + \delta_{k1}^2 f_{k12}''(x_2) \sin(\delta_{k1} x_1) \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+D_{22} \left\{ \delta_{k_2}^4 f_{k_{21}}(x_1) \cos(\delta_{k_2} x_2) + \delta_{k_2}^4 f_{k_{11}}(x_1) \sin(\delta_{k_2} x_2) + \right. \\
 &+ f_{k_{22}}(x_2) \cos(\delta_{k_1} x_1) + f_{k_{12}}^{(IV)}(x_2) \sin(\delta_{k_1} x_1) \left. \right\} + \\
 &+K_0 \left\{ f_{k_{21}}(x_1) \cos(\delta_{k_2} x_2) + f_{k_{11}}(x_1) \sin(\delta_{k_2} x_2) + \right. \\
 &+ f_{k_{22}}(x_2) \cos(\delta_{k_1} x_1) + f_{k_{12}}(x_2) \sin(\delta_{k_1} x_1) \left. \right\} + \\
 &+K_1 \left\{ f'_{k_{21}}(x_1) \cos(\delta_{k_2} x_2) + f'_{k_{11}}(x_1) \sin(\delta_{k_2} x_2) - \right. \\
 &-\delta_{k_1} f_{k_{22}}(x_2) \sin(\delta_{k_1} x_1) + \delta_{k_1} f_{k_{12}}(x_2) \cos(\delta_{k_1} x_1) \left. \right\} + \\
 &+K_2 \left\{ -\delta_{k_2} f_{k_{22}}(x_1) \sin(\delta_{k_2} x_2) + \delta_{k_2} f_{k_{11}}(x_1) \cos(\delta_{k_2} x_2) + \right. \\
 &+ f'_{k_{22}}(x_2) \cos(\delta_{k_1} x_1) + f'_{k_{12}}(x_2) \sin(\delta_{k_1} x_1) \left. \right\} = 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Відокремлюючи змінні, отримуємо систему з звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку, яку можна розділити на дві незалежні системи диференціальних рівнянь щодо невідомих функцій  $f_{kps}(x_s)$ ,  $s = 1, 2$ ,  $p = 1, 2$ :

$$\begin{aligned}
 &D_{11} f_{k_{21}}^{(IV)}(x_1) - 2D_{33} \delta_{k_2}^2 f_{k_{21}}''(x_1) + (D_{22} \delta_{k_2}^4 + K_0) f_{k_{21}}(x_1) + \\
 &+ K_1 f'_{k_{21}}(x_1) + K_2 \delta_{k_2} f_{k_{11}}(x_1) = 0 \\
 &D_{11} f_{k_{11}}^{(IV)}(x_1) - 2D_{33} \delta_{k_2}^2 f_{k_{11}}''(x_1) + (D_{22} \delta_{k_2}^4 + K_0) f_{k_{11}}(x_1) + \\
 &+ K_1 f'_{k_{11}}(x_1) - K_2 \delta_{k_2} f_{k_{21}}(x_1) = 0 \\
 &(D_{11} \delta_{k_1}^4 + K_0) f_{k_{22}}(x_2) - 2D_{33} \delta_{k_1}^2 f_{k_{22}}''(x_2) + D_{22} f_{k_{22}}^{(IV)}(x_2) + \\
 &+ K_1 \delta_{k_1} f_{k_{12}}(x_2) + K_2 f'_{k_{22}}(x_2) = 0 \\
 &(D_{11} \delta_{k_1}^4 + K_0) f_{k_{12}}(x_2) - 2D_{33} \delta_{k_1}^2 f_{k_{12}}''(x_2) + D_{22} f_{k_{12}}^{(IV)}(x_2) - \\
 &- K_1 \delta_{k_1} f_{k_{22}}(x_2) + K_2 f'_{k_{12}}(x_2) = 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

Розв'язки цих систем представимо у вигляді:

$$f_{kps}(x_s) = \tilde{R}_{kps} \exp(\lambda_{kps} x_s), \quad k = 1, \dots, K, \quad p = 1, 2; \quad s = 1, 2 \tag{15}$$

Підсумовування щодо індексів  $k$ ,  $p$ ,  $s$  не виконується.

І підставляючи (15) у рівня (14) та враховуючи, що  $\exp(\lambda_{kps} x_s) \neq 0$  зведемо озв'язання задачі до системи лінійних алгебраїчних рівняння відносно невідомих коефіцієнтів  $\tilde{R}_{k1s}$  та  $\tilde{R}_{k2s}$ ,  $s = 1, 2$

$$\begin{aligned}
 &\tilde{R}_{k11} (D_{11} \lambda_{k1}^4 - 2D_{33} \delta_{k_2}^2 \lambda_{k1}^2 + K_1 \lambda_{k1} + D_{22} \delta_{k_2}^4 + K_0) - \tilde{R}_{k21} K_2 \delta_{k_2} = 0, \\
 &\tilde{R}_{k11} K_2 \delta_{k_2} + \tilde{R}_{k21} (D_{11} \lambda_{k1}^4 - 2D_{33} \delta_{k_2}^2 \lambda_{k1}^2 + K_1 \lambda_{k1} + D_{22} \delta_{k_2}^4 + K_0) = 0; \\
 &\tilde{R}_{k12} (D_{22} \lambda_{k2}^4 - 2D_{33} \delta_{k_1}^2 \lambda_{k2}^2 + K_2 \lambda_{k2} + D_{11} \delta_{k_1}^4 + K_0) - \tilde{R}_{k22} K_1 \delta_{k_1} = 0, \\
 &\tilde{R}_{k12} K_1 \delta_{k_1} + (D_{22} \lambda_{k2}^4 - 2D_{33} \delta_{k_1}^2 \lambda_{k2}^2 + K_2 \lambda_{k2} + D_{11} \delta_{k_1}^4 + K_0) \tilde{R}_{k22} = 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

(16) має ненульовий розв'язок коли визначник системи рівний нулю. З урахуванням цього отримуємо характеристичне рівняння для параметрів  $\lambda_{ks}$  виду:

$$\begin{aligned} (D_{11}\lambda_{k1}^4 - 2D_{33}\delta_{k2}^2\lambda_{k1}^2 + K_1\lambda_{k1} + (\delta_{k2}^4 D_{22} + K_0))^2 + (K_2\delta_{k2})^2 &= 0 \\ (D_{22}\lambda_{k2}^4 - 2D_{33}\delta_{k1}^2\lambda_{k2}^2 + K_2\lambda_{k2} + (\delta_{k1}^4 D_{11} + K_0))^2 + (K_1\delta_{k1})^2 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

(17) є алгебраїчними рівняннями восьмого порядку і мають лише комплексно-спряжені корені

$$\lambda_{ksv} = \alpha_{ksv} + i\beta_{ksv}; \lambda_{ks(v+4)} = \bar{\lambda}_{ksv} \quad v = 1 \div 4; \quad (18)$$

Щоб отримати дійні розв'язки (15) усі коефіцієнти

$$\tilde{R}_{kpsv} = \tilde{C}_{kpsv} + i\tilde{S}_{kpsv} \quad (v = 1, \dots, 4)$$

мають бути комплексно-спряжені. В результаті системи рівнянь (16) стають лінійно залежними. Вважатимемо, що незалежними є наступні рівняння:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{k11} (D_{11}\lambda_{k1}^4 - 2\delta_{k2}^2\lambda_{k1}^2 + K_1\lambda_{k1} + D_{22}\delta_{k2}^4 + K_0) - \tilde{R}_{21}K_2\delta_{k2} &= 0, \\ \tilde{R}_{k12} (D_{22}\lambda_{k2}^4 - 2D_{33}\delta_{k1}^2\lambda_{k2}^2 + K_2\lambda_{k2} + D_{11}\delta_{k1}^4 + K_0) - \tilde{R}_{k22}K_1\delta_{k1} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Як показано раніше, коефіцієнти  $\tilde{R}_{kp1v}, \tilde{R}_{kp2v}$  ( $p = 1, 2$ ), також є лінійно залежними. Як незалежні виберемо коефіцієнти  $R_{k1sv}$  функцій  $f_{k1s}(x_s)$ , які трактуватимемо як ступені вільності прогину пластини.

Розрахуємо степені комплексних коренів  $\lambda_{ksv} = \alpha_{ksv} + i\beta_{ksv}$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{ksv}^2 &= (\alpha_{ksv}^2 - \beta_{ksv}^2) + i(2\alpha_{ksv}\beta_{ksv}), \\ \lambda_{ksv}^3 &= (\alpha_{ksv}^3 - 3\alpha_{ksv}\beta_{ksv}^2) + i(-\beta_{ksv}^3 + 3\alpha_{ksv}^2\beta_{ksv}), \\ \lambda_{ksv}^4 &= (\alpha_{ksv}^4 + \beta_{ksv}^4 - 6\alpha_{ksv}^2\beta_{ksv}^2) + i(4\alpha_{ksv}^3\beta_{ksv} - 4\alpha_{ksv}\beta_{ksv}^3). \end{aligned} \quad (20)$$

та розділимо першу з рівнянь (19) на дійсну та уявну частини. У результаті ми отримаємо систему двох алгебраїчних рівнянь щодо чотирьох загальних параметрів  $\tilde{C}_{kpsv}, \tilde{S}_{kpsv}, v = 1 \div 4 \quad p = 1, 2$  і виразимо коефіцієнти  $\tilde{C}_{kpsv}$  і  $\tilde{S}_{kpsv}$  через коефіцієнти  $\tilde{C}_{k1sv}$  і  $\tilde{S}_{k1sv}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{k21v} &= K_{k11v} \cdot \tilde{C}_{k11v} - L_{k11v} \cdot \tilde{S}_{k11v}, \\ \tilde{S}_{k21v} &= L_{k11v} \cdot \tilde{C}_{k11v} + K_{k11v} \cdot \tilde{S}_{k11v} \end{aligned} \quad (21)$$

Виконавши аналогічні перетворення для другого рівняння системи (19), отримаємо:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{k22v} &= K_{k12v} \cdot \tilde{C}_{k12v} - L_{k12v} \cdot \tilde{S}_{k12v}, \\ \tilde{S}_{k22v} &= L_{k12v} \cdot \tilde{C}_{k12v} + K_{k12v} \cdot \tilde{S}_{k12v}. \end{aligned} \quad (21')$$

Тут введено такі позначення:

$$\begin{aligned} K_{k11v} &= \frac{[D_{11} \operatorname{Re}(\lambda_{k1v}^4) - 2D_{33}\delta_{k2}^2 \operatorname{Re}(\lambda_{k1v}^2) + K_1 \operatorname{Re}(\lambda_{k1v}) + D_{22}\delta_{k2}^4 + K_0]}{K_2\delta_{k2}}, \\ L_{k11v} &= \frac{[D_{11} \operatorname{Im}(\lambda_{k1v}^4) - 2D_{33}\delta_{k2}^2 \operatorname{Im}(\lambda_{k1v}^2) + K_1 \operatorname{Im}(\lambda_{k1v})]}{K_2\delta_{k2}}, \end{aligned}$$

$$K_{k12\nu} = \frac{\left[ D_{22} \operatorname{Re}(\lambda_{k2\nu}^4) - 2D_{33} \delta_{k1}^2 \operatorname{Re}(\lambda_{k2\nu}^2) + K_2 \operatorname{Re}(\lambda_{k2\nu}) + D_{11} \delta_{k1}^4 + K_0 \right]}{K_1 \delta_k^{[1]}},$$

$$L_{k12\nu} = \frac{\left[ D_{22} \operatorname{Im}(\lambda_{k2\nu}^4) - 2D_{33} \delta_{k1}^2 \operatorname{Im}(\lambda_{k2\nu}^2) + K_2 \operatorname{Im}(\lambda_{k2\nu}) \right]}{K_1 \delta_{k1}}.$$

При цьому ми тотожно задовольняємо систему рівнянь (16) і отримуємо точний розв'язок диференціального рівняння, який описує стан рівноваги тонкої ортотропної пластини, що спирається на трипараметричну пружну основу.

Введемо нові позначення

$$\tilde{C}_{k1sv} = R_{ksv}, \quad 2\tilde{S}k1sv = -R_{ks(v+4)} \quad (22)$$

де  $R_{ksv}, R_{ks(v+4)}$  - дійсні невідомі, що характеризують ступінь свободи прогину пластини. Використовуючи отримані залежності після громіздких перетворень ми виразимо розв'язок рівнянь (15) у вигляді:

$$f_{k1s}(x_s) = R_{ksv} F_{ksv}(x_s) + R_{ks(v+4)} \Phi_{ksv}(x_s)$$

$$f_{k2s}(x_s) = R_{ksv} \Psi_{ksv}(x_s) + R_{ks(v+4)} \Omega_{ksv}(x_s), \nu = 1, \dots, 4 \quad (23)$$

та диференціальних рівнянь (14) через фундаментальні функції:

$$F_{ksv}(x_s) = \frac{\exp(\alpha_{ksv} x_s) \cos(\beta_{ksv} x_s)}{\exp(\alpha_{ksv} a_s)}; \quad \Phi_{ksv}(x_s) = \frac{\exp(\alpha_{ksv} x_s) \sin(\beta_{ksv} x_s)}{\exp(\alpha_{ksv} a_s)};$$

$$\Psi_{ksv}(x_s) = K_{k1sv} F_{ksv}(x_s) - K_{k2sv} \Phi_{ksv}(x_s); \quad (24)$$

$$\Omega_{ksv}(x_s) = K_{k1sv} \Phi_{ksv}(x_s) + K_{k2sv} F_{ksv}(x_s).$$

Використовуючи співвідношення (24) запишемо загальний розв'язок однорідного рівняння (7) у вигляді

$$w_0(x_1, x_2) = R_{ksv} W_{ksv}(x_1, x_2) + R_{ks(v+4)} W_{ks(v+4)}(x_1, x_2). \quad (25)$$

Введені функції:

$$W_{ksv}(x_1, x_2) = \Psi_{ksv}(x_s) \cos(\delta_{k(3-s)} x_{(3-s)}) + F_{ksv}(x_s) \sin(\delta_{k(3-s)} x_{(3-s)})$$

$$W_{ks(v+4)}(x_1, x_2) = \Omega_{ksv}(x_s) \cos(\delta_{k(3-s)} x_{(3-s)}) + \Phi_{ksv}(x_s) \sin(\delta_{k(3-s)} x_{(3-s)})$$

$$W_{ksv}(x_1, x_2) = \Psi_{ksv}(x_s) \cos(\delta_{k(3-s)} x_{(3-s)}) + F_{ksv}(x_s) \sin(\delta_{k(3-s)} x_{(3-s)})$$

назвемо функціями форми прогину пластини, а введені коефіцієнти  $R_{kpsv}$  - як ступені вільності прогину пластини. Оскільки  $\max: k = k, p = 2, s = 2, v = 4$ , то їх загальна кількість дорівнює  $16K$ .

Щоб отримати частинний розв'язок диференціального рівняння (7), ми спочатку розкладаємо зовнішнє навантаження  $q(x_1, x_2)$  у тригонометричні ряди Фур'є

$$q(x_1, x_2) = Q_{pqmn} T_{pml}(x_1) T_{qn2}(x_2), \quad (26)$$

де вводяться наступні позначення:

$$T_{pml}(x_1) = \begin{cases} \sin(\delta_{1m} x_1), & p = 1, \\ \cos(\delta_{1m} x_1), & p = 2 \end{cases} \quad T_{qn2}(x_2) = \begin{cases} \sin(\delta_{2n} x_2), & q = 1, \\ \cos(\delta_{2n} x_2), & q = 2 \end{cases}$$



$$\delta_{sm} = \frac{(2m-1)\pi}{2a_s}; \quad s = 1, 2.$$

Коефіцієнти ряду (26) визначаються за формулами:

$$Q_{pqmn} = \frac{1}{a_1 a_2} \int_{-a_1}^{a_1} \int_{-a_2}^{a_2} q(x_1, x_2) T_{pm1}(x_1) T_{qn2}(x_2) dx_2 dx_1;$$

Частинний розв'язок рівняння (7) представимо в такому ж вигляді

$$w_* = W_{pqmn} T_{pm1}(x_1) T_{qn2}(x_2) \quad (27)$$

Цей розв'язок описує рівновагу внутрішніх реакцій і зовнішнього навантаження, прикладених в одних і тих же точках на поверхні пластини. Підставляючи вирази для функцій форми прогину з урахування тригонометричних розкладів у рівняння (7), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь четвертого порядку відносно невідомих коефіцієнтів  $W_{11mn}, W_{12mn}, W_{21mn}, W_{22mn}$ :

$$\begin{aligned} (D_{11}\delta_{m1}^4 + 2D_{33}\delta_{m1}^2\delta_{n2}^2 + D_{22}\delta_{n2}^4 + K_0)W_{22mn} + K_1\delta_{m1}W_{12mn} + K_2\delta_{n2}W_{21mn} &= Q_{22mn}, \\ (D_{11}\delta_{m1}^4 + 2D_{33}\delta_{m1}^2\delta_{n2}^2 + D_{22}\delta_{n2}^4 + K_0)W_{21mn} + K_1\delta_{m1}W_{11mn} - K_2\delta_{n2}W_{22mn} &= Q_{21mn}, \\ (D_{11}\delta_{m1}^4 + D_{33}2\delta_{m1}^2\delta_{n2}^2 + D_{22}\delta_{n2}^4 + K_0)W_{12mn} - K_1\delta_{m1}W_{22mn} + K_2\delta_{n2}W_{11mn} &= Q_{12mn}, \\ (D_{11}\delta_{m1}^4 + 2D_{33}\delta_{m1}^2\delta_{n2}^2 + D_{22}\delta_{n2}^4 + K_0)W_{11mn} - W_{21mn}K_1\delta_{m1} - K_2\delta_{n2}W_{12mn} &= Q_{11mn}. \end{aligned}$$

На основі отриманих розв'язків за використання відомих з теорії тонких ортотропних пластин формул, можна легко отримати вирази для визначення деформацій та внутрішніх силових факторів для моделі пластини, що спирається на трипараметричну пружну основу.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

У якості тестування розробленого методу дослідимо розподіл прогинів та моментів у прямокутній залізобетонній плиті, що рівномірно навантажена та затиснена вздовж границі. Прийmemo, що розміри плити  $2a_1 = 6\text{м}$ ,  $2a_2 = 4\text{м}$ , товщина  $h = 0,2\text{м}$ . Розрахунки виконаємо для випадку, коли інтенсивність рівномірно-розподіленого  $q = 20\text{кН} / \text{м}^2$ . Плита складається з бетонної матриці з модулем Юнга  $E_c = 2,3 \cdot 10^{10} \text{Н} / \text{м}^2$  та коефіцієнтом Пуассона  $\nu_c = 0,2$ , яка у двох взаємно перпендикулярних напрямках армована сталевими прутами з модулем  $E_s = 2 \cdot 10^{11} \text{Н} / \text{м}^2$  та коефіцієнтом Пуассона  $\nu_s = 0,3$  частки в плиті в напрямках осей  $x_1$  та  $x_2$  становлять  $\mu_1 = 0,2\%$ ,  $\mu_2 = 0,4\%$ , а відстані від центрів підсилення до середньої площини плити  $d_1 = 0,06\text{м}$  та  $d_2 = 0,046\text{м}$  відповідно.

Використовуючи усереднені модулі поперечно-армованої залізобетонної плити, запропоновані Т. М. Huber у [22], заміниmo гетерогенний композит на однорідний ортотропний із заданими ефективними (усередненими) модулями [23]:

$$D_{11} = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \left( \frac{h^3}{12} + \frac{n\mu_1}{1+n\mu_1} h d_1^2 \right), \quad D_{22} = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \left( \frac{h^3}{12} + \frac{n\mu_2}{1+n\mu_2} h d_2^2 \right)$$

$$\frac{D_{12}}{D_{11}} = \nu_c \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}}, \quad \frac{D_{66}}{1 - \nu_c^2} = \nu_c \frac{\sqrt{D_{11} D_{22}}}{2(1 + \nu_c)}, \quad (28)$$

де  $n = \frac{E_s}{E_c}$  - відношення модуля Юнга арматури (сталі) та бетону. Коефіцієнт фундаменту  $K_0 = 10^7 \text{ H} / \text{м}^2$ .

Припустимо, що введені тут усереднені модулі є жорсткістю на вигин, скручування та змішану жорсткість ортотропного матеріалу, що входить до рівняння (1) - (2).

Усереднені значення жорсткостей приймалися відповідно рівними

$$D_{11} = 16366372 \text{ H} / \text{м}^2,$$

$$D_{22} = 16747508 \text{ H} / \text{м}^2,$$

$$D_{66} = 6622337 \text{ H} / \text{м}^2,$$

$$D_{12} = 3311168 \text{ H} / \text{м}^2.$$

Жорсткість залізобетонної плити розраховано за формулами Губера (28).

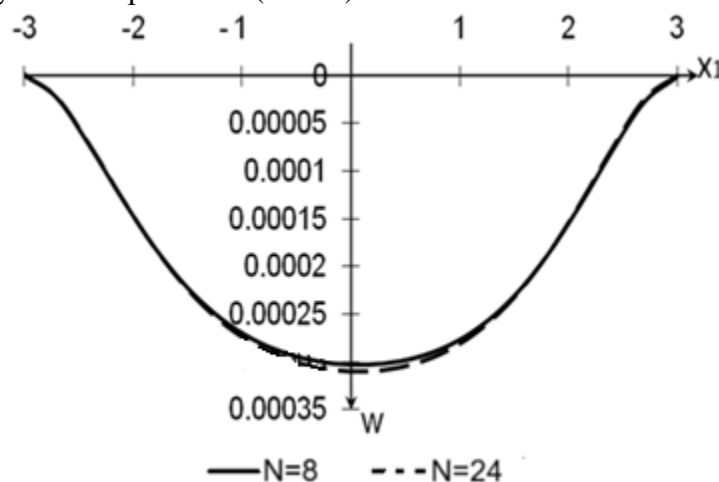
Крім того, при розрахунку враховується, що коефіцієнти фундаменту пов'язані наступним чином:

$$K_1 = \rho_1 K_0; \quad K_2 = \rho_2 K_0,$$

де  $\rho_1, \rho_2$  - коефіцієнти тертя між фундаментом і нижньою поверхнею плити. Припускається, що внаслідок ортотропії матеріалу пластини ці коефіцієнти різні в двох взаємно перпендикулярних напрямках. Відповідно до [23] коефіцієнт тертя бетону об ґрунт змінюється в діапазоні  $\rho = 0,3 \dots 0,6$  залежно від типу та стану ґрунту.

Розрахунки поведено для різної кількості крайових вузлів, рівномірно розподілених по контуру пластини. У першому наближенні ( $K=1$ ) було обрано ( $N=8$ ) вузлів, у другому ( $K=2$ ) - ( $N=16$ ) вузлів і так далі.

На рис.2 показано зміну прогину пластини в її центральній ділянці ( $x_2 = 0$ ) для першого ( $N=8$ ), другого та третього ( $N=24$ ) наближень.



**Рис. 2.** Прогин центральної ділянки ( $x_2 = 0$ ) пластини для різної кількості  $N$  крайових вузлів

Значення прогину в різних точках перерізу представлені в таблиці 1 для різної кількості наближень  $N$

**Таблиця 1**

Значення прогину пластини центральної ділянки пластини

$x_1$	Кількість вузлів			
	$N = 8$	$N = 24$	$N = 40$	$N = 160$
0	2.9724E-04	2.9876E-04	3.0357E-04	3.0358E-04
0,3	2.9612E-04	2.9763E-04	3.0221E-04	3.0221E-04
0,6	2.8996E-04	2.9144E-04	2.9526E-04	2.9527E-04
0,9	2.7757E-04	2.7898E-04	2.8166E-04	2.8167E-04
1,2	2.5716E-04	2.5848E-04	2.5979E-04	2.5980E-04
1,5	2.2698E-04	2.2814E-04	2.2802E-04	2.2803E-04
1,8	1.8588E-04	1.8683E-04	1.8536E-04	1.8537E-04
2,1	1.3476E-04	1.3545E-04	1.3284E-04	1.3285E-04
2,4	7.8188E-05	7.8588E-05	7.5262E-05	7.5264E-05
2,7	2.7027E-05	2.7165E-05	2.3976E-05	2.3965E-05
3	1.3032E-06	1.3099E-06	8.9465E-10	2.6149E-12

Аналіз результатів, представлених у таблиці 1, показує, що значення прогину центральної ділянки пластини практично не залежать від кількості крайових вузлів. Числові розрахунки показали, що результати розрахунків практично збігаються в третьому наближенні ( $N = 24$ ).

Проведені дослідження показали, що точність задоволення граничних умов прогину пластини вже в першому наближенні (8 вузлів на контурі пластини) дорівнює  $6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ . У двадцяти наближеннях (160 крайових вузлів) ця точність дорівнює  $3 \cdot 10^{-16} \text{ м}$ .

Використовуючи запропонований алгоритм розрахуємо величини нахилів  $u_1$  в окремих точках центрального перетину  $x_2 = 0$ . Відповідні результати розрахунків наведено у таблиці 2.

**Таблиця 2**

Величини нахилів  $u_1$  центрального перетину  
 $x_2 = 0$  плити

$x_1$	Кількість вузлових точок			
	$N=8$	$N=24$	$N=40$	$N=160$
0	-7.9226E-11	-8.1747E-11	-8.1819E-11	-8.1821E-11
0,3	1.5822E-06	1.7757E-06	1.7713E-06	1.7712E-06
0,6	3.4355E-06	3.7874E-06	3.7838E-06	3.7837E-06
0,9	5.7823E-06	6.2348E-06	6.2382E-06	6.2382E-06
1,2	8.7285E-06	9.2202E-06	9.2318E-06	9.2318E-06
1,5	1.2186E-05	1.2666E-05	1.2680E-05	1.2680E-05
1,8	1.5733E-05	1.6161E-05	1.6171E-05	1.6172E-05
2,1	1.8478E-05	1.8802E-05	1.8806E-05	1.8807E-05
2,4	1.8810E-05	1.8924E-05	1.8932E-05	1.8934E-05
2,7	1.4249E-05	1.3943E-05	1.3951E-05	1.3957E-05
3	1.1051E-06	2.2179E-07	4.3730E-08	-5.9944E-11

Отримані числові результати підтверджують ефективність та точність запропонованого підходу. Таким чином, граничні умови задачі задовольняються повністю. Максимальні значення нахилу для 8 і 160 вузлів відрізняються лише на 1,2 %.

Результати розрахунку величини моменту  $M_{11}$  у центральному перерізі плити представлені на рис. 3. Значення для 24 та 160 вузлів відрізняються на 0,13%.

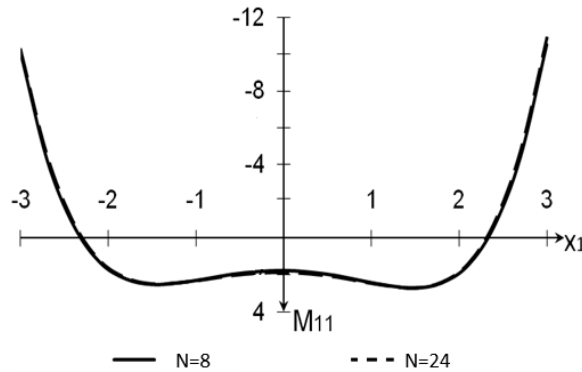


Рис. 3. Зміна моменту  $M_{11}$  в центральному перерізі плити

Використовуючи запропонований підхід розрахуємо прогини, нахили та моменти для різних випадків пружної основи. Дослідження проведемо для випадку квадратної залізобетонної плити, що затиснена по контуру та навантажена рівномірно-розподіленим навантаженням з інтенсивністю  $q$ . Відповідні результати максимальних величин прогинів, нахилів та моментів наведено у таблиці 3.

Таблиця 3

Порівняння результатів, отриманих для різних моделей пружної основи

Тип основи	Максимальні значення відповідних величин		
	$w$	$u_1$	$M_{11}$
Вільна поверхня	6.9040E-04	3.7724E-05	5385
Основа Вінклера	3.0614E-04	1.9030E-05	2621
Трипараметрична основа	2,9876E-04	1,8924E-05	2509

Розподіл величин прогинів та моментів в центральному перерізі квадратної залізобетонної плити, навантаженої рівномірно-розподіленим навантаженням, представлені на рис. 4

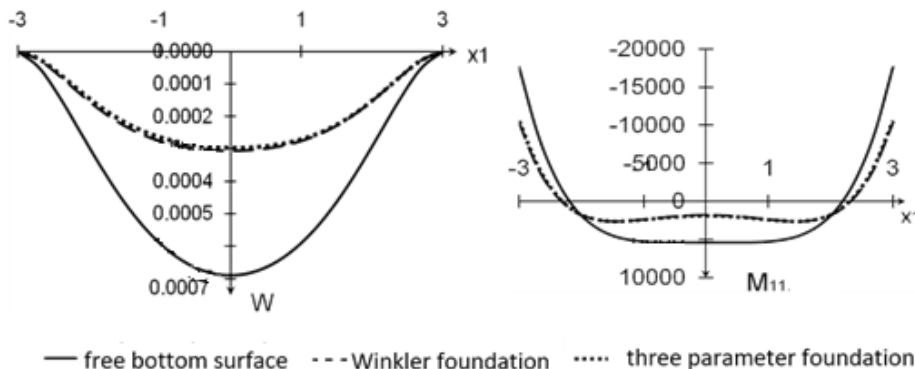


Рис. 4. Зміна переміщень (зліва) та моментів (справа) в центральному перерізі квадратної залізобетонної плити

Аналіз отриманих результатів дозволяє не тільки порівняти вплив пружної основи на розподіл переміщень та моментів у плиті, а і підтверджує точність та ефективність запропонованого підходу: величини прогинів та моментів відрізняються на 3 % та 1,5 % відповідно.

## 6 ВИСНОВКИ

У роботі побудовано математичну модель тонкої залізобетонної плити як однорідної ортотропної з усередненим модулем Губера. Запропоновано математичну модель трипараметричної пружної основи з урахуванням тертя між нижньою поверхнею плити та основою. На основі запропонованих у роботі методів дослідження проведено аналіз напружено-деформованого стану тонкої однорідної ортотропної квадратної пластини, повністю затиснутої по контуру у випадку, коли плита завантажується верхнім вантажем і спирається на пружну основу.

Розглянуто три типи пружних основ: трипараметрична основа, основа Вінклера та плита з вільною нижньою поверхнею. Проведено порівняльний аналіз результатів. Пружна основа істотно зменшує прогин, нахил і момент в плиті. Встановлено, що результати, отримані для основи моделі Вінклера та трьох параметричної відрізняються незначно: прогин на 3 % і момент лише на 1,5 %. Результати, отримані в рамках запропонованої моделі, практично не залежать від коефіцієнта тертя між нижньою поверхнею плити та фундаментом.

## 7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають будь-яких фінансових чи нефінансових інтересів щодо матеріалів, представлених у цій статті, які слід розкривати.

## Література

1. C.C. Ike, Flexural analysis of rectangular Kirchhoff plate on Winkler foundation using Galerkin-Vlasov variational method, *Math. Model. Eng. Probl.* 5 (2018) 83–92.
2. Y. G. Xiao and D. Feng, A fast computational algorithm for the element-free Galerkin method for a circular plate on elastic foundation subjected to concentrated load, *Chinese Journal of Solid Mechanics*, vol. 39, no. 5, (2018) 522–529.
3. M.V. Delyavskiy, N.V. Zdolbitska, L.I. Onyshko, A.P. Zdolbitskiy, Determination of the Stress-Strain State in Thin Orthotropic Plates on Winkler's Elastic Foundations, *Materials Science*, 50, № 6 (2015) 771–781.
4. A.M. Moniri Bidgoli, A.R. Daneshmehr, R. Kolahchi, Analytical bending solution of fully clamped orthotropic rectangular plates resting on elastic foundations by the finite integral transform method, *Journal of Applied and Computational mechanics*, v.1, issue 2 (2015) 52-58.
5. T.G. Konstantakopoulos, G.T. Michaltsos, Modelling and analysis of a plate on elastic foundation subjected to landing airplanes, *International Journal of Structural Stability and Dynamics* vol. 10, No. 01 (2019) 27-43.
6. . Wieghardt, Uber den Bolken auf nachgiebiger Unterlage, *K. Wieghardt ZAMM.* – 2, 3 (1992) 165–184.
7. A. Turhan, A consistent Vlasov model for analysis of plates on elastic foundations using the finite element method, PhD. dissertation, Graduate School of Texas Tech. University, Lubbock, TX, 1992.
8. R.C. Mishra, S.K. Chakrabarti, Shear and attachment effects on the behaviour of rectangular plates resting on tensionless elastic foundation, *Engineering Structures*, Volume 19(7) (1997) 551-567.
9. M. Celik M, A.A. Saygun, Method for the analysis of plates on a two-parameter foundation. *Int. J. Solids Struct.*, 36 (1999) 2891-2916.

10. Y. Feng, W. Fushed, J. Senging, W. Zijan, W. Zhen, Bending analysis of circular thin plates resting on elastic foundation using two modified Vlasov model, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China, 2020.
11. H. Karaşın, P. Gülkan, G. Aktas, A finite grid solution for circular plates on elastic foundations, *Journal of Civil Engineering* volume 19, (2015) 1157–1163.
12. Y. Feng, W. Ziyang, Y. Haifeng, L. Mengying, Iterative technique for circular thin plates on Gibson elastic foundation using modified Vlasov model, *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 9 (2019) 312-319.
13. A.K. Dutta, D. Bandyopadhyay, J.J. Mandal, Static analysis of thin rectangular plate resting on elastic foundation using modified Vlasov model, *Proceedings of the 12th Structural Engineering Convention (SEC 2022)*, NCDMM, MNIT Jaipur, India (2022) 1531-1537.
14. P. Baofeng, L. Rui, S. Yewang, B. Wang, Z. Yang. Analytical bending solutions of clamped rectangular thin plates resting on elastic foundations by the symplectic superposition method, *Applied Mathematics Letters*, 26 (2013) 355-361.
15. C.V.G. Valabhan, W.T. Straughan, Y.C. Das. Refined model for analysis of plate on elastic foundation. *Journal of Engineering Mechanics- ASCE* 117, 1991, 2830-2844
16. 20. A.M. Zenkour. The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundation. *International journal of Mechanical Science*. 51, 2009. 869-880
17. FM-H Huan, D.P. Thambiratnam, Analysis of plate resting on elastic supports by finite strip method, *Computers and Structures* 79, (2001) 2547-2557
18. M. Delyavskyy, K. Rosiński, Solution of non-rectangular plates with macroelement method, In: *AIP Conference Proceedings* 1822(1):020005, 2017.
19. M. Delyavskyy, K. Rosiński, N. Zdolbicka, O. Bilash, Macroelement analysis of thin orthotropic polygonal plate resting on the elastic Winkler's foundation, In: *AIP Conference Proceedings*, Volume 2077 (1):020014, 2019.
20. M. Delyavskyy, M. Rosiński, The New Approach to Analysis of Thin Isotropic Symmetrical Plates *Appl. Sci.* 10 (17), 5931, 2020.
21. M. Delyavskyy, J. Sobczak-Piąstka, K. Rosinski, D. Buchanec, Y. Famulyak, Solution of Thin Rectangular Plates with Various Boundary Conditions, In: *AIP Conf. Proc.* 2949, 020023, 2023.

## References

1. Ike, C. (2018) Flexural analysis of rectangular Kirchhoff plate on Winkler foundation using Galerkin-Vlasov variational method, *Math. Model. Eng. Probl.* 5, 83–92.
2. Xiao, Y., Feng, D. (2018) A fast computational algorithm for the element-free Galerkin method for a circular plate on elastic foundation subjected to concentrated load, *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 39, 5, 522–529.
3. Delyavskyy, M., Zdolbitska, N., Onyshko, L., Zdolbitskyi, A. (2015) Determination of the Stress-Strain State in Thin Orthotropic Plates on Winkler's Elastic Foundations, *Materials Science*, 50, 6 771–781.
4. Moniri Bidgoli, A., Daneshmehr, A., Kolehchi, R. (2015) Analytical bending solution of fully clamped orthotropic rectangular plates resting on elastic foundations by the finite integral transform method, *Journal of Applied and Computational mechanics*, 1, 2 52-58.
5. Konstantakopoulos, T., Michaltsos, G. (2019) Modelling and analysis of a plate on elastic foundation subjected to landing airplanes, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 10, 01, 27-43.
6. . Wieghardt, K. (1992) *Über den Bolken auf nachgiebiger Unterlage*, *ZAMM*, 2, 3 165–184.
7. Turhan, A. (1992) A consistent Vlasov model for analysis of plates on elastic foundations using the finite element method, PhD. dissertation, Graduate School of Texas Tech. University, Lubbock, TX,
8. Mishra, R., Chakrabarti, S. (1997) Shear and attachment effects on the behaviour of rectangular plates resting on tensionless elastic foundation, *Engineering Structures*, 19(7) 551-567.
9. Celik, M., Saygun, A. (1999) Method for the analysis of plates on a two-parameter foundation. *Int. J. Solids Struct.*, 36 2891-2916.

10. Feng, Y., Fushed, W., Senging, J., Zijan, W., Zhen, W. (2020) Bending analysis of circular thin plates resting on elastic foundation using two modified Vlasov model, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072.
11. Karaşin, H., Gülkan, P., Aktas, G. (2015) A finite grid solution for circular plates on elastic foundations, *Journal of Civil Engineering* 19 1157–1163.
12. Feng, Y., Ziyang, W., Haifeng, Y., Mengying, L. (2019) Iterative technique for circular thin plates on Gibson elastic foundation using modified Vlasov model, *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 9 312-319.
13. Dutta, A., Bandyopadhyay, D., Mandal, J. (2022) Static analysis of thin rectangular plate resting on elastic foundation using modified Vlasov model, *Proceedings of the 12th Structural Engineering Convention (SEC 2022), NCDMM, MNIT Jaipur, India* 1531-1537.
14. Baofeng, P., Rui, L., Yewang, S., Wang, B., Yang, Z. (2013) Analytical bending solutions of clamped rectangular thin plates resting on elastic foundations by the symplectic superposition method, *Applied Mathematics Letters*, 26 355-361.
15. Valabhan, C., Straughan, W., Das, Y. (1991) Refined model for analysis of plate on elastic foundation. *Journal of Engineering Mechanics- ASCE* 117 2830-2844
16. Zenkour, A. (2009) The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundation. *International journal of Mechanical Science*. 51, 869-880.
17. Huan, F., Thambiratnam, D. (2001) Analysis of plate resting on elastic supports by finite strip method, *Computers and Structures* 79 2547-2557.
18. M. Delyavskyy, K. Rosiński, Solution of non-rectangular plates with macroelement method, In: *AIP Conference Proceedings* 1822(1):020005, 2017.
19. Delyavskyy, M., Rosiński, K., Zdobicka, N., Bilash, O. (2019) Macroelement analysis of thin orthotropic polygonal plate resting on the elastic Winkler's foundation, In: *AIP Conference Proceedings*, 2077, 1 020014.
20. Delyavskyy, M., Rosiński, K. (2020) The New Approach to Analysis of Thin Isotropic Symmetrical Plates *Appl. Sci.* 10 (17), 5931.
21. Delyavskyy, M., Sobczak-Piąstka, J., Rosinski, K., Buchaniec D., Famulyak, Y. (2023) Solution of Thin Rectangular Plates with Various Boundary Conditions, In: *AIP Conf. Proc.* 2949, 020023.

**Делявський Михайло Володимирович**

Луцький національний технічний університет,  
д.т.н., професор  
вул. Потебні, 56 Луцьк, Україна, 43003  
delavski123@gmail.com,  
ORCID: 0000-0001-6952-0870

**Мікуліч Станіслав Борисович**

Луцький національний технічний університет,  
аспірант  
вул. Потебні, 56 Луцьк, Україна 43003  
svitlanarotko61@gmail.com,  
ORCID: 0009-0003-3287-217X

*Для посилань:*

Делявський М. В., Мікуліч С. Б. Аналіз рівноваги тонких ортотропних плита на трипараметричній пружній основі. *Механіка та математичні методи*, 2024. Т. 6. № 2. С. 31–46.

*For references:*

M. Delyavskyy, S. Mikulich. (2024). Equilibrium analysis of thin orthotropic plates on a triparametric elastic base. *Mechanics and mathematical methods*. VI (2). 31–46.

UDC 539.3

## ANALYTICAL CALCULATION OF A BEAM BASED ON AN ELASTIC WINKLER FOUNDATION WITH RANGE INHOMOGENEITY

Yu. Krutii<sup>1</sup>, M. Surianinov<sup>1</sup>, A. Perperi<sup>1</sup>, V. Vakulenko<sup>1</sup>, N. Teorlo<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract:** The aim of the study is the further development of analytical methods for calculating the bending of beams resting on a non-homogeneous continuous Winkler elastic foundation. This paper considers the case when the beam is under the influence of a uniformly distributed constant transverse load, and the inhomogeneity of the elastic foundation is given by a power function with an arbitrary non-negative power exponent  $m \geq 0$ . Fundamental functions and a partial solution of the corresponding differential equation of beam bending are found in an explicit closed form. These functions are dimensionless and are represented by absolutely and uniformly convergent power series. In turn, the formulas for the parameters of the stress-strain state of the beam – deflection, angle of rotation, bending moment and transverse force – are expressed through the indicated functions. The unknown constants of integration in these formulas are expressed in terms of the initial parameters, which are after the implementation of the specified boundary conditions. Thus, the calculation of the beam for bending is reduced to the procedure of numerical implementation of explicit analytical formulas for the parameters of the stress-strain state.

An example demonstrates the practical application of the obtained solutions. A prismatic concrete beam based on a cubic variable elastic foundation is considered. This case corresponds to the power value  $m = 3$ . The results of the calculation by the author's method are presented in numerical and graphical formats for the case when the left end of the beam is hinged and the right end is clamped. The numerical values obtained by the author's method are accurate, since the applied calculation method is based on the exact solution of the corresponding differential equation. The availability of such solutions makes it possible to evaluate the accuracy of solutions obtained using various approximate methods by comparison. For the purpose of such a comparison, the paper presents the calculation results obtained by the finite element method (FEM). The absolute error of the FEM method when calculating this design was determined.

**Keywords:** beam, inhomogeneous elastic foundation, power-law inhomogeneity, exact solution, analytical calculation.

## АНАЛІТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК БАЛКИ, ЩО ОПИРАЄТЬСЯ НА ПРУЖНУ ОСНОВУ ВІНКЛЕРА ЗІ СТЕПЕНЕВОЮ НЕОДНОРІДНІСТЮ

Крутії Ю.С.<sup>1</sup>, Сур'янінов М.Г., Перпері А.О.<sup>1</sup>, Вакулєнко В.В.<sup>1</sup>, Теорло Н. А.

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація:** Ціллю дослідження є подальший розвиток аналітичних методів розрахунку на згин балок, що опираються на неоднорідну суцільну пружну основу Вінклера. У даній роботі розглядається випадок, коли балка знаходиться під впливом рівномірно розподіленого сталого поперечного навантаження, а неоднорідність пружної основи задається степеневою функцією з довільним невід'ємним показником степеня  $m \geq 0$ . В явній замкнутій формі знайдені фундаментальні функції та частинний розв'язок відповідного диференціального рівняння згину балки. Дані функції є безрозмірними та представляються абсолютно і рівномірно збіжними степеневими рядами. В свою чергу, через вказані функції виражаються формули для параметрів напружено-деформованого стану балки – прогину, кута повороту, згинального моменту та





поперечної сили. Невідомі константи інтегрування в цих формулах виражені через початкові параметри, які знаходяться після реалізації заданих граничних умов. Тим самим, розрахунок балки на згин зводиться до процедури чисельної реалізації явних аналітичних формул для параметрів напружено-деформованого стану.

На прикладі продемонстровано практичне застосування отриманих розв'язків. Розглянуто призматичну бетонну балку, що опирається на кубічно-змінну пружну основу. Такому випадку відповідає значення степеню  $m = 3$ . Результати розрахунку авторським методом представлені в чисельному та графічному форматах для випадку, коли лівий кінець балки вільний, а правий затиснутий. Отримані авторським методом чисельні значення є точними, оскільки застосований метод розрахунку ґрунтується на точному розв'язку відповідного диференціального рівняння. Наявність таких розв'язків дозволяє шляхом порівняння оцінювати точність розв'язків, отриманих за допомогою різного роду наближених методів. З метою такого порівняння, в роботі надано результати розрахунку, що отримані методом скінченних елементів (МСЕ). Визначено абсолютну похибку методу МСЕ при розрахунку даної конструкції.

**Ключові слова:** балка, неоднорідна пружна основа, степенева неоднорідність, точний розв'язок, аналітичний розрахунок.

## 1 INTRODUCTION

The structure, which is a beam on an elastic foundation, is often used in engineering practice, including in industrial and civil construction, in the railway industry, hydraulic engineering, shipbuilding, aerospace engineering and others.

Among the existing models of the elastic foundation, the so-called Winkler model has become widespread. In this model, the elastic foundation on which the structure rests is represented as a set of vertical, closely spaced, unrelated springs. Such a situation can generally be described by a single parameter, which is called the modulus of elasticity of the foundation or the coefficient of subgrade reaction. In the simplest case, when the elastic foundation is assumed to be homogeneous, the coefficient of subgrade reaction is constant, which significantly simplifies the solution of the corresponding differential equation of beam bending. This can explain the widely used assumption about the foundation homogeneity. However, it is common knowledge that such an assumption is far from reality and for more qualitative research it is necessary to take into account the foundation heterogeneity (variability) [1]. In this case, the coefficient of subgrade reaction will be variable along the axis of the beam, which significantly complicates the solution of the corresponding differential equation. Therefore, various approximate methods are often used to solve the problem in similar situations.

This work is devoted to the analytical calculation of the beam for bending in the case when the inhomogeneity of the elastic foundation is described by a power-law function.

## 2 LITERATURE REVIEW AND PROBLEM STATEMENT

Despite the large number of publications devoted to the calculation of beams on an elastic foundation, only a small number of them are devoted to the case of a variable coefficient of subgrade reaction. For the first time, such a case was presented in a monograph [2]. The author of the monograph considered a uniform beam on an elastic foundation with a linearly variable coefficient of subgrade reaction and obtained the corresponding solution based on the theory of Taylor series. Article [3] considered the case when the coefficient of subgrade reaction is a power function of the coordinate. However, the analytical solution is obtained only for the case when the degree is equal to 1. For other positive values of the degree, a numerical solution method has been developed. The authors [4] proposed an analytical method for calculating beams on heterogeneous soils, which is accompanied by a corresponding numerical scheme. The theory of Green's functions was used as a research toolkit, which made it possible to reduce the original problem to a system of integral equations. After discretization, these equations are solved numerically using the Gauss-Legendre quadrature scheme. The paper [5] considers the case of a linear variable coefficient of subgrade reaction. The analytical solution of the corresponding differential equation of beam bending is obtained here in an explicit closed form in terms of generalized hypergeometric functions. The publication [6] is devoted to thin beams on an inhomogeneous Winkler foundation. The finite difference method is used here to solve the corresponding differential equation. Using the method of homotopy analysis, the authors of [7] obtained new analytical solutions for the static deflection of anisotropic composite beams based on an elastic foundation of variable stiffness. In particular, the case where the coefficient of subgrade reaction changes according to a linear law is considered.

A detailed review of works on the bending of beams based on an elastic Winkler foundation is given in publications [8, 9]. The authors of [8], after the relevant analysis, state that there are no works in scientific periodicals that relate to analytical solutions of the beam bending problem, when the coefficient of subgrade reaction is variable, except for cases when

it is given by a linear function. In the same work, the authors obtained an analytical solution with a non-linear variable coefficient of subgrade reaction. The specified solution was found for the special case when the coefficient of subgrade reaction changes according to the binomial law with the power of -4. The authors of [9], after reviewing the publications, come to the conclusion that in the case of a variable coefficient of subgrade reaction, researchers most often use FEM.

In the opinion of the authors of this work, the situation with the state of development of analytical methods for the calculation of beams based on a non-uniform elastic foundation may change significantly after the publication of the work in 2021 [10]. This assumption is based on the fact that the specified work found an exact solution to the differential equation of beam bending

$$EI y''''(x) + k(x)y(x) = q(x), \tag{1}$$

when the linear coefficient of subgrade reaction  $k(x)$  and the load  $q(x)$  are given by arbitrary continuous functions and the bending stiffness  $EI$  is assumed to be constant. In the same work, an analytical method of numerical implementation of the found exact solution is proposed. Therefore, the logical continuation can be the following studies on the analytical calculation of real beam structures, which will use the results of the publication [10]. This article is an example of such research.

In [10], for functions  $k(x)$  and  $q(x)$  accepted representations:

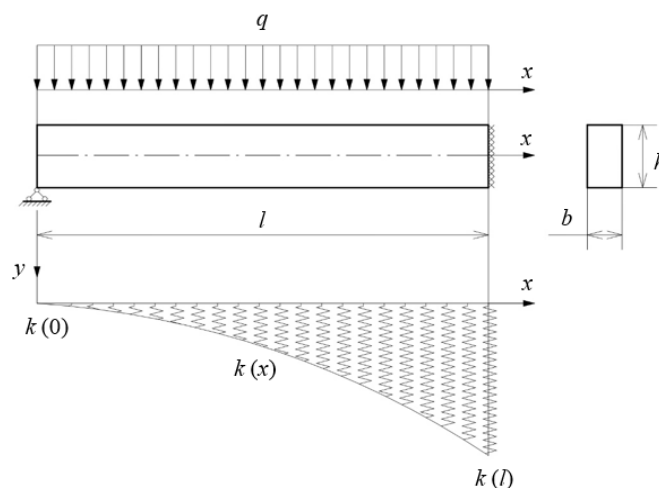
$$k(x) = k_0 B(x); \quad q(x) = q_0 C(x), \tag{2}$$

where  $k_0, q_0$  – the value of the coefficient of subgrade reaction and the load at a certain characteristic point of the beam, respectively;  $B(x), C(x)$  – dimensionless continuous functions, which respectively express the laws of change of coefficient of subgrade reaction and load along the beam length. In fact,  $B(x)$  function is characterized by the foundation heterogeneity.

This work is devoted to the problem of analytical calculation of a beam, when the inhomogeneity of a continuous Winkler elastic foundation is expressed by a power function

$$B(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^m, \quad m \geq 0. \tag{3}$$

It is possible to consider the transverse load acting on the beam to be uniformly distributed with intensity  $q$  (Fig. 1).



**Fig. 1.** Calculation scheme of the beam

In this case, according to formulas (2):  $q = q_0$ ;  $C(x) \equiv 1$ ;  $k_0 = k(l)$ .

### 3 THE AIM AND OBJECTIVES OF RESEARCH

The objectives of research:

1. Obtain the calculation formulas for case (3) in an explicit form;
2. Perform an analytical calculation of a real beam structure based on a non-homogeneous power-variable elastic foundation, using the author's method and FEM;
3. Determine the FEM error when calculating this design.

The aim of research is the further development of analytical methods for calculating beams based on a non-homogeneous continuous Winkler elastic foundation.

### 4 RESEARCH RESULTS

#### 4.1. Calculation formulas

In the publication [10], the following general formulas were obtained for the parameters of the stress-strain state of the beam – deflection  $y(x)$ , angle of rotation  $\varphi(x)$ , bending moment  $M(x)$  and transverse force  $Q(x)$ :

$$y(x) = y(0)X_1(x) + \varphi(0)lX_2(x) - M(0)\frac{l^2}{EI}X_3(x) - Q(0)\frac{l^3}{EI}X_4(x) + \frac{q_0l^4}{EI}X_5(x); \quad (4)$$

$$\varphi(x) = y(0)\frac{1}{l}\tilde{X}_1(x) + \varphi(0)\tilde{X}_2(x) - M(0)\frac{l}{EI}\tilde{X}_3(x) - Q(0)\frac{l^2}{EI}\tilde{X}_4(x) + \frac{q_0l^3}{EI}\tilde{X}_5(x); \quad (5)$$

$$M(x) = -y(0)\frac{EI}{l^2}\hat{X}_1(x) - \varphi(0)\frac{EI}{l}\hat{X}_2(x) + M(0)\hat{X}_3(x) + Q(0)l\hat{X}_4(x) - q_0l^2\hat{X}_5(x); \quad (6)$$

$$Q(x) = -y(0)\frac{EI}{l^3}\hat{X}_1(x) - \varphi(0)\frac{EI}{l^2}\hat{X}_2(x) + M(0)\frac{1}{l}\hat{X}_3(x) + Q(0)\hat{X}_4(x) - q_0l\hat{X}_5(x), \quad (7)$$

where  $X_n(x)$  ( $n=1,2,3,4$ ) – dimensionless fundamental functions of the homogeneous equation, i.e. solutions of equation (1) with zero right-hand side,  $X_5(x)$  – dimensionless function through which the partial solution

$$X^*(x) = \frac{q_0l^4}{EI}X_5(x)$$

of inhomogeneous equation (1) is expressed,

$$\tilde{X}_n(x) = lX'_n(x); \hat{X}_n(x) = l^2X''_n(x); \hat{X}_n(x) = l^3X'''_n(x) \quad (n=1,2,3,4,5). \quad (8)$$

Functions  $X_n(x)$  ( $n=1,2,3,4,5$ ) are represented by uniformly convergent power series of a dimensionless parameter  $-K$  with variable coefficients

$$X_n(x) = \beta_{n,0}(x) - K\beta_{n,1}(x) + K^2\beta_{n,2}(x) - K^3\beta_{n,3}(x) + \dots \quad (n=1,2,3,4,5), \quad (9)$$

where

$$K = \frac{k_0l^4}{EI}.$$

Here, the initial  $\beta_{n,0}(x)$  and generating  $\beta_{n,k}(x)$  ( $k=1,2,3,\dots$ ) functions are determined by recurrent relations, which in our case take the form:

$$\beta_{n,0}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1} \quad (n=1,2,3,4,5); \quad (10)$$

$$\beta_{n,k}(x) = \frac{1}{l^4} \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \left(\frac{x}{l}\right)^m \beta_{n,k-1}(x) dx dx dx dx \quad (n=1,2,3,4,5) (k=1,2,3,\dots). \quad (11)$$

By successively integrating according to formula (11), it is possible to pass from the recurrent to the analytical form of the record. As a result, for creative functions

$$\beta_{n,k}(x) = \frac{1}{(n-1)! p_{n,1,m} p_{n,2,2m} \dots p_{n,k,km}} \left(\frac{x}{l}\right)^{n+km+4k-1} \quad (n=1,2,3,4,5) (k=1,2,3,\dots) \quad (12)$$

where

$$p_{n,k,km} = (n+km+4k-4)(n+km+4k-3)(n+km+4k-2)(n+km+4k-1).$$

Therefore, according to (9), (10), (12), the functions  $X_n(x)$  ( $n=1,2,3,4,5$ ) will be determined by the following series

$$X_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-K)^k}{p_{n,1,m} p_{n,2,2m} \dots p_{n,k,km}} \left(\frac{x}{l}\right)^{k(m+4)} \right] \quad (n=1,2,3,4,5). \quad (13)$$

Thus, thanks to formulas (4)-(8), (13), it is possible to analytically calculate beams based on a power-variable elastic foundation with any boundary conditions.

#### 4.2 Calculation example

It is possible to consider a prismatic concrete beam on a non-uniform elastic foundation characterized by a cubic function

$$B(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^3.$$

It is possible to assume that the left end of the beam is hinged, and the right end is clamped. This method of fixing the ends of the beam will meet the boundary conditions:

$$y(0) = 0; M(0) = 0; y(l) = 0; \varphi(l) = 0.$$

So, two initial parameters  $y(0), M(0)$  are known. The other two initial parameters  $\varphi(0), Q(0)$  can be found from the system of equations, which will be obtained after the implementation of the boundary conditions at the end  $x=l$  using formulas (4), (5). Substituting the found values for the initial parameters into formulas (4) - (7), there is:

$$y(x) = \frac{q_0 l^4}{E_0 I_0} (\lambda_1 X_2(x) + \lambda_2 X_4(x) + X_5(x)); \quad \varphi(x) = \frac{q_0 l^3}{E_0 I_0} (\lambda_1 \tilde{X}_2(x) + \lambda_2 \tilde{X}_4(x) + \tilde{X}_5(x));$$

$$M(x) = -q_0 l^2 (\lambda_1 \hat{X}_2(x) + \lambda_2 \hat{X}_4(x) + \hat{X}_5(x)); \quad Q(x) = -q_0 l (\lambda_1 \hat{X}_2(x) + \lambda_2 \hat{X}_4(x) + \hat{X}_5(x)),$$

where

$$\lambda_1 = \frac{X_4(l)\tilde{X}_5(l) - \tilde{X}_4(l)X_5(l)}{X_2(l)\tilde{X}_4(l) - \tilde{X}_2(l)X_4(l)}; \quad \lambda_2 = -\frac{X_2(l)\tilde{X}_5(l) - \tilde{X}_2(l)X_5(l)}{X_2(l)\tilde{X}_4(l) - \tilde{X}_2(l)X_4(l)}.$$

Initial data:

$$E = 1,5 \cdot 10^7 \text{ kPa};$$

Beam length  $l = 5 \text{ m}$ ; Beam base width  $b = 0,4 \text{ m}$ ; Beam height  $h = 0,6 \text{ m}$ ;

$$k(l) = 4 \cdot 10^3 \text{ kN} / \text{m}^2; \quad q = 60 \text{ kN} / \text{m}.$$

The results of the calculation by the author's method (AM) in numerical format are presented in the Tables 1 and 2, and in the graphic – in Fig. 2. For comparison in the Tables 1 and 2 also provide the results of FEM calculation in the LIRA software complex.

**Table 1**

Value of kinematic parameters

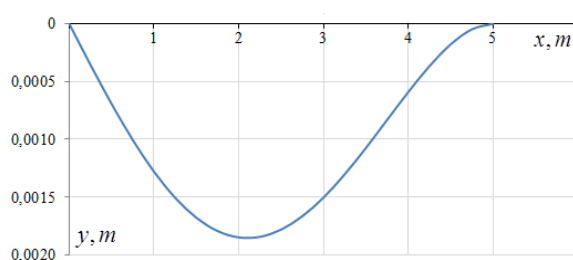
$\frac{x}{l}$	$x$	$y(x), m$		Relative error, %	$\varphi(x), rad$		Relative error, %
		AM	FEM		AM	FEM	
0	0	0,000000	0,000000	0,00	0,001430	0,001441	0,79
0,05	0,25	0,000355	0,000358	0,90	0,001399	0,001410	0,80
0,1	0,5	0,000695	0,000700	0,76	0,001312	0,001322	0,77
0,15	0,75	0,001007	0,001015	0,82	0,001178	0,001188	0,88
0,2	1	0,001280	0,001291	0,84	0,001005	0,001014	0,92
0,25	1,25	0,001507	0,001519	0,82	0,000802	0,000810	1,02
0,3	1,5	0,001679	0,001694	0,87	0,000578	0,000584	1,10
0,35	1,75	0,001794	0,001810	0,87	0,000341	0,000346	1,51
0,4	2	0,001850	0,001866	0,89	0,000100	0,000102	2,00
0,45	2,25	0,001845	0,001862	0,93	-0,000136	-0,000136	0,18
0,5	2,5	0,001782	0,001799	0,93	-0,000359	-0,000361	0,47
0,55	2,75	0,001667	0,001683	0,96	-0,000561	-0,000564	0,59
0,6	3	0,001505	0,001520	1,02	-0,000732	-0,000738	0,84
0,65	3,25	0,001304	0,001318	1,05	-0,000864	-0,000872	0,89
0,7	3,5	0,001076	0,001088	1,07	-0,000950	-0,000959	0,98
0,75	3,75	0,000834	0,000843	1,07	-0,000980	-0,000989	0,97
0,8	4	0,000592	0,000598	1,01	-0,000945	-0,000955	1,01
0,85	4,25	0,000367	0,000371	1,00	-0,000839	-0,000848	1,08
0,9	4,5	0,000179	0,000181	0,98	-0,000652	-0,000659	1,13
0,95	4,75	0,000049	0,000050	2,07	-0,000375	-0,000379	1,11
1	5	0,000000	0,000000	0,00	0,000000	0,000000	0,00

**Table 2**

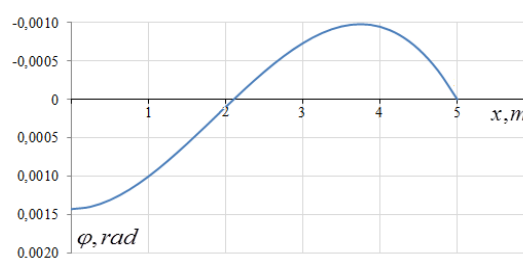
The value of power parameters

$\frac{x}{l}$	$x$	$M(x), kNm$		Relative error, %	$Q(x), kN$		Relative error, %
		AM	FEM		AM	FEM	
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0,000000	0,000000	0,00	111,786398	112,266594	0,43
0,05	0,25	26,071600	26,191650	0,46	96,786409	97,266594	0,50
0,1	0,5	48,393228	48,633312	0,50	81,786748	82,266708	0,59
0,15	0,75	66,965126	67,325073	0,54	66,788992	67,267456	0,72
0,2	1	81,788193	82,267258	0,59	51,796965	52,270081	0,91
0,25	1,25	92,864630	93,460579	0,64	36,817291	37,276730	1,25

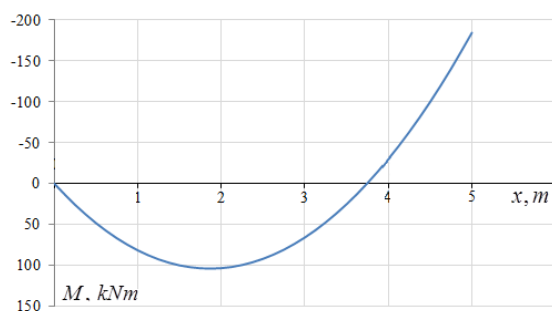
1	2	3	4	5	6	7	8
0,3	1,5	100,198646	100,906456	0,71	21,859372	22,290459	1,97
0,35	1,75	103,797088	104,607101	0,78	6,934748	7,215006	4,04
0,4	2	103,669831	104,565750	0,86	-7,944165	-7,645602	3,76
0,45	2,25	99,829783	100,786606	0,96	-22,765843	-22,587624	0,78
0,5	2,5	92,292401	93,274666	1,06	-37,521801	-37,508293	0,04
0,55	2,75	81,074645	82,035446	1,19	-52,208865	-52,406574	0,38
0,6	3	66,193380	67,074409	1,33	-66,831296	-67,283829	0,68
0,65	3,25	47,663303	48,396305	1,54	-81,402382	-82,144341	0,91
0,7	3,5	25,494580	26,004408	2,00	-95,945083	-96,995552	1,09
0,75	3,75	-0,309507	-0,303227	2,03	-110,491213	-111,847778	1,23
0,8	4	-29,754462	-29,919407	0,55	-125,078596	-126,713303	1,31
0,85	4,25	-62,855458	-63,458076	0,96	-139,745560	-141,604584	1,33
0,9	4,5	-99,636426	-100,724014	1,09	-154,522039	-156,531433	1,30
0,95	4,75	-140,126418	-141,726654	1,14	-169,416510	-171,496658	1,23
1	5	-184,352099	-186,474655	1,15	-184,397896	-186,490402	1,13



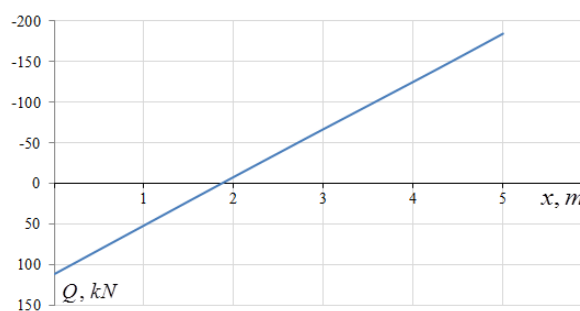
Graph of the deflection function



Graph of the turning angle function



Graph of the bending moment function



Graph of the transverse force function

**Fig. 2.** Graphs of beam state parameters

It should be noted that the LIRA software complex does not provide for the ability to directly specify the law of change of the coefficient of subgrade reaction along the beam length. For each finite element, the value of the coefficient of subgrade reaction is set as the arithmetic mean of the values at its ends, which affects the error value.

## 5 DISCUSSION OF RESEARCH RESULTS

These studies are a logical continuation of the studies initiated in the publication [10], and are entirely based on the results obtained there. In essence, it is about the application of the general solutions obtained in [10] for the case when the inhomogeneous elastic foundation is characterized by a power-law function. Since the proposed calculation method is based on the exact solution of the corresponding differential equation, it allows obtaining qualitative information and forming the most reliable picture of the stress-strain state of the beam. Corresponding numerical results obtained with the help of exact solutions are usually

interpreted as exact in the scientific literature. Such solutions in closed form are particularly valuable, because they can serve as criteria by which the accuracy of various kinds of approximate solutions can be evaluated.

## 6 CONCLUSIONS

1. An analytical method for calculating the bending of beams based on a continuous elastic foundation with power-law heterogeneity with any power-law index is proposed  $m \geq 0$ .
2. The obtained numerical results of the calculation should be interpreted as accurate.
3. The error of FEM calculations in the LIRA software complex for the considered structure is determined.

## 7 ETHICAL DECLARATIONS

The authors have no relevant financial or non-financial interests to report.

## References

1. Foyouzat, M. A., Mofid, M., & Akin, J. E. (2015). On the dynamic response of beams on elastic foundations with variable modulus. *Acta Mechanica*, 227(2), 549–564.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-015-1485-1>
2. Hayashi, K. (1921). *Theorie des tragers auf elastischer unterlage: Und ihre anwendung auf den tiefbau, nebst einer tafel der kreisund hyperbelfunktionen*. J. Springer.
3. Franklin, J. N., & Scott, R. F. (1979). Beam equation with variable foundation coefficient. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 105(5), 811–827.  
<https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0002525>
4. Guo, Y.-J., & Weitsman, Y. J. (2002). Solution method for beams on nonuniform elastic foundations. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(5), 592–594.  
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:5\(592\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:5(592))
5. Froio, D., & Rizzi, E. (2017). Analytical solution for the elastic bending of beams lying on a linearly variable Winkler support. *International Journal of Mechanical Sciences*, 128-129, 680–694.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.04.021>
6. Al-Ani, M. (2005). Analysis of beams on non-linear elastic Winkler foundation. *Engineering and Technology Journal*, 24(9), 1251–1261.  
<https://doi.org/10.30684/etj.24.9A.13>
7. Doeva, O., Masjedi, P. K., & Weaver, P. M. (2021). Static analysis of composite beams on variable stiffness elastic foundations by the homotopy analysis method. *Acta Mechanica*, 232, 4169–4188.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-021-03043-z>
8. Froio, D., & Rizzi, E. (2015). Analytical solution for the elastic bending of beams lying on a variable Winkler support. *Acta Mechanica*, 227(4), 1157–1179.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-015-1508-y>
9. Al-Azzawi Adel A. & Al-Madani M. H. (2018). A state of the art review on beams on non-uniform elastic foundations. *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*, 13(7), 2647–2660.
10. Krutii, Y., Surianinov, M., Petrash, S., & Yezhov, M. (2021). Development of an analytical method for calculating beams on a variable elastic Winkler foundation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 1162(1), 012009.  
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/1162/1/012009>

## Література

1. Foyouzat, M. A., Mofid, M., & Akin, J. E. (2015). On the dynamic response of beams on elastic foundations with variable modulus. *Acta Mechanica*, 227(2), 549–564.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-015-1485-1>



2. Hayashi, K. (1921). *Theorie des trägers auf elastischer unterlage: Und ihre anwendung auf den tiefbau, nebst einer tafel der kreisund hyperbelfunktionen*. J. Springer.
3. Franklin, J. N., & Scott, R. F. (1979). Beam equation with variable foundation coefficient. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 105(5), 811–827.  
<https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0002525>
4. Guo, Y.-J., & Weitsman, Y. J. (2002). Solution method for beams on nonuniform elastic foundations. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(5), 592–594.  
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:5\(592\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:5(592))
5. Froio, D., & Rizzi, E. (2017). Analytical solution for the elastic bending of beams lying on a linearly variable Winkler support. *International Journal of Mechanical Sciences*, 128-129, 680–694.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.04.021>
6. Al-Ani, M. (2005). Analysis of beams on non-linear elastic Winkler foundation. *Engineering and Technology Journal*, 24(9), 1251–1261.  
<https://doi.org/10.30684/etj.24.9A.13>
7. Doeva, O., Masjedi, P. K., & Weaver, P. M. (2021). Static analysis of composite beams on variable stiffness elastic foundations by the homotopy analysis method. *Acta Mechanica*, 232, 4169–4188.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-021-03043-z>
8. Froio, D., & Rizzi, E. (2015). Analytical solution for the elastic bending of beams lying on a variable Winkler support. *Acta Mechanica*, 227(4), 1157–1179.  
<https://doi.org/10.1007/s00707-015-1508-y>
9. Al-Azzawi Adel A. & Al-Madani M. H. (2018). A state of the art review on beams on non-uniform elastic foundations. *ARNP Journal of Engineering and Applied Sciences*, 13(7), 2647–2660.
10. Krutii, Y., Surianinov, M., Petrash, S., & Yezhov, M. (2021). Development of an analytical method for calculating beams on a variable elastic Winkler foundation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 1162(1), 012009.  
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/1162/1/012009>

**Yurii Krutii**

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Doctor of Technical Sciences, Professor  
Didrihsona str., 4, Odesa, Ukraine, 65029  
[yurii.krutii@gmail.com](mailto:yurii.krutii@gmail.com)  
ORCID: 0000-0001-7105-3087

**Mykola Surianinov**

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Doctor of Technical Sciences, Professor  
Didrihsona str., 4, Odesa, Ukraine, 65029  
[sng@ogasa.org.ua](mailto:sng@ogasa.org.ua)  
ORCID: 0000-0003-2592-5221

**Alla Perperi**

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Ph.D., Associate Professor  
Didrihsona str., 4, Odesa, Ukraine, 65029  
[a.perperi@odaba.edu.ua](mailto:a.perperi@odaba.edu.ua)  
ORCID: 0000-0001-7112-6864

**Vladyslav Vakulenko**

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
graduate student  
Didrihsona str., 4, Odesa, Ukraine, 65029  
[91vzv19@gmail.com](mailto:91vzv19@gmail.com)  
ORCID: 0009-0008-4410-7666



**Natalia Teorlo**

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
graduate student  
Didrihsona str., 4, Odesa, Ukraine, 65029  
[nata.teorlo@gmail.com](mailto:nata.teorlo@gmail.com)  
ORCID: 0009-0003-3013-9468

*For references:*

Yu. Krutii, M. Surianinov, A. Perperi, V. Vakulenko, N. Teorlo (2024). Analytical calculation of a beam based on an elastic winkler foundation with range inhomogeneity. *Mechanics and Mathematical Methods*. VI (2). 47–57.

*Для посилань:*

Крутій Ю. С., Сур'янінов М. Г., Перпері А. О., Вакуленко В. В., Теорло Н. А. Аналітичний розрахунок балки, що опирається на пружну основу Вінклера зі степеневу неоднорідністю. *Механіка та математичні методи*, 2024. Т. VI. № 2. С. 47–57.

UDC 697.9

## MODELING THE ENTRY OF AIR CONTAMINANTS INTO A ROOM

V. Kiosak<sup>1</sup>, V. Isaiev<sup>1</sup>, V. Fedorenko<sup>2</sup>, A. Gridasov<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

<sup>2</sup>*Odesagaz joint-stock company*

<sup>3</sup>*Municipal institution "Reserve points of the civil protection department of the Odesa City Council"*

**Abstract:** A mathematical model of air contaminant (products of human activity) inflow into the isolated air space has been developed. On the basis of the formula modified by us the simulation of human respiration with carbon dioxide, water vapor and heat emission is implemented. The model also takes into account the heat input from the human body through clothing.

Applying numerical modelling ANSYS CFD (Computational Fluid Dynamics) on the basis of continuity equations and Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations "RANS" (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) the following results on air medium state change in the isolated space were obtained:

- the human respiratory cycle is modelled at simultaneous heat transfer from the body surface through clothes into the studied air space;
- the exponential equation of the trend line of  $CO_2$  concentration to observation time was obtained;

- monitoring and rendering (visualization) of changes in  $CO_2$  concentration, temperature and relative humidity in the space under study by time along the room height was performed.

These results and regularities served as initial data for solving a number of model non-stationary problems on aerodynamics and heat and mass transfer in the room. The inverse problem of general exchange ventilation was to be solved. Changes in the state of the air environment initially contaminated with carbon dioxide, heat and water vapors were studied when people were in the studied space and the supply and exhaust ventilation was operating.

Of the four air change schemes planned for the study, the results for one schemes are presented in this publication. The dynamics of assimilation of excess heat, humidity and carbon dioxide ( $CO_2$ ) made it possible to assess the efficiency of ventilation systems and to predict improvements in their energy efficiency when air parameters are brought up to standard values.

**Keywords:** mathematical model, air contaminant, aerodynamics, computational fluid dynamics, air change scheme, relative humidity, temperature, carbon dioxide concentration, room working area, rebranding, supply and exhaust ventilation.

## МОДЕЛЮВАННЯ НАДХОДЖЕННЯ «ШКІДЛИВОСТЕЙ» У ПРИМІЩЕННЯ

Кіосак В. А.<sup>1</sup>, Ісаєв В. Ф.<sup>1</sup>, Федоренко В. В.<sup>2</sup>, Грідасов А. Ю.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

<sup>2</sup>*Акціонерне товариство Одесагаз*

<sup>3</sup>*Комунальний заклад «Запасні пункти управління цивільного захисту Одеської міської ради»*

**Анотація:** Розроблено математичну модель надходження «шкідливостей» (продуктів життєдіяльності людини) до ізолюваного повітряного простору. На основі модифікованої нами формули реалізовано імітацію дихання людини з виділення діоксиду вуглецю, водяної пари та тепла. Моделью враховується так само надходження тепла від тіла через одяг.

Застосувавши чисельне моделювання ANSYS CFD (Computational Fluid Dynamics – обчислювальна гідрогазодинаміка) на основі рівнянь нерозривності та усереднених за

Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса «RANS» (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) отримані результати зміни

- змодельований дихальний цикл людини при одночасному перенесенні тепла з поверхні тіла через одяг у повітряний простір, що досліджується;
- одержано експоненційне рівняння лінії тренду концентрації  $CO_2$  до часу спостереження;
- виконано моніторинг та рендеринг (візуалізація) по висоті приміщення зміни концентрації  $CO_2$ , температури, вмісту вологи та швидкості повітря в досліджуваному просторі за часом.

Ці результати і закономірності послужили вихідними даними на вирішення низки модельних нестационарних завдань з аеродинаміці і тепломасобміну у приміщенні. Вирішенню підлягало зворотне завдання загальнообмінної вентиляції. Досліджувалося зміна стану повітряного середовища спочатку забрудненої діоксидом вуглецю, теплом та водяними парами при знаходженні в досліджуваному просторі людей та роботі припливно-витяжної вентиляції. З чотирьох запланованих схем повітрообміну результати досліджень однієї схеми представлені у цій публікації. Динаміка асиміляції надлишків теплоти, вологи та діоксиду вуглецю ( $CO_2$ ) дала можливість оцінити ефективність роботи систем вентиляції, спрогнозувати підвищення їхньої енергоефективності при доведенні параметрів повітря до нормативних значень.

**Ключові слова:** математична модель, «шкідливості», аеродинаміка, обчислювальна гідрогазодинаміка, схема повітрообміну, відносна вологість, температура, концентрація діоксиду вуглецю, робоча зона приміщення, рендеринг, припливно-витяжна вентиляція.

## 1 INTRODUCTION

Tasks related to the design, installation, adjustment and control of supply and exhaust ventilation systems require careful monitoring of changes in the air environment. This is due to both the implementation of the requirements of the legislative framework of Ukraine and its harmonization with the standards of the European Union [1, 2], and the solution of problems to prevent the spread of pandemics that are currently haunting humanity [3].

Changes in the air environment are typical for rooms with mechanical supply and exhaust ventilation (flow classrooms of educational institutions, classrooms of schools, group rooms of kindergartens, conference rooms, offices). The main air contaminants that are released in this case are carbon dioxide, water vapor and heat.

Based on the patterns of distribution of air contaminants in the volume of isolated air space, it became possible to solve the inverse problem of supply and exhaust ventilation. The change in the state of the air environment initially polluted with carbon dioxide, heat and water vapor was studied when people were in the space and the supply and exhaust ventilation was operating. A study of the efficiency of four generally accepted indoor air change schemes has been conducted:

Scheme A "air supply from above – removal from below";

Scheme B "air supply from above – removal from above";

Scheme C "air supply from above – removal of air from two zones above and below";

Scheme D "air supply from below – removal from above" (displacement ventilation).

The results for Scheme A (change in carbon dioxide concentration) are presented in this publication.

## 2 LITERATURE REVIEW AND PROBLEM STATEMENT

Creating a comfortable indoor microclimate involves meeting a number of restrictions related to:

- temperature;
- relative humidity in the working area (WA) of the room;
- velocity of the stream entering the WA from the air distributor;
- temperature difference between the air in the WA and the stream from the air distributor entering the space under study.

The content of carbon dioxide, water vapor, sensible and total heat, as well as other air, if any, in the indoor air must also be monitored.

In the practice of calculating changes in the state of the air environment in rooms for various purposes, different methods and approaches were used [4-11]. Examples of successful solutions to applied ventilation problems do not remove the question of the accuracy of the results obtained using mathematical modeling. Currently, mathematical modeling methods are used in engineering calculations, which provide an estimate of flow parameters based on the numerical solution of the Reynolds equations of stationary or non-stationary Navier-Stokes equations. (English RANS/URANS: Steady/Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes) [7].

The above-mentioned works do not consider in aggregate the issues of interaction of air pollution from people, occurring during moderate work, in ventilated rooms with different air change schemes.

## 3 THE AIM AND OBJECTIVES OF THE STUDY

The aim of the study is to develop a mathematical model that determines the processes of heat and mass exchange between humans and the environment. Based on this model, it is

possible to solve applied problems related to the creation of a comfortable microclimate in rooms, increasing the energy efficiency of systems that provide air change.

## 4 RESEARCH RESULTS

### 4.1 Study of the entry of air contaminants into an isolated space

Initial conditions:

- isolated space (see Fig. 1), with a volume of  $12 m^3$ , at a rate of  $2 m^2$  / person , according to the requirements of [1];

- number of people in the isolated space: 2 people;

Air parameters in the isolated space:

- air temperature:  $t = 22^\circ$ ;

- initial level of  $CO_2$  concentration:  $350 ppm$  ;

- atmospheric pressure:  $P_b = 101325 Pa$  ;

- relative humidity:  $\varphi = 50\%$  ;

- humidity content:  $d = 8,2 g / kg$  ;

- average body surface temperature of a dressed person:  $t_h = 27^\circ$  .

Air parameters exhaled by a person [4]:

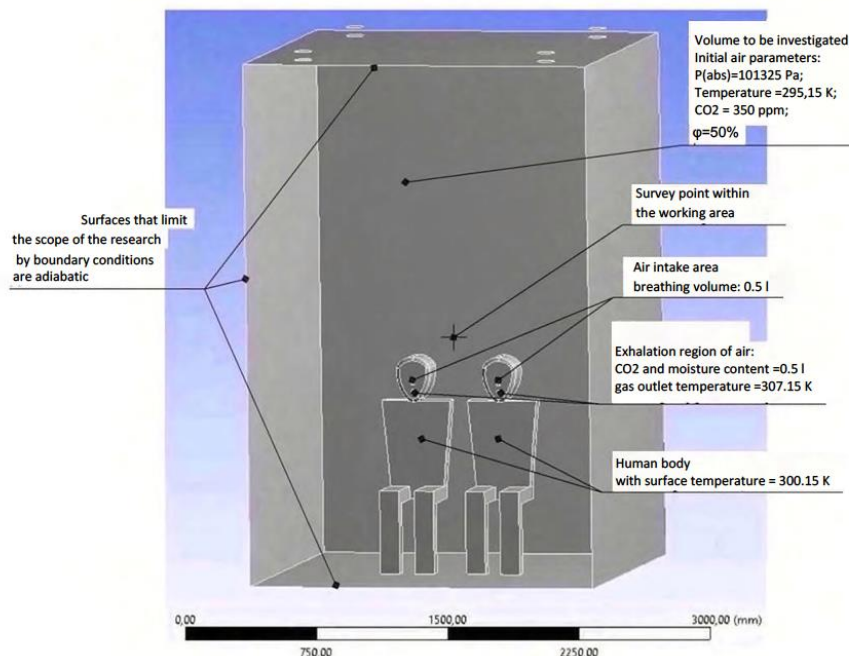
-  $CO_2$  content in exhaled air –  $4,0\%$  ( $40000 ppm$ ) ;

- air temperature:  $34^\circ$  ;

- relative humidity:  $\varphi = 91\%$  ;

- humidity content:  $d = 31,2 g / kg$  .

Modeling of the release of air contaminants into an isolated space is presented in the research scheme in Fig. 1.



**Fig. 1.** Schematic representation of air contaminants entering an insulated room

Using the ANSYS CFD (Computational Fluid Dynamics) computational hydrodynamics simulation complex, a human breathing cycle function was mathematically created, which generally simulates the flow of air contaminants (water vapor, relative humidity, carbon

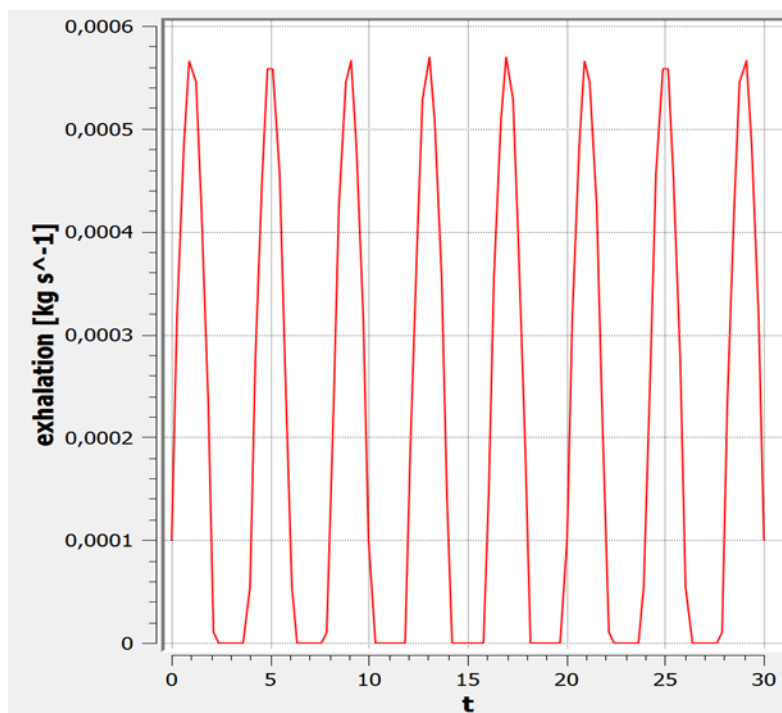
dioxide, air mass temperature) into the study space. At the same time, the flow of heat from the human body through clothing into the study space is also simulated.

The breathing cycle was modeled by a sinusoidal function with a period of 4 seconds and a respiratory volume of air  $V_t = 0,5l$ , which corresponds to breathing at rest [5]. The breathing function is defined in the boundary conditions of the "EXHAIL" outlet, with a diameter of  $20mm$ , which corresponds to the diameter of the human trachea. The function is given by equation

$$Q(t) = \frac{\pi M t}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right),$$

where  $Q(t)$  – mass flow rate,  $kg/s$ ,  $M(t)$  – mass of air exhaled by a person ( $\rho V_t$ ),  $kg$ ,  $T$  – period  $s$ ,  $t$  – time step,  $s$ . One respiratory cycle takes  $4s$ , and the time step for the calculation was set at  $0,2s$ , which is of fundamental importance according to the Courant number [6].

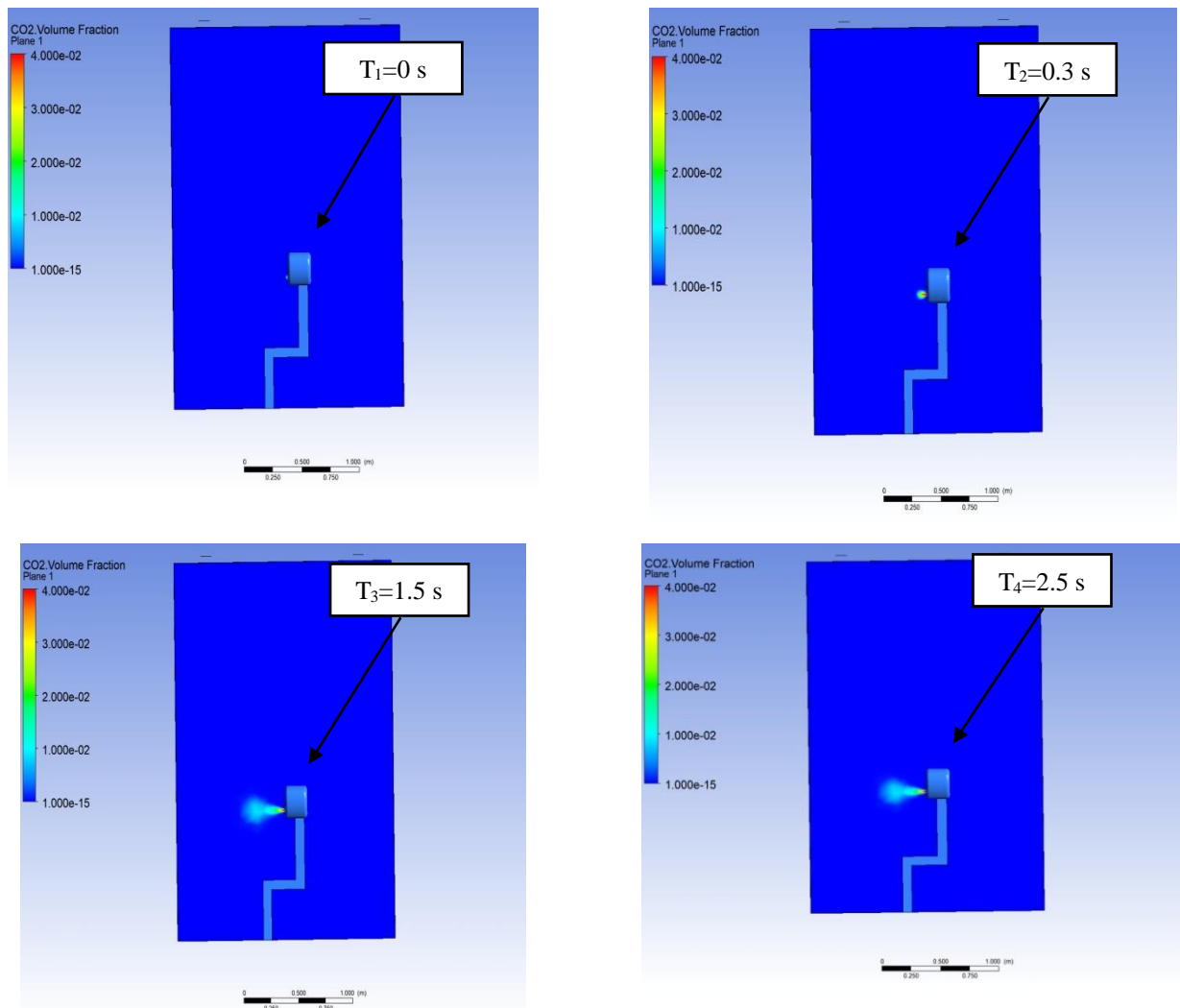
Visualization of breathing by time is presented in the graphs of Fig. 2 and 3, for which, according to the function  $Q(t)$ , 16 respiratory cycles were realized within 1 minute.



**Fig. 2** Graph of the respiratory function  $Q(t)$

The modeling of carbon dioxide, heat and humidity emissions from humans was performed in the ANSYS CFX software package under non-stationary conditions in a multi-component air environment, in which the monitoring of the air contaminants into the work area was performed, geometrically located at a distance of  $1,0-1,2m$ , that is, the rooms where sedentary activity predominates were considered. The model series of non-stationary problems considered in this work are based on the mathematical analysis and interpretation of physical processes of heat and mass transfer and hydrogasdynamics. Mathematical modeling is based on the continuity equations averaged by Reynolds, the Navier-Stokes equations "RANS" (Reynolds-Averaged Navier-Stokes), which is an abbreviated form of the general

Navier-Stokes equations and the equations of the k-ε turbulence model (two-equation standard model) [6-8].



**Fig. 3** Simulation of the human respiratory cycle

Continuity equation

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla(\rho u) = 0,$$

where  $\rho$  – air density,  $u$  – flow velocity,  $\nabla$  – Nabla operator.

Navier – Stokes equation:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (p\bar{u}_i\bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) \right) - \delta_{i3} p g + \frac{\partial}{\partial x_j} (p\bar{u}_i\bar{u}_j),$$

$$-p\bar{u}_i\bar{u}_j' = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} (pk + \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j}) \delta_{ij},$$

where  $p$  – pressure;  $Pa$ ,  $\mu$  – dynamic viscosity,  $kg/ms$ ;  $\mu_t$  – turbulent dynamic viscosity,  $kg/ms$ ;  $g$  – acceleration of gravity,  $m/s^2$ ;  $k$  – kinetic energy of turbulence,



$m^2 / s^2$ ,  $j = 1, 2, 3$ ;  $\delta_{ij}$  – Kronecker symbol.

According to the Boussinesq approximation [7], the linear relationship between turbulent and Reynolds stress and mean velocity is expressed as follows

$$\tau_{ij} = \rho \overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} - \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

Turbulent kinetic energy

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2})$$

The RANS  $k$ - $\varepsilon$  two-equation standard model is the definition of two transport equations for two turbulent properties: the turbulent kinetic energy and the other turbulent properties, which are the dissipation rate of the turbulent kinetic energy or the specific dissipation rate [7]. Thus, the turbulent viscosity equation is defined using  $k$  and  $\omega$ :

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega},$$

$$\omega = \max \left\{ \omega, C_{\text{lim}} \sqrt{\frac{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}}{\beta^*}} \right\}, \quad \bar{S}_{ij} = \bar{S}_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ki}, \quad C_{\text{lim}} = \frac{7}{8},$$

The transport of turbulent kinetic energy ( $k$ ) according to the standard  $k$ - $\varepsilon$  model is determined by the equation

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j k) = \rho \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \beta^* \rho k \omega + \left[ \left( \mu + \sigma^* \frac{\rho k}{\omega} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

The specific dissipation rate  $\omega$  according to the equation:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j \omega) = \alpha \frac{\omega}{k} \rho \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega^2 +$$

$$+ \sigma_d \frac{\rho}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \sigma^* \frac{\rho k}{\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right]$$

The closing coefficients of the  $k$ - $\omega$  model:

$$\alpha = 0,52; \beta = \beta_0 f_\beta; \beta^* = 0,09;$$

$$\sigma = 0,5; \sigma^* = 0,6; \sigma_{d0} = 0,125,$$

$$\sigma_d = \begin{cases} 0, & \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \leq 0, \\ \sigma_{d0}, & \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} > 0, \end{cases} \quad f_\beta = \frac{1+85\chi_\omega}{1+100\chi_\omega},$$

$$\chi_\omega = \left| \frac{\Omega_{ij} \Omega_{ik} S_{ki}}{(\beta^* \omega)^3} \right|, \quad S_{ki} = S_{ki} - \frac{1}{2} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \delta_{ki}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right),$$

where  $C_{lim}$  – force limiting the stress [9];  $\tau_{ij}$  – Reynolds stress tensor,  $f_\beta$  – vortex stretching function,  $\chi_\omega$  – dimensionless vortex stretching parameter,  $S_{ki}$  and  $S_k$  – function of the undesirable effect of flow compression,  $\Omega_{ij}$  – mean rotation tensor.

Another commonly accepted  $k - \varepsilon$  recommended model of turbulent viscosity [6, 10], is calculated using  $k$  and  $\varepsilon$  (13)

$$\mu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

The transport equation for the standard  $k - \varepsilon$ : model is determined by the equation:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_{ji}} - c_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}.$$

The coefficients of the model are constants:

$$c_{1\varepsilon} = 1,44, \quad c_{2\varepsilon} = 1,92, \quad c_\mu = 0,09, \quad \sigma_k = 1,0, \quad \sigma_\varepsilon = 1,3.$$

First of all, in an isolated volume, the change in  $CO_2$  concentration over the observation time is determined, the source of which is the physiology of human respiration. The graph of the change in  $CO_2$  concentration is shown in Fig. 4. Geometrically, the monitoring point is a point located in the WA at a distance of 1,0–1,2 m from the floor level. The contours (planes) of air contaminants distribution in the room volume were also used to display the results of the study.

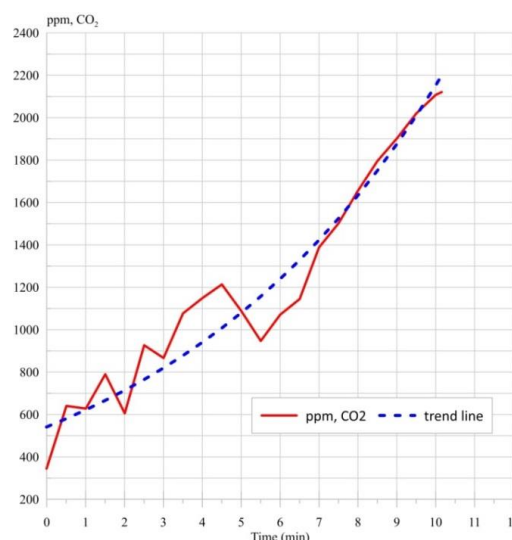


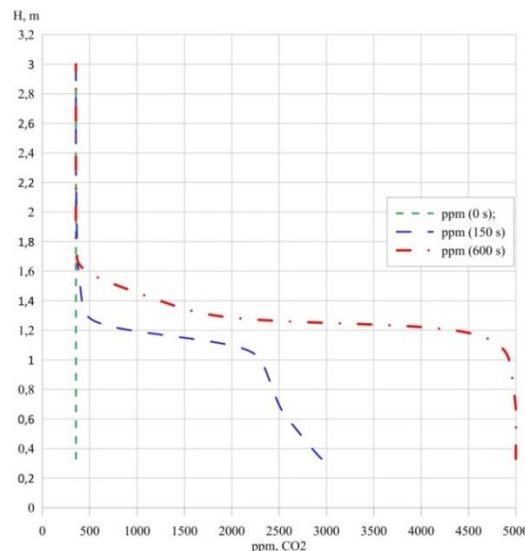
Fig. 4 Graph of  $CO_2$  concentration (ppm) by observation time

Regression analysis of  $CO_2$  inflows indicates that the growing line of  $CO_2$  concentration (ppm) acquires a linear-broken character at small concentration values ( $< 900$  ppm), which is due to the convective properties of the environment and an exponential character at concentrations above 900 ppm.

The exponential trend line model has the following equation,  $ppm(t)$

$$ppm(t) = 541,53 \exp(0,138t).$$

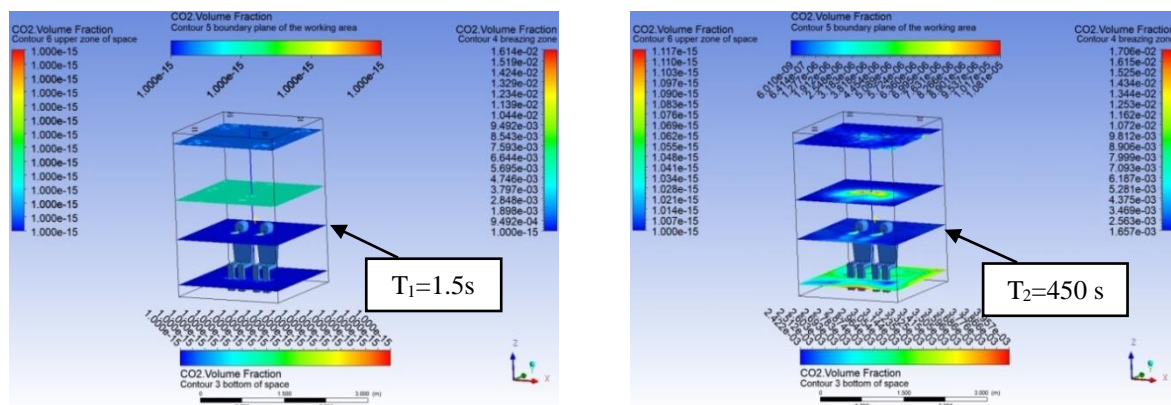
Monitoring the distribution of  $CO_2$  concentration (Fig. 5) along the vertical line  $H$ , (by room height,  $m$ ) includes observations: at the beginning –  $ppm(0 s)$ ; during –  $ppm(150 s)$  and at the end –  $ppm(600 s)$ .

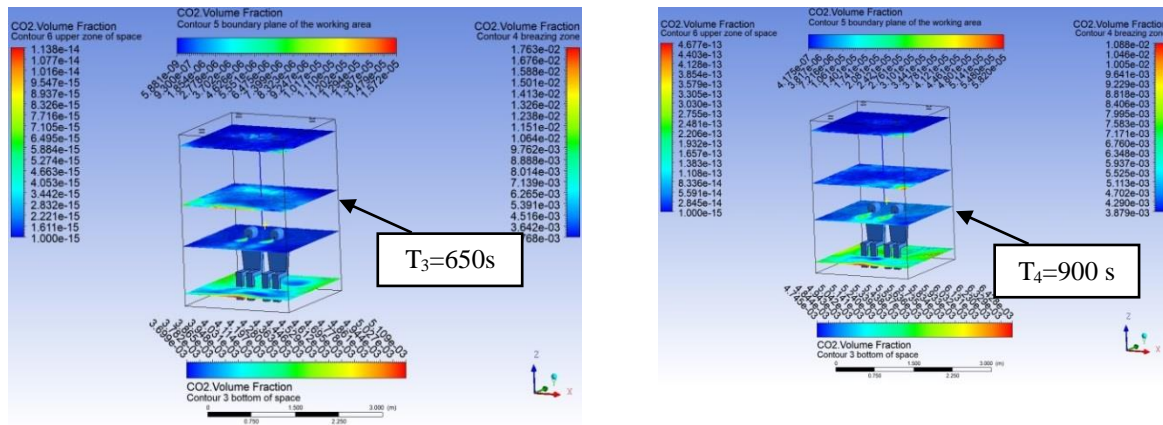


**Fig. 5** Monitoring the distribution of  $CO_2$  concentration by the height of the study space

Monitoring the  $CO_2$  concentration on the vertical scale shows that in a homogeneous air environment, under the influence of gravitational forces, the highest  $CO_2$  concentration is concentrated closer to the floor. The straightness of the lines (Fig. 5) at the beginning of the observations is due to the principle of detailed equilibrium of the system [11].

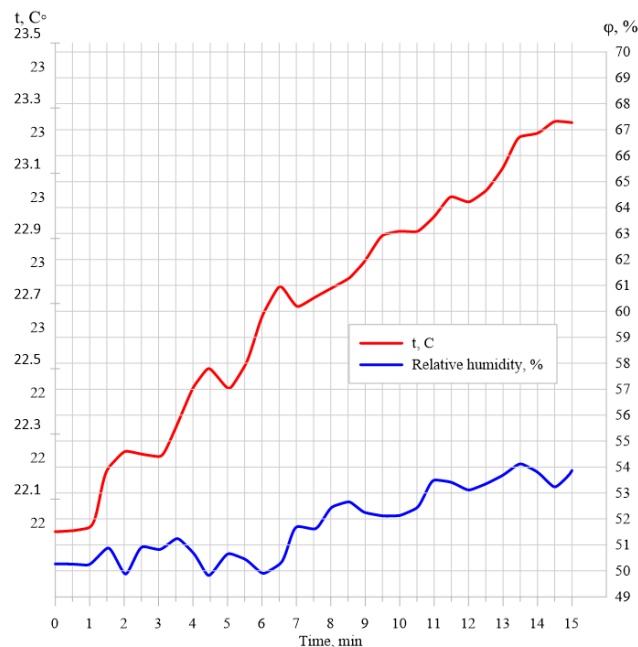
Visualization of the results of the process of  $CO_2$  inflow into the study volume over a 15-minute period is presented in Fig. 6.





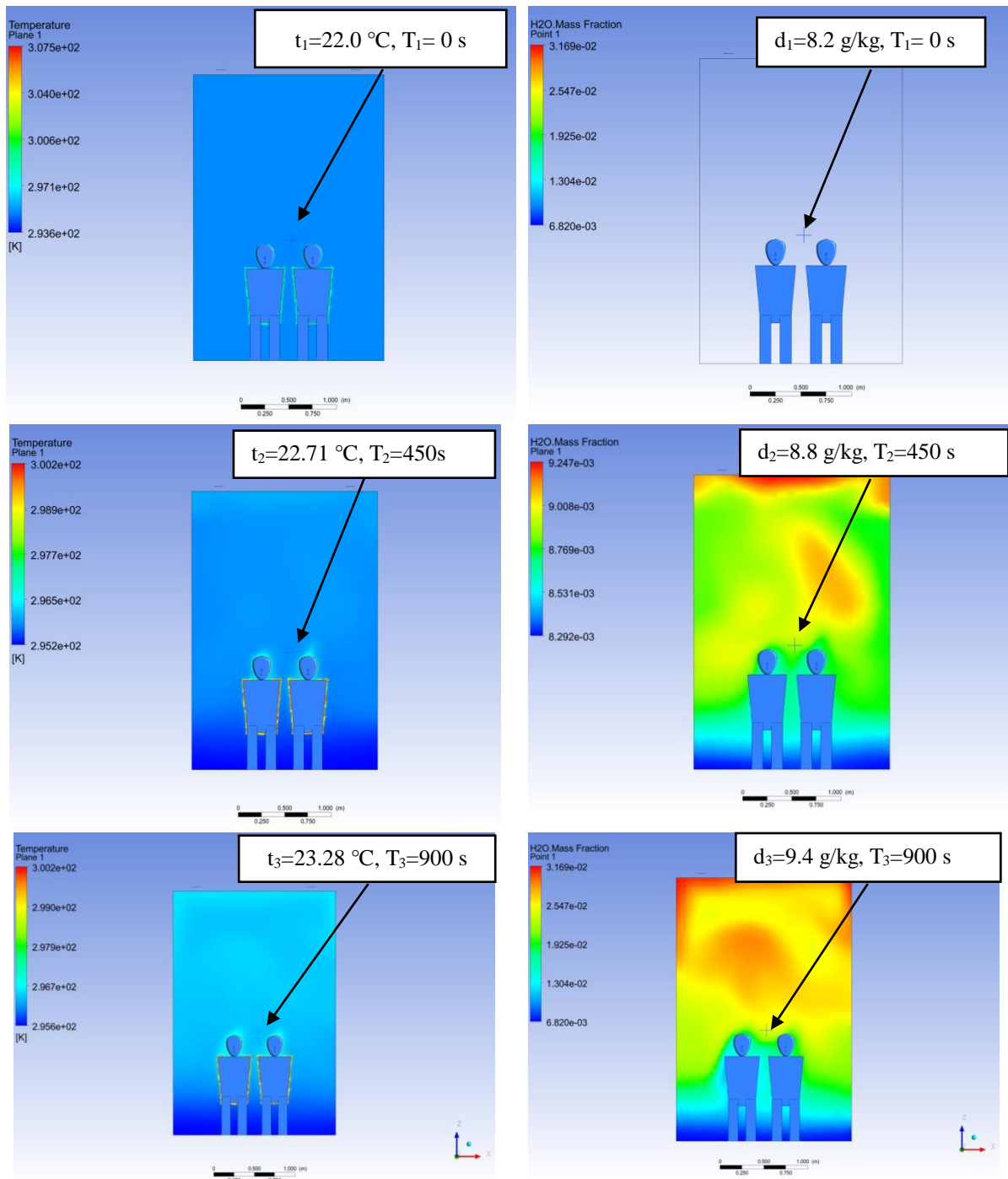
**Fig. 6** Change in  $CO_2$  concentration by the height and time of the isolated space

Secondly, observations were made on changes in temperature and relative humidity in the isolated volume (Fig. 7) over time, in connection with breathing and heat loss from the surface of the human body in clothing.



**Fig. 7** Graph of changes in temperature and relative humidity

Fig. 8 shows a visualization of changes in temperature and humidity that occur over a 15-minute period. The simultaneous increase in temperature and humidity causes the process of increasing the enthalpy of air in rooms where humans are primarily the source of pollution.



**Fig. 8** Rendering of temperature and humidity content relative to the research point over time

Figs. 9-11 represent the planes of the distribution of the height of the studied space over time:

- humidity content;
- temperature;
- air velocity.

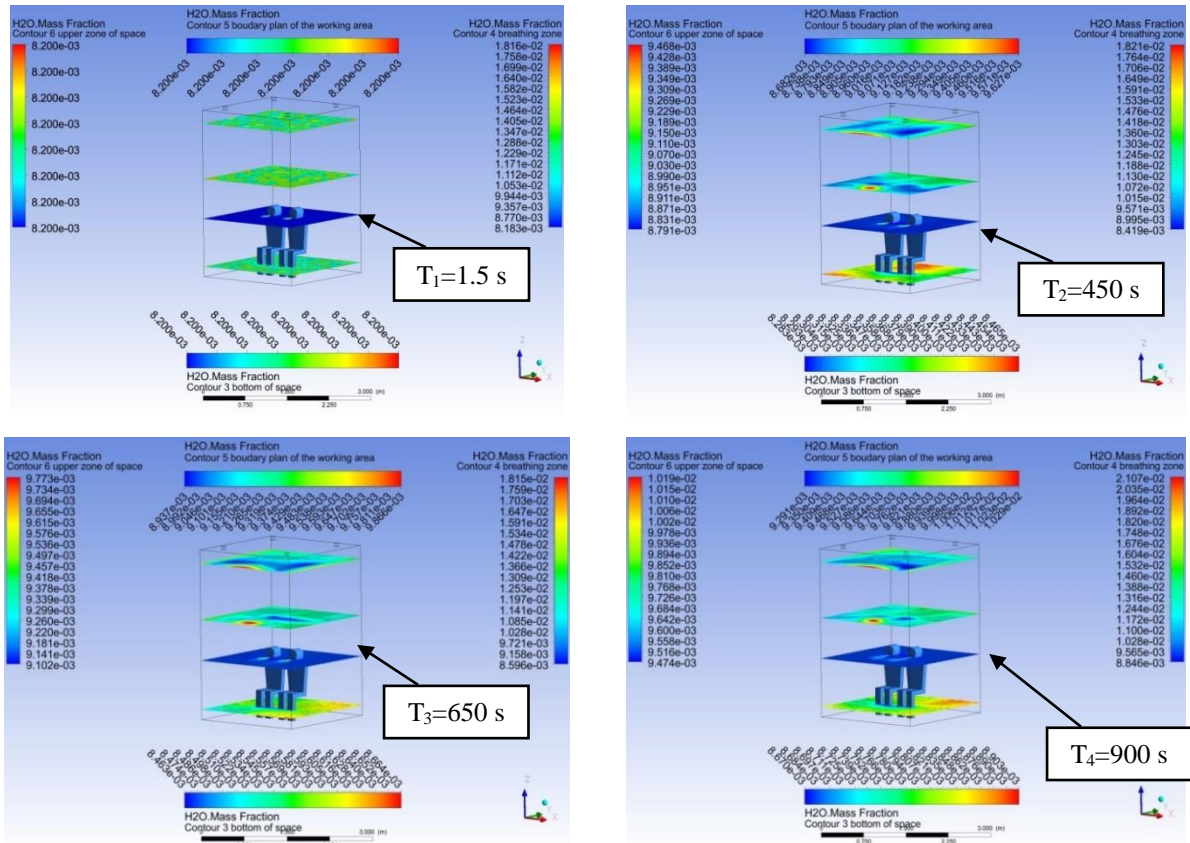


Fig. 9 Changes in humidity content along the height of the isolated space over time

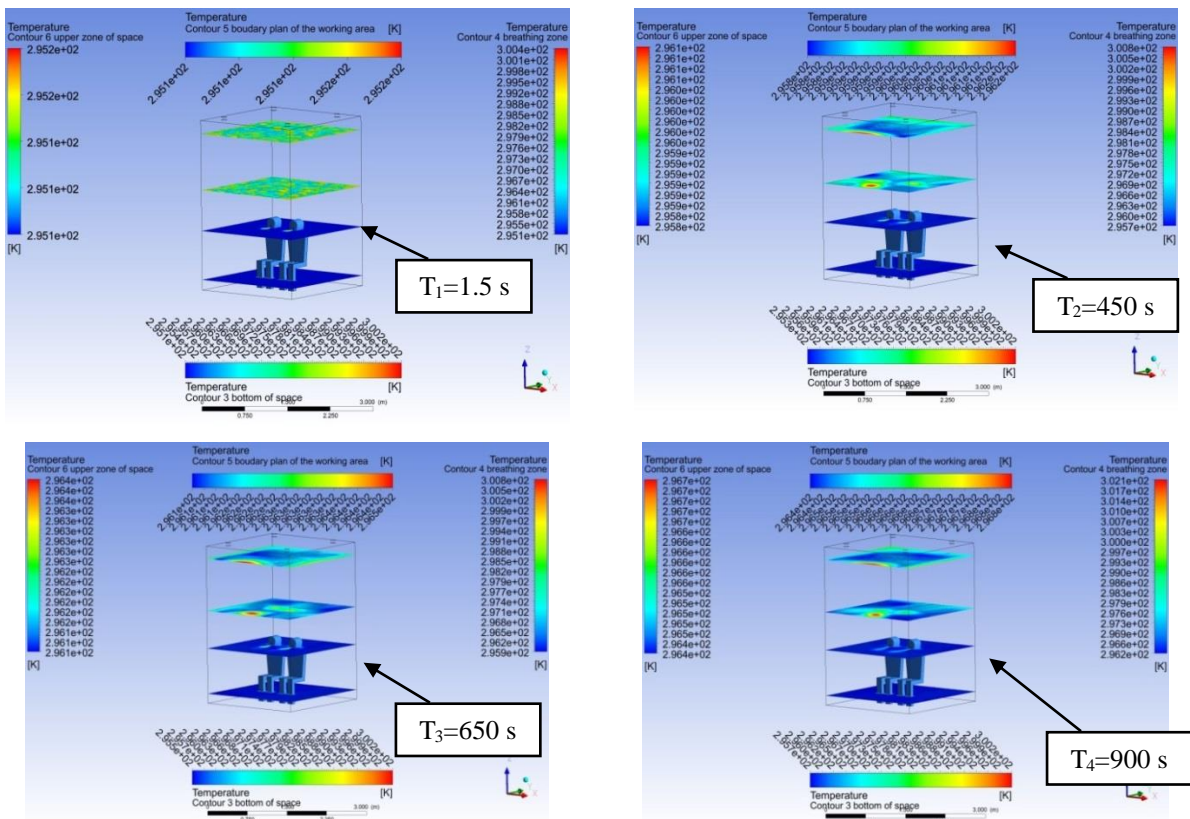


Fig. 10 Change in temperature along the height of the isolated space over time

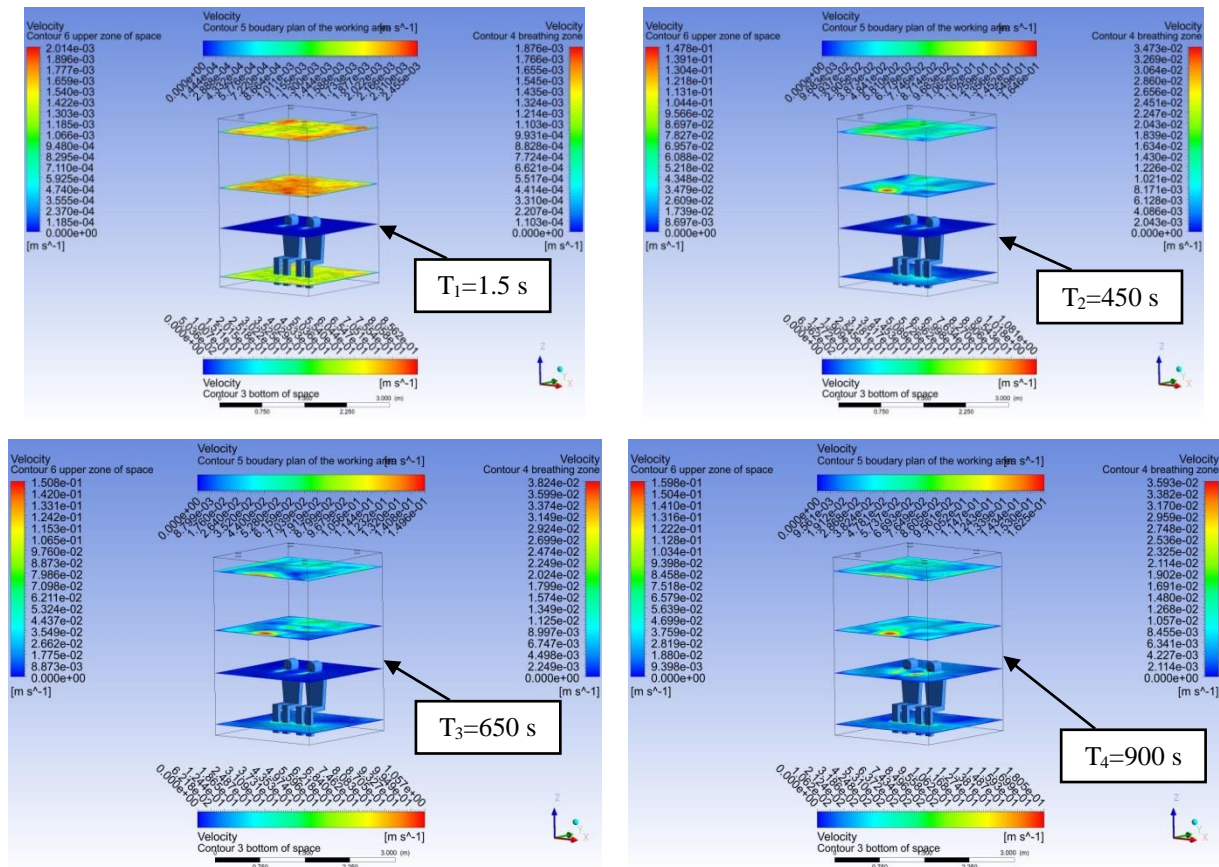


Fig. 11 Variation of velocity along the height of an isolated space over time

#### 4.2 Modeling of air contaminant intake, scheme A

The assimilation of excess heat, humidity and carbon dioxide ( $CO_2$ ) in the research space is organized according to variable schemes, which allows to assess the efficiency of ventilation systems with various design solutions taking into account constant air flow.

The air contaminant parameters, which are later assimilated by ventilation systems for all schemes, are adopted as follows:

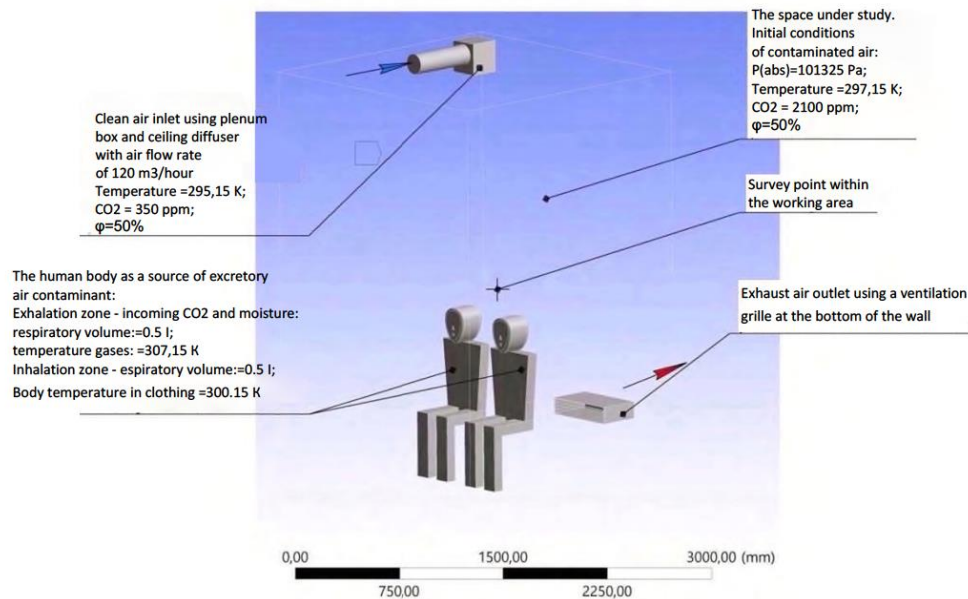
- air temperature:  $24^\circ$ ;
- initial level of  $CO_2$  concentration: 2100 ppm ;
- atmospheric pressure: 101325 Pa ;
- relative humidity:  $\phi = 65\%$  ;
- average surface temperature of a clothed person:  $27^\circ$ .

Results of studies of the "air contaminant" assimilation according to scheme A .

Scheme A (Fig. 12) provides the following constructive conditions for ventilation functioning:

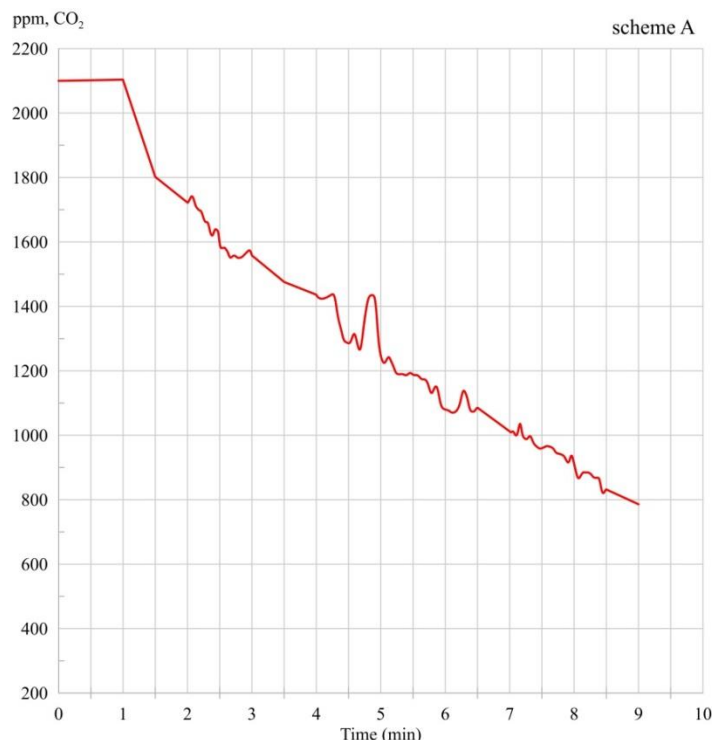
- air supply from above using a static chamber and a ceiling diffuser with a working diameter of  $\varnothing 150$  mm;
- consumption of supply and exhaust air:  $120m^3 / hour$  ;
- exhaust ventilation is organized in the lower part of the wall using a ventilation grid.

First of all, it is reasonable to consider the time required to bring the microclimate of the room to the normative state during  $CO_2$  assimilation. In turn, preliminary studies have established that the highest concentration is concentrated in the working zone, which is due to the physical properties of carbon dioxide compared to the surrounding air.



**Fig. 12** Initial data for modeling and research according to scheme A

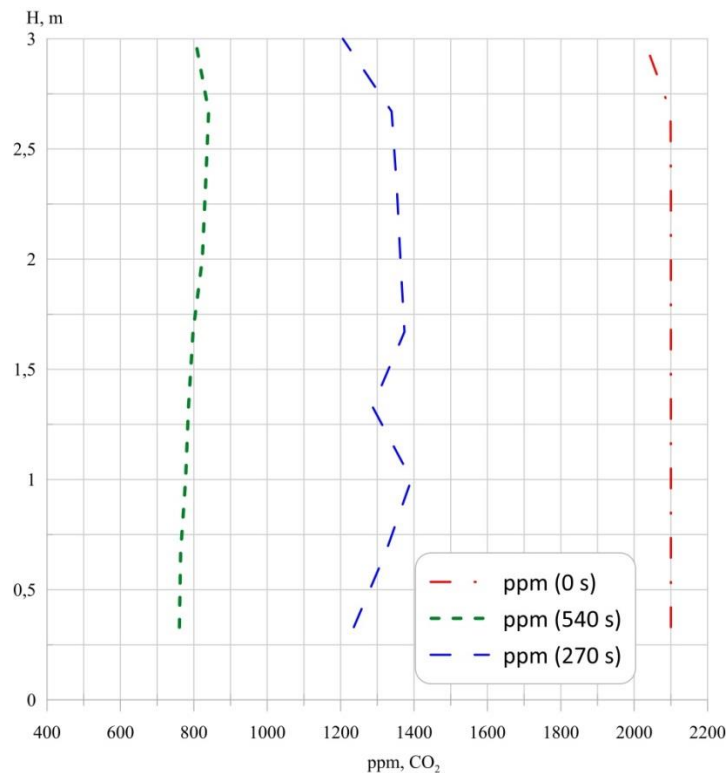
There is an interest in the organization of exhaust ventilation in the lower plane of the working area, where the extraction of polluted air has the shortest path and the possibility of repeated ascent of carbon dioxide into the human breathing zone is excluded. The dynamics of changes in  $CO_2$  concentration at the monitoring point in a 9-minute period is presented in Fig. 13.



**Fig. 13** Dynamics of changes in  $CO_2$  concentration over the time of observation

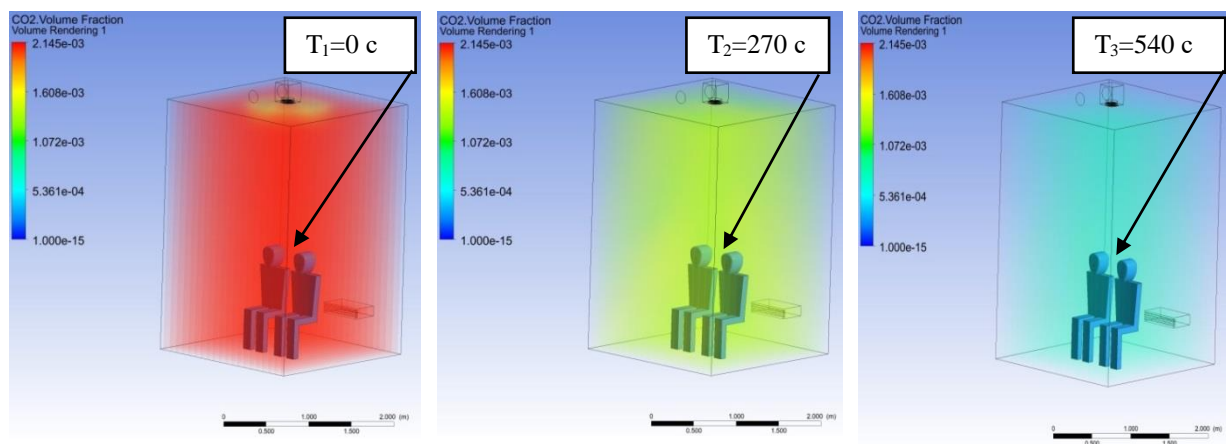
The value of carbon dioxide on a vertical scale during the functioning of the ventilation system (Fig. 14) is distributed with a fluctuation within 200 ppm, which indicates uniform assimilation of polluted air in the study area over the time of observation.





**Fig. 14** Monitoring the distribution of CO<sub>2</sub> concentration on a vertical scale

Volumetric visualization of changes in the carbon dioxide content over a 9-minute period of time is shown in Fig. 15



**Fig. 15** Volumetric CO<sub>2</sub> rendering over time relative to the observation point

The formation of a uniform distribution of air is due to the geometric properties of the ceiling diffuser (Fig. 16), which forms stream lines of a cyclic nature along the adiabatic walls of the study space. The analysis of the jet (stream line) acquires a stable character, where the velocity vector of the supply air coincides with its direction. That is, the use of static pressure chambers in supply devices of air supply systems has advantages in terms of hydrodynamics and acoustics.

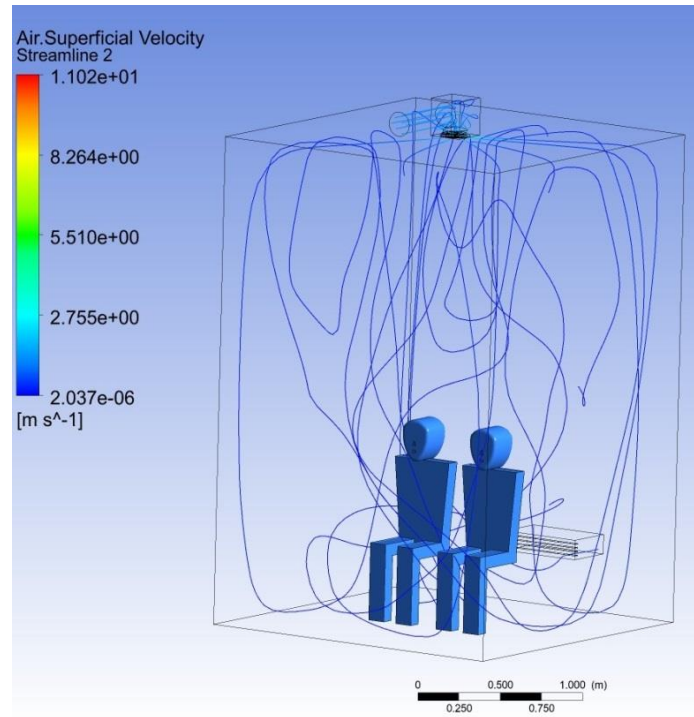


Fig. 16 Stream lines

The distribution of carbon dioxide concentration in different horizontal planes of the investigated volume by both height and time is presented in Fig. 17

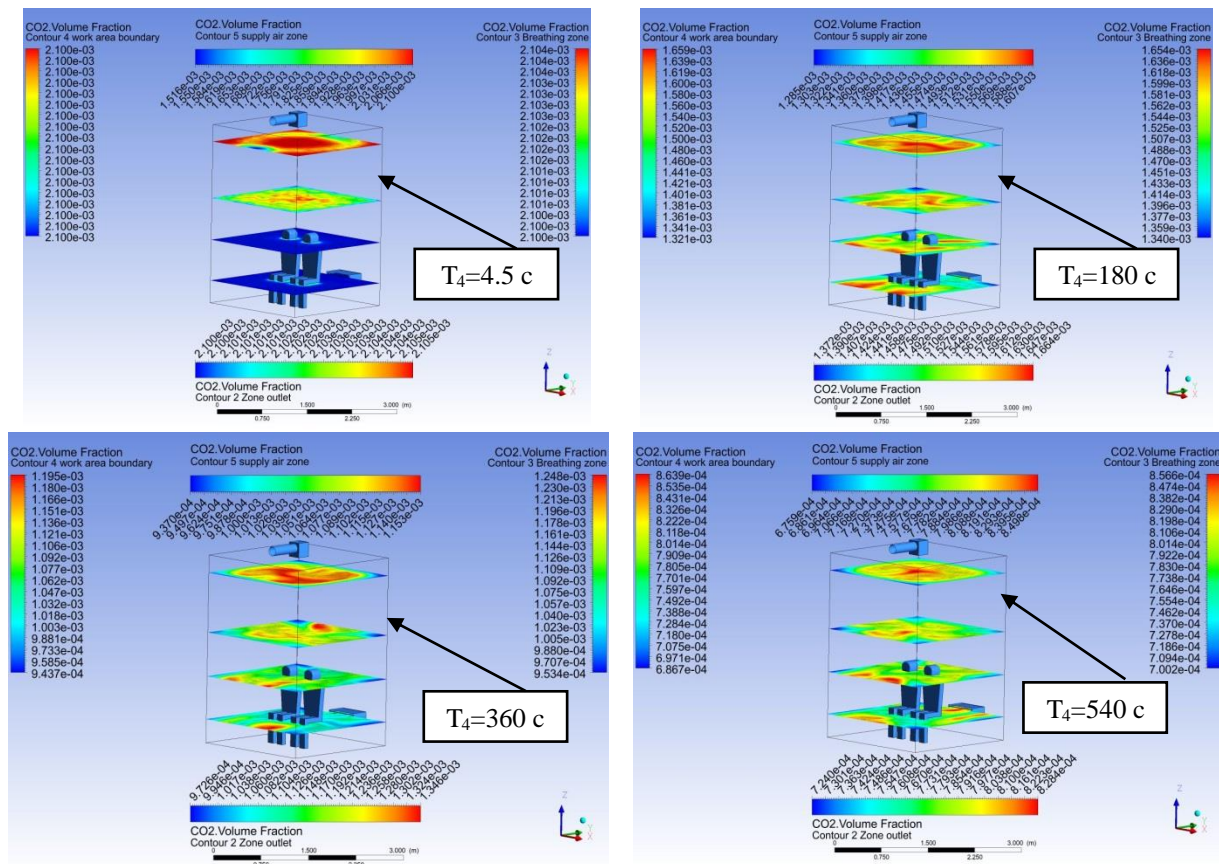


Fig. 17 Variation of  $CO_2$  concentration by height and time, scheme A

## 5 DISCUSSION OF RESEARCH RESULTS

On the basis of the developed mathematical model, it became possible to solve such problems using the ANSYS software complex as:

- Human air contaminant intake in an isolated space;
- Modeling of the change in the concentration of carbon dioxide, scheme A.

The ANSYS mathematical apparatus allows analyzing the operation of air handling unit to redistribute and remove the main air contaminants from the room (carbon dioxide, heat, water vapor) and monitor temperature, humidity, relative humidity, enthalpy and air velocity parameters

In particular, based on the contour distribution of carbon dioxide (see Fig. 18), it can be concluded that after nine minutes of operation of the air handling unit according to scheme A, the  $CO_2$  content decreased from 2100 ppm to 600–800 ppm. The optimal parameters at the inlet of the stream into the working area of the room [1, 2] for this indicator are 400–600 ppm.

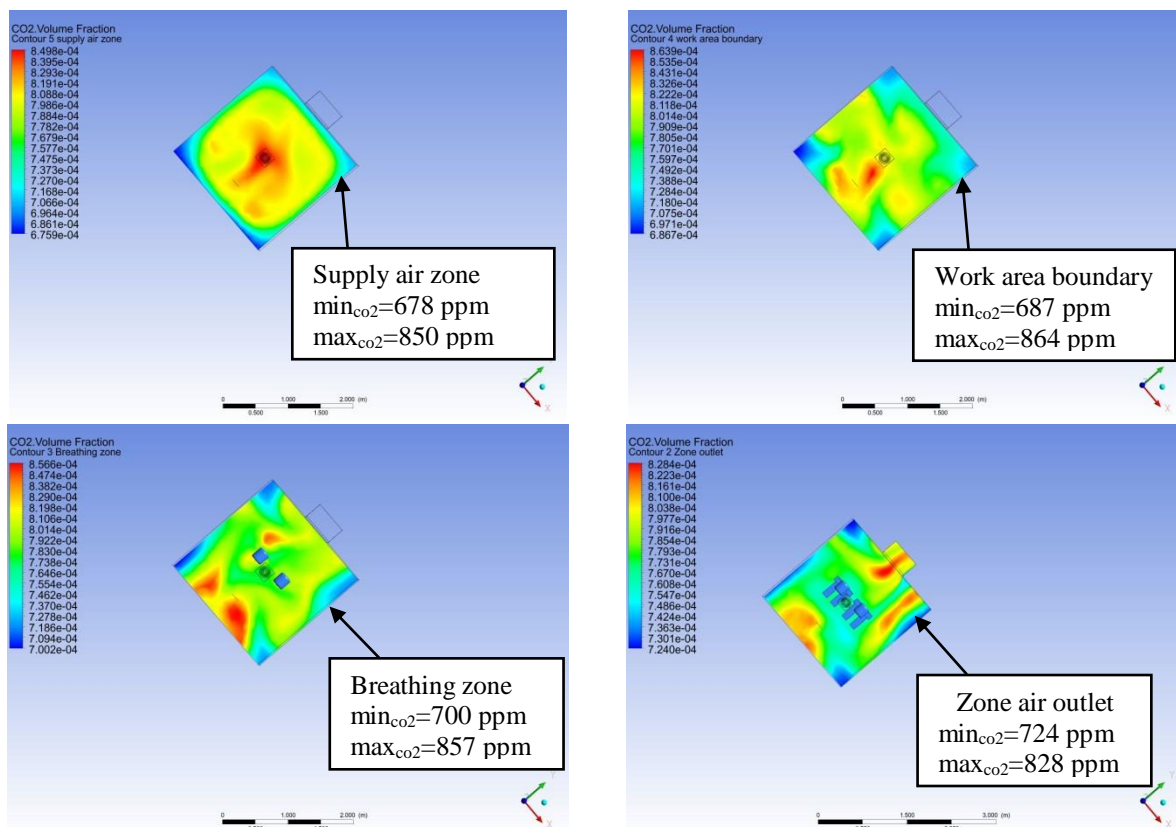


Fig. 18 Variation of  $CO_2$  concentration by height and time, scheme A. Time 540 s

## 6 CONCLUSIONS

With the use of the ANSYS software package, mathematical modeling of processes of changing the state of the air environment has become possible. The above approach and method provided an opportunity:

- processes of heat and mass exchange and hydrogas dynamics during the interaction of systems (human and air handling unit operating according to various air change schemes);
- obtain intermediate results of the efficiency of various air change schemes in the room.

Subsequent publications will allow a comprehensive assessment and comparison of the efficiency of all four air change schemes we have chosen, when solving the inverse problem

(bringing the parameters of the polluted air environment of the room to optimal standard parameters by means of general exchange ventilation).

## 7 ETHICAL DECLARATIONS

The authors have no relevant financial or non-financial interests to report.

## References

1. DBN V.2.5-67:2013. Opalennia, ventyliatsiia ta kondytsionuvannia. Effective from 2014-01-01. Official edition. Kyiv : Minrehion Ukrainy, 2013. 135 p. [in Ukraine].
2. DSTU B EN 15251:2011. Rozrakhunkovi parametry mikroklimatu prymishchen dlia proektuvannia ta otsinky enerhetychnykh kharakterystyk budivel po vidnoshenniu do yakosti povitria, teplovoho komfortu, osviltennia ta akustyky (en 15251:2007, idt). Effective from 2013-01-01. Official edition. Kyiv : Minrehion Ukrainy, 2012. 71 p. [in Ukraine].
3. Farzad P., Lian-Ping W., Weiwei D., Yong-Feng M., Challenges in simulating and modeling the airborne virus transmission: A state-of-the-art review. *Phys. Fluids* 33, 101302 (2021); doi: 10.1063/5.0061469. [in Ukraine].
4. Mansour E., Vishinkin R. Measurement of temperature and relative humidity in exhaled breath. *Sensors and actuators B: chemical*. 2020. Volume 304. 127371. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0925400519315709>.
5. Elcner J. Study of airflow in the trachea of idealized model of human tracheobronchial airways during breathing cycle. *EPJ web of conferences* 92, 02016 (2015) : Experimental Fluid Mechanics 2014, 6 May 2015. P. 6. URL: <https://doi.org/10.1051/epjconf/20159202016>.
6. Ansys CFX-Solver Theory Guide. Release: 2021 R2. 2nd ed. Canonsburg : ANSYS, Inc., 2021. 387 p.
7. Siti Nurul Akmal Yusof. A short review on RANS turbulence models. *CFD letters*. 2020. Vol. 12, Issue 11. P. 83–96. URL: <http://www.akademiabaru.com/cfdl.html>
8. Patankar S. V. Numerical Heat Transfer and fluid flow. New York : McGraw-Hill Book Company, 1980. 200 p.
9. Coakley T. Turbulence modeling methods for the compressible Navier-Stokes equations. *In 16th fluid and plasmadynamics conference*, Danvers, MA., 12–14 July 1983. 1983. P. 1693.
10. Jones W. P., Launder B. E. The prediction of laminarisation with a two-equation model of turbulence. *International journal of heat and mass transfer*. 1972. Vol. 15, no. 2. P. 301–314.
11. Freik D. Molekuliarna fizyka i termodynamika. Metodychnyi posibnyk : metodychnyi posibnyk. Ivano-Frankivsk : DNVZ «Prykarpatskyi natsionalnyi universytet imeni Vasylia Stefanyka», 2015. 142 p. [in Ukraine].

## Література

1. ДБН В.2.5-67:2013. Опалення, вентиляція та кондиціонування. Чинний від 2014-01-01. Вид. офіц. Київ : Мінрегіон України, 2013. 135 с.
2. ДСТУ Б EN 15251:2011. Розрахункові параметри мікроклімату приміщень для проектування та оцінки енергетичних характеристик будівель по відношенню до якості повітря, теплового комфорту, освітлення та акустики (EN-15251:2007, IDT). Чинний від 2013-01-01. Вид. офіц. Київ : Мінрегіон України, 2012. 71 с.
3. Farzad P., Lian-Ping W., Weiwei D., Yong-Feng M., Challenges in simulating and modeling the airborne virus transmission: A state-of-the-art review. *Phys. Fluids* 33, 101302 (2021); doi: 10.1063/5.0061469
4. Mansour E., Vishinkin R. Measurement of temperature and relative humidity in exhaled breath. *Sensors and actuators B: chemical*. 2020. Volume 304. 127371. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0925400519315709>.
5. Elcner J. Study of airflow in the trachea of idealized model of human tracheobronchial airways during breathing cycle. *EPJ web of conferences* 92, 02016 (2015) : Experimental Fluid Mechanics 2014, 6 May 2015. P. 6. URL: <https://doi.org/10.1051/epjconf/20159202016>

6. Ansys CFX-Solver Theory Guide. Release: 2021 R2. 2nd ed. Canonsburg : ANSYS, Inc., 2021. 387 p.
7. Siti Nurul Akmal Yusof. A short review on RANS turbulence models. *CFD letters*. 2020. Vol. 12, Issue 11. P. 83–96. URL: <http://www.akademiabaru.com/cfdl.html>
8. Patankar S. V. Numerical Heat Transfer and fluid flow. New York : McGraw-Hill Book Company, 1980. 200 p.
9. Coakley T. Turbulence modeling methods for the compressible Navier-Stokes equations. *In 16th fluid and plasmadynamics conference*, Danvers, MA., 12–14 July 1983. 1983. P. 1693.
10. Jones W. P., Launder B. E. The prediction of laminarisation with a two-equation model of turbulence. *International journal of heat and mass transfer*. 1972. Vol. 15, no. 2. P. 301–314.
11. Фреїк Д. Молекулярна фізика і термодинаміка. Методичний посібник : метод. посіб. Івано-Франківськ : ДНБЗ «Прикарпат. нац. ун-т ім. Василя Стефаника», 2015. 142 с.

**Volodymyr Kiosak**

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture,  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor  
Didrichson st., 4, Odesa, Ukraine, 65029  
kiosakv@ukr.net,  
ORCID: 0000-0002-7433-6709

**Volodymyr Isaiev**

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture,  
PhD, Associate Professor  
Didrichson st., 4, Odesa, Ukraine, 65029  
isaevv5@gmail.com,  
ORCID: 0000-0002-9947-7284,

**Valery Fedorenko**

Odesagaz joint-stock company,  
Project Engineer  
Odaniya st., 1, Odesa, Ukraine, 65003  
49235fluemind@odaba.edu.ua,  
ORCID: 0009-0002-2739-6888

**Andrew Gridasov**

Municipal institution "Reserve points of the civil protection department  
of the Odesa City Council",  
Engineer  
Artileriyskaya st., 1, Odesa, Ukraine, 65039  
hridasovandrey@gmail.com  
ORCID: 0009-0007-5513-630X

*For references:*

V. Kiosak, V. Isaiev, V. Fedorenko, A. Gridasov. (2024). Modeling the entry of air contaminants into a room. *Mechanics and Mathematical Methods*. VI (2). 58–76.

*Для посилань:*

Кіосак В. А., Ісаєв В. Ф., Федоренко В. В., Грідасов А. Ю. Моделювання надходження «шкідливостей» у приміщення. *Механіка та математичні методи*, 2024. Т. VI. № 2. С. 58–76.

УДК 666.9.022

## МЕХАНОАКТИВАЦІЯ ПОРТЛАНДЦЕМЕНТУ ТА ЇЇ ВПЛИВ НА ВЛАСТИВОСТІ БУДІВЕЛЬНИХ КОМПОЗИЦІЙ РІЗНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

Барабаш І. В.<sup>1</sup>, Давідчук В. Г.<sup>1</sup>, Стрельцов К. О.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Анотація:** Розглянуті у статті питання пов'язані з визначенням впливу механоактивації на властивості цементно-водних композицій та будівельних розчинів на їх основі. Актуальним для даного дослідження є активація цементу в поєднанні з використанням меленого кварцового піску ( $S = 250 \text{ м}^2 / \text{кг}$ ) та суперпластифікатору Релаксол-Супер ПК. Кількість кварцового піску корегувалася в діапазоні від 0 до 40% маси цементу, а суперпластифікатору (0,15 - 1,5%) маси в'язучого. Застосування даної технології забезпечує прискорення процесів гідратації цементу, збереження необхідного рівня рухливості композицій при меншій витраті води замішування, інтенсифікацію екзотермічного розігріву.

Наведені експериментальні дані дозволили оцінити вплив терміну активації в'язучого та витрат суперпластифікатору на розплив водної цементно-вміщуючої композиції. Встановлено, що основний вклад в зниження водотвердого відношення (при умові одержання рівнов'язких композицій) досягається при активації цементно-вміщуючої композиції протягом 180 сек. з додаванням 1,5% суперпластифікуючої добавки. Водотверде відношення зменшується більше ніж на 50%. Подальше збільшення кількості пластифікатору має малу ефективність та слабо впливає на зниження водотвердого відношення.

Активація в поєднанні із зменшенням водотвердим відношенням цементно-водної композиції сприяє як підвищенню інтенсивності розігріву, так і зростанню її максимальної температури. Після активації максимальне значення температури збільшувалось на 5-11%, порівняно з неактивованою цементно-водною композицією. Пік екзотермічної реакції для механоактивованої цементно-водної композиції настає на 3 години раніше в порівнянні з неактивованою сумішшю. Зростання міцності будівельного розчину на механоактивованому цементі з додаванням суперпластифікуючої добавки досягало 71% в порівнянні з контролем.

**Ключові слова:** механоактивація, роторний швидкісний змішувач, пластифікуюча добавка, екзотермічний розігрів, водотверде відношення.

## MECHANOACTIVATION OF PORTLAND CEMENT AND ITS INFLUENCE ON THE CHARACTERISTICS OF CONSTRUCTION COMPOSITIONS FOR VARIOUS PURPOSES

I. Barabash<sup>1</sup>, V. Davidchuk<sup>1</sup>, K. Streltsov<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract:** The issues considered in the article are related to determining the effect of mechanical activation on the properties of cement-water compositions and building mortars based on them. The activation of cement in combination with the use of ground quartz sand ( $S = 250 \text{ м}^2 / \text{кг}$ ) and the superplasticizer Relaxol-Super PC is relevant for this study. The amount of quartz sand was adjusted in the range from 0 to 40% of the cement mass, and the superplasticizer (0,15 - 1,5%) of the binder mass. The use of this technology ensures acceleration of cement hydration processes, maintaining the



required level of composition mobility with a lower consumption of mixing water, and intensification of exothermic heating.

The presented experimental data made it possible to evaluate the effect of the binder activation period and the superplasticizer consumption on the flow of the aqueous cement-containing composition. It was found that the main contribution to the decrease in the water-solid ratio (provided that equiviscous compositions are obtained) is achieved by activating the cement-containing composition for 180 sec. with the addition of 1,5% superplasticizing additive. The water-solid ratio decreases by more than 50%. A further increase in the amount of plasticizer has low efficiency and has little effect on decreasing the water-solid ratio.

Activation in combination with reduced water hardening of the cement-water composition contributes to both an increase in the heating intensity and an increase in its maximum temperature. After activation, the maximum temperature increased by 5-11% compared to the non-activated cement-water composition. The peak of the exothermic reaction for the mechanically activated cement-water composition occurs 3 hours earlier compared to the non-activated mixture. The increase in the strength of the mortar on mechanically activated cement with the addition of a superplasticizing additive reached 71% compared to the control.

**Keywords:** mechanical activation, rotary high-speed mixer, plasticizing additive, exothermic heating, water-solid ratio.

## 1 ВСТУП

Перспективним методом покращення фізико-механічних характеристик будівельних композитів є механохімічна активація портландцементу. Ефект від механоактивації різко зростає в поєднанні з використанням поверхнево-активних речовин та меленого кварцового піску. Забезпечення високого ступеня активації цементу досягається шляхом використання швидкісних активаторів. Сумісне використання перерахованих технологічних та рецептурних факторів може сприяти різкому підвищенню потенційних можливостей в'язучого, що може відобразитися як на кінетиці зростання міцності будівельного композиту, так і на її реальному значенні в марочному віці.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Одним з основних завдань, що стоять перед технологіями, є покращення властивостей цементного каменю та будівельних композитів на його основі. Це вкрай важлива та актуальна задача, для вирішення якої створені різноманітні шляхи [1]-[9], серед яких перспективними є механохімічні способи активації в'язучого [10]-[15], використання поверхнево-активних речовин та мінеральних наповнювачів [16]-[19]. Серед існуючих способів активації процесів гідратації цементних композицій широке розповсюдження одержують турбулентні швидкісні змішувачі різних конструкцій [20]-[22]. Всі вони мають одну технологічну мету, а саме – покращувати як реологічні, так і фізико-механічні властивості композиційних матеріалів [23]-[27]. Використання швидкісних змішувачів сприяє вирішенню комплексу питань, які пов'язані, насамперед, як з покращенням гомогенності свіжоприготовленої суміші так і з зростанням міцності цементного каменю та будівельного розчину на його основі [28], [29].

Вкрай важливим в технології виготовлення ресурсозберігаючих будівельних розчинів є використання поверхнево-активних речовин. Такі добавки часто використовують як окремо, так і в поєднанні з іншими добавками синтетичного або натурального походження [30]. Наявність їх зменшує надлишок води в процесі приготування будівельного розчину, що призводить до підвищення його міцності [31, 32]. Використання швидкісного гідродинамічного змішування в поєднанні з ефективною витратою поверхнево-активної добавки та оптимальною за витратою кількістю меленого кварцового піску, забезпечує прискорення процесів гідратації цементу, інтенсифікації екзотермічного розігріву та зростання міцності будівельного розчину. Вище перераховане дозволяє відмовитися як від термовологої обробки, так і від використання швидкотверднучих цементів.

## 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Мета пропонованої роботи полягає у визначенні роздільного впливу механоактивації шляхом швидкісного змішування цементно-водних композицій в спеціально розробленому механоактиваторі примусової дії ( $n = 1800 \text{ об/хв}$ ), суперпластифікуючої добавки Релаксол - Супер ПК (в подальшому СП), та витрати меленого кварцового піску як на їх рухливість, екзотермічний розігрів, а також на міцність при стиску будівельного розчину. Активація тільки портландцементу та суміші портландцементу з меленим піском здійснювалася в водному середовищі, в механоактиваторі протягом 180 сек. Для контролю використовувалося в'язуче, яке механоактивації не підлягало. Визначався також сумісний вплив механоактивації, витрати СП та меленого кварцового піску на кінетику екзотермічного розігріву та на міцність при стиску будівельного розчину.

Для визначення екзотермічного розігріву водної цементно – вміщуючої композиції використовувався термос, який представляв собою скляну колбу з подвійними стінками,



між якими створено вакуум. Фіксація температури зразків здійснювалася через кожні 30 хв їх тверднення до того часу, коли наступний показник розігріву не змінювався, або був нижчим попереднього.

Роздільний та сумісний вплив механоактивації, СП та витрати меленого піску на міцність будівельного розчину оцінювався шляхом випробувань зразків балочок 4x4x16 см на стиск у віці 3-х, 7-и та 28-и днів тверднення. Склад розчинової суміші для виготовлення зразків приймався 1:1 (в'яжуче : пісок).

#### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

В дослідженнях в якості в'яжучого використовувався портландцемент ПЦ II/A-Ш-500. В'яжуче відповідає вимогам ДСТУ Б В.2.7-46:2010 "Цементи загальнобудівного призначення. Технічні умови.". Одержання змішаного в'яжучого здійснювалося за рахунок сумісного помелу портландцементу та кварцового піску в кількості 20 і 40 %. В якості заповнювача для будівельного розчину використовувався кварцовий пісок з  $M_{кр} = 2,2$ . В табл. 1 наведені експериментальні дані, які відзеркалюють вплив рецептурно – технологічних факторів (РТФ), а саме: а) вміст меленого піску у в'яжучому; б) концентрації СП Релаксол - Супер ПК; в) механохімічної активації в'яжучого на водотверде відношення (В/Т) цементно-вміщуючих водних композицій з розпливом конусу суміші на приборі Суттарда(в кожній точці експерименту) в діапазоні  $D = 120 \pm 5$  мм.

Таблиця 1

Вплив РТФ на водотверде відношення цементно-вміщуючих композицій

№	Цемент, %.	Мел.пісок, %.	СП, %.	В/Т	Активація,сек
1	100	0	0	0,387	0
2	100	0	0,75	0,221	0
3	100	0	1,5	0,212	0
4	100	0	0	0,346	180
5	100	0	0,75	0,201	180
6	100	0	1,5	0,193	180
7	80	20	0	0,348	0
8	80	20	0,75	0,212	0
9	80	20	1,5	0,2	0
10	80	20	0	0,313	180
11	80	20	0,75	0,195	180
12	80	20	1,5	0,188	180
13	60	40	0	0,324	0
14	60	40	0,75	0,190	0
15	60	40	1,5	0,177	0
16	60	40	0	0,284	180
17	60	40	0,75	0,177	180
18	60	40	1,5	0,17	180

Аналіз експериментальних даних, наведених в табл. 1, свідчить про те, що активація цементно-вміщуючої водної композиції протягом 180 сек забезпечує одержання необхідного розпливу суміші (діаметр  $120 \pm 1$  мм) при знижених значеннях водотвердого відношення. Так, механохімічна активація цементно-водної композиції сприяє зниженню водотвердого відношення з 0,387 (контроль – активація відсутня) до 0,346 (активація протягом 180 сек), тобто майже на 12 %.

Слід відмітити вплив механоактивації на зниження водотвердого відношення також і для композицій на портландцементі з добавкою меленого кварцового піску. Так, для цементновміщуючої композиції з добавкою 20% меленого кварцового піску

механоактивація приведе до зниження В/Т з 0,348 до 0,313, тобто більше ніж на 11%. Механохімічна активація цементно-водної композиції з добавкою 40% меленого кварцового піску забезпечує зниження В/Т (в порівнянні з контролем) з 0,324 до 0,284, тобто майже на 14%.

Що стосується впливу механоактивації водних цементно - вміщуючих композицій на зміну діаметру розпливу конусу суміші в часі, то слід відмітити, що для всіх розглянутих композицій проявляється тенденція до більш швидкої втрати рухливості сумішей, термін активації яких зростає. Виявлено, що збільшення кількості СП у композиціях сприяє сповільненню втрати рухливості сумішей. Кінетику зменшення діаметра розпливу конуса суміші представлена у табл 2.

**Таблиця 2**

Діаметр розпливу конуса суміші складів

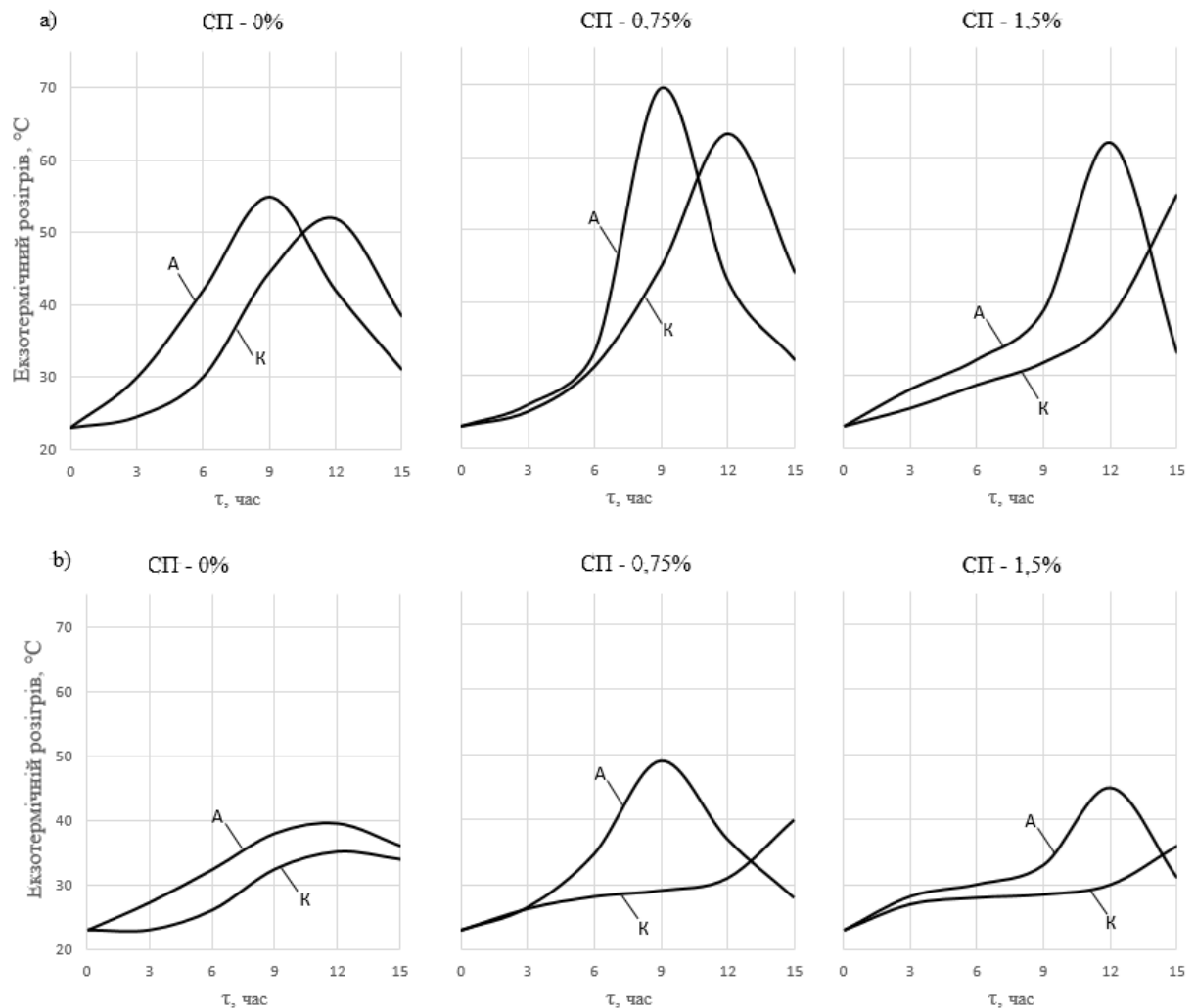
Термін, год	№ складу											
	1	2	3	4	5	6	13	14	15	16	17	18
	Розплив, мм											
0	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120	120
1	107	109	109	94	90	90	113	109	110	97	95	113
2	105	95	97	74	69	83	106	100	103	83	70	102
3	89	91	86	54	52	72	97	85	95	62	56	84
4	63	89	78	-	-	59	84	72	90	-	-	65
5	-	84	73	-	-	-	70	65	82	-	-	-
6	-	64	66	-	-	-	54	58	74	-	-	-

Відмічено вплив механоактивації на зниження водотвердого відношення цементно-водних композицій в присутності суперпластифікатора. Так, якщо зростання СП до 1,5% викликає зниження водотвердого відношення цементно-водної композиції з 0,387 до 0,212 (контроль – активація відсутня), то сумісний вплив механоактивації в присутності СП (1,5%) забезпечує одержання заданого розпливу цементно-водної композиції, при меншій кількості води замішування ( $B/T = 0,193$ ).

Швидкісне змішування цементно-вміщуючих композицій відображається також і на кінетиці їх екзотермічного розігріву. Одержані експериментальні результати, рис. 1, свідчать про наявність індукційного періоду розігріву цементно-водних композицій як на механоактивованому в'язучому (А), так і на в'язучому, яке механоактивації не підлягало (К). Індукційний період на портландцементі без добавки меленого піску і який активації не підлягав, складає приблизно 4...6 годин з моменту замішування його водою. Попередня активація скорочує термін індукційного періоду екзотермічного розігріву цементно-водної композиції до 2-х – 3-х годин. По закінченню індукційного періоду спостерігається інтенсивне підвищення температури тверднучої цементно-водної композиції.

Для цементно-водної композиції, яка не підлягала механоактивації, максимальний розігрів не перевищував 51,7 °С, а пік розігріву наставав не раніше 11 годин з моменту замішування цементу водою.

Механоактивація цементно-водної композиції в присутності СП в кількості 1,5% сприяє підвищенні швидкості гідратації, що відображається на зростанні максимальної температури її розігріву (рис. 1, а).



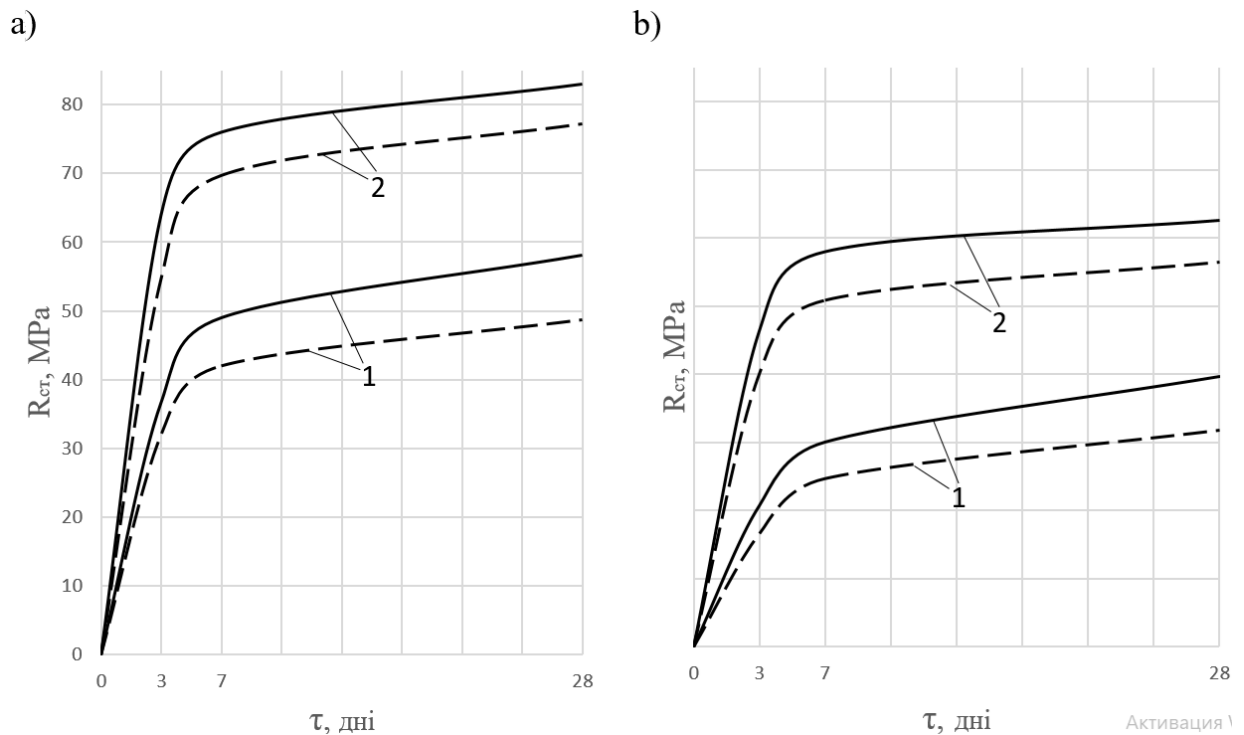
**Рис. 1.** Кінетика екзотермічного розігріву цементно-вміщуючих композицій:  
а, б – вміст меленого кварцового піску у в'язучому, відповідно 0 та 40%

Введення до складу портландцементу меленого кварцового піску сприяє зменшенню екзотермічного розігріву цементно-вміщуючої композиції. Так, зростання його витрати 40% сприяє зниженню максимальної температури розігріву тверднучої цементно-вміщуючої композиції з 57,4 до 39,5 °С, тобто більше ніж на 31% (рис. 1, б).

Заключним етапом дослідження було визначення впливу механохімічної активації цементу в присутності СП та меленого кварцового піску на міцність при стиску будівельного розчину в віці 3-х, 7-и та 28-и днів тверднення.

Аналіз графічних залежностей свідчить про те, що сумісний вплив механоактивації та СП сприяє зростанню міцності будівельного розчину (в порівнянні з контролем) в 3-х денному віці з 32 МПа до 70 МПа, тобто більше ніж в 2 рази. В 28-и денному віці різниця міцності знижується і не перевищує 70%. Введення в портландцемент 40% меленого кварцового піску різко знижує міцність, але і в цьому разі механоактивація в присутності СП забезпечує одержання міцності будівельного розчину на стиск на 25...30% більшою в порівнянні з міцністю контрольних зразків (механоактивація відсутня, кількість СП – 0%).

Кінетика набору міцності будівельним розчином показана на рис. 2.



**Рис. 2.** Кінетика зростання міцності будівельного розчину:  
a, b – вміст меленого піску у в'язучому 0 та 40% відповідно;  
----- в'язуче механоактивоване протягом 180 сек.;  
- - - - - контроль (механоактивація в'язучого відсутня);  
1, 2 – витрата суперпластифікатора 0 і 1,5% відповідно (від маси цементу)

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Сумісний вплив механоактивації та СП сприяє зростанню міцності будівельного розчину. Підвищення реакційної здатності компонентів в'язучого пов'язано з механічним руйнуванням поверхневої зони тонкодисперсних часток цементу та зерен піску в процесі контактної взаємодії між ними у роторному швидкісному змішувачі. Результати експериментальних досліджень дозволили оптимізувати як термін механоактивації, витрати СП, так і кількість меленого кварцового піску у в'язучому, які в сукупності забезпечують одержання цементного каменю підвищеної міцності. Більш того, використання механоактивації дозволило зменшити (в порівнянні з контролем) водотверде відношення більше ніж на 11%, скоротити термін тужавлення з 5 до 4 годин, а термін індукційного періоду на 2-3 години та збільшити максимальну температуру розігріву більше ніж на 11%.

Використання СП (1,5%) дозволяє зменшити (в порівнянні з контролем) водотверде відношення більше ніж на 45%, а в поєднанні з механоактивацією більше ніж на 50%.

Використання меленого кварцового піску у складі в'язучого (з заміною 40% цементу) сприяє зменшенню максимальної температури розігріву з 57,4 до 39,5 °С.

Результати досліджень свідчать про ефективність механохімічної активації портландцементу з добавкою меленого кварцового піску у роторному швидкісному змішувачі. Ефект від активації цементу підвищується в присутності суперпластифікатора, забезпечуючи при цьому зростання міцності будівельного розчину в 28-и денному віці більше ніж на 70% (в порівнянні з контролем).

## 6 ВИСНОВКИ

1. Використання механохімічної активації цементно-вміщуючи композицій в присутності суперпластифікуючої добавки Релаксол-Супер ПК (до 1,5% від маси цементу) дозволяє зменшувати водотверде відношення з 0,387 до 0,193, тобто більше ніж на 50% (в порівнянні з контролем).

2. Сумісний вплив механоактивації в'язучого в присутності СП (1,5%) сприяє зростанню міцності будівельного розчину в 28-и денному віці більше ніж на 70% (в порівнянні з контролем).

## 7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори статті не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, про які можна було б повідомити.

## Література

1. Рунова Р.Ф., Косовський Ю.Л. Технологія модифікованих будівельних розчинів. Київ: КНУБА, 2007, 256 с.
2. Коваль С.В. Моделювання та оптимізація складу та властивостей модифікованих бетонів. Одеса: Астропринт, 2012, 424 с.
3. Саницький М.А., Кропивницька Т.П., Гев'юк У.М. Швидкотверднучі клінкер-ефективні цементи та бетони. Монографія. Львів: ТОВ Простір-М, 2021, 206с.
4. Intini G., Liberti L., Notarnicola M., Di Canio F. Mechanochemical activation of coal fly ash for production of high strength cement conglomerates // Химия в интересах устойчивого развития. 2009. Т. 17. №6. С. 567–571.
5. Bezzubtseva M.M., Ruzhev V.A., Yuldashev R.Z. Electromagnetik mechanoactivation of dry construction mixes // International Journal of Applied and Fundamental Research. 2013. No 2. Pp. 241–245.
6. Солодкий С.Й. Трещиностійкість бетонів на модифікованих цементах/ С.Й. Солодкий// Львів: Вид-во Нац-го зак-ту «Львівська політехніка». 2008. -144с.
7. Вировий В.М. Композиційні будівельні матеріали та конструкції. Структура, самоорганізація, властивості/В.М. Вировий, В.С. Дорофеев, В.Г. Суханов//Одеса: Вид-во «ТЕС», 2010. 176с.
8. Рунова Р.Ф. Конструкційні матеріали нового покоління та технології їх впровадження в будівництво/ Р.Ф. Рунова, В.І. Гоц, М.А. Саницький та ін./ К: УВПК «Екс Об», 2008. 360с.
9. Varabasch I.V., Babiy I.M., Streltsov K.O. Intensive separate technology and its influence on the properties of cement -Water compositions, solutions and concretes on their basis // Modern construction and architecture, Issue N2. Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, 2022. P. 44-51.
10. Шпирько М.В., Дубов Т.М. Дослідження вливу електромагнітної активації концентрованої цементної суспензії на властивості цементного каменю та бетону/ Вісник ПДАБА, 2020, N2(263-264). С. 102-107.
11. Kumar S., Vandopadhyay A., Rajinikanth V., Alex T.C., Kumar R. Improved processing of blended slag cement through mechanical activation // Journal of Materials Science. 2004. Vol. 39. No.10. Pp. 3449–3452.
12. Гоц В.І. Бетони і будівельні розчини Київ: УВПК Екс Об, 2003. 468с.
13. Федоркін С.І. Механоактивація вторинної сировини у виробництві будівельних матеріалів. / Сімферополь: Таврія, 1997. 180с.
14. Дворкін Л.Й., Дворкін О.Л., Гарніцький Ю.В. Модифіковані золотмісні сухі будівельні суміші для мурувальних та клейових розчинів. НУВГП. Рівне. 2013. 325с.
15. Linbo Jiang, Zhi Wang, Xueliang Gao. Effect of nanoparticles and surfactants on properties and microstructures of foam and foamed concrete.// Construction and Building Materials. -

2024. – vol.411.
16. Swapnadarshi, Sritam & Gandhi, Indu Siva Ranjani & Selija, Khwairakpam. (2018). State-of-the-Art Review on the Characteristics of Surfactants and Foam from Foam Concrete Perspective. *Journal of The Institution of Engineers (India): Series A*. 99. 1-15. 10.1007/s40030-018-0288-5.
  17. Kligys, Modestas & LAUKAITIS, Antanas. (2007). The Influence of Some Surfactants on Porous Concrete Properties. 13.
  18. Shkromada, O., A. Paliy, O. Yurchenko, N. Khobot, A. Pikhtirova. “INFLUENCE OF FINE ADDITIVES AND SURFACTANTS ON THE STRENGTH AND PERMEABILITY DEGREE OF CONCRETE”. *EUREKA: Physics and Engineering*, no. 2, Mar. 2020, pp. 19-29
  19. Sanchez F., Sobolev K. Nanotechnology in concrete - a review / *Construction and Building Materials*, 2010. V. 24. P. 2060-2071.
  20. Кондратьева Н. В. Нанотехнології у виробництві будівельних матеріалів/Н.В. Кондратьева / *Будівництво України*, 2012. №6. С. 2-9.
  21. Маслов А.Г. Розробка установки для вібротехнічної обробки будівельних сумішей/ А.Г. Маслов, Ю.С. Саленко, Є.В. Стукота // *Вісник Харківського нац. автодор. ун-ту*. Вип. 57, 2012. С.59-62.
  22. Хайнік Г. Трибохімія. Пров. з ньому., 1987. 584с.
  23. Чарнецький Л. Майбутнє бетону / Л. Чарнецький, В. Курдовський // *IX Міжнар. наук.-практ. конф.: Запоріжжя*, 2007. - С. 13-21.
  24. Русин Б.Г. Високофункціональні бетони на основі портландцементів, модифікованих ультрадисперсними мінеральними добавками: авторец. дис. на здобуття наук. ст. к.т.н. за спец. 05.23.05/ НУ «Львівська політехніка». Львів. 2014. 21с.
  25. Aktivation des Betonanmachwasser./ A. Kudyahow, G. Semyonova, Y. Sarkisow[ etc.] // *Tagungsbericht*, Band 2. Weimar, Deutschland, 1997. S.20501 - 20507.
  26. Братчун В. І., Зайченко Л. Г. Оптимізація факторів електромагнітної активації бетонних сумішей / *Вісник ВДАСА: Одеса*, 2005. Вип. № 20. С. 40-46.
  27. Вировий В. Н. та ін. Механоактивація в технології бетонів. ОДАСА. 2014.148 с.
  28. Ушеров-Маршак А.В., Кабусь О.В. Функціонально-кінетичний аналіз впливу добавок на твердіння цементів/Неорганічні матеріали, 2016. Том 52, N4. С. 479-484.
  29. Łażniewska-Piekarczyk, Beata & Miera, Patrycja & Szwabowski, Janusz. (2017). Plasticizer and Superplasticizer Compatibility with Cement with Synthetic and Natural Air-Entraining Admixtures. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 245. 032094. 10.1088/1757-899X/245/3/032094.
  30. Mehran Khan, Majid Ali. Effect of super plasticizer on the properties of medium strength concrete prepared with coconut fiber.// *Construction and Building Materials*. – 2018. – vol.182. – P. 703-715.
  31. Dzigita Nagrockiene, Ina Pundienė, Asta Kicaite. The effect of cement type and plasticizer addition on concrete properties.// *Construction and Building Materials*. – 2013. – vol.45. – P. 324-331.

## References

1. Runova R.F., Kosovsky Yu.L. Technology of modified building solutions. Kyiv: KNUSA, 2007, 256 p.
2. Koval S.V. Modeling and optimization of composition and properties of modified concrete. Odessa: Astroprint, 2012, 424 p.
3. Sanitsky M.A., Kropyvnytska T.P., Gevuyk V.M. Fast-hardening clinker-effective cements and concretes. Monograph. Lviv: Prostir-M LLC, 2021, 206s.
4. Intini G., Liberti L., Notarnicola M., Di Canio F. Mechanochemical activation of coal fly ash for production of high strength cement conglomerates // *Химия в интересах устойчивого развития*. 2009. Т. 17. №6. С. 567–571.
5. Bezzubtseva M.M., Ruzhev V.A., Yuldashev R.Z. Electromagnetik mechanoactivation of dry construction mixes // *International Journal of Applied and Fundamental Research*. 2013.

- No 2. Pp. 241–245.
6. Sladkiy S.Y. Crack resistance of concrete on modified cements / S.I. Sladkiy// Lviv: Publishing house of the National Law "Lviv Polytechnic". 2008. –144 p.
  7. Vyrovoy V.N. Composite building materials and structures. Structure, self-organization, properties / V.N. Vyrovoy, V.S. Dorofeev, V.G. Sukhanov//Odessa: Publishing house "TES", 2010. 176 p.
  8. Runova R.F. New generation structural materials and technologies for their implementation in construction/R.F. Runova, V.I. Gots, M.A. Sanitsky et al./K: UVPK "Ex Ob", 2008. 360 p.
  9. Barabasch I.V., Babiy I.M., Streltsov K.O. Intensive separate technology and its influence on the properties of cement -Water compositions, solutions and concretes on their basis // Modern construction and architecture, Issue N2. Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, 2022. P. 44-51.
  10. Shpyrko M.V., Dubov T.M. Study of the effect of electromagnetic activation of concentrated cement suspension on the properties of cement stone and concrete / Bulletin of PDABA, 2020, N2 (263-264). P. 102-107.
  11. Kumar S., Bandopadhyay A., Rajinikanth V., Alex T.C., Kumar R. Improved processing of blended slag cement through mechanical activation // Journal of Materials Science. 2004. Vol. 39. No.10. Pp. 3449–3452.
  12. Gots V. I. Concretes and building solutions Kyiv: UVPK Eks Ob, 2003. 468 p.
  13. Fedorkin S.I. Mechanical activation of secondary raw materials in the production of building materials. / Simferopol: Tavria, 1997. 180 p.
  14. Dvorkin L.I., Dvorkin O.L., Garnitsky Yu.V. Modified ash-containing dry building mixes for stone and adhesive mortars. NUOT. Rivne. 2013. 325 p.
  15. Linbo Jiang, Zhi Wang, Xueliang Gao. Effect of nanoparticles and surfactants on properties and microstructures of foam and foamed concrete.// Construction and Building Materials. - 2024. – vol.411.
  16. Swapnadarshi, Sritam & Gandhi, Indu Siva Ranjani & Selija, Khwairakpam. (2018). State-of-the-Art Review on the Characteristics of Surfactants and Foam from Foam Concrete Perspective. Journal of The Institution of Engineers (India): Series A. 99. 1-15. 10.1007/s40030-018-0288-5.
  17. Kligys, Modestas & LAUKAITIS, Antanas. (2007). The Influence of Some Surfactants on Porous Concrete Properties. 13.
  18. Shkromada, O., A. Paliy, O. Yurchenko, N. Khobot, A. Pikhtirova. “INFLUENCE OF FINE ADDITIVES AND SURFACTANTS ON THE STRENGTH AND PERMEABILITY DEGREE OF CONCRETE”. EUREKA: Physics and Engineering, no. 2, Mar. 2020, pp. 19-29
  19. Sanchez F., Sobolev K. Nanotechnology in concrete - a review / Construction and Building Materials, 2010. V. 24. P. 2060-2071.
  20. Kondratieva N. V. Nanotechnology in the production of building materials / N. V. Kondratieva / Construction of Ukraine, 2012. No. 6. P. 2-9.
  21. Maslov A. G. Development of an installation for vibromechanical processing of building mixtures / A. G. Maslov, Yu. S. Salenko, E. V. Stukota // Bulletin of the Kharkov National Avtodor University. Issue 57, 2012. P. 59-62.
  22. Heinicke G. Tribochemistry. Translated from German, 1987. 584 p.
  23. Charnetsky L. The Future of Concrete / L. Charnetsky, V. Kurdovsky // IX International Scientific and Practical Conf.: Zaporizhzhya, 2007. – P. 13–21.
  24. Rusin B.G. Highly functional concretes based on Portland cements modified with ultrafine mineral additives: author. dis. for the degree of scientific associate. candidate of technical sciences in specialty. 05.23.05/ National University "Lviv Polytechnic". Lviv. 2014. 21 p.
  25. Aktivation des Betonanmachwasser./ A. Kudyahow, G. Semyonova, Y. Sarkisow[ etc.] // Tagungbericht, Band 2. Weimar, Deutschland, 1997. S.20501 - 20507.
  26. Bratchun V. I., Zaychenko L. G. Optimization of electromagnetic activation factors of concrete mixtures / Bulletin of OGASU: Odessa, 2005. Issue No. 20. P. 40-46.
  27. Vyrov V. N. et al. Mechanical activation in concrete technology. OSACEA. 2014.148 p.

28. UsheroV-Marshak A.V., Kabus A.V. Functional-kinetic analysis of the influence of additives on cement hardening / Inorganic materials, 2016. Vol. 52, N4. P. 479-484.
29. Łaźniewska-Piekarczyk, Beata & Miera, Patrycja & Szwabowski, Janusz. (2017). Plasticizer and Superplasticizer Compatibility with Cement with Synthetic and Natural Air-Entraining Admixtures. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 245. 032094.  
10.1088/1757-899X/245/3/032094.
30. Mehran Khan, Majid Ali. Effect of super plasticizer on the properties of medium strength concrete prepared with coconut fiber.// Construction and Building Materials. – 2018. – vol.182. – P. 703-715.
31. Dzigita Nagrockiene, Ina Pundienė, Asta Kicaite. The effect of cement type and plasticizer addition on concrete properties.// Construction and Building Materials. – 2013. – vol.45. – P. 324-331.

**Барабаш Іван Васильович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури  
д.т.н., професор  
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна, 65029  
dekansti@ukr.net,  
ORCID: 0000-0003-0241-4728

**Давідчук Владислав Геннадійович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури,  
аспірант  
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029  
oldsnakes19@gmail.com,  
ORCID: 0009-0001-5425-4327

**Стрельцов Костянтин Олександрович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури  
к.т.н., доцент  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029  
0989051837@gmail.com,  
ORCID: 0000-00021-5463-7395

*Для посилань:*

Барабаш І. В., Давідчук В. Г., Стрельцов К.О. Механоактивація портландцементу та її вплив на характеристики будівельних композицій різного призначення ів. Механіка та математичні методи, 2024. Т. VI. №. 2. с. 77–87.

*For references:*

I. Barabash, V. Davidchuk, K. Streltsov (2024). Mechanical activation of portland cement and its influence on the characteristics of building compositions for various purposes. Mechanics and mathematical methods. VI (2). 77–87.



УДК 624.04

## МЕХАНІЗМИ ПЛАСТИЧНОГО РУЙНУВАННЯ АРОК

Сорока М. М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація:** Розглядається методика визначення граничного навантаження для двошарнірної і безшарнірної арок постійної і змінної жорсткості. Розрахунок виконується із використанням методу граничної рівноваги. Розглядаються арки під дією вертикального рівномірно розподіленого навантаження. Поперечний переріз прийнятий у вигляді не армованого прямокутника. Напружено-деформований стан пружно-пластичного матеріалу описується діаграмою Прандтля. Особливість деформування матеріалу полягає в тому, що границі текучості при розтягуванні і стиску різні. Визначення граничного навантаження базується на врахуванні тільки одного фактору – згинального моменту. Тобто, при виникненні у перерізі арки граничного моменту утворюється пластичний шарнір, який дозволяє необмежену кутову деформацію без зростання згинального моменту. При утворенні кількох пластичних шарнірів розрахункова схема арки перетворюється у механізм. Звичайно, такий підхід призводить до неточностей у визначенні граничного навантаження. Але, на першому етапі дослідження ставилася задача детального вивчення особливостей пластичного механізму руйнування арки.

Для дослідження граничного стану арок використовувались дві методики – аналітичний розрахунок і чисельний розрахунок із залученням методу скінчених елементів. Використання двох методик розрахунку дозволяє контролювати результати і підвищити їх достовірність. З використанням аналітики одержані вирази для визначення граничного навантаження і координат перерізів, де утворюються пластичні шарніри. Для арок постійної жорсткості записані готові формули для визначення граничного навантаження, а для арок змінної жорсткості записані нелінійні рівняння, розв'язок яких дозволяє знайти граничне навантаження. Для чисельного розрахунку використовувався, так званий «простий метод», коли на кожному етапі розрахунку визначалась координата утворення пластичного шарніру і відповідне навантаження. Програма розрахунку написана на APDL.

В результаті дослідження виявлено, що безшарнірна арка в залежності від співвідношення стріли підйому до прольоту має три форм пластичного руйнування, двошарнірна арка має одну форму пластичного руйнування.

**Ключові слова:** арки, пружнопластичне тіло, прямокутний перетин, пластичний шарнір, розрахунок за граничною рівновагою.

## MECHANISMS OF PLASTIC DESTRUCTION OF ARCHES

M. Soroka<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

The method of determining the limit load for double-hinged and hingeless arches of fixed and variable rigidity is considered. The calculation is performed using the limit equilibrium method. Arches under the influence of a vertical uniformly distributed load are considered. The cross section is taken in the form of a non-reinforced rectangle. The stress-strain state of an elastic-plastic material is described by the Prandtl diagram. The peculiarities of material deformation are that the yield limits in tension and compression are different. The determination of the limit load is based on taking into account only one factor - the bending moment. When a limiting moment occurs in the arch section, a plastic hinge is formed, which allows unlimited angular deformation without increasing the bending moment. When several plastic hinges are formed, the design diagram of the arch turns into a mechanism. Of course, this approach leads to inaccuracies in determining the limit load. However, at the first stage of the study, the task was to study in detail the features of the plastic mechanism of arch destruction.



To study the limiting state of the arches, two methods were used - analytical calculation and numerical calculation using the finite element method. The use of two calculation methods allows you to control the results and increase their reliability. Using analytics, formulas were obtained to determine the limit load and coordinates of the sections where plastic hinges are formed. For arches of constant stiffness, formulas are written to determine the limit load, and for arches of variable stiffness, nonlinear equations are written, the solution of which allows us to find the limit load. For the numerical calculation, a simple method was used, when at each stage of the calculation the coordinate of the formation of the plastic hinge and the corresponding load were determined. The calculation program is written in APDL.

As a result of the study, it was revealed that a hingeless arch, depending on the ratio of the lifting boom to the span, has three forms of plastic destruction, while a double-hinged arch has only one form of plastic destruction.

**Keywords:** arches, elastoplastic body, rectangular section, plastic hinge, calculation by limit equilibrium.

## 1 ВСТУП

Використання арок як несучих конструкцій мостів, акведуків і інших споруд відомо з давніх часів. І завжди будівельників цікавило значення навантаження, яке призведе до руйнування арки. Але, при відсутності математичного апарату розрахувати несучу здатність арки було неможливо і будівництво арок виконувалося виходячи із досвіду інженера, який керував будівництвом. Часто запас міцності арок у десятки разів перевищував потрібну міцність. Це привело до того, що арки, побудовані більше ніж 2000 років потому збереглися до наших часів. У сучасних умовах, коли необхідно економити будівельні матеріали, запас міцності обмежений будівельними нормами. Тому потрібно розробляти більш досконалі методики розрахунку, які дозволять більш точно виконувати розрахунки і тим самим економити матеріал. У даній роботі представлена аналітична і чисельна методики розрахунку несучої здатності двошарнірної і безшарнірної арок без врахування впливу поздовжньої сили на величину граничного навантаження.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Задачу знаходження руйнівного навантаження сформулював ще Галілео Галілей. Але досить довго ця задача не мала теоретичного розв'язку через відсутність належного математичного апарату. Перші роботи, присвячені теоретичному визначенню граничного навантаження були опубліковані у працях [1]-[4] та інших дослідників лише першій половині двадцятого століття. Були сформульовані гіпотези і створена теорія розрахунку за граничним станом (теорія граничної рівноваги). Виконані дослідження для арок систем [3]-[6] показали, що величина граничного навантаження залежить не тільки від згинальних моментів, а і від поздовжніх сил. Чіткого порівняння величини граничного навантаження знайдено при врахуванні тільки моментів і при врахуванні моментів і поздовжніх сил у літературі не знайдено. У даній роботі поставлена задача детального дослідження особливостей пластичного механізму руйнування арки без врахування поздовжніх сил. Це значно спрощує задачу розрахунку арки за граничним станом і дозволяє одержати аналітичні залежності для визначення граничного навантаження. Крім аналітичного розв'язку використовується чисельний метод із залученням методу скінчених елементів. Чисельний метод визначення граничного навантаження передбачає виконання кількох статичних розрахунків арки із встановленням шарніру у перерізі, де утворюється пластичний шарнір [7]. Розрахунок виконується до тих пір, поки арка не перетвориться у пластичний механізм. Така методика дозволяє уникнути ітераційних процесів, що дозволяє зменшити похибку розрахунку.

## 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даної роботи є дослідження граничного стану і пластичного механізму руйнування кругової двошарнірної і безшарнірної арок не враховуючи впливу поздовжніх сил на величину граничного навантаження. Для контролю результатів розрахунку передбачається застосування двох методів. Перший метод – виведення аналітичних рівнянь для визначення граничного навантаження і місць утворення пластичних шарнірів. Другий метод – створення програми чисельного розрахунку з використанням методу скінчених елементів. Розглядаються арки постійної та змінної жорсткості.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

При виведенні загальних рівнянь для визначення граничного навантаження розглядаємо кругову арку, до якої прикладається вертикальне рівномірне розподілене навантаження. Вважаємо, що арка виготовлена із пружно-пластичного матеріалу, який характеризується різними границями пластичності при розтягуванні і стиску. Поперечний переріз арки характеризується граничним моментом  $M_0$ , значення якого залежить від форми, розмірів поперечного перерізу і фізичних характеристик матеріалу. Для арки постійної жорсткості граничний момент однаковий для усіх перерізів, для арки змінної жорсткості кожний переріз має своє значення граничного моменту.

**Двошарнірна арка змінної жорсткості.** Момент інерції поперечного перерізу арки змінюється за законом

$$I(\alpha) = I_0 \sin \alpha, \quad (1)$$

де  $I_0$  – момент інерції перерізу на осі симетрії арки.

Для симетричного навантаження пластичний механізм руйнування арки також повинен бути симетричним. Для цього необхідно утворення трьох пластичних шарнірів, розташованих симетрично відносно осі симетрії арки. Залежність, яка дозволяє визначити згинальні моменти у перерізах арки має вигляд [9] (використовуються полярна система координат)

$$M(\alpha) = \frac{ql^2}{8} - \frac{qR^2}{2} \cos \alpha^2 - H(R \sin \alpha - R + f), \quad (2)$$

де  $l$ ,  $f$ ,  $R$  – проліт, стріла підйому і радіус арки;  $q$  – інтенсивність навантаження;  $H$  – розпор арки;  $\alpha$  – координата перерізу арки.

Пластичні шарніри утворюються у перерізах, де діють екстремальні згинальні моменти. Для визначення координат таких перерізів похідну (2) прирівнюємо до нуля

$$\frac{dM(\alpha)}{d\alpha} = \cos \alpha (qR^2 \sin \alpha - HR) = 0. \quad (3)$$

Рівняння (3) має два розв'язки:

$$1. \cos \alpha = 0; \text{ тоді } \alpha_1 = \pi/2; \quad (4)$$

$$2. qR^2 \sin \alpha - HR = 0; \text{ тоді } \sin \alpha_2 = \frac{H}{qR}. \quad (5)$$

Перший розв'язок вказує на переріз, розташований на осі симетрії арки, другий – на два перерізи, розташовані симетрично відносно осі симетрії арки. Підставимо координати перерізів у вираз (2) і прирівняємо моменти у цих перерізах до відповідних граничних моментів:

$$\frac{ql^2}{8} - Hf = M_0; \quad (6)$$

$$\frac{ql^2}{8} - \frac{qR^2}{2} - \frac{H^2}{2q} + H(R - f) = -M_0(\alpha_2), \quad (7)$$

де  $M_0$  – граничний момент перерізу на осі симетрії арки;  $M_0(\alpha_2)$  – граничний момент перерізу з координатою  $\alpha_2$ .

Систему рівнянь можна звести до одного рівняння відносно значення граничного навантаження

$$f^4 q^2 - 4f^2 q (M_0 + 2M_0(\alpha_2)) + 4M_0^2 = 0, \quad (8)$$

Для арки, жорсткість якої змінюється за законом (1), висота прямокутного поперечного перерізу змінюється за законом

$$h(\alpha) = h_0 \sqrt[3]{\sin \alpha}, \quad (9)$$

де  $h_0$  – висота поперечного перерізу на осі симетрії арки.

Граничні моменти можуть бути обчислені за формулами [10]:

$$M_0 = \frac{bh_0^2}{2} \frac{\sigma_{yc} \sigma_{yt}}{\sigma_{yc} + \sigma_{yt}}; \quad (10)$$

$$M_0(\alpha_2) = \frac{bh^2(\alpha_2)}{2} \frac{\sigma_{yc} \sigma_{yt}}{\sigma_{yc} + \sigma_{yt}} = M_0 \sqrt[3]{\sin^2 \alpha_2} = M_0 \sqrt[3]{\frac{H^2}{q^2 R^2}}, \quad (11)$$

де  $h(\alpha_2)$  – висота поперечного перерізу арки із координатою  $\alpha_2$ ;  $\sigma_{yc}$  і  $\sigma_{yt}$  – границі пластичності матеріалу при стиску і розтягуванні.

З урахуванням (11) розв'язок нелінійного рівняння (8) виконуємо із допомогою функції «Пошук розв'язку» EXCEL. Оскільки нелінійне рівняння може мати декілька рішень, доцільно ввести обмеження:

$$q > 0; |\sin \alpha_2| \leq 1, \sin \alpha_2 \geq \sin \alpha_0, \quad (12)$$

де  $\alpha_0$  – координата лівої опори арки.

**Для арки постійної жорсткості** слід прийняти:

$$I = I_0, h = h_0, M_0(\alpha_2) = M_0.$$

Тоді рівняння (8) можна записати так

$$f^4 q^2 - 12M_0 f^2 q + 4M_0^2 = 0. \quad (13)$$

Розв'язок (13) має вигляд

$$q = \frac{4M_0}{f^2} (1,5 + \sqrt{2}) \quad (14)$$

Як видно із (14), граничне навантаження для арки постійної жорсткості прямо пропорційне до величини граничного моменту і обернено пропорційне до квадрату стріли підйому арки.

Таким чином, для двошарнірної кругової арки, завантаженої вертикальним рівномірним розподіленим навантаженням маємо аналітичні залежності для визначення граничного навантаження (14) і координат утворення пластичних шарнірів (4), (5). Для інших навантажень потрібно записувати нові рівняння, що не зовсім зручно.

Для розрахунку арок із будь яким навантаженням створена програма чисельного розрахунку граничного навантаження з використанням методу скінчених елементів (МСЕ). Програма складена на APDL і реалізує прямий метод розрахунку граничного навантаження [7].

### Приклади розрахунку двошарнірної арки.

Вихідні дані:

Проліт арки  $l = 20\text{м}$ , стріла підйому  $f = 1\div 9\text{м}$ , розміри поперечного перерізу  $b = 0.2\text{м}$ ,  $h = 1.0\text{м}$  (для арки змінної жорсткості  $h_0 = 1.0\text{м}$ ), фізичні характеристики матеріалу  $\sigma_{yc} = 14500\text{кН/м}^2$ ,  $\sigma_{yt} = 1300\text{кН/м}^2$ ,  $M_0 = 119.3038\text{кНм}$ .

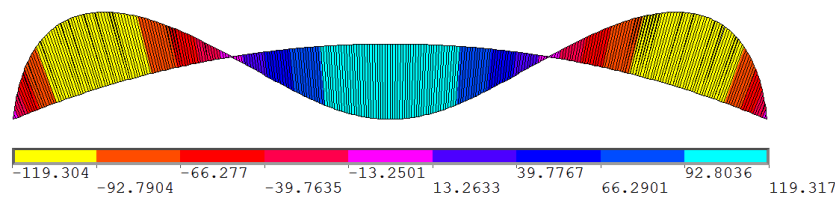
Результати аналітичного і чисельного розрахунків представлені у таб. 1.

Приклади побудови епюр згинальних моментів у граничному стані арки і пластичний механізм руйнування представлені на рис. 1-4.

**Таблиця 1**

Граничне навантаження для двошарнірної арки (кН/м)

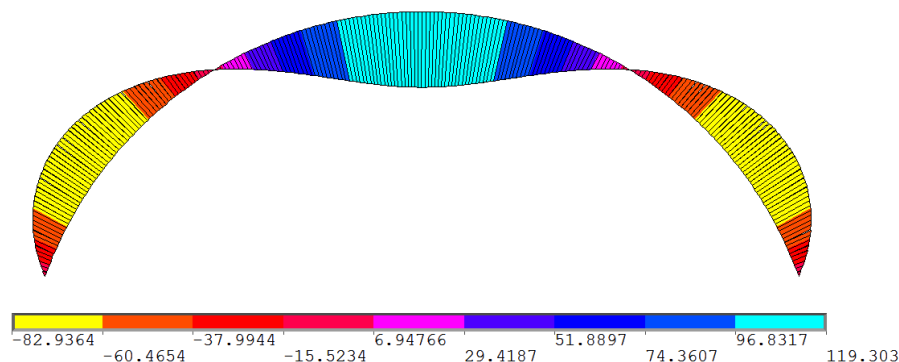
$f/l$	Арка постійної жорсткості			Арка змінної жорсткості		
	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Похибка %	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Похибка %
0.05	1390.707	1390.847	0.01	1383.080	1383.348	0.02
0.10	347.677	347.733	0.02	340.206	340.198	0.00
0.15	154.523	154.536	0.01	147.295	147.253	0.03
0.20	86.919	86.921	0.00	79.998	79.887	0.14
0.25	55.628	55.632	0.01	49.056	48.886	0.35
0.30	38.631	38.631	0.00	32.426	32.174	0.78
0.35	28.382	28.371	0.04	22.545	22.213	1.48
0.40	21.730	21.726	0.02	16.247	15.811	2.68
0.45	17.169	17.169	0.00	12.014	11.406	5.04



**Рис. 1.** Епюра моментів в граничному стані арки постійної жорсткості ( $f/l = 0,1$ )



**Рис. 2.** Пластичний механізм руйнування арки постійної жорсткості ( $f/l = 0,1$ )



**Рис. 3.** Епюра моментів в граничному стані арки змінної жорсткості ( $f/l = 0,35$ )

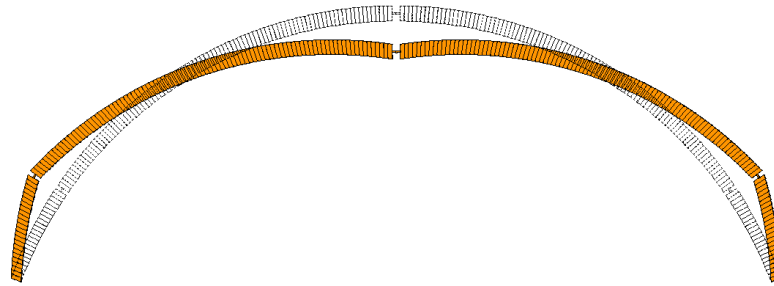


Рис. 4. Пластичний механізм руйнування арки змінної жорсткості ( $f/l = 0,35$ )

Безшарнірна кругова арка змінної жорсткості (рис. 5).

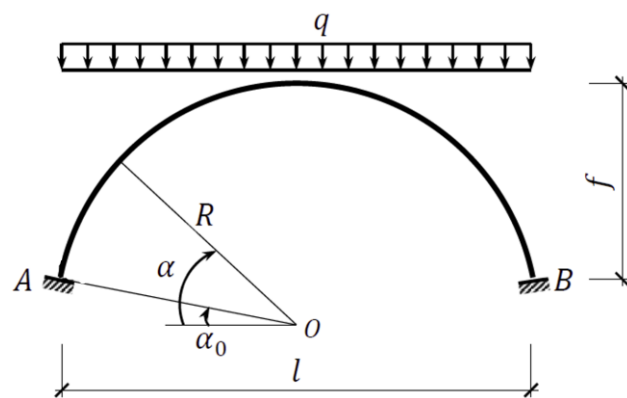


Рис. 5. Розрахункова схема безшарнірної арки

Для безшарнірної кругової арки змінної жорсткості навантаження і характеристики арки приймаємо такі ж, як і для двошарнірної арки. Момент інерції поперечного перерізу арки змінюється за законом

$$I(\alpha) = I_0 / \sin \alpha \quad (15)$$

де  $I_0$  – момент інерції перерізу на осі симетрії арки.

Записуємо вираз для обчислення згинальних моментів у перерізах арки

$$M(\alpha) = \frac{ql^2}{8} - \frac{qR^2}{2} \cos \alpha^2 - H(R \sin \alpha - R + f) + M(\alpha_0) \quad (16)$$

де  $M(\alpha_0)$  – момент в опорних перерізах арки.

Прирівнявши похідну (16) до нуля, одержимо координати перерізів (4), (5), у яких утворюються пластичні шарніри. Підставивши у (16) координати перерізів (4), (5), і прирівнявши значення моментів у цих перерізах до відповідних граничних моментів, одержимо:

$$\frac{ql^2}{8} - Hf + M(\alpha_0) = M_0; \quad (17)$$

$$\frac{q}{2} \left( \frac{l^2}{4} - R^2 \right) - \frac{H^2}{2q} + H(R - f) + M(\alpha_0) = -M_0(\alpha_2), \quad (18)$$

Значення граничного моменту  $M_0$  для перерізу, розташованого на осі симетрії арки визначається з використанням (10). Граничні моменти для перерізів з координатами  $\alpha_0$  і  $\alpha_2$  визначаємо за формулами:

$$M_0(\alpha_0) = \frac{bh^2(\alpha_0)}{2} \frac{\sigma_{yc}\sigma_{yt}}{\sigma_{yc} + \sigma_{yt}} = \frac{M_0}{\sqrt[3]{\sin^2 \alpha_0}} \quad (19)$$

$$M_0(\alpha_2) = \frac{bh^2(\alpha_2)}{2} \frac{\sigma_{yc}\sigma_{yt}}{\sigma_{yc} + \sigma_{yt}} = \frac{M_0}{\sqrt[3]{\sin^2 \alpha_2}} = M_0 \sqrt[3]{\frac{q^2 R^2}{H^2}}, \quad (20)$$

де  $h(\alpha_0) = h_0 / \sqrt[3]{\sin \alpha_0}$ ;  $h(\alpha_2) = h_0 / \sqrt[3]{\sin \alpha_2}$ ;  $\sin \alpha_2 = \frac{H}{qR}$ .

Система нелінійних рівнянь (17), (18), крім невідомих  $q$  і  $H$ , містить невідоме значення опорного моменту  $M(\alpha_0)$  у граничному стані арки, що не дозволяє знайти розв'язок задачі. Тому для розрахунку граничного стану арки була складена програма розрахунку, яка реалізувала чисельний метод. На основі аналізу результатів, одержаних чисельним методом, виявлені особливості зміни опорного моменту при різних співвідношеннях  $f/l$ . Знання опорного моменту дозволило виконати розв'язок системи рівнянь (17), (18) за допомогою EXCEL із залученням обмежень (12).

*Для арки постійної жорсткості* слід прийняти  $h = h_0$ ,  $M_0(\alpha_2) = M_0$ .

Тоді систему рівнянь (17), (18) можна звести до квадратного рівняння

$$q^2 f^4 - 4qf^2 [M(\alpha_0) + 3M_0] + 4[M(\alpha_0) - M_0]^2 = 0. \quad (21)$$

Розв'язок (21) представимо у вигляді

$$q = \frac{2M_0}{f^2} \left[ \frac{M(\alpha_0)}{M_0} + 3 + \sqrt{\left( \frac{M(\alpha_0)}{M_0} + 3 \right)^2 - \left( \frac{M(\alpha_0)}{M_0} - 1 \right)^2} \right] \quad (22)$$

### Приклади розрахунку безшарнірної арки.

Розміри поперечного перерізу і фізичні характеристики матеріалу прийняті такими як і для двошарнірної арки.

Результати розрахунку показали, що безшарнірна арка постійної жорсткості має три можливих механізми пластичного руйнування в залежності від співвідношення стріли підйому до прольоту арки (рис. 6). Точками розділу форм пластичного руйнування є точки, де графік кривої опорного моменту  $M(\alpha_0)$  змінює свій характер. Перша точка  $f/l = 0,147$  обчислюється в EXCEL із залученням рівнянь статичного розрахунку арки [10] і додатковою умовою  $\alpha_2 = \alpha_0$ . Для другої точки  $f/l = 0,237$  аналітичного розв'язку не було знайдено і значення  $f/l$  визначалось шляхом підбору.

При  $f/l \leq 0,147$  пластичні шарніри утворюються в опорних перерізах, на невеликій відстані від опор і на осі симетрії арки. Для аналітичного розрахунку слід прийняти  $M(\alpha_0) = -M_0$ , тоді для визначення граничного навантаження вираз (22) можна привести до вигляду

$$q = \frac{4M_0}{f^2}. \quad (23)$$

При  $0,147 < f/l < 0,237$  пластичний шарнір утворюється на осі симетрії арки і підряд декілька пластичних шарнірів утворюються симетрично на деякій відстані від опор.



Ділянка графіка опорного моменту на цьому інтервалі може бути описана за допомогою апроксимаційного поліному:

$$\frac{M(\alpha_0)}{M_0} = a_1 \left(\frac{f}{l}\right)^4 + a_2 \left(\frac{f}{l}\right)^3 + a_3 \left(\frac{f}{l}\right)^2 + a_4 \left(\frac{f}{l}\right) + a_5,$$

де  $a_1 = 56707,98801$ ;  $a_2 = -46444,01909$ ;  $a_3 = 14131,62162$ ;  $a_4 = -1867,67974$ ;  $a_5 = 89,22801$ .

При  $f/l \geq 0,237$  реалізується класична схема пластичного руйнування арки – пластичні шарніри утворюються в опорних перерізах, на осі симетрії і симетрично на деякій відстані від опор. Для аналітичного розрахунку у (22) слід приймати  $M(\alpha_0) = M_0$ . Тоді маємо:

$$q = \frac{16M_0}{f^2}. \quad (24)$$

Граничні епюри моментів для трьох описаних випадків представлені на рис. 7-9.

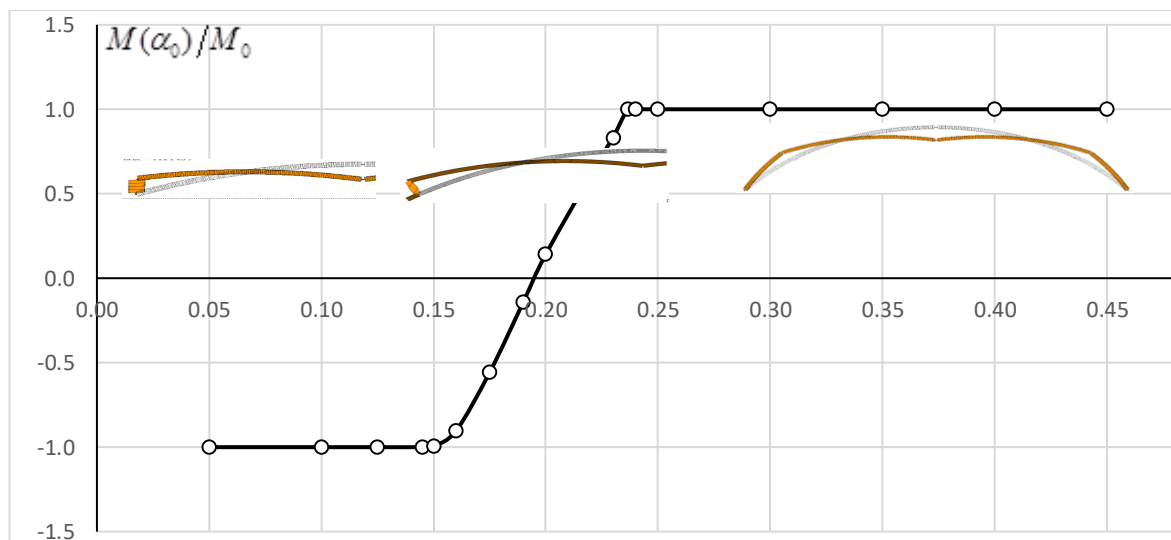


Рис. 6. Графік зміни опорного моменту для безшарнірної арки постійної жорсткості

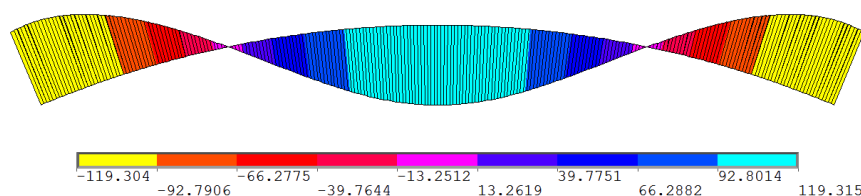
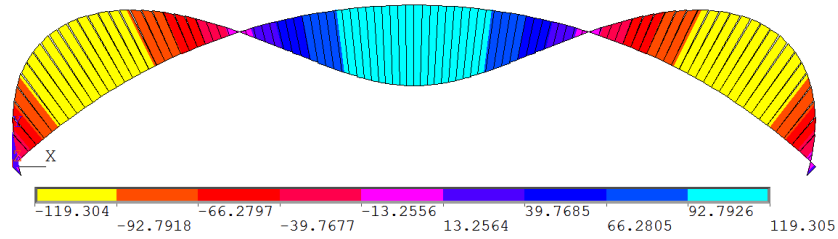
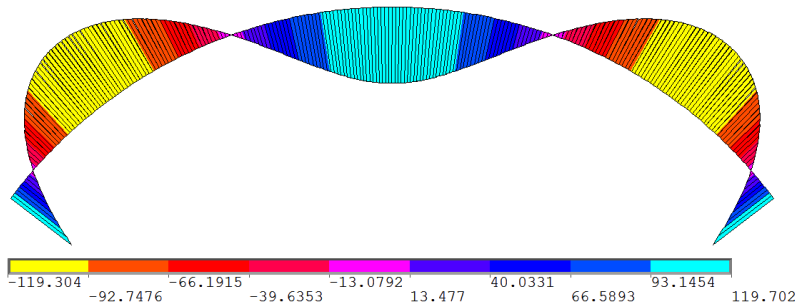


Рис. 7. Епюра згинальних моментів для безшарнірної арки постійної жорсткості у граничному стані при  $f/l = 0,1$

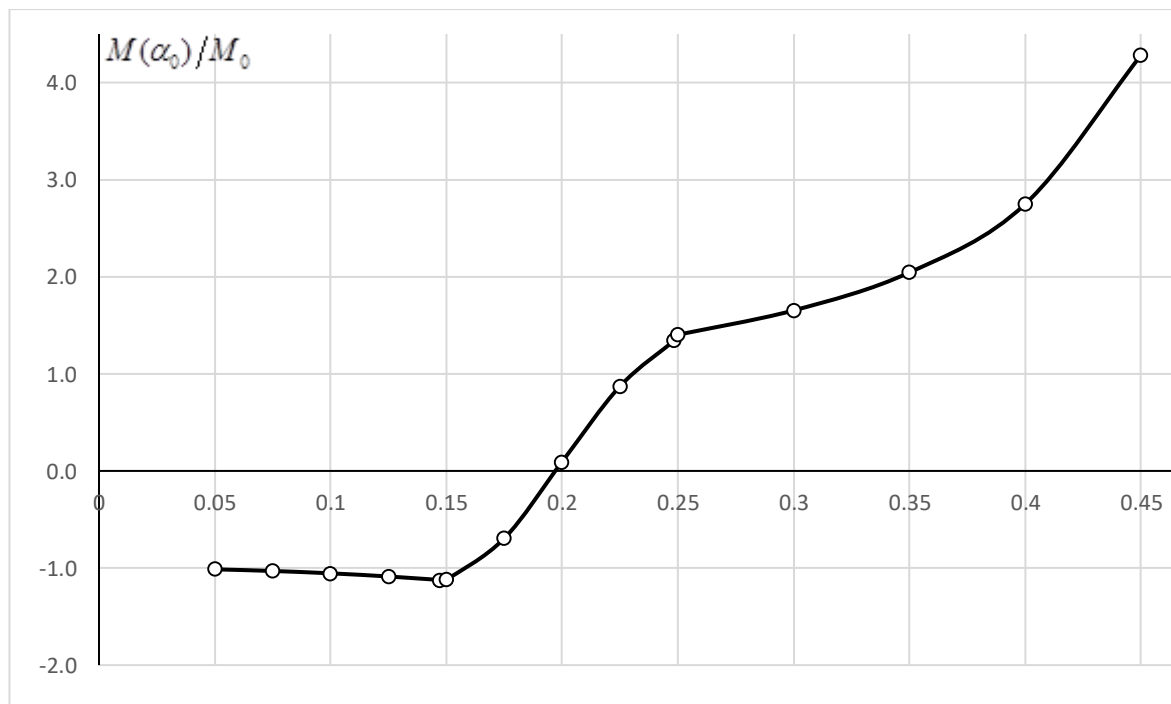


**Рис. 8.** Епора згинальних моментів для безшарнірної арки постійної жорсткості у граничному стані при  $f/l = 0,2$



**Рис. 9.** Епора згинальних моментів для безшарнірної арки постійної жорсткості у граничному стані при  $f/l = 0,25$

Розрахунок арки змінної жорсткості ускладнюється тим, що завдяки змінному поперечному перерізу змінним є і граничний момент уперерізі. Тому графік зміни опорного моменту не має горизонтальних ділянок (рис. 10). Але, незважаючи на це, спостерігається схожа картина пластичного руйнування арки у граничному стані. Як видно із рис. 6 і рис. 10, точки, які розділяють форми пластичного руйнування, мають приблизно ті ж значення ( $f/l = 0,147$  і  $f/l = 0,246$ ), що і для арки постійної жорсткості.



**Рис. 10.** Графік зміни опорного моменту для безшарнірної арки змінної жорсткості

Порівняння результатів розрахунку граничного навантаження для арок постійної і змінної жорсткості наведено у таб. 2.

**Таблиця 2**

Граничне навантаження для безшарнірної арки ( $kH/m$ )

$f/l$	Арка постійної жорсткості			Арка змінної жорсткості		
	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Похибка %	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Похибка %
0.05	477.216	479.118	0.40	512.935	512.931	0.00
0.10	119.304	119.775	0.39	129.020	128.426	0.46
0.15	57.482	57.486	0.39	59.732	59.545	0.31
0.20	91.912	91.912	0.01	95.915	95.783	0.14
0.25	76.354	76.355	0.00	89.691	89.509	0.20
0.30	53.024	53.024	0.00	66.909	66.663	0.37
0.35	38.956	38.957	0.00	53.769	53.463	0.57
0.40	29.826	29.826	0.00	46.511	46.165	0.74
0.45	23.566	23.566	0.00	45.039	44.715	0.72

Таблиця 2 показує добру збіжність результатів аналітичного і чисельного розрахунків. Більша відмінність результатів для арки змінної жорсткості пов'язана з тим, що при виконанні чисельного розрахунку жорсткість у межах окремого скінченного елемента була постійною і змінювалась стрибком при переході до іншого елемента.

## 5 ВИСНОВКИ

1. Двошарнірна арка при дії рівномірно розподіленого навантаження має лише одну форму пластичного руйнування для будь яких відношень  $f/l$ .
2. Безшарнірна арка при дії рівномірно розподіленого навантаження має три різні форми пластичного руйнування в залежності від співвідношення  $f/l$ .
3. Значення граничного навантаження для арки постійної жорсткості (двошарнірної і безшарнірної) прямо пропорційне граничному моменту і обернено пропорційне до квадрату стріли підйому арки.
4. Результати чисельного розрахунку добре співпадають із результатами аналітичного розв'язку, що дозволяє використовувати розроблену програму для розрахунку арок із будь яким навантаженням.

## 6 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

## Література

1. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. Москва: Стройиздат, 1949, -248с.
2. Ржаницын А.Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов Москва: Гостехиздат, 1954, -287с.
3. Чирас А.А. Строительная механика, теория и алгоритмы. Москва: Стройиздат, 1989, 256с
4. Пиковский А.А. Статика стержневых систем со сжатыми элементами. М.: Физматгиз, 1961. – 394с.
5. Проценко А.М., Власов В.В. Статический принцип предельного равновесия и определение деформированного состояния статически неопределимых железобетонных конструкций в стадии исчерпания их несущей способности. //В сб. НИИЖБ, - «Воздействие статических,

- динамических и многократно повторяющихся нагрузок на бетон и элементы железобетонных конструкций» –М.: Стройиздат, 1972. – с. 191 – 220.
6. Mykola Soroka The limit state of non-hinged arch with a cross-section in the form of an idealized I-beam, URL:<http://www.enggjournals.com/ijet/vol10issue6.html>
  7. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. М: «Высшая школа», 1986, -607с.
  8. Барабаш М.С. Нелінійна будівельна механіка з ПК Ліра-САПР : монографія / М.С. Барабаш, М.М. Сорока, М.Г. Сур'янінов. – Одеса : Екологія, 2018. – 248с.
  9. Mykola Soroka Bearing capacity of structures made of materials with different tensile and compression strengths: 6th International Conference "Actual Problems of Engineering Mechanics", (APEM 2019), Volume 968, pp. 200-208.
  10. Mykola Soroka Limit State of Arches Made of Elastoplastic Material: IX International Conference "Actual Problems of Engineering Mechanics", (APEM 2022),

## References

1. Gvozdev A.A. Raschet nesushchey sposobnosti konstruktsiy po metodu predel'nogo ravnovesiya. Moscow: Stroyizdat, (1949), - 248 p. (in Russian)
2. Rzhantsyn A.R. Raschet sooruzheniy s uchetom plasticheskikh svoystv materialov. Moscow: The state publishing house of literature on construction and architecture, (1954), 287 p.
3. Chiras A.A. Stroitel'naya mekhanika, teoriya i algoritmi. Moscow: Stroyizdat, (1989), 256 p.
4. Pkovsky A.A. Statika sterzhnevih system so szhatimy elementamy. Moscow: State publishing house of physical and mathematical literature, (1961), 394 p. (in Russian)
5. Protsenko A.M., Vlasov V.V. Statischekiy printsip predel'nogo ravnovesiya i opredeleniye deformirovannogo sostoyaniya staticheski neopredelimykh zhelezobetonnykh konstruktsiy v stadii ischerpaniya ikh nesushchey // V sb. NIIZHB, - «Vozdeystviye staticheskikh, dinamicheskikh i mnogokratno povtoryayushchikhsya nagruzok na beton i elementy zhelezobetonnykh konstruktsiy», Moscow: Stroyizdat, (1972), - p. 191-220 (in Russian).
6. Mykola Soroka The limit state of non-hinged arch with a cross-section in the form of an idealized I-beam, URL:<http://www.enggjournals.com/ijet/vol10issue6.html>
7. 8. Darkov A.V., Shaposhnikov N.N. Stroitel'naya mekhanika Moscow: "Higher school", (1986), 607 p. (in Russian)
8. Barabash M.S. Neliniyna budivel'na mekhanika z PK Lira-SAPR : monohrafiya / M.S. Barabash, M.M. Soroka, M.H. Sur'yaninov. – Odessa : Ekolohiya, 2018. – 248s
9. Mykola Soroka Bearing capacity of structures made of materials with different tensile and compression strengths: 6th International Conference "Actual Problems of Engineering Mechanics", (APEM 2019), Volume 968, pp. 200-208.
10. Mykola Soroka Limit State of Arches Made of Elastoplastic Material: IX International Conference "Actual Problems of Engineering Mechanics", (APEM 2022),

### Сорока Микола Миколайович

Одеська державна академія будівництва та архітектури,

к.т.н., доцент

вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029

[soroka@odaba.edu.ua](mailto:soroka@odaba.edu.ua),

ORCID: 0000-0002-9551-9475

### Для посилань:

Сорока М. М. Механізми пластичного руйнування арок. Механіка та математичні методи, 2024. Т. VI. №. 2. С. 88–99.

### For references:

M. Soroka. (2024). Mechanisms of plastic destruction of arches. Mechanics and Mathematical Methods. VI (2). 88-99.

УДК 531

## СТІЙКІСТЬ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ СТІЙОК ПРИ КОРОТКОЧАСНІЙ ТА ТРИВАЛІЙ ДІЇ НАВАНТАЖЕННЯ

Бекірова М. М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація:** Розглядається поведінка шарнірно-опертої по кінцях стійки з початковим вигином при дії навантаження. Пружні стрижні розташовані симетрично. Стійка має початковий вигин, стиснута постійними у часі силами.

Всі реальні елементи мають ті чи інші недосконалості у вигляді технологічних вигинів, тому вони починають вигинатися з самого початку навантаження. Навантаження, при перевищенні якого навіть на нескінченно малу величину, виникає втрата стійкості даного виду деформації, називається критичним. В розрахунку на стійкість при тривалій дії зовнішніх сил необхідно визначити навантаження, при якому швидкість переміщень в часі монотонно згасає. Вирішення задачі у такій постановці прийнятно для систем, розвиток переміщень яких у часі призводить до зміни напруженого стану. Ця умова для стиснутої стійки виконується лише за наявності початкових недосконалостей (початковий вигин, позацентрове прикладення стискаючої сили та інше).

При вирішенні задач теорії стійкості важливу роль відіграє урахування повзучості матеріала. Повзучість може бути обмеженою в часі або необмеженою.

При вирішенні задачі про стійкість стійок з початковими недосконалостями, що виготовлені з матеріалу, який має повзучість та підсилений пружними стрижнями, прийняті наступні припущення:

- 1) вважається справедливою гіпотеза плоских перерізів;
- 2) деформації матеріалу, що володіє повзучістю і пружних стрижнів у місцях контакту однакові;
- 3) модулі деформацій при розтягуванні та стисканні рівні;
- 4) матеріал, що має повзучість, у розтягнутій зоні працює без появи тріщин.

Зв'язок між деформаціями і пружностями в матеріалі стійки встановлюється формулою, заснованою на лінійній залежності між деформаціями і пружностями.

Міра повзучості бетону побудована за спадковою теорією старіння.

У роботі отримано інтегро-диференціальне рівняння – рівняння повільного руху стрижня, одержані вирази для дослідження вигинів в будь-який момент часу, виведено формулу для визначення критичної сили при тривалій дії навантаження.

**Ключові слова:** стійкість, стійка, початкові недосконалості, вигин, повзучість, критична сила, критичне переміщення.

## STABILITY OF REINFORCED CONCRETE POSTS UNDER SHORT-TERM AND LONG-TERM LOADING

M. Bekirova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract:** The behavior of hinged support at the ends of the rack with initial bending under the action of load is considered. Spring rods are arranged symmetrically. The rack has an initial bend, compressed by forces constant in time.

All real elements have one or another imperfections in the form of technological bends, therefore, they begin to bend from the very beginning of the load. The load, when it is exceeded even by an infinitesimally small amount, there is a loss of stability of this type of deformation, is called critical. In the calculation of stability under the long-term action of external forces, it is necessary to determine



the load, at which the rate of movement in time monotonically decays. Solving the problem in such a setting is acceptable for systems, the development of movements of which in time leads to a change in the stress state. This condition for a compressed rack is fulfilled only in the presence of initial imperfections (initial bending, off-center application of compressive force, etc.).

When solving the problems of the theory of stability, taking into account the creep of the material plays an important role. Creep can be limited in time or unlimited.

When solving the problem of the stability of racks with initial imperfections, made of a material that has creep and reinforced with elastic rods, the following assumptions are made:

- 1) the hypothesis of flat sections is considered valid;
- 2) the deformations of the creeping material and the elastic rods at the points of contact are the same;
- 3) the modulus of deformations during stretching and compression are equal;
- 4) the creep material works in the stretched zone without the appearance of cracks.

The relationship between deformations and elasticities in the material of the rack is established by a formula based on the linear relationship between deformations and elasticities.

The creep rate of concrete is based on the hereditary theory of aging.

In the work, an integro-differential equation was obtained - the equation of slow motion of the rod, expressions were obtained for the study of bends in any at what point in time, the formula for determining the critical force with long-term load action is derived.

**Keywords:** stability, resistance, initial imperfections, bending, creep, critical force, critical displacement.

## 1 ВСТУП

У дослідженнях з будівельної механіки питання стійкості займають важливе місце. При деформуванні стислих і стисло-вигнутих стрижнів рівновага між зовнішнім навантаженням і внутрішніми зусиллями може бути стійкою або нестійкою.

В першому випадку стрижень, відхилений від положення рівноваги на достатньо малу величину, після усунення причини, що викликала відхилення, повертається в початковий стан рівноваги. В другому випадку відхилення після усунення причини, що його викликала, не зникає, а, навпаки, зростає.

Навантаження, при перевищенні якого навіть на нескінченно малу величину, виникає втрата стійкості даного виду деформації, називається критичним.

Порушення стійкості тіла, яке деформується, при якому первинна деформація переходить в інший, якісно новий вид деформації, є втратою стійкості першого роду. Порушення стійкості тіла, яке деформується, при якому первинна деформація не переходить в інший вид деформації, а починає зростати при постійному навантаженні, або, навіть, при навантаженні, яке зменшується, є втратою стійкості другого роду.

Наприклад, втрата стійкості першого роду характерна для центрально-стиснутого пружного стрижня, втрата стійкості другого роду – для стисло-вигнутого стрижня, який має початкові недосконалості.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Перше теоретичне рішення задачі про стійкість пружного центрально-стиснутого стрижня одержано в 1744 році Леонардом Ейлером [3].

Це рішення наведено в численній літературі з стійкості стрижнів, з якої особливо відзначимо [5-6]. Але випробування показали, що це рішення не можна застосувати для реальних стрижнів, що пов'язано з неминучими викривленнями осі елемента у процесі виготовлення і транспортування та недосконалостями центровки в процесі монтажу. В зв'язку з цим були отримані різні рішення для стрижня під дією осьової стискаючої сили, яка прикладена з ексцентриситетом. [6].

Одна з перших публікацій, в якій був досліджений вплив початкових недосконалостей на стійкість, є монографія Ржаніцина О. Р. [1]. Початкові геометричні недосконалості найбільш суттєво впливають на стійкість тонкостінних елементів відкритого перерізу [7]. У статті [8] при описі форми початкових недосконалостей використовують поліном четвертого ступеню.

Ю. М. Работнов [10] та С. А. Шестеріков [11, 12] запропонували новий підхід – зв'язали питання стійкості при повзучості з класичним визначенням стійкості. Взавши за основу закон зміцнення, вони провели його лінеаризацію з урахуванням небагатьох прогинів, а потім виконали аналіз руху стрижня при дії збурень.

Не можна не відзначити роботи вчених Одеської школи теорії повзучості на чолі з І.Є. Прокоповичем [13-15].

Усі роботи, у яких розглядаються питання стійкості стрижнів з урахуванням повзучості, можна розбити на два напрямки. При першому, класичному підході припускають існування зміни стійких змін рівноваги – після проходження деякого часу, що називається критичним, відбувається перехід прямолінійної форми в викривлену. Вважається, що процес повзучості в стрижні веде до зменшення його жорсткості, внаслідок чого відбувається втрата стійкості.

### 3 МЕТА ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даного дослідження є отримання формул для знаходження критичних сил при тривалій дії навантаження, формул для отримання переміщень (вигинів) в будь-який момент часу, виразів для визначення напруженого стану.

### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

При деформуванні стислих і стисло-вигнутих стрижнів рівновага між зовнішніми навантаженнями і внутрішніми зусиллями може бути стійкою чи нестійкою. В першому випадку стрижень, відхилений від положення рівноваги на досить малу величину, після усунення причини, що викликала відхилення, повертається до початкового стану рівноваги. У другому випадку відхилення після усунення причини, що його викликала, не зникає, а, навпаки, зростає.

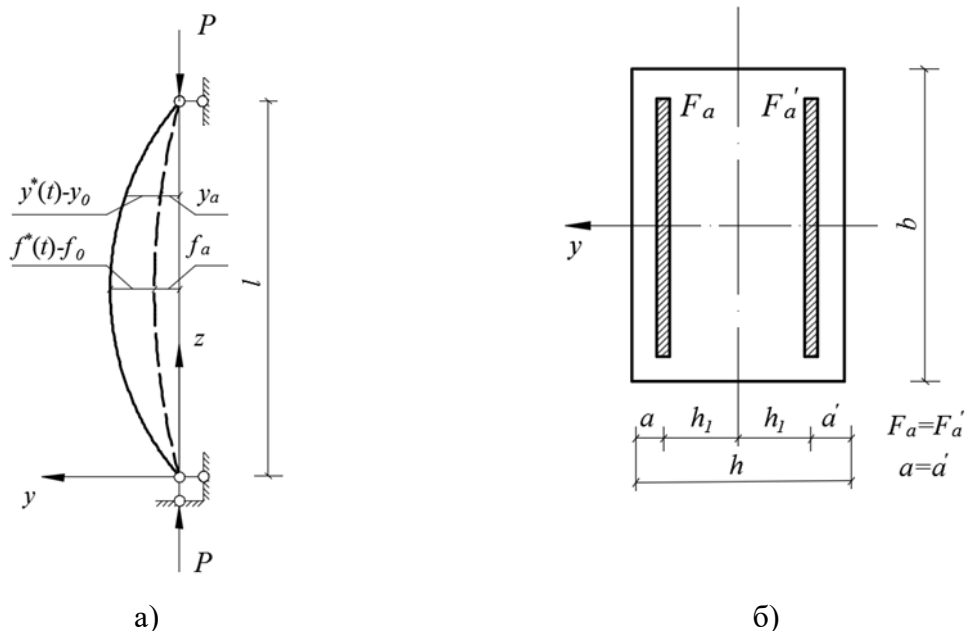
Навантаження, при перевищенні якого навіть на нескінченно малу величину відбувається втрата стійкості даного виду деформації, називається критичним.

При вирішенні задач зі стійкості стрижнів у пружній та пружно-пластичній стадіях визначають, в основному, критичне навантаження.

На основі розгляду стійких і нестійких форм руху був сформульований критерій стійкості при згасанні повзучості матеріалу.

Стійким вважається рух, який не приводить параметри, що визначають положення системи протягом короткого або нескінченно тривалого відрізка часу, до будь-яких великих значень, тобто переміщення системи під дією постійного навантаження зростають із загасаючою швидкістю, монотонно наближаючись до границі. Найменша величина, здатна викликати необмежене переміщення системи є критичною.

При незатухаючій повзучості матеріалу гнучкий стрижень за наявності початкової недосконалості під дією стискаючого навантаження будь-якого рівня безперервно вигинається і, якщо навантаження діє протягом досить великого проміжку часу, втрачає стійкість.





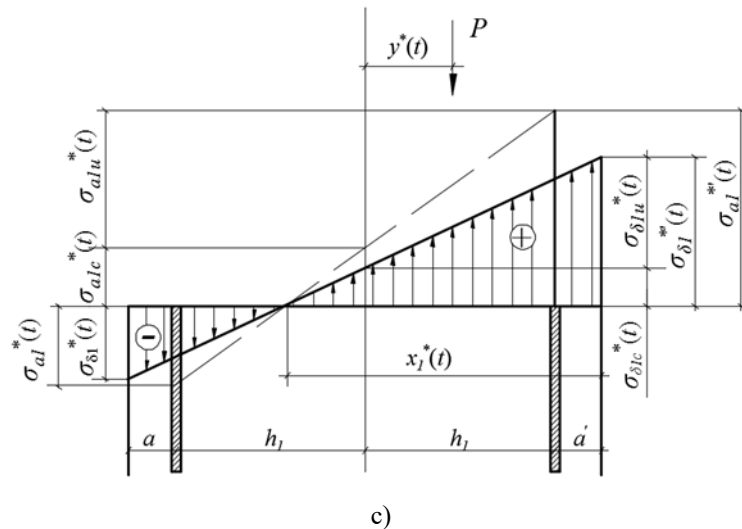


Рис. 1. Стійка з початковим вигином

У розрахунку на стійкість при тривалій дії зовнішніх сил необхідно визначити навантаження, при якому швидкість переміщень у часі монотонно згасає. Розв'язання задачі в такій постановці є прийнятним для систем, розвиток переміщень яких у часі призводить до зміни напруженого стану. Ця умова для стиснутої стійки виконується лише за наявності початкових недосконалостей (початковий вигин, позacentрове прикладення стискаючої сили).

Через те, що час існування та експлуатації елементів будівельних конструкцій обчислюється десятками і сотнями років, слід виходити із того, що ці елементи втрачають стійкість при  $t = \infty$ , тому приймати, що критичний час  $t = \infty$ .

Розглянемо поведінку шарнірно-опертої по кінцях стійки з початковим вигином при тривалій дії навантаження. Пружні стрижні розташовані симетрично. Стійка має початковий вигин  $y_0(z)$ , стиснута постійними у часі силами  $P$  (Рис. 1а, б).

У довільному перерізі по висоті стійки в момент часу  $t$  матиме місце напружений стан (Рис. 1с).

Для будь-якого перетину по висоті в момент часу  $t$  можна записати умову рівноваги:

$$N_{\delta}^*(t) = P - F_a [\sigma_{al}^*(t) + \sigma_{al}^*(t)]; \quad (1)$$

$$M_{\delta}^*(t) = P y^*(t) - F_a h_1 [\sigma_{al}^*(t) - \sigma_{al}^*(t)], \quad (2)$$

де

$N_{\delta}^*(t)$  – поздовжня сила частини перерізу, виконана з матеріалу, що має повзучість;

$M_{\delta}^*(t)$  – згинальний момент у частині перерізу, виконаний з матеріалу, що має повзучість;

$F_a$  – половина площі пружних стрижнів;

$\sigma_{al}^*(t)$ ,  $\sigma_{al}^*(t)$  – напруження в пружних стрижнях;

$y^*(t)$  – прогин стійки в момент часу  $t$ ;

$h_1$  – відстань від центру тяжіння перерізу до центру тяжіння пружних стрижнів.

Нормальні напруження повзучої складової перерізу представлені у вигляді

$$\sigma_{\delta 1}^*(t) = \frac{N_{\delta}^*(t)}{F_{\delta}} \pm \frac{M_{\delta}^*(t)}{I_{\delta}} \eta, \quad (3)$$

де

$F_{\delta}$  – площа повзучої складової частини перерізу;

$I_{\delta}$  – мінімальний момент інерції повзучої складової перетину;

$\eta$  – координата волокна.

Підставляємо значення  $N_{\delta}^*(t)$  і  $M_{\delta}^*(t)$  з (1), (2) в (3) і отримуємо

$$\sigma_{\delta 1}^*(t) = \frac{P - F_a [\sigma_{a1}'^*(t) + \sigma_{a1}^*(t)]}{F_{\delta}} \pm \frac{Py^*(t) - h_1 F_a [\sigma_{a1}'^*(t) + \sigma_{a1}^*(t)]}{I_{\delta}} \eta. \quad (4)$$

Враховуючи, що

$$\sigma_{a1}'^*(t) - \sigma_{a1}^*(t) = \frac{2h_1 E_a}{\rho^*(t)}, \quad (5)$$

де  $E_a$  – модуль пружності матеріалу пружних стрижнів;  $1/\rho^*(t)$  – кривизна стійки, отримуємо інтегро-диференціальне рівняння повільного руху стрижня

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y^*(z, t)}{\partial z^2} &= [1 + \mu n_0 m(t) E(t) \delta(t, t)] + \frac{P \delta(t, t)}{I_{\delta}} y^*(z, t) - \\ &- \int_{\tau_1}^t \left[ \frac{P}{I_{\delta}} y^*(z, \tau) + \mu n_0 E_a \frac{\partial^2 y^*(z, \tau)}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ &= \frac{\partial^2 y_0(z)}{\partial z^2} [1 + \mu n_0 m(t) E(t) \delta(t, \tau)], \end{aligned} \quad (6)$$

де  $\mu = F_a / F_g$ ,  $n_0 = 2h_1^2 F_{\delta} / I_{\delta}$ ,  $m(t) = E_a / E(t)$ .

Задача про стійкість в умовах повзучості зводиться до розгляду стійких та нестійких форм руху. Стійким вважаємо рух стійки, при якому прогини при  $t \rightarrow \infty$  прагнуть до кінцевої величини. Під критичним навантаженням розуміємо найменше значення сили, що викликає необмежене збільшення прогинів.

Припустимо, що початковий вигин заданий у вигляді напівхвилі синусоїди

$$y_0(z) = f \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (7)$$

При цьому рішення рівняння (6) слід шукати у вигляді

$$y^*(z, t) = f^*(t) \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (8)$$

Тоді отримаємо диференціальне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами:

$$\frac{d^2 f^*(t)}{dt^2} + \gamma [1 + (1 - \eta) E \Theta(t)] \frac{df^*(t)}{dt} = 0, \quad (9)$$

$$\Theta(t) = C_0 + A e^{-\gamma t} \quad (10)$$

Та з наступними початковими умовами:

$$f^*(\tau_1) = f(\tau_1), \quad (11)$$

$$\frac{df^*(\tau_1)}{dt} = \gamma(a + e)\eta \frac{P}{P_E} f(\tau_1). \quad (12)$$

де

$$C = EC_0; a = \bar{a}e^{-\gamma\tau}; \bar{a} = EA. \quad (13)$$

Рішення рівняння (9) з початковими умовами (10) і (11) можна представити у вигляді:

$$f^*(t) = f(\tau_1) \left\{ 1 + \frac{(a+c)\eta}{1+c(1-\eta)} \frac{P}{P_E} \left[ F(0) - e^{-K(t-\tau_1)} F(t-\tau_1) \right] \right\}; \quad (14)$$

$$K(t-\tau_1) = \gamma[1+c(1-\eta)](t-\tau_1) + a(1-\eta)[1 - e^{-\gamma(t-\tau_1)}]; \quad (15)$$

$$F(t-\tau_1) = 1 - \frac{a(1-\eta)e^{-\gamma(t-\tau_1)}}{2+c(1-\eta)} + \frac{a^2(1-\eta)^2 e^{-2\gamma(t-\tau_1)}}{[2+c(1-\eta)][3+c(1-\eta)]} - \dots; \quad (16)$$

$$F(0) = 1 - \frac{a(1-\eta)}{2+c(1-\eta)} + \frac{a^2(1-\eta)^2}{[2+c(1-\eta)][3+c(1-\eta)]} - \dots \quad (17)$$

## 5 ВИСНОВКИ

1. Обґрунтована фізико-механічна модель руху вантажу на канаті при його підйомі (стадія пуску) механізмом підйому вантажу містобудівного крану. Обчислені аналітичним шляхом основні кінематично-силові параметри рухів, за яких мінімізовані динамічні навантаження на канатну систему, а коливання відсутні.

2. Отримані у даному дослідженні результати можуть у подальшому слугувати для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку механізмів підйому вантажу містобудівних кранів (як і кранів інших конструкцій) на стадіях їх проектування та у режимах реальної експлуатації. 3. Дотримання визначених у даній роботі режимів пуску вантажопідйомних механізмів кранів дозволяє суттєво продовжити термін надійної експлуатації їх конструкцій у безаварійному режимі.

## 6 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автор не має будь-яких фінансових чи нефінансових інтересів щодо матеріалів, представлених у цій статті, які слід розкривати.

## Література

1. Ржаніцин А. Р. Деякі питання механіки систем, що деформуються у часі. М.: Держтехвид, 1949.
2. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твёрдого тела. М: Наука. 1979. 744с.
3. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума. Гостехиздат. 1934. 600 с.
4. Крутий Ю. С., Лазарева Д. В., Сур'янінов М. Г. Механіка деформованого твердого тіла. Одеса: ОДАБА, 2017. 260 с.
5. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. Москва: ГИТТЛ, 1955. 567с.
6. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Москва: Наука, 1967. 984 с.
7. Wang Y. C., Nethercot D. A. Bracing requirements for elate-rally unrestrained beams. J.Constr.Steel Res. 1990.№4. pp.305-315.

8. Mohler K., Schelling W. Zur Bemessung von Knickverbänden und Knickaussteifungen im Holzbau. *Bauingenieur*. 1968. №2. pp. 43-48.
9. Чепурненко А. С., Литвинов С. В., Филенко М. А. Расчёт стержней на продольно-поперечный изгиб с учётом деформаций ползучести и начальных несовершенств. *Строительство-2013: РГСУ*, 2013. 1995 с.
10. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752с.
11. Шестериков С. А. Динамический критерий устойчивости при ползучести для стержней. *Прикладная механика и техническая физика*, 1961. №1. С.68-71.
12. Шестериков С. А. О критерии устойчивости при ползучести. *Прикладная математика и механика*. 1959. Т. XXIII. Вып. 6. С. 1101-1106.
13. Прокопович И. Е. Влияние ползучести на устойчивость тонкостенных стержней. *Строительство и архитектура*, 1969. №12. С. 33-38.
14. Прокопович И. Е. О влиянии ползучести на устойчивость сжатых стержней. *Строительная механика и расчёт сооружений*, 1967. №1. С. 5-9.
15. Орлов А. Н. Определение критических сил при длительном действии нагрузки для гибких стержней с опорными закреплениями, обладающими ползучестью. «*Известия АН Арм. ССР. Механика*». Ереван, 1977. XXX. №3.
16. Бамбура А. М., Безбожна М. С., Гурківський О. Б. Експериментальні дослідження напруженодеформованого стану згинних залізобетонних елементів при тривалій дії навантаження. *Будівельні конструкції. Міжвідомчий науково-тех. зб.* 2002. № 57. С. 21-30.
17. Pang Chen a, Geng Zhang, Shaojun Cao, Xueyuan Lv, Bin Shen. Creep and post-creep mechanical properties of reinforced concrete columns. *Journal of Building Engineering*. Volume 63, Part A, 2023, 105521
18. Pierre Rossi, J.L. Tailhan, F. Le Maou. Creep strain versus residual strain of a concrete loaded under various levels of compressive stress. *Cement and Concrete Research*. Volume 51, 2013, pp. 32-37

## References

1. Rzhanytsyn A. R. (1949). *Deiaki pytannia mekhaniky system, shcho deformuiutsia u chasi*. М.: Derzhtekhvyd. [in Russian].
2. Rabotnov Yu. N. (1979). *Mekhanyka deformyruemoho tverdoho tela*. М: Nauka. [in Russian].
3. Eiler L. (1934). *Metod nakhozhdennya kрывыkh lynyi, obladaiyushchykh svoystvamy maksimuma lybo mynumuma*. Hostekhyzdat. [in Russian].
4. Krutii Yu.S., Lazariyeva D.V., Surianinov M.H. (2017). *Mekhanika deformovanoho tverdoho tila*. Odesa: ODABA. [in Russian].
5. Tymoshenko S. P. (1955). *Ustoichyvost upruhykh system*. Moskva: HYTTL. [in Russian].
6. Volmyr A.S. (1967). *Ustoichyvost deformyruemykh system*. Moskva: Nauka. [in Russian].
7. Wang Y.C., Nethercot D.A. (1990). Bracing requirements for elate-rally unrestrained beams. *J.Constr.Steel Res.* 4. 305-315.
8. Mohler K., Schelling W. (1968). Zur Bemessung von Knickverbänden und Knickaussteifungen im Holzbau. *Bauingenieur*. 2. 43-48.
9. Чепурненко А.С., Литвинов С.В., Филенко М.А. (2013). *Raschet stержnei na prodolno-poperechnyy yzghyb s uchetom deformatsyi polzuchesty y nachalnykh nesovershenstv*. *Stroytelstvo-2013: RHSU*. [in Russian].
10. Rabotnov Yu.N. (1966). *Polzuchest elementov konstruksyi*. М.: Nauka. [in Russian].
11. Shesterykov S.A. (1961). Dynamicheskyi kryteryi ustoichyvosty pry polzuchestvy dlia stержnei. *Prykladnaia mekhanika y tekhnicheskaya fizyka*. 1. 68-71. [in Russian].
12. Shesterykov S.A. (1959). O kryteryi ustoichyvosty pry polzuchesty. *Prykladnaia matematyka y mekhanika*. XXIII. 6. 1101-1106. [in Russian].
13. Prokopovych Y.E. (1969). Vlyaniye polzuchesty na ustoichyvost tonkostennykh stержnei. *Stroytelstvo y arkhyektura* 9. 12. 33-38. [in Russian].
14. Prokopovych Y.E. (1967). O vlyaniyu polzuchesty na ustoichyvost szhatykh stержnei. *Stroytelnaia mekhanika y raschet sooruzheniy*. 1. 5-9. [in Russian].

15. Orlov A. N. Determination of critical forces under long-term load action for flexible rods with support fastenings that have creep. "Izvestia of the Academy of Sciences of the Arm.SSR.Mechanics." Yerevan, 1977. XXX. No. 3.
16. Bambura A. M., Bezbozhna M. S., Gurkivsky O. B. Experimental investigation of the stress-deformed steel of molded reinforced concrete elements under extreme conditions. Building structures. Interdepartmental scientific-technical zb. 2002. No. 57. P. 21-30.
17. Pang Chen a, Geng Zhang, Shaojun Cao, Xueyuan Lv, Bin Shen. Creep and post-creep mechanical properties of reinforced concrete columns. Journal of Building Engineering. Volume 63, Part A, 2023, 105521
18. Pierre Rossi, J.L. Tailhan, F. Le Maou. Creep strain versus residual strain of a concrete loaded under various levels of compressive stress. Cement and Concrete Research. Volume 51, 2013, pp. 32-37.

**Бекірова Маріам Мамбетівна**

Одеська державна академія будівництва та архітектури,  
к.т.н., доцент  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029  
bekirova.ogasa@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-6162-9967

*Для посилань:*

Бекірова М. М. Стійкість залізобетонних стійок при короткочасній та тривалій дії навантаження. Механіка та математичні методи, 2024. Т. VI. №. 2. С. 100-108.

*For references:*

M. Bekirova. (2024). Stability of reinforced concrete posts under short-term and long-term loading. Mechanics and mathematical methods. VI (2). 100–108.

УДК 624.012.45

## ОСОБЛИВОСТІ ОЦІНЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНОЇ ПОШКОДЖЕНОСТІ БЕТОНУ

Олійник Н. В.<sup>1</sup>, Якушева Ю. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація:** У статті розглядаються питання щодо отримання будівельних матеріалів і устаткування з заданими параметрами якості при зниженій матеріаломісткості. Показано, що одним із можливих шляхів зниження матеріаломісткості конструктивних будівельних матеріалів є застосування наповнювачів.

В даній статті розглядаючи бетон як конструкційний матеріал та зазначено, що саме формування конструкції чи виробу саме важко проконтролювати його кількісні та якісні параметри але практично можливо лише отримавши готовий виріб чи конструкцію.

Властивості конструкції визначаються як індивідуальними властивостями всіх підсистем (бетону, арматури), і змінами цих властивостей при всередині структурних взаємодіях. У свою чергу, матеріал конструкції (бетон) є підсистемою, яка складається з характерних структурних неоднорідностей.

Оскільки склад бетону впливає на структуру, характеристики міцності та деформативні властивості залізобетонних конструкцій, що працюють під впливом зовнішніх впливів, існує необхідність більш досконалого вивчення його та визначення оптимальних складових з метою забезпечення експлуатаційної надійності конструкцій.

У період технологічної переробки бетону у виробі на всіх рівнях структурних неоднорідностей у матеріалі виникають технологічні тріщини, які, будучи структурними параметрами бетону, визначають пошкодженість конструкцій, і тим самим - і їх експлуатаційну надійність.

Дослідженнями встановлено, що технологічна пошкодженість істотно впливає на міцнісні та деформативні властивості бетону.

**Ключові слова:** бетон, будівельні матеріали, технологічна пошкодженість, деформативні властивості бетону.

## FEATURES OF ASSESSMENT OF TECHNOLOGICAL DAMAGE OF CONCRETE

N. Oliynuk<sup>1</sup>, Yu. Yakusheva<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract:** The article deals with the issue of obtaining building materials and equipment with specified quality parameters with reduced material consumption. It is shown that one of the possible ways to reduce the material density of structural building materials is the use of fillers.

In this article, considering concrete as a structural material, it is stated that it is the formation of the structure or product that is difficult to control its quantitative and qualitative parameters, but it is practically possible only after receiving the finished product or structure.

Properties of the structure are determined as individual properties of all subsystems (concrete, reinforcement), and changes in these properties during structural interactions. In turn, the construction material (concrete) is a subsystem that consists of characteristic structural inhomogeneities.

Since the composition of concrete affects the structure, strength characteristics and deformable properties of reinforced concrete structures operating under the influence of external influences, there



is a need for a more thorough study of it and the determination of optimal components in order to ensure the operational reliability of structures.

During the technological processing of concrete into products, at all levels of structural inhomogeneities in the material, technological cracks appear, which, being the structural parameters of concrete, determine the damage of structures, and thus their operational reliability.

Research has established that technological damage significantly affects the strength and deformation properties of concrete.

**Keywords:** concrete, building materials, technological damage, deformable properties of concrete.

## 1 ВСТУП

В останні роки розвиток міст України залежить від таких соціальних проблем, як будівництво житла, створення транспортних мереж та інфраструктури життєзабезпечення. Шляхи рішення цих проблем продиктовані, в першу чергу, вимогами екології в поєднанні з енергетичним забезпеченням, а значить, і їх економікою.

Якість та експлуатаційна надійність конструкції значною мірою залежить від матеріалів, з яких вона виготовлена. Несуча здатність конструкції визначається здатністю матеріалу продовжувати виконувати свої функції в нових умовах.

Тому актуальним залишається завдання отримання будівельних матеріалів і устаткування з заданими параметрами якості при зниженій матеріаломісткості. Одним із шляхів зниження матеріаломісткості конструктивних будівельних матеріалів і є застосування наповнювачів.

До наповнювачів відносять частинки довільних форм і поверхневої активності, розмір яких не дозволяє їм створювати в навколишньому в'язучому полі деформацій і напружень і викликає їх участь у процесах організації структури елементарних структурних елементів в'язучого.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

В силу особливостей своєї будови бетон є багатокомпонентним і багатофазовим полікристалічним утворенням, що має розвинену систему макро- і мікродфектів, що виникають у структурі при формуванні.

Оскільки бетон як конструкційний матеріал формується безпосередньо в самій конструкції чи виробі, проконтролювати його кількісні та якісні параметри практично можливо лише отримавши готовий виріб чи конструкцію.

Незважаючи на майже двохсотлітній досвід застосування і значні обсяги використання, з яким не може зрівнятися жодний композиційний матеріал, залізобетон в даний час все ж є далеко не до кінця вивченим. Потрібні уточнення розрахунку конструкцій з метою якнайповнішого врахування факторів, що впливають на їх роботу під навантаженням.

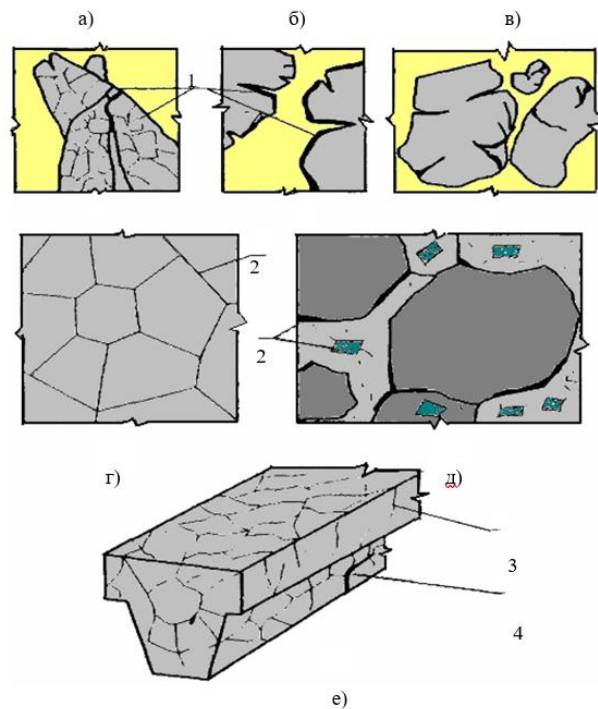
Властивості конструкції визначаються як індивідуальними властивостями всіх підсистем (бетону, арматури), і змінами цих властивостей при серединних взаємодіях. У свою чергу, матеріал конструкції (бетон) є підсистемою, яка складається з характерних структурних неоднорідностей. Тому для розгляду композиційних будівельних матеріалів (КБМ) їх доцільно представляти як складноорганізовані системи, організовані за принципом "структура в структурі" або "композит у композиті". Це дозволяє уявити КБМ, як складні системи, що самоорганізуються, з ієрархічною супідрядністю різних рівнів структурних неоднорідностей, з якісно відмінними механізмами структуроутворення. Експлуатаційні навантаження, що діють на конструкцію, викликають у ній деформації та напруги, які матеріал сприймає та перерозподіляє між власними структурними елементами. Несуча здатність конструкції визначається здатністю матеріалу продовжувати виконувати свої функції в нових умовах.

Таким чином, структуру конструкції можна представити різними моделями, вид яких залежить від поставленої мети аналізу та вивчення її поведінки при дії експлуатаційних навантажень. Опис структури конструкції дозволяє виділити найважливіші елементи, що визначають несучу здатність окремих її частин, усієї



конструкції у складі собі подібних, розкрити роль матеріалу в роботі, визначити шляхи спрямованого проектування матеріалу для конкретної конструкції.

У композиційних матеріалах та конструкціях у загальному випадку можна виділити кілька характерних видів пошкодженості, що відрізняються за механізмами утворення [1, 2]:



**Рис. 1.** Характер пошкодженості кристалів (а), зерен цементу (б), дрібних заповнювачів (в), цементного каміння (г), бетону (д) та конструкцій (е):

- 1 – тріщини у вихідних компонентах;
- 2 – тріщини, що виникли при утворенні структури матеріалів;
- 3 – тріщини, що утворилися за рахунок геометричних особливостей конструкції;
- 4 – експлуатаційні тріщини

– пошкодженість окремих компонентів, яка привноситься з ними в матеріал і конструкцію (початкова);

– пошкодженість, що виникає в період технологічної переробки вихідних складових в матеріал і його в конструкцію (технологічна), рис. 1.;

– пошкодженість, що виникає при дії на матеріал конструкції експлуатаційних навантажень (експлуатаційна).

Оскільки склад бетону впливає на структуру, характеристики міцності та деформативні властивості залізобетонних конструкцій, що працюють під впливом зовнішніх впливів, існує необхідність більш досконалого вивчення його та визначення оптимальних складових з метою забезпечення експлуатаційної надійності конструкцій. У період технологічної переробки бетону у виробі на всіх рівнях структурних неоднорідностей у матеріалі виникають технологічні тріщини, які, будучи структурними параметрами бетону, визначають пошкодженість конструкцій, і тим самим - і їх експлуатаційну надійність. Сучасний етап дослідження показує, що технологічна пошкодженість особливо впливає на деформаційні властивості залізобетонних елементів. Застосування наповнювачів, оптимальних за видом, кількістю та дисперсністю, дозволяє керувати технологічним пошкодженням бетонних та залізобетонних конструкцій, що дозволяє підвищувати їх фізико-технічні характеристики.

Експлуатаційні навантаження, що діють на конструкцію, викликають у ній деформації та напруження, які матеріал сприймає та перерозподіляє між власними структурними елементами. Несуча здатність конструкції визначається здатністю матеріалу продовжувати виконувати свої функції у нових умовах.

Руйнування бетону завжди пов'язане з накопиченням пошкоджень початкової структури бетону на різних рівнях і поглинанням енергії деформації, з подальшим виділенням її на поверхню новостворених тріщин руйнування [2].

Об'єктом аналізу є дефекти, що виникли у період технологічної переробки отримання будівельних матеріалів та конструкцій. Подібні дефекти віднесені до технологічних, начальних або спадкових дефектів. Відповідно до [2], до технологічних (спадкових) дефектів можна віднести дефекти (пори, капіляри, тріщини різних видів і т.п.), які виникають у період отримання матеріалу та конструкції деякі присутні в них до прокладання експлуатаційних навантажень. Так як механічні характеристики композиційних матеріалів, включаючи будівельні, значною мірою визначаються тріщинами, то в подальшому ми під технологічними дефектами будемо розуміти тріщини, які виникають у матеріалі будівельних конструкцій у період організації структури і які існують у ньому до додатку зовнішніх навантажень. При цьому передбачається, що тріщини, що виникають у матеріалі, автоматично стають тріщинами конструкції та визначають тим самим її тріщиностійкість, деформативність та несучу здатність. Наприклад, у збірних залізобетонних елементах частка тріщин технологічного походження від загальної кількості дефектів досягає близько 60% [2].

Проведені дослідження підтвердили, що експлуатаційні тріщини розвиваються з технологічних. Можна припустити, що експлуатаційні тріщини завершують дроблення матеріалу на великі блоки. Це характерно для складів із незначним накопиченням дефектів у перші цикли зволоження - висушування. Оскільки бетон є матеріалом типу «структура в структурі», де кожен великий блок складається зі співдружності дрібніших, то можна припустити, що об'ємні деформації шкірного такого блоку можуть призвести до його дроблення на підблоки. При цьому малюнок тріщин усередині блоку повторює малюнок тріщин на більш високому масштабному рівні. Таке дроблення структурних блоків призводить до інтенсивного розвитку експлуатаційних тріщин.

Фізико-механічні властивості композиційних матеріалів значною мірою залежать від ступеня дефектності їхньої структури. Ці дефекти, розділені на технологічні (або спадкові) та експлуатаційні, мають власну історію розвитку: від зародження до перетворення на необоротну розвивається тріщину. Спадкові дефекти є не тільки відповідальними за забезпечення необхідних фізико-механічних характеристик, а й визначають кінетику розвитку експлуатаційних дефектів і, отже, експлуатаційну довговічність композитних матеріалів та конструкцій.

Оскільки механічні характеристики композиційних матеріалів у значній мірі визначаються тріщинами, то надалі вважаємо, що саме тріщини визначають пошкодженість матеріалу, а, отже, і конструкції.

Спрямована зміна технологічної пошкодженості дозволяє змінювати характер тріщино утворення та руйнування конструкції. Застосування мінерального наповнювача у певних кількостях і певної дисперсності дозволяє керувати процесами організації структури бетону та регулювати його початкові об'ємні зміни, а отже, і технологічну пошкодженість з метою отримання будівельних конструкцій з необхідними властивостями.

Мінеральні наповнювачі, впливаючи на фізико-механічні властивості цементного каміння, визначають його матеріаломісткість, що залежить від ефективності використання клінкерної частини цементу. Чим краще, повніше використовується потенційні властивості найдорожчого та енергоємного компонента цементних композицій, тим менше матеріаломісткість. Доведено можливість зниження

матеріаломісткості на 15...21% за рахунок застосування наповнювачів, оптимальних за образом та якісним складом.

До наповнювачів відносять частинки довільних форм і поверхневої активності, розмір яких не дозволяє їм створювати в навколишньому в'язкому полі деформацій і напружень і викликає їх долю в процесах організації структури матеріалу, що має певні властивості.

Теоретичною основою застосування малоактивних наповнювачів є той факт, що частинки цементу завбільшки більше 40 – 60 мкм гідратуються незначно навіть по закінченню кількох років твердіння цементного каміння і є, по суті, його баластною складовою, виконуючи роль мікронаповнювача. Тому значна частина великих зерен цементу може бути замінена без великих збитків для його якості приблизно такими ж за розмірами частками малоактивних речовин. Зміст хімічно інертних наповнювачів у складі цементу дозволяє також якось прискорити гідратацію клінкерних мінералів, що частково заповнює недолік цементу. І більш значним, якщо не основним критерієм необхідності застосування мінеральних наповнювачів, є економія дорогого якісного в'язучого – цементу.

Наповнювачі, що не містять хімічно активних компонентів (малоактивні мінеральні наповнювачі), не вступають у хімічні реакції з іншими складовими елементами цементного в'язучого та водою замішування.

Мінеральні наповнювачі, впливаючи на фізико-механічні властивості цементного каміння, визначають його матеріаломісткість, що залежить від ефективності використання клінкерної частини цементу. Чим краще, повніше використовується потенційні властивості найдорожчого та енергоємного компонента цементних композицій, тим менше матеріаломісткість. Доведено можливість зниження матеріаломісткості на 15...21% за рахунок застосування наповнювачів, оптимальних за образом та якісним складом.

У практиці поширені два способи введення наповнювачів. У першому випадку – шляхом спільного помелу клінкеру та сировини наповнювачів, попередньо розмелених або отриманих у природному порошкоподібному стані, в іншому – наповнювачі вводять безпосередньо до складу бетонної суміші у процесі її приготування.

Проведений аналіз показав, що мінеральні наповнювачі є ефективним методом управління структуроутворенням конструкції.

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Склад бетонної суміші наведено у таблиці 1. Введення наповнювача до складу бетонної суміші було виконано в процесі її виготовлення. Кількість та дисперсність наповнювача наведено у таблиці 2.

**Таблиця 1**

Склад бетону на  $1\text{ м}^3$

Найменування	Позначення	Кількість, кг
Щебінь	Щ	1100
Пісок	П	717
Вода	У	140
Цемент	Ц	350

У якості наповнювача застосовувався кварцовий морський пісок з питомою поверхнею  $100, 200, 300\text{ м}^2 / \text{кг}$ , попередньо розмелений у кульовому млині. Кварцовий наповнювач перед помелом просіювався через сито з діаметром отворів  $5\text{ мм}$ , промивався і просушувався. При помелі наповнювача проводився підбір куль, що

мелють і встановлювався час помелу в залежності від отримання необхідної питомої поверхні, контрольованої приладом ПСХ-4. Введення наповнювача безпосередньо до складу бетонної суміші було виконано у процесі її приготування.

З метою дослідження початкової (технологічної) пошкодженості бетонних призм увагу зверталось на мережу поверхневих тріщин. Для більш якісної оцінки технологічної пошкодженості зразків проявлення тріщин здійснювалося після досягнення зразками віку 200...220 діб, після проходження карбонізації, тобто розвитку фізичних та хімічних процесів під дією на бетон атмосферного  $CO_2$  у присутності вологості, коли поверхня бетону покривається мережею тонких тріщин. Поверхневі тріщини фіксувалися витримкою зразків у водних розчинах таніну протягом 30...40 хвилин, а після замочування – висувувалися у лабораторії протягом двох діб. Зміна лужності бетону в районі тріщин змінювала окрасу таніну, виявляючи і фіксуючи тріщини.

**Таблиця 2**

Дисперсність та кількість наповнювача в залежності від складу бетону

№ складу	Дисперсність наповнювача ( $S_y$ ), м <sup>2</sup> /кг			Кількість наповнювача ( $H$ ), %
	100	200	300	
1	1	0	0	8
2	0	1	0	8
3	0	0	1	8
4	1	0	0	10
5	0	1	0	10
6	0	0	1	10
7	1	0	0	12
8	0	1	0	12
9	0	0	1	12

На призмах для визначення технологічної пошкодженості виділялися ділянки площею 10×10 см, на яких і визначалася кількісна оцінка технологічної пошкодженості виміром довжин поверхневих тріщин курвіметром з точністю до 1 мм (рис. 2.).

Коефіцієнт технологічної пошкодженості за площею ( $Kn_s$ ) визначався за методикою [2], як відношення суми довжин поверхневих тріщин ( $T_0$ ), виміряних у межах ділянки 10×10 см до площі цієї ділянки ( $S$ )

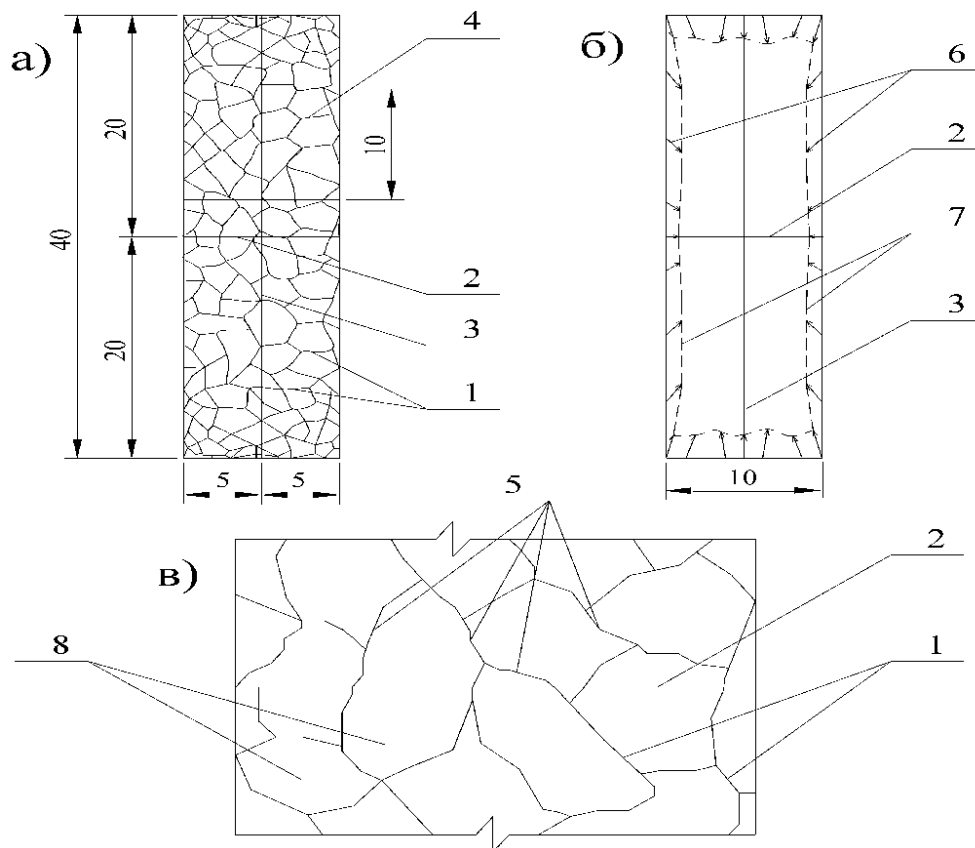
$$Kn_s = \sum \frac{T_0}{S} \left[ \frac{см}{см^2} \right]. \quad (1)$$

Фізичний сенс полягає в оцінці питомої довжини поверхневих тріщин, виявлених на одиниці поверхні.

Коефіцієнт технологічної пошкодженості по лінії ( $Kn_L$ ) прийнятий як відношення довжини характерної лінії ( $L$ ), що перетинає структурні блоки, обмежені технологічними тріщинами, до суми довжин цих тріщин, що примикають  $T_0$  з одного боку

$$Kn_L = \frac{L}{\sum T_0} \left[ \frac{см}{см} \right]. \quad (2)$$

Фізичний зміст полягає в оцінці питомої довжини поверхневих тріщин, виявлених на одиниці довжини.



**Рис. 2.** Методика оцінки технологічної пошкодженості за бетонними призми:

а) розташування характерних ліній та площі на зразку-призмі з виявленим характером пошкодженості;

б) розподіл усадкових деформацій у зразку прямокутної форми;

в) фрагмент визначення коефіцієнта пошкодженості за характерною лінією (у поперечному перерізі);

1 – технологічні тріщини;

2, 3 – поперечна та поздовжня характерні лінії для визначення коефіцієнта пошкодженості по лінії ( $Kn_L$ );

4 – площа визначення коефіцієнта пошкодженості за площею ( $Kn_S$ );

5 – технологічні тріщини, що утворюють осередки, які перетинає характерна поперечна лінія ( $L$ );

6 – напрямок деформацій;

7 – епюра усадкових деформацій;

8 – структурні блоки

При введенні коефіцієнта технологічної пошкодженості по лінії ( $Kn_L$ ) дотримувалися наочності, тобто зі збільшенням пошкодженості (зменшенням структурних блоків (осередків) і, отже,  $\sum T_0$ , що припадають на характерну лінію ( $L$ )), збільшується  $Kn_L$ .

Для дослідження напружено-деформованого стану бетону експериментальних зразків використовувалися дротові тензорезистори на паперовій основі з базою 50 мм та опором 400 Ом.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

В результаті проведених досліджень по бічним граням призм були отримані довжини тріщин ( $T_0, см$ ) та коефіцієнти технологічної пошкодженості за площею, які представлені у таблиці 3.

Величина технологічної пошкодженості, що виражена за допомогою коефіцієнта технологічної пошкодженості ( $Kn_s$ ), що визначається за площею зразків-призм в залежності від кількості та якості наповнювача змінюється в межах від 0,65 до 1,36 см/см<sup>2</sup> (на 109,2%) і представлена у таблиці 3.

В результаті проведених досліджень по двох бокових гранях призм були отримані такі середні характеристики: коефіцієнт технологічної пошкодженості за площею, коефіцієнти технологічної пошкодженості в характерних перерізах призм (поздовжньому та поперечному), які представлені в таблиці 3.

Величина технологічної пошкодженості, виражена за допомогою коефіцієнта технологічної пошкодженості ( $Kn_s$ ), визначеного за площею зразків-призм залежно від кількості та якості наповнювача змінюється в межах від 0,65 до 1,36 см/см<sup>2</sup> (на 109,2%) та представлена у таблиці 3.

Вплив кількості наповнювача на коефіцієнт технологічної пошкодження бетону, визначений за площею зразків-призм, відображено у таблиці 3 та рис. 3. При зміні від 8 до 10% від маси в'язучого і постійної дисперсності  $Sy = 100 \text{ м}^2 / \text{кг}$  призводить до зменшення коефіцієнта  $Kn_s$  від 1,36 до 0,88 см/см<sup>2</sup> (на 55,1%). Надалі зростання  $H$  до 12% спричинює збільшення коефіцієнта  $Kn_s$  до 1,16 см/см<sup>2</sup> (на 31,5%).

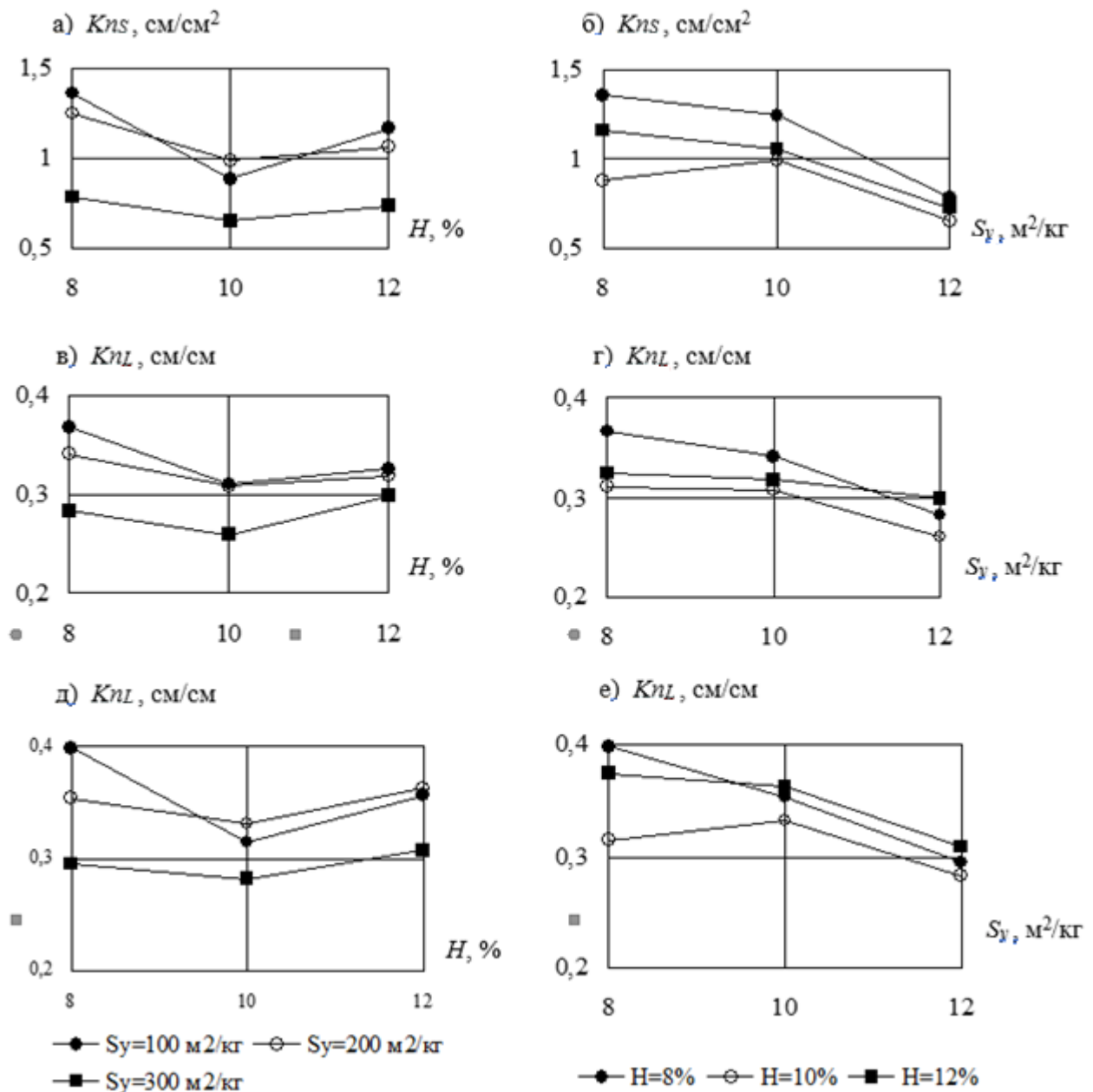
**Таблиця 3**

Коефіцієнти технологічної пошкодженості ( $Kn_L, Kn_s$ ) ( $Kn_L, Kn_s$ ) та довжини технологічних тріщин ( $T_0$ ), визначені за призмами

№ складу	$H, \%$	$Sy, \text{ м}^2 / \text{кг}$	Поздовжній переріз ( $L_{II} = 40 \text{ см}$ )		Поперековий переріз ( $L_{II} = 10 \text{ см}$ )		Виділена площа ( $S = 100 \text{ см}^2$ )	
			$T_0, \text{ см}$	$Kn_L, \text{ см} / \text{см}$	$T_0, \text{ см}$	$Kn_L, \text{ см} / \text{см}$	$T_0, \text{ см}$	$Kn_s, \text{ см} / \text{см}^2$
1	8	100	100,3	0,399	27,3	0,367	136	1,36
2		200	113	0,354	29,3	0,341	125	1,25
3		300	135,7	0,295	35,3	0,283	78	0,78
4	10	100	127	0,315	32,2	0,311	88	0,88
5		200	120,6	0,332	32,5	0,308	99	0,99
6		300	142	0,282	38,5	0,260	65	0,65
7	12	100	112	0,357	30,8	0,325	116	1,16
8		200	110,3	0,363	31,4	0,318	106	1,06
9		300	129,8	0,308	33,5	0,299	73	0,73

Подібний характер зміни коефіцієнта  $Kn_s$  спостерігається також за постійної  $Sy = 200 \text{ м}^2 / \text{кг}$ : зниження  $Kn_s$  від 1,25 до 0,99 см/см<sup>2</sup> (на 26,7%) при зміні  $H$  від 8 до 10%, і збільшення  $Kn_s$  до 1,06 см/см<sup>2</sup> (на 7%) за подальшого зростання  $H$  до 12%. При постійній дисперсності  $Sy = 300 \text{ м}^2 / \text{кг}$  спостерігається аналогічний характер впливу  $H$  з плавнішою зміною коефіцієнта  $Kn_s$ , тобто із зменшенням від 0,78 до 0,65 см/см<sup>2</sup> (на 19,7%) при зміні  $H$  від 8 до 10 % та зростанням до 0,73 см/см<sup>2</sup> (на 12%) зі збільшенням  $H$  до 12%. Слід зазначити, що максимальні зміни коефіцієнта  $Kn_s$  простежуються за постійної  $Sy = 100 \text{ м}^2 / \text{кг}$ : зменшення на 55,1% (при збільшенні  $H$  від 8 до 10%) та збільшення на 31,5% (при варіації  $H$  від 10 до 12%) ). Мінімальні зміни  $Kn_s$

спостерігаються при зміні  $H$  від 10 до 12%: підвищення на 7% за  $S_y = 200 \text{ м}^2 / \text{кг}$  і, відповідно, на 12% – для  $S_y = 300 \text{ м}^2 / \text{кг}$ .



**Рис. 3.** Вплив кількості наповнювача (а, в, д) та дисперсності (б, г, е) на коефіцієнти технологічної пошкодженості бетону, визначені за площею  $K_{ns}$  (а, б), по поперечному  $K_{nL}$  (в, г) та поздовжньому перерізам призми  $K_{nL}$  (д, е) при відповідних дисперсності та кількості наповнювача

Вплив якості наповнювача (дисперсності) на коефіцієнт технологічної пошкодженості бетону, визначений за площею зразків-призм, відображено на рис. 3. Зміна  $S_y$  від 100 до 200  $\text{м}^2/\text{кг}$  за витратою  $H = 8\%$  призводить до зменшення коефіцієнта  $K_{ns}$  від 1,36 до 1,25  $\text{см}/\text{см}^2$  (на 8,8%). Подальше збільшення  $S_y$  до 300  $\text{м}^2/\text{кг}$  спричиняє зниження величини коефіцієнта  $K_{ns}$  до 0,78  $\text{см}/\text{см}^2$  (на 60,9%). При фіксованій кількості  $H = 12\%$  спостерігається аналогічний характер впливу  $S_y$ , але з

більшою плавною зміною  $Kn_s$ : зниження від 1,16 до 1,06 см/см<sup>2</sup> (на 9,3%) при зміні  $S_y$  від 100 до 200 м<sup>2</sup>/кг та суттєвому зменшенні до 0,73 см/см<sup>2</sup> (на 45,2%) при збільшенні  $S_y$  до 300 м<sup>2</sup>/кг. При фіксованій кількості  $H = 10\%$  зміна  $S_y$  від 100 до 200 м<sup>2</sup>/кг призводить до зростання  $Kn_s$  від 0,88 до 0,99 см/см<sup>2</sup> (на 12,5%). Подальше збільшення  $S_y$  до 300 м<sup>2</sup>/кг викликає різке зниження  $Kn_s$  до 0,65 см/см<sup>2</sup> (52,3%). Слід зазначити, що найбільші зміни коефіцієнта  $Kn_s$  (45,2; 52,3; 60,9%) спостерігаються при переході значення  $S_y$  від 200 до 300 м<sup>2</sup>/кг та постійному  $H = 12, 10$  та 8% відповідно. Найменші – 8,8; 9,3; 12,5% – спостерігаються при зміні  $S_y$  від 100 до 200 м<sup>2</sup>/кг та постійному  $H = 8, 12$  та 10% відповідно.

Таким чином, максимальне значення коефіцієнта технологічної пошкодженості бетону, визначеного за площею зразків-призм, досягається при кількості наповнювача  $H = 8\%$  від маси в'язучого та дисперсності  $S_y = 100 \text{ м}^2 / \text{кг}$  (1,36), а мінімальна – при кількості наповнювача  $H = 10\%$  та дисперсності  $S_y = 300 \text{ м}^2 / \text{кг}$  (0,65).

Величина технологічної пошкодженості, виражена за допомогою коефіцієнта технологічної пошкодженості, визначеного за поперечним перерізом зразків-призм, залежно від кількості та якості наповнювача, змінюється в межах від 0,26 до 0,367 (на 41,2%) та представлена в таблиці 3.

Вплив кількості наповнювача на коефіцієнт технологічної пошкодженості бетону, визначений по поперечному перерізу зразків-призм, відображено на рисунку 3, (див. також таблицю 3). Зміна від 8 до 10% від маси в'язучого при постійній дисперсності  $S_y = 100 \text{ м}^2 / \text{кг}$  призводить до зниження коефіцієнта  $Kn_L$  від 0,367 до 0,311 (на 18%). Подальше збільшення  $H$  до 12% спричинює підвищення коефіцієнта  $Kn_L$  до 0,325 (на 4,5%). Подібний характер зміни  $Kn_L$  спостерігається при постійній  $S_y = 200 \text{ м}^2 / \text{кг}$ : зменшення  $Kn_L$  від 0,341 до 0,308 (на 10,7%) при зміні від 8 до 10%, і зростання до 0,318 (на 3,3%) при збільшенні  $H$  до 12%. При незмінній дисперсності  $S_y = 300 \text{ м}^2 / \text{кг}$  має місце аналогічний характер впливу  $H$ : зменшення від 0,283 до 0,26 (на 8,9%) при зміні  $H$  від 8 до 10% і збільшення до 0,299 (на 15%) при зростанні  $H$  до 12%. Необхідно відзначити, що максимальні зміни  $Kn_L$  характерні: для  $S_y = 100 \text{ м}^2 / \text{кг}$  – зниження на 18% (при збільшенні від 8 до 10%) і для  $S_y = 300 \text{ м}^2 / \text{кг}$  – підвищення на 15% (при збільшенні  $H$  від 10% до 12%). Мінімальні зміни коефіцієнта  $Kn_L$  спостерігаються за зміни  $H$  від 10 до 12%: збільшення на 3,3% ( $S_y = 200 \text{ м}^2 / \text{кг}$ ) та збільшення на 4,5% ( $S_y = 100 \text{ м}^2 / \text{кг}$ ).

Вплив якості наповнювача на коефіцієнт технологічної пошкодженості бетону, визначений за поперечним перерізом зразків-призм, відображено на малюнку 4.1 (г) (див. також таблицю 4.1). Зміна  $S_y$  від 100 до 200 м<sup>2</sup>/кг за його витрати 8% призводить до зменшення  $Kn_L$  від 0,367 до 0,341 (на 7,6%). Подальше збільшення  $S_y$  до 300 м<sup>2</sup>/кг спричиняє значне зменшення  $Kn_L$  до 0,283 (на 20,5%). При фіксованій кількості  $H = 10\%$  зміна  $S_y$  від 100 до 200 м<sup>2</sup>/кг практично не призводить до зміни (зменшення  $Kn_L$  від 0,311 до 0,308 (на 0,1%)). Подальше збільшення  $S_y$  до 300 м<sup>2</sup>/кг викликає значне зменшення  $Kn_L$  до 0,26 (на 18,5%). При фіксованій кількості  $H = 12\%$



спостерігаємо аналогічний характер впливу  $S_y$  з більш плавною зміною  $Kn_L$ , тобто із зменшенням від 0,325 до 0,318 (на 2,2%) при зміні  $S_y$  від 100 до 200 м<sup>2</sup>/кг та зменшенні до 0,299 (на 6,4%) зі збільшенням  $S_y$  до 300 м<sup>2</sup>/кг. Слід зазначити, що максимальні зміни  $Kn_L$  (18,5 та 20,5%) спостерігаються при зміні  $S_y$  від 200 до 300 м<sup>2</sup>/кг та постійному  $H = 10$  та 8% відповідно. Мінімальні зміни  $Kn_L$  (0,1 та 2,2 %) спостерігаються при зміні  $S_y$  від 100 до 200 м<sup>2</sup>/кг та постійному  $H = 10$  та 12% відповідно.

Звідси випливає, що максимальне значення коефіцієнта технологічної пошкодженості бетону, визначеного за поперечним перерізом зразків-призм, досягається при кількості наповнювача  $H = 8\%$  від маси в'язучого та дисперсності  $S_y = 100 \text{ м}^2 / \text{кг}$  (0,367), а мінімальне – при кількості наповнювача  $H = 10\%$  та дисперсності  $S_y = 300 \text{ м}^2 / \text{кг}$  (0,26).

Величина технологічної пошкодженості, виражена за допомогою коефіцієнта технологічної пошкодженості, визначеного поздовжнього перерізу зразків-призм, в залежності від кількості та якості наповнювача змінюється в межах від 0,282 до 0,399 (на 41,5%) і представлена в таблиці 4.1.

Вплив кількості наповнювача на коефіцієнт технологічної пошкодженості бетону, визначений по поздовжньому перерізу зразків-призм відображено на рисунку 4.1, д (див. також таблицю 4.1). Зміна  $H$  від 8 до 10% від маси в'язучого за постійної дисперсності  $S_y = 100 \text{ м}^2 / \text{кг}$  призводить до зниження  $Kn_L$  від 0,399 до 0,315 (на 26,7%). Подальше зростання  $H$  до 12% викликає збільшення  $Kn_L$  до 0,357 (на 13,3%). Аналогічний характер зміни  $Kn_L$  спостерігається при постійній  $S_y = 200 \text{ м}^2 / \text{кг}$  : зменшення  $Kn_L$  від 0,354 до 0,332 (на 6,6%) при зміні  $H$  від 8 до 10% та зростання  $Kn_L$  до 0,363 (на 9,3%) при збільшенні  $H$  до 12%. При постійній дисперсності  $S_y = 300 \text{ м}^2 / \text{кг}$  спостерігаємо подібний характер впливу  $H$ , тобто зі зменшенням від 0,295 до 0,282 (на 4,6%) зі збільшенням  $H$  від 8 до 10% та збільшенням до 0,308 (на 9,2%) при зміні  $H$  до 12%. Слід зазначити, що максимальні зміни  $Kn_L$  спостерігаються при  $S_y = 100 \text{ м}^2 / \text{кг}$  : зменшення на 26,7% (при зростанні від 8 до 10%) і збільшенні на 13,3% (при зростанні від 10 до 12%). Мінімальні зміни  $Kn_L$  спостерігаються за зміни  $H$  від 10 до 12% – зменшення на 4,6% ( $S_y = 300 \text{ м}^2 / \text{кг}$ ).

Вплив дисперсності на коефіцієнт технологічної пошкодженості бетону, визначений по поздовжньому перерізу зразків-призм, відображено на рисунку 3, е (див. таблицю 3). Зміна  $S_y$  від 100 до 200 м<sup>2</sup>/кг при витраті  $H = 8\%$  призводить до зниження  $Kn_L$  від 0,399 до 0,354 (на 12,7%). Подальше зростання  $S_y$  до 300 м<sup>2</sup>/кг викликає значне зниження  $Kn_L$  до 0,295 (на 20%). При фіксованій кількості  $H = 10\%$  зміна  $S_y$  від 100 до 200 м<sup>2</sup>/кг зумовлює зростання  $Kn_L$  від 0,315 до 0,332 (на 5,4%). Подальше збільшення  $S_y$  до 300 м<sup>2</sup>/кг регламентує значне зменшення  $Kn_L$  до 0,282 (на 17,7%). При фіксованій кількості  $H = 12\%$  спостерігається характер впливу  $S_y$ , подібний до впливу  $H = 10\%$  : збільшення  $Kn_L$  від 0,357 до 0,363 (на 1,7%) при зміні  $S_y$  від 100 до 200 м<sup>2</sup>/кг і значне зменшення до 0,308 (на 17,8%) при підвищенні  $S_y$  до 300 м<sup>2</sup>/кг. Необхідно відзначити, що максимальні зміни коефіцієнта  $Kn_L$  (17,7; 17,8; 20%) спостерігаються

при варіюванні  $S_y$  від 200 до 300 м<sup>2</sup>/кг та постійному  $H = 10, 12$  та 8% відповідно. Мінімальні зміни  $Kn_L$  (1,7 та 5,4%) простежуються при переході  $S_y$  від 100 до 200 м<sup>2</sup>/кг та постійному  $H = 12$  та 10% відповідно.

З цього випливає, що максимальне значення коефіцієнта технологічної пошкодженості бетону, визначеного по поздовжньому перерізу зразків-призм, досягається при кількості наповнювача  $H = 8\%$  від маси в'язучого та дисперсності  $S_y = 100 \text{ м}^2 / \text{кг}$  (0,399), а мінімальне значення – при кількості наповнювача  $H = 10\%$  : та дисперсності  $S_y = 300 \text{ м}^2 / \text{кг}$  (0,282).

## 5 ВИСНОВКИ

1. Проведеними дослідженнями встановлено, що технологічна пошкодженість істотно впливає на міцнісні та деформативні властивості бетону.

2. Вивчено вплив кількості мінерального наповнювача ( $H = 8, 10$  та 12% від маси в'язучого), а також дисперсності ( $S_y = 100, 200$  та 300 м<sup>2</sup>/кг за кожною кількістю) на технологічну пошкодженість, виражену коефіцієнтами технологічної пошкодженості за площею ( $Kn_s$ ) та у характерних перерізах ( $Kn_L$ ). Підтверджується участь наповнювачів в організації структури бетону та формуванні технологічної пошкодженості, зокрема, максимальне значення коефіцієнта технологічної пошкодженості бетону, визначеного за поперечним перерізом зразків-призм, досягається при кількості наповнювача  $H = 8\%$  : від маси в'язучого та дисперсності  $S_y = 100 \text{ м}^2 / \text{кг}$  (0,367), а мінімальна – при кількості наповнювача  $H = 10\%$  : та дисперсності  $S_y = 300 \text{ м}^2 / \text{кг}$  (0,26); максимальне значення коефіцієнта технологічної пошкодженості бетону, визначеного по поздовжньому перерізу зразків-призм, досягається при кількості наповнювача  $H = 8\%$  : від маси в'язучого та дисперсності  $S_y = 100 \text{ м}^2 / \text{кг}$  (0,399), а мінімальне значення – при кількості наповнювача  $H = 10\%$  : дисперсності  $S_y = 300 \text{ м}^2 / \text{кг}$  (0,282); максимальне значення коефіцієнта технологічної пошкодженості бетону, визначеного за площею зразків-призм, досягається при кількості наповнювача  $H = 8\%$  від маси в'язучого та дисперсності  $S_y = 100 \text{ м}^2 / \text{кг}$  (1,36), а мінімальне – при кількості наповнювача  $H = 10\%$  дисперсності  $S_y = 300 \text{ м}^2 / \text{кг}$  (0,65).

## 6 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають будь-яких фінансових чи нефінансових інтересів щодо матеріалів, представлених у цій статті, які слід розкривати.

## Література

1. ДБН В.2.6-98:2009 Конструкції будинків і споруд. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення.
2. ДСТУ Б В.2.6-156:2010 Конструкції будинків і споруд. Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону. Правила проектування
3. ДСТУ-Н Б В.2.6-203:2015 Настанова з виконання робіт при виготовленні та монтажі будівельних конструкцій
4. ДСТУ 9208:2022 Бетони важкі. Технічні умови

5. Дорофеев В.С., Вировий В.М. Технологічна пошкодженість будівельних матеріалів і конструкцій. – Одеса: Місто майстрів, 1998. – 168 с.
6. Олійник Н. В. Вплив технологічної пошкодженості бетону на міцність та тріщиностійкість згинаються залізобетонних елементів за нормальними перерізами : Автореферат. Одеса, 2007. 17 с.
7. Dorofeyev Vitaliy and Pushkar Natalia. The bearing-capacity of precast beams with vertical contact plane // III International Scientific Conference “EcoComfort and current construction issues”, September 14-16, 2022. Lecture Notes in Civil Engineering // Lviv, Ukraine: Lviv Polytechnic National University, 2022. – P. 67-75.
8. Дорофеев В.С., Мироненко І.М., Пушкар Н.В. Вплив складу бетону на формування технологічної пошкодженості і фізико-механічні властивості // Матеріали конференції «Проблеми надзвичайних ситуацій». – Харків, 2022. – С. 59-60.
9. Dorofeyev Vitaliy, Myronenko Igor and Pushkar Natalia. The Effect of Technological Damage on the Properties and Reliability of Construction Materials and Structures / Applied Mechanics and Materials (AMM ) ISSN: 1662-7482, Vol. 908, pp 149-156, Trans Tech Publications Ltd, Switzerland, 08.2022.
10. Дорофеев В.С., Зінченко Г.В., Пушкар Н.В. Вплив структури і технологічної пошкодженості бетону на повну діаграму деформування // Вісник Херсонського національного технічного університету №4 (83). – Харків, 2022. – С. 9-15.
11. Blikharskyu, Y., Selejdak, J., kopiika, N., Vashkevych, R.: Study of concrete under combined action of aggressive environment and long-term loading. materials 14(21), 6612 (2021). <https://doi.org/10.3390/ma14216612>.
12. Blikharskyu, Z., Sobol, k., markiv, T., Selejdak, J.: Properties of concretes incorporating recycling waste and corrosion susceptibility of reinforcing steel bars. materials 14(10), 2638 (2021).

## References

1. DBN V.2.6-98:2009 Structures of buildings and structures. Concrete and reinforced concrete structures. Basic provisions.
2. DSTU B V.2.6-156:2010 Structures of buildings and structures. Concrete and reinforced concrete structures made of heavy concrete. Design rules.
3. DSTU-N B V.2.6-203:2015 Guidelines for the execution of works in the manufacture and installation of building structures
4. DSTU-N B V.2.6-203:2015 Guidelines for the execution of works in the manufacture and installation of building structures
5. Dorofeev V.S., Vyrovyi V.M. Technological damage of building materials and structures. – Odesa: City of Masters, 1998. – 168 p.
6. Oliynyk N.V. The influence of technological damage of concrete on the strength and crack resistance of flexural reinforced concrete elements with normal cross-sections: Author's abstract. Odesa, 2007. 17 p.
7. Dorofeyev Vitaliy and Pushkar Natalia. The bearing-capacity of precast beams with vertical contact plane // III International Scientific Conference “EcoComfort and current construction issues”, September 14-16, 2022. Lecture Notes in Civil Engineering // Lviv, Ukraine: Lviv Polytechnic National University, 2022. – P. 67-75.
8. Dorofeev V.S., Myronenko I.M., Pushkar N.V. The influence of the composition of concrete on the formation of technological damage and physical and mechanical properties // Proceedings of the conference "Problems of emergency situations". - Kharkiv, 2022. - P. 59-60.
9. Dorofeyev Vitaliy, Myronenko Igor and Pushkar Natalia. The Effect of Technological Damage on the Properties and Reliability of Construction Materials and Structures / Applied Mechanics and Materials (AMM ) ISSN: 1662-7482, Vol. 908, pp 149-156, Trans Tech Publications Ltd, Switzerland, 08.2022.
10. Dorofeev V.S., Zinchenko G.V., Pushkar N.V. Influence of the structure and technological damage of concrete on the full deformation diagram // Bulletin of the Kherson National Technical University No. 4 (83). - Kharkiv, 2022. - P. 9-15.

11. Blikharskyu, Y., Selejdak, J., kopiika, N., Vashkevych, R.: Study of concrete under combined action of aggressive environment and long-term loading. materials 14(21), 6612 (2021). <https://doi.org/10.3390/ma14216612>.
12. Blikharskyu, Z., Sobol, k., markiv, T., Selejdak, J.: Properties of concretes incorporating recycling waste and corrosion susceptibility of reinforcing steel bars. materials 14(10), 2638 (2021).

**Олійник Наталія Володимирівна**

Одеська державна академія будівництва та архітектури,

к.т.н., доцент

вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029

[natali@odaba.edu.ua](mailto:natali@odaba.edu.ua)

ORCID:0000-0003-4492-7003

**Якушева Юлія Володимирівна**

Одеська державна академія будівництва та архітектури,

асистент

вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029

[yakusheva.j@odaba.edu.ua](mailto:yakusheva.j@odaba.edu.ua)

ORCID:0009-0000-6010-9559

*Для посилань:*

Олійник Н. В., Якушева Ю. В.. Особливості оцінювання технологічної пошкодженості бетону. Механіка та математичні методи, 2024. Т. VI. №. 2. С. 109–123.

*For references:*

N. Oliynuk, Yu. Yakusheva. (2024). Features of assessment of technological damage of concrete. Mechanics and Mathematical Methods. VI (2). 109–123.

UDC 536.24.021

## DISPERSION OF LAMB WAVES IN MULTILAYER STRUCTURES

O. Pysarenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract:** Low cost, the possibility of online monitoring and high sensitivity distinguish the method of structural monitoring using Lamb waves from other available methods. Structural analysis based on Lamb waves in heterogeneous materials requires fundamental knowledge of the behavior of Lamb waves in such materials. This basic knowledge is critical for signal processing in determining possible damage that can be detected by the propagating wave. Recently, Lamb wave methods have been used to simultaneously survey large areas of composite structures. However, such methods are more complex than traditional ultrasonic testing because Lamb waves have dispersive characteristics, namely, the wave speed varies depending on the frequency, modes and thickness of the plates. Experimentally measured group velocities of Lamb waves in composite materials with anisotropic characteristics do not coincide with theoretical group velocities, which are calculated using the dispersion equation of Lamb waves. This discrepancy arises because in anisotropic materials there is an angle between the direction of the group velocity and the direction of the phase velocity. This work investigates the propagation characteristics of Lamb waves in composites, focusing on group velocity and characteristic wave curves. For symmetric laminates, a robust method is proposed by imposing boundary conditions on the mid-plane and top surface to separate symmetric and antisymmetric wave modes. The dispersive and anisotropic behavior of Lamb waves in two different types of symmetrical laminates is theoretically studied in detail. The dispersion of Lamb waves was studied for 10 symmetric and asymmetric modes. It is shown that only fundamental modes are not characterized by a cutoff frequency, which indicates the interaction of fundamental modes with composite layers in the low-frequency range. A high level of group velocity dispersion was discovered for the SH<sub>0</sub> and S<sub>0</sub> modes. It is concluded that in isotropic laminates, dispersion is characteristic of symmetric modes. It is shown that the frequency dependence of the group velocity of Lamb waves of laminar composites can be represented in polynomial form.

**Keywords:** Lamb wave, group velocity dispersion, wavelet analysis, laminar composites.

## ДИСПЕРСІЯ ХВИЛЬ ЛЕМБА У БАГАТОШАРОВИХ СТРУКТУРАХ

Писаренко О. М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація:** З різних доступних підходів структурного моніторингу композитних матеріалів використання хвиль Лемба є дуже цікавим методом через його низьку вартість, онлайн-моніторинг і високу чутливість. Структурний аналіз на основі хвиль Лемба у гетерогенних матеріалах потребує фундаментальних знань про поведінку хвиль у таких матеріалах. Ці базові знання мають вирішальне значення для обробки сигналів при визначенні можливих пошкоджень, які можуть бути виявлені хвилею, що поширюється. Останнім часом методи хвиль Лемба стали використовуватися для одночасного обстеження великої площі композитних конструкцій. Однак такі методи складніші за традиційні ультразвукові випробування, оскільки хвилі мають дисперсійні характеристики, тобто. Швидкість хвилі змінюється в залежності від частоти, мод та товщини пластин. Експериментально виміряні групові швидкості хвиль в композиційних матеріалах з анізотропними характеристиками не збігаються з груповими



теоретичними швидкостями, які розраховуються за допомогою дисперсійного рівняння хвиль Лемба. Ця невідповідність виникає через те, що в анізотропних матеріалах існує кут між напрямком групової швидкості та напрямком фазової швидкості. У цій роботі досліджено характеристики поширення хвиль Лемба в композитах з упором на групову швидкість і характерні хвилеві криві. Для симетричних ламінатів пропонується надійний метод шляхом накладання граничних умов на середню площину та верхню поверхню для поділу симетричних та антисиметричних хвильових мод. Детально теоретично досліджено дисперсійну та анізотропну поведінку хвиль Лемба у двох різних типах симетричних ламінатів. Дисперсія хвиль при поширенні між шарами в ламінарних композитах досліджена для 10 симетричних та асиметричних мод. Показано, що лише основні моди не характеризуються частотою зрізу, що вказує на взаємодію фундаментальних мод із шарами композиту у низькочастотному діапазоні. Виявлено високий рівень дисперсії групової швидкості мод  $SH_0$  і  $S_0$ . Зроблено висновок, що в ізотропних ламінатах дисперсія при поширенні хвильового процесу характерна для симетричних мод. Показано, що частотна залежність групової швидкості хвиль Лемба ламінарних композитів може бути представлена в поліноміальній формі.

**Ключові слова:** хвиля Лемба, дисперсія групової швидкості, вейвлет-аналіз, ламінарні композити.

## 1 INTRODUCTION

Non-destructive testing [1, 2] and structural health monitoring [3, 4] have traditionally been the two main wavelet transform methods for assessing the integrity and degradation of composite systems widely used in construction. Implementation of an active diagnostic procedure that uses ultrasonic waves to detect damage, localize and subsequently evaluate damage involves understanding the propagation characteristics of these waves in composites.

Factors that influence the speed of wave mode propagation include the laminate laying features, wave direction, frequency and interface conditions. The dependence of the wave front speed on frequency leads to the need for a detailed study of the dispersion properties of directed waves propagating along the plane of an elastic composite plate with boundaries free from mechanical stress (Lamb waves).

As a rule, the direction of waves in laminar composites is classified by polarization perpendicular to the composite plate (symmetric *S* waves, antisymmetric *A* waves) and parallel to the plate (shear horizontal *SH* waves).

For waves propagating in multilayer composites, wave interactions depend on the properties of the constituents, geometry, direction of propagation, frequency, and interfacial conditions. If the wavelengths significantly exceed the dimensions of the constituent composites (the diameters of the fibers and the distance between them), each plate can be considered as an equivalent homogeneous orthotropic or transversally isotropic material with an axis of symmetry parallel to the fibers.

## 2 ANALYSIS OF PUBLICATIONS

The study of Lamb waves (wavelet analysis) in composites [5] is most often carried out using two theoretical approaches, namely, exact solutions using three-dimensional elasticity theory and approximate solutions using plate theory.

Saito and Okabe [6] investigated the dispersion relation of Lamb waves propagating in a cross-ply CFRP laminate. Using a formalism of the multi-layer Lamb wave model, they compared a homogeneous single-layer model and multi-layer models.

Liu and Huang [7] examined the effect of inclusion shapes, inclusion contents, inclusion elastic constants, and plate thickness on the dispersion relations and modes of wave propagation in inclusion-reinforced composite plates. They determined the dispersion relations and the modal patterns of Lamb waves using the dynamic stiffness matrix method.

Orta et al. [8] introduced the new computational framework which allows to estimate the dispersion curves for the first nine symmetric and nine anti-symmetric Lamb modes. Analytically calculated dispersion curves using 5-SDT for different propagation directions and polar plots for selected frequency of different materials are compared with the results from both the semi analytical finite element method, and lower order shear deformation theories.

Ma et al. [9] constructed dispersion relations using the formulas of reverberation rays in a three-dimensional Cartesian coordinate, and numerically solved the transcendental equations using an improved mode tracking method.

Peddeti and Santhanam [10] formulated a semi-analytical finite element method (for the acoustoelastic problem of guided waves in weakly nonlinear elastic plates). It was shown that the formulation of this method provides phase velocity dispersion curve results identical to the results obtained for the problem of a plate under uniaxial and uniform tensile stress.

The character of the elastic waves causes that damage detection based on the analysis of the dynamic response of an interrogated structure becomes rather difficult [11, 12].

However, in a relatively small number of studies, dispersions of not phase, but group velocities of Lamb waves are considered [13-17].

So, the knowledge of moduli and group velocity dispersion enables the optimal location of the sensors in order to detect the potential damage.

The purpose of this work is to study the group velocity dispersion of symmetric and antisymmetric Lamb waves in laminar composites with different stacking structures.

### 3 PURPOSE AND OBJECTIVES OF THE STUDY

In general, transition waves propagating in anisotropic composites cause disturbances for all three displacement components. It is necessary to separately analyze the propagation of waves along the symmetry axes, namely, to take into account the splitting of *S*-, *A*- and *SH*-waves. The ultimate goal of the study is to compare the polynomial and exponential forms of the dispersion law for laminar composites. A Cartesian coordinate system is used in which the *z*-axis is perpendicular to the mid-plane of the composite laminate. The distance between the two outer surfaces of the laminate is  $z = \pm d/2$ . Let us consider the case of propagation of a packet of Lamb waves in the direction of  $\delta$ . Each layer of the composite laminate is considered as a monoclinic material with a plane of symmetry (*x* – *y*). The relationship between mechanical stress and deformation takes the following matrix form

$$A_i = G_{ki} D_k, \tag{1}$$

where  $\{(a_i = \sigma_i) \cap (d_k = \varepsilon_k) | i, k \in (x, y, z)\} \cap \{(a_i = \tau_i) \cap (d_k = \gamma_k) | i, k \in (yz, xz, xy)\}$  are the matrices *A* and *D* coefficients; *G* is the stiffness matrix.

The equations of motion in the absence of body forces are governed by

$$\begin{matrix} \dots \\ \sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = \rho \alpha_1 \\ \dots \end{matrix} \tag{2}$$

$$\begin{matrix} \dots \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} = \rho \alpha_2 \\ \dots \end{matrix} \tag{3}$$

$$\begin{matrix} \dots \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} = \rho \alpha_3 \\ \dots \end{matrix} \tag{4}$$

where  $\rho$  is the mass density of the lamina, and dot denotes time derivative;  $\alpha_1, \alpha_2$  and  $\alpha_3$  are the displacements in the *x*, *y* and *z* – directions.

Boundary conditions on the top and bottom surfaces of the laminate

$$\sigma_z = \tau_{x,z} = \tau_{y,z} = 0, \text{ at } z = \pm \delta/2 \tag{5}$$

Lamb waves can be considered as standing waves in the *z*-direction of the plate. The result of this assumption is a model of wave motion in the form of a superposition of plane harmonic waves. Each plane harmonic wave moving in the *k* direction is represented by displacement coefficients

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \{\beta_1(z), \beta_2(z), \beta_3(z)\} \exp\{i(k_x x + k_y y) - \omega t\}, \tag{6}$$

where  $k = [k_x, k_y]^T$  and its magnitude  $k = |k| = \omega / v_p = 2\pi / \lambda$  is the wave number;  $\omega$  is the angular frequency;  $\lambda$  is the wavelength and  $v_p$  is the phase velocity. In the *x*-*y* plane,  $k = k [\cos \eta, \sin \eta]^T$ , where  $\eta$  is the direction of wave propagation.

In an off-axis laminar composite plate, solutions to the equation of motion can be simply separated into symmetric and antisymmetric waves. This consideration allows us to write down a fairly simple analytical representation



$$\begin{aligned} \beta_{1,s} &= E_s \cos z, \beta_{2,s} = F_s \cos z, \beta_{3,s} = G_s \cos z \\ \beta_{1,a} &= E_a \sin z, \beta_{2,a} = F_a \sin z, \beta_{3,a} = G_a \sin z \end{aligned} \quad (7)$$

where  $\mu$  is the variable to be determined by Lamb wave kinematics; subscripts “s” and “a” represent symmetric and antisymmetric modes, respectively.

Substituting equation (7) into the equations of symmetrical wave motion, leads to an expression in matrix form

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} - \rho\omega^2 & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} - \rho\omega^2 & \Lambda_{23} \\ \bar{\Lambda}_{13} & \bar{\Lambda}_{23} & \Lambda_{33} - \rho\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_s \\ F_s \\ G_s \end{Bmatrix} = 0, \quad (8)$$

where the overbar denotes complex conjugation.

The relationship between the elements of matrix  $(\Lambda - \rho\omega^2 I)$  (8), stiffness matrix, and  $3 \times 3$  identity matrix  $I$  have a polynomial form.

Nontrivial solutions  $E_s$ ,  $F_s$  and  $G_s$  in equation (8) lead to the following sixth-order polynomial in  $\mu$

$$\mu^6 + e_1 \mu^4 + e_2 \mu^2 + e_3 = 0, \quad (9)$$

where  $e_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) are real-valued coefficients of  $G_{ij}$ ,  $k$ , and  $\rho\omega^2$ .

For each fixed  $\mu_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), solutions  $E_s$ ,  $F_s$  and  $G_s$  are interrelated according to the equations

$$B_s = \frac{(\Lambda_{11} - \rho\omega^2)\Lambda_{23} - \Lambda_{12}\Lambda_{13}}{\Lambda_{13}(\Lambda_{22} - \rho\omega^2) - \Lambda_{12}\Lambda_{23}} E_s = RE_s \quad (10)$$

$$G_s = \frac{\Lambda_{12}^2 - (\Lambda_{11} - \rho\omega^2)(\Lambda_{22} - \rho\omega^2)}{\Lambda_{13}(\Lambda_{22} - \rho\omega^2) - \Lambda_{12}\Lambda_{23}} E_s = iSE_s. \quad (11)$$

Antisymmetric modes make it possible to obtain similar relations:  $F_a = RE_a$  and  $G_a = -iSE_a$ .

Equations (5), (7), (10), and (11) can be rearranged as

$$\begin{aligned} (\sigma_z, \tau_{yz}, \sigma_{xz}) \Big|_{z=\delta/2} &= \sum_{j=1}^3 \left[ H_{1j} \sin(\mu_j z + \varphi), H_{2j} \cos(\mu_j z + \varphi), \right. \\ &\left. H_{3j} \cos(\mu_j z + \varphi) \right] A_j = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

where phases  $\varphi = 0$  and  $\varphi = \pi/2$  correspond to symmetrical and asymmetrical Lamb wave modes, respectively, and

$$H_{1j} = G_{13}k_x + G_{23}k_y R_j + G_{33}\mu_j S_j + G_{36}(k_y + k_x R_j) \quad (13)$$

$$H_{2j} = G_{44}(\mu_j R_j + k_y S_j) + G_{45}(\mu_j + k_x S_j) \quad (14)$$

$$H_{3j} = G_{45}(\mu_j R_j + k_y S_j) + G_{55}(\mu_j + k_x S_j). \quad (15)$$

The simplified Lamb wave propagation model assumes ideal coupling between layers of the laminated composite in the  $z$ -direction. Accounting for laminate heterogeneity requires an exponential change in the displacement components

$$\beta_1 = E \exp(i\mu z), \beta_2 = F \exp(i\mu z), \beta_3 = -G \exp(i\mu z). \quad (16)$$

For each  $\mu_i$ , values  $F$  and  $G$  can be expressed in terms of  $E$  as  $F_i = R_i E_i$  and  $G_i = -S_i E_i$  ( $i = \overline{1,6}$ ). In addition,  $R_{j+1} = R_j$  and  $S_{j+1} = -S_j$ .

Finally, the equation of motion for each layer is

$$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \exp\left\{i\left[(k_x x + k_y y) - \omega t\right]\right\} \sum_{j=1}^6 E_j \{1, R_j, S_j\} \exp(i\mu_j z). \quad (17)$$

The stress components  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$  and  $\tau_{xz}$  between adjacent composite layers can be expressed as

$$\{\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}\} = i k \exp\left\{i\left[(k_x x + k_y y) - \omega t\right]\right\} \sum_{j=1}^6 E_j \{H_{1j}, H_{2j}, H_{3j}\} \exp(i\mu_j z). \quad (18)$$

By imposing displacement and stress continuity conditions along the interfaces between laminate layers. The solution of equation (18) leads to the dispersion relations of Lamb waves in symmetrical laminates.

Implicit functional forms  $J(\omega, k) = 0$  and  $J(\omega, k, \eta) = 0$  allow us to represent the dispersion relation between  $\omega$  and  $k$ . These relations can be solved explicitly in the form of real roots of  $\omega = \Omega(k)$ , or  $\omega = \Omega(k, \eta)$ .

The phase velocity of plane waves is defined as

$$v_p = \left(\frac{\omega}{k}\right) \frac{k}{|k|} = \left(\frac{\omega}{k^2}\right) k. \quad (19)$$

The group velocity, determined from the envelopes of the wave packet, can be calculated using the implicit function  $G$

$$v_g = -\frac{\partial J / \partial k}{\partial J / \partial \omega} \quad (20)$$

Cartesian projections of group velocity are determined by  $grad_k \Omega$

$$\begin{Bmatrix} v_{gx} \\ v_{gy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \eta & -\sin \eta \\ \sin \eta & \cos \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial \Omega / \partial k \\ \partial \Omega / k \partial \eta \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

The current point on the wave-front curve represents the distance traveled by the elastic disturbance per unit time. Thus, the wave-front curve determines the location of the wave-front per unit time from the disturbance emitted by the point source at the initial time. Thus, waveforms are of great importance for detecting mechanical damage in laminar composites.

The relationship between the slowness curve and the direction of the group velocity allows wave curves to be calculated. The dispersion law of each Lamb wave mode can be expressed as an explicit function of  $\Omega(k, \eta)$ . The slowness curve is geometrically a level surface of  $\Omega(k, \eta)$  at  $\Omega_0(k, \eta) = \omega_0$ . Differentiating both sides of the equation with respect to  $\eta$  yields

$$\frac{\partial \Omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \eta} + \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = 0. \quad (22)$$

The group velocity dispersion for a given direction of wave propagation  $\eta_1$  can be obtained by using two dispersion relations  $\omega = \Omega(k, \eta)$ , the directions of which differ slightly  $\eta_1 \pm \Delta\eta/2$ . Then derivative term  $\partial\Omega/\partial\eta$  can be approximated by finite central difference

$$\left. \frac{\partial\Omega}{\partial\eta} \right|_{\eta=\eta_1} \cong \frac{\Omega(k) \Big|_{\eta_1+\Delta\eta/2} - \Omega(k) \Big|_{\eta_1-\Delta\eta/2}}{\Delta\eta} \tag{23}$$

The dispersion contribution  $\partial\Omega/\partial k$  can be calculated using the calculation formula

$$\left. \frac{\partial\Omega}{\partial k} \right|_{\omega=\omega_1} \cong \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2(\eta) - k_1(\eta)}$$

#### 4 RESEARCH RESULTS

The laminated composite material used in this study was characterized by the following properties: tensile stiffness  $E_1 = 1.276 \cdot 10^{11}$  Pa,  $E_2 = E_3 = 1.13 \cdot 10^{10}$  Pa; shear moduli  $G_{12} = 5.97 \cdot 10^9$  Pa;  $G_{13} = 5.97 \cdot 10^9$  Pa;  $G_{23} = 5.97 \cdot 10^9$  Pa; Poisson's ratios  $\nu_{12} = 0.3$ ,  $\nu_{13} = 0.3$ ;  $\nu_{23} = 0.34$ ; density  $\rho = 1.578 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>; stacking sequences  $[+45_6/-45_6]_s$  (specimen  $A_1$ ),  $[+45/-45/0/90]_s$  (specimen  $A_2$ ).

Spectral dependences of the dimensionless group velocity  $\nu'_g = \nu_g/\nu_T$  for fixed values of the dimensionless frequency  $f' = \omega\delta/\nu_T$  along the  $\theta$  direction of laminates  $A_1$  and  $A_2$  are given in Tables 1 - 4. The value  $\nu_T$  defined as  $(G_{12}/\rho)^{0.5}$  is the transverse wave velocity in lamina (associated with shear in plane).

**Table 1**

Spectral profile of Lamb waves for laminate  $A_1$   
 (symmetric modes)

$f'$	$\nu'_g$		$f'$	$\nu'_g$		
	$S_0$	$SH_0$		$S_1$	$S_2$	$SH_2$
0.5	3.325	2.384	5.0	0.962	0.001	0.001
1.0	3.218	2.321	5.6	0.921	0.002	0.003
1.5	3.085	2.305	6.2	0.824	1.512	1.264
2.0	2.798	2.208	6.8	0.841	2.358	1.587
2.5	2.237	2.126	7.4	0.935	2.857	1.698
3.0	1.749	2.111	8.0	1.045	3.042	1.762
4.0	0.387	1.564	8.6	1.018	3.110	1.852
5.0	1.400	0.631	9.2	1.089	3.043	1.964
6.0	1.310	0.735	9.5	1.088	3.002	1.993
7.0	1.182	0.786	10.1	1.070	2.804	2.057
8.0	1.087	0.811	10.8	0.993	2.220	2.125
9.0	1.010	0.832	11.4	0.968	0.995	2.173
10.0	1.000	0.846	12.0	0.970	0.484	2.186



**Table 2**

Spectral profile of Lamb waves for laminate  $A_1$   
 (asymmetrical modes)

$f'$	$\nu'_g$	$f'$	$\nu'_g$	$f'$	$\nu'_g$		
	$A_0$		$A_1$		$A_2$	$A_3$	$SH_3$
0.5	0.651	2.5	1.882	8.5	0.593	0.003	0.001
1.0	0.847	2.9	2.456	8.6	0.612	0.227	0.001
1.5	0.851	3.3	2.614	8.7	0.715	0.418	0.002
2.0	0.856	3.7	2.913	8.8	0.783	0.623	0.003
2.5	0.623	4.1	3.111	8.9	0.805	0.701	0.003
3.0	0.678	4.5	3.152	9.0	0.890	0.862	0.004
3.5	0.699	4.9	3.112	9.1	0.904	0.871	0.125
4.0	0.734	5.3	3.087	9.2	0.928	0.885	0.364
4.5	0.790	5.7	2.924	9.3	0.957	0.889	0.541
5.0	0.802	6.1	2.631	9.4	0.981	0.896	0.683
5.5	0.813	6.5	2.185	9.5	1.061	0.900	0.754
6.0	0.845	6.9	1.598	9.6	1.082	0.882	0.974
6.5	0.887	7.3	1.273	9.7	1.106	0.874	1.116
7.0	0.902	7.7	0.832	9.8	1.125	0.856	1.277
7.5	0.883	8.1	0.401	9.9	1.143	0.830	1.452
8.0	0.879	8.5	0.368	10.0	1.162	0.795	1.5833
8.5	0.872	8.9	0.420	10.1	1.175	0.791	1.986
9.0	0.870	9.3	0.468	10.2	1.188	0.784	2.178
9.5	0.868	9.7	0.502	10.3	1.205	0.781	2.376
10.0	0.867	10.2	0.539	10.7	1.203	0.791	2.715

**Table 3**

Spectral profile of Lamb waves for laminate  $A_2$   
 (symmetric modes)

$f'$	$\nu'_g$		$f'$	$\nu'_g$		
	$S_0$	$SH_0$		$S_1$	$S_2$	$SH_2$
0.5	3.042	1.803	5.0	1.527	0.041	0.005
1.0	3.005	1.752	5.6	1.832	1.184	0.679
1.5	2.910	1.685	6.2	1.709	0.913	1.563
2.0	2.805	1.599	6.8	1.564	1.286	2.037
2.5	2.609	1.485	7.4	1.301	1.701	2.311
3.0	2.308	1.361	8.0	1.105	1.723	2.325
4.0	0.726	1.100	8.6	0.984	1.600	2.297
5.0	0.948	0.556	9.2	0.826	1.417	2.137
6.0	0.911	0.674	9.5	0.794	1.284	2.000
7.0	0.926	0.725	10.1	0.731	1.142	1.806
8.0	0.937	0.792	10.8	0.701	0.984	1.658
9.0	0.945	0.805	11.4	0.702	0.900	1.052
10.0	0.954	0.815	12.0	0.704	0.898	0.854

**Table 4**

Spectral profile of Lamb waves for laminate  $A_2$   
 (asymmetrical modes)

$f'$	$\nu'_{g,A_0}$	$f'$	$\nu'_{g,A_1}$	$f'$	$\nu'_{g,A_2}$		
	$A_0$		$A_1$		$A_2$	$A_3$	$SH_3$
0.5	0.898	2.5	1.218	8.5	0.924	0.003	0.002
1.0	0.898	2.9	1.530	8.6	0.895	0.008	0.164
1.5	0.897	3.3	1.809	8.7	0.861	0.012	0.308
2.0	0.897	3.7	2.184	8.8	0.837	0.016	0.407
2.5	0.897	4.1	2.394	8.9	0.820	0.021	0.593
3.0	0.896	4.5	2.426	9.0	0.815	0.028	0.699
3.5	0.895	4.9	2.385	9.1	0.793	0.089	0.715
4.0	0.894	5.3	2.288	9.2	0.765	0.187	0.805
4.5	0.894	5.7	2.235	9.3	0.737	0.352	0.881
5.0	0.893	6.1	1.980	9.4	0.718	0.605	0.973
5.5	0.893	6.5	1.684	9.5	0.694	0.831	1.113
6.0	0.893	6.9	1.295	9.6	0.711	0.927	1.188
6.5	0.892	7.3	1.064	9.7	0.725	1.164	1.246
7.0	0.892	7.7	0.845	9.8	0.740	1.235	1.358
7.5	0.891	8.1	0.555	9.9	0.756	1.380	1.455
8.0	0.891	8.5	0.485	10.0	0.768	1.486	1.557
8.5	0.891	8.9	0.316	10.1	0.773	1.604	1.618
9.0	0.890	9.3	0.484	10.2	0.791	1.728	1.735
9.5	0.890	9.7	0.587	10.3	0.804	1.872	1.882
10.0	0.890	10.2	0.615	10.7	0.809	1.914	1.912

## 5 DISCUSSION OF RESEARCH RESULTS

Five symmetric (Tables 1 and 3) and five asymmetric (Tables 2 and 4) modes illustrate the dispersion of Lamb waves curves in the layered composites  $A_1$  and  $A_2$ . The analysis showed that only the fundamental modes ( $A_0$ ,  $S_0$  and  $SH_0$ ) are not characterized by a cutoff frequency. This fact indicates the interaction of fundamental modes with composite layers in the low-frequency range. The frequency  $\omega' = x\delta/\nu_T$  can be considered as the boundary frequency for  $SH_0$  and  $S_0$  modes, which have low dispersion in the range  $\omega < \omega'$ .

The calculation results show that the  $A_0$  mode provides higher resolution than the  $S_0$  and  $SH_0$  modes. One of the reasons can be pointed to the fact that the  $A_0$  mode wavelength is always shorter than that of the  $S_0$  mode, especially in the low frequency range. Lamb wave propagation in a relatively thick symmetrical corner laminate  $(+45_6/-45_6)_s$  for the high frequency range has a rather complex behaviour.

The  $SH_0$  and  $S_0$  modes are characterized by a fairly high level of group velocity dispersion. Analysis of the numerical data allows us to conclude that there is a higher level of symmetric mode dispersion for the quasi-isotropic laminate  $A_2 (+45/-45/0/90)_s$ . On the other hand, the dispersion of the antisymmetric wave mode  $A_0$  in both laminates is weaker for  $\omega' \neq 1$ .

The results of calculations of group velocity dispersion surfaces for wave modes in the laminar composites used make it possible to represent the polynomial dependence

$\nu'_{g,i} = \nu'_{g,i}(f')$  in matrix form

$$\nu'_{g,i} = d_{ik} (f')^k, k = 1, \dots, 5, i \in (S_{0,A_1}, S_{0,A_2}, SH_{0,A_1}, SH_{0,A_2})$$

$$d_{ik} = \begin{pmatrix} 0,076 & -0,631 & 1,467 & -1,514 & 3,798 \\ -0,009 & 0,182 & -1,096 & 1,813 & 2,264 \\ -0,004 & 0,092 & -0,0637 & 1,231 & 1,759 \\ -0,002 & 0,047 & -0,307 & 0,0469 & 1,584 \end{pmatrix}.$$

## 6 CONCLUSIONS

Exact solutions of Lamb waves in a plate can be established on the basis of three-dimensional elasticity theory and subsequently extended to a laminate with an arbitrary structure. For symmetrical laminates, a reliable wave mode separation method is used. A numerical method for obtaining group velocity dispersions and wave curves is proposed. The dispersions and characteristic wave curves of Lamb waves are analyzed for two types of laminates. The proposed methods effectively model the dispersive and anisotropic behavior of Lamb waves in laminates. It was found that the  $A_0$  mode has the best characteristics for structural monitoring of laminar composites.

The speed of propagation of multi-frequency components within the wave packet remains almost unchanged, which causes only slight deformation of the wave packet shape when moving in the composite layers. In addition, the significantly low attenuation of  $A_0$  mode and high sensitivity to the growth of delamination in the sample indicate the practical value of using symmetric modes as a diagnostic tool.

## 7 ETHICAL DECLARATIONS

The author has no relevant financial or non-financial interests to report.

## References

1. Gholizadeh S. A review of non-destructive testing methods of composite materials. *Procedia Structural Integrity*. 2016. 1. P. 50–57. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2016.02.008>
2. Dwivedli S.K. et al. Advances and Researches on Non Destructive Testing: A Review. *Materials Today: Proceedings*. 2018. 5(2-1). P. 3690–3698. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.11.620>
3. Metaxa S. et al. A review of structural health monitoring methods for composite materials. *Procedia Structural Integrity*. 2019. 22. P. 369–375. <https://doi.org/10.1016/j.prost.2020.01.046>
4. de Mederious R. et al. Structural health monitoring for impact damaged composite: a new methodology based on combination of techniques. *Structural Health Monitoring*. 2018. 17(2). P. 185–200. <https://doi.org/10.1177/147592171668844>
5. Pysarenko A.M. Analysis of energy criteria for wavelet transforms in composite structures. *SWorldJournal*. 2024. 24(2). P. 55–59. <https://doi.org/10.30888/2663-5712.2024-24-00-054>.
6. Saito O. et al. Dispersion relation of Lamb waves in cross-ply composite laminates using multi-layered models. *Composite Structures*. 2021. 264. P. 113691. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113691>
7. Liu Y.-Ch., and Huang J.H. Dispersion relations and modes of wave propagation in inclusion-reinforced composite plates. *Composites Part B: Engineering*. 2012. 43(3). P. 1649–1657. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.01.018>
8. Orta A.H. et al. Modeling lamb wave propagation in visco-elastic composite plates using a fifth-order plate theory. *Ultrasonics*. 2021. 116. P. 106482. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2021.106482>
9. Ma Z. et al. Dispersiom analysis of Lamb waves in composite laminates based on reverberation-ray matrix method. *Composite Structures*. 2016. 136. P. 419–429. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.10.036>
10. Peddetti K., and Santhanam S. Dispersion curves for Lamb wave propagation in prestressed plates using a semi-analytical finite element analysis. *Journal of the Acoustical Society of America*. 2018. 143. P. 829–840. <https://doi.org/10.1121/1.5023335>

11. Su Z. et. al. Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures: A review. *Journal of Sound and Vibration*. 2006. 295(3-5). P. 753–780. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.01.020>
12. Memmolo V. et al. Experimental characterization of a damage detection and localization system for composite structures. *Measurement*. 2018. 129. P. 381–388. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2018.07.032>
13. Wang L., and Yuan F.G. Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites: Modelling and experiments. *Composites Science and Technology*. 2007. 67. P. 1370–1384. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2006.09.023>
14. Weber R. et al. Numerical simulation of the guided Lamb wave propagation in particle reinforced composites. *Composite Structures*. 2012. 94(10). P. 3064–3071. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.04.020>
15. Muc A. et al. Dispersion curves and identification of elastic wave modes for fiber metal laminates. *Composite Structures*. 2021. 255. P. 112930. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112930>
16. Rauter N., and Lammering R. Impact Damage Detection in Composite Structures Considering Nonlinear Lamb Wave Propagation. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2015. 22(1-2). P. 44–51. <https://doi.org/10.1080/15376494.2014.907950>
17. Rhee S.-H. et al. The group velocity variation of Lamb wave in fiber reinforced composite plate. *Ultrasonics*. 2007. 47(1-4). P. 55–63. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2007.07.005>

## Література

1. Gholizadeh S. (2016) A review of non-destructive testing methods of composite materials. *Procedia Structural Integrity*. 1. 50–57.
2. Dwivedli S.K. et al. (2018) Advances and Researches on Non Destructive Testing: A Review. *Materials Today: Proceedings*. 5(2-1). 3690–3698.
3. Metaxa S. et al. (2019) A review of structural health monitoring methods for composite materials. *Procedia Structural Integrity*. 22. 369–375.
4. de Mederious R. et al. (2018) Structural health monitoring for impact damaged composite: a new methodology based on combination of techniques. *Structural Health Monitoring*. 17(2). 185–200.
5. Pysarenko A.M. (2024) Analysis of energy criteria for wavelet transforms in composite structures. *SWorldJournal*. 24(2). P. 55–59.
6. Saito O. et al. (2021) Dispersion relation of Lamb waves in cross-ply composite laminates using multi-layered models. *Composite Structures*. 264. 113691.
7. Liu Y.-Ch., and Huang J.H. (2012) Dispersion relations and modes of wave propagation in inclusion-reinforced composite plates. *Composites Part B: Engineering*. 43(3). 1649–1657.
8. Orta A.H. et al. (2021) Modeling lamb wave propagation in visco-elastic composite plates using a fifth-order plate theory. *Ultrasonics*. 116. 106482.
9. Ma Z. et al. (2016) Dispersiom analysis of Lamb waves in composite laminates based on reverberation-ray matrix method. *Composite Structures*. 136. 419–429.
10. Peddeti K., and Santhanam S. (2018) Dispersion curves for Lamb wave propagation in prestressed plates using a semi-analytical finite element analysis. *Journal of the Acoustical Society of America*. 143. 829–840.
11. Su Z. et. al. (2006) Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures: A review. *Journal of Sound and Vibration*. 295(3-5). 753–780.
12. Memmolo V. et al. (2018) Experimental characterization of a damage detection and localization system for composite structures. *Measurement*. 129. P. 381–388.
13. Wang L., and Yuan F.G. (2007) Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites: Modelling and experiments. *Composites Science and Technology*. 67. 1370–1384.
14. Weber R. et al. (2012) Numerical simulation of the guided Lamb wave propagation in particle reinforced composites. *Composite Structures*. 94(10). 3064–3071.
15. Muc A. et al. (2021) Dispersion curves and identification of elastic wave modes for fiber metal laminates. *Composite Structures*. 255. 112930.

16. Rauter N., and Lammering R. (2015) Impact Damage Detection in Composite Structures Considering Nonlinear Lamb Wave Propagation. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 22(1-2). 44–51.
17. Rhee S.-H. et al. (2007) The group velocity variation of Lamb wave in fiber reinforced composite plate. *Ultrasonics*. 47(1-4). 55–63.

**Alexander Pysarenko**

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Ph.D., Associate Professor  
Didrihsona str., 4, Odesa, Ukraine, 65029  
[pysarenkoan@gmail.com](mailto:pysarenkoan@gmail.com),  
ORCID: 0000-0001-5938-4107

*For references:*

O. Pysarenko. (2024). Dispersion of Lamb waves in multilayer structures. *Mechanics and Mathematical Methods*. VI (2). 124–135.

*Для посилань:*

Писаренко О. М. Дисперсія хвиль Лемба у багатошарових структурах. *Механіка та математичні методи*, 2024. Т. VI. № 2. с. 124-135.



УДК 519.854.4

## РОЗРОБКА АДАПТИВНИХ АЛГОРИТМІВ РОЄВОГО ІНТЕЛЕКТУ У ПРОЕКТУВАННІ ТА УПРАВЛІННІ ІНЖЕНЕРНИМИ СИСТЕМАМИ

Кирилов С. О<sup>1</sup>., Сікора Я. Б<sup>2</sup>., Рябчун Ю. В<sup>3</sup>.

<sup>1</sup>Одеський національний економічний університет

<sup>2</sup>Житомирський державний університет імені Івана Франка

<sup>3</sup>Київський національний університет будівництва і архітектури

**Анотація:** У статті розглядаються питання проектування та управління інженерними системами в умовах зростання обсягів даних у локальних обчислювальних мережах. З розвитком роєвого інтелекту ймовірність існування необхідної інформації для управління інженерними системами збільшується, але можливість її знаходження зменшується. Це створює необхідність у розробці нових методів та інструментальних засобів для використання адаптивних алгоритмів роєвого інтелекту. Метою таких алгоритмів є забезпечення можливості обробки інформації та пошуку запитів з максимальною релевантністю, генеруючи якнайбільшу кількість результатів пошуку (SERP), що містять технічну інформацію. Розвиток алгоритмів роєвого інтелекту неможливий без їхньої інтелектуалізації, яка включає семантико-синтаксичний аналіз текстів, природно-мовні засоби та інтелектуальні алгоритми визначення значущості інформаційних ресурсів. У системах цифрового пошуку інформації (DIRS) запит формується у вигляді ключових слів або їх комбінацій, пов'язаних логічними операціями. Для пошуку однієї і тієї ж інформації використовуються різні ключові слова, вибір яких є суб'єктивним. Перший етап алгоритму полягає у визначенні множини змістовних відповідностей і формуванні вихідної множини запитів в межах інженерної системи. Для забезпечення повноти вибору розглядається сумарна релевантність SERP по відношенню до групи критеріїв значущості. Виникає необхідність у розробці ефективного нейромережевого алгоритму для розв'язання задачі призначення кожній групі критеріїв запиту однієї SERP. Це дозволить розподілити SERP за групами критеріїв так, щоб кожна сторінка оцінювалася переважно однією групою критеріїв, і сумарна релевантність за всіма групами була максимальною. Таким чином, стаття підкреслює важливість розробки нових методів та інструментальних засобів для впровадження адаптивних алгоритмів роєвого інтелекту в інженерних системах. Особливу увагу приділено розробці ефективних нейромережевих алгоритмів, які забезпечать оптимальний розподіл релевантності пошукових сторінок, що підвищить точність та ефективність пошуку інформації в складних інженерних системах.

**Ключові слова:** роєвий інтелект, інженерна система, обчислювальна мережа, адаптивні алгоритми, матриця продуктивностей, нейроподібні моделі.

## DEVELOPMENT OF ADAPTIVE ALGORITHMS OF SWARM INTELLIGENCE IN DESIGN AND MANAGEMENT OF ENGINEERING SYSTEMS

S. Kyrylov<sup>1</sup>, Ya. Sikora<sup>2</sup>, Yu. Riabchun<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Odesa National Economic University*

<sup>2</sup>*Zhytomyr State Ivan Franko University*

<sup>3</sup>*Kyiv National University of Construction and Architecture*

**Abstract:** The article examines the design and management of engineering systems in the context of growing data volumes in local computer networks. With the development of swarm intelligence, the probability of the existence of the necessary information for managing engineering systems increases, but the possibility of finding it decreases. This creates the need to develop new methods and tools for using adaptive algorithms of swarm intelligence. The purpose of such algorithms is to ensure the ability to process information and find queries with maximum relevance, generating the largest number of search results (SERPs) containing technical information. The development of swarm intelligence algorithms is impossible without their intellectualization, which includes semantic and syntactic analysis of texts, natural language tools, and intelligent algorithms for determining the significance of information resources. In digital information retrieval systems (DIRS), a query is formed in the form of keywords or their combinations, connected by logical operations. To search for the same information, different keywords are used, the choice of which is subjective. The first stage of the algorithm consists in determining the set of meaningful correspondences and forming the initial set of requests within the engineering system. To ensure the completeness of the selection, the total relevance of the SERP in relation to the group of significance criteria is considered. There is a need to develop an efficient neural network algorithm to solve the problem of assigning one SERP to each group of query criteria. This will make it possible to distribute SERPs by criteria groups so that each page is evaluated mainly by one criteria group, and the total relevance of all groups is maximized. Thus, the article emphasizes the importance of developing new methods and tools for implementing adaptive swarm intelligence algorithms in engineering systems. Special attention is paid to the development of effective neural network algorithms that will ensure optimal distribution of the relevance of search pages, which will increase the accuracy and efficiency of information search in complex engineering systems.

**Keywords:** swarm intelligence, engineering system, computing network, adaptive algorithms, performance matrix, neuro-like models.

## 1 ВСТУП

Сучасні інженерні системи стають все більш складними та динамічними. Вимоги до їх продуктивності, надійності та ефективності зростають, що формує потребу у нових підходах до проектування та управління цими системами. Традиційні алгоритми не завжди можуть ефективно справлятися зі змінами в середовищі або вимогами до систем і саме тому адаптивні алгоритми, які можуть змінювати свою поведінку в залежності від умов, дозволяють більш ефективно вирішувати завдання в динамічних середовищах.

Концепція роєвого інтелекту, яка базується на поведінці колективів біологічних організмів (наприклад, мурах або птахів), є перспективним підходом для розробки адаптивних алгоритмів. Використання роєвого інтелекту дозволяє створювати розподілені, гнучкі та стійкі системи управління. У багатьох сферах, таких як робототехніка, енергетика, транспорт та інші, інженерні системи потребують ефективних методів управління для підвищення продуктивності та зниження витрат і розробка нових алгоритмів на основі роєвого інтелекту може значно покращити ці процеси. Впровадження адаптивних алгоритмів роєвого інтелекту у проектування та управління інженерними системами має великий потенціал для підвищення їх ефективності, надійності та стійкості, що призводить до покращення роботи існуючих систем та створення нових, більш досконалих рішень. Таким чином, дослідження з розробки адаптивних алгоритмів роєвого інтелекту є надзвичайно актуальним та важливим для розвитку сучасних інженерних систем і має значний потенціал для практичного застосування у різних галузях.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

У сучасних наукових дослідженнях роєвий інтелект займає важливе місце як перспективний підхід для розв'язання складних задач у різних галузях. Адаптивні алгоритми мають здатність змінювати свою поведінку відповідно до змін у навколишньому середовищі. У контексті роєвого інтелекту, адаптивні алгоритми дозволяють системам ефективніше реагувати на динамічні зміни [1, 5]. Наприклад, у дослідженні [15] було показано, що адаптивні варіанти АСО можуть значно підвищити продуктивність у задачах з динамічними обмеженнями.

Роєвий інтелект знаходить широке застосування в різних інженерних системах. У робототехніці, алгоритми роєвого інтелекту використовуються для координації руху автономних роботів. У дослідженні [12] було показано, що використання PSO дозволяє ефективно планувати маршрути для групи роботів у складних середовищах. В енергетичній галузі, зокрема в управлінні розподіленими енергетичними ресурсами, алгоритми роєвого інтелекту застосовуються для оптимізації розподілу навантажень та мінімізації втрат енергії [10]. Незважаючи на значні досягнення, застосування роєвого інтелекту в інженерних системах стикається з низкою викликів. Одним з головних є питання масштабованості, оскільки збільшення кількості агентів може призвести до зростання обчислювальної складності. Також важливою проблемою є забезпечення стійкості системи до збоїв окремих агентів. У дослідженні [2] було запропоновано декілька підходів для підвищення стійкості роєвих систем, включаючи використання резервних агентів та адаптивних стратегій відновлення.

Таким чином, літературний огляд показує, що розробка адаптивних алгоритмів роєвого інтелекту є актуальним та перспективним напрямком досліджень, який має великий потенціал для покращення ефективності та надійності інженерних систем. Подальші дослідження в цій галузі можуть привести до створення нових, більш досконалих алгоритмів та їх успішного застосування у різних галузях техніки та промисловості.

### 3 ЦІЛІ ТА ЗАВДАННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою статті є розробка адаптивних алгоритмів розумного інтелекту, які можуть бути ефективно застосовані у проектуванні та управлінні інженерними системами.

Завдання дослідження: доповнити алгоритми елементи семантико-синтаксичного аналізу текстів та природно-мовні засоби для покращення обробки інформації; розробити моделі інженерних систем, які будуть використовувати адаптивні алгоритми розумного інтелекту для оптимізації роботи систем; визначити критерії значущості та релевантності для оцінки ефективності алгоритмів.

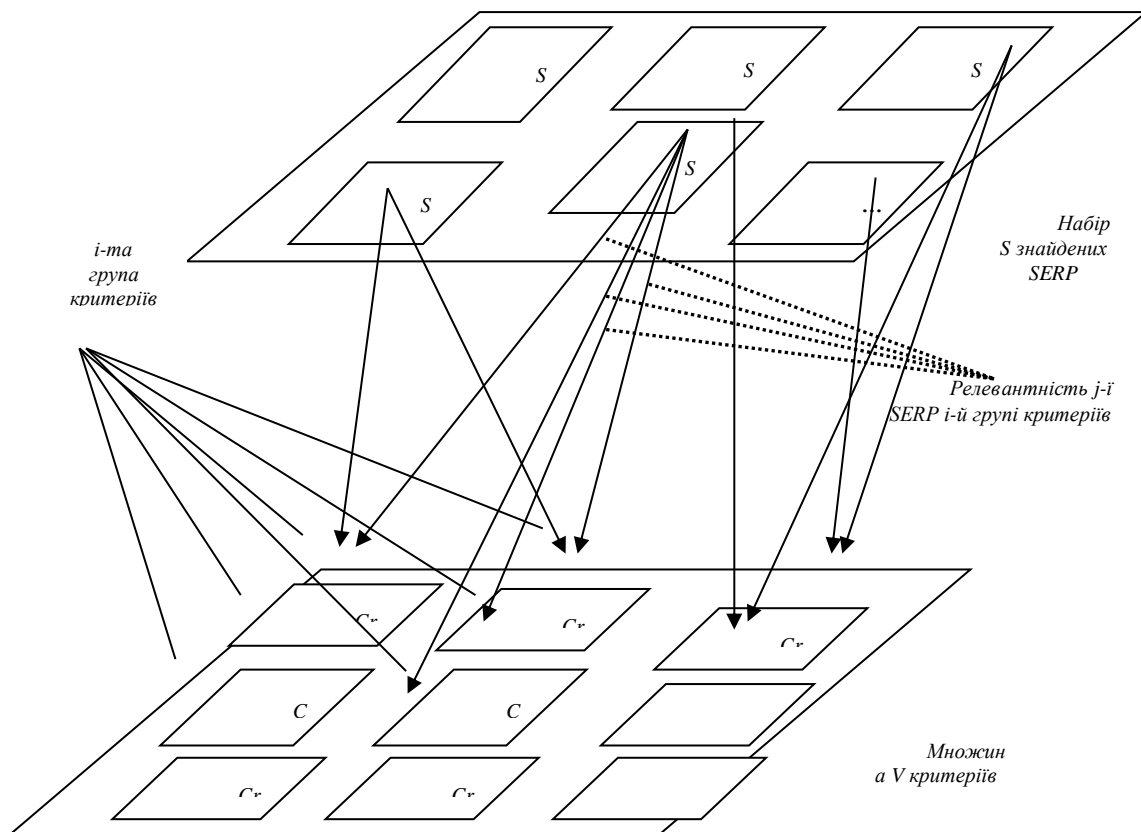
### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

В процесі розвитку розумного інтелекту і зростання обсягів даних локальних обчислювальних мереж ймовірність існування потрібної інформації для управління інженерними системами зростає, а можливість її знаходження зменшується. Належний алгоритм проектування та управлінні інженерними системами стає спільною проблемою. Потрібні нові методи та інструментальні засоби, які вирішують проблеми розробки і використання адаптивних алгоритмів розумного інтелекту. Метою розумного інтелекту є розгортання алгоритму розумного інтелекту (digital information retrieval systems (DIRS) і надання проектувальнику інженерних систем можливості обробки інформації та пошуку запитів (search engine results page (SERP), в максимальному ступені відповідні змісту особистого запиту (забезпечити релевантність – точність проектування), при цьому, генерувати якомога більшу кількість SERP, що містять технічну інформацію.

Розвиток алгоритму розумного інтелекту неможливий без їхньої інтелектуалізації, що включає застосування семантико-синтаксичного аналізу текстів, природно-мовних засобів, інтелектуальних алгоритмів визначення значущості та інформаційних ресурсів для проектувальника, отримання додаткової інформації про документи шляхом аналізу структури адаптивного алгоритму розумного інтелекту у проектуванні та управлінні інженерними системами. У DIRS запит формується у вигляді ключового слова або комбінації ключових слів, пов'язаних логічними операціями. Для пошуку однієї і тієї ж текстової інформації використовуються різні ключові слова, вибір яких суб'єктивний [3].

Перший етап полягає у визначенні множини 'AI' змістовних відповідностей і формування вихідної множини запитів в межах інженерної системи – тривіальний і в основному, залежить від особливостей тих або інших DIRS. Сформовану множину змістовних відповідностей позначимо як множина 'V' критеріїв значущості (важливості пошукових запитів) DIRS при генерації SERP,  $V = \{v_u\}$ ,  $u = 1, \dots, U$ ;  $U$  – загальна кількість критеріїв значущості запиту в DIRS. Нехай в результаті запиту знайдено множину  $D$  розумних елементів пошуку  $\{d_j\}$ ,  $j = 1, \dots, M$ , де  $M$  – загальна кількість станиць знайдених DIRS на один пошуковий запит. Кожен документ  $d_j$ ,  $j = 1, \dots, M$  відповідно до кожного критерію  $v_u$ ,  $u = 1, \dots, U$ , володіє певною релевантністю  $r_{uj}$ ,  $u = 1, \dots, U$ ,  $j = 1, \dots, M$ . Із заданої множини  $M$  розумних елементів пошуку необхідно сформуувати набір з  $S$  розумних елементів, при якому сумарна  $S$  є

$\sum_{u=1}^U \sum_{j=1}^S r_{uj}$  релевантною: за всіма критеріями значущості буде максимальною [7]. Для забезпечення повноти вибору з множини альтернатив будемо розглядати сумарну релевантність  $r_{ij}$  у будь-якій SERP  $d_j$  по відношенню до групи всіляких поєднань критеріїв  $v_u$  (рисунок 1).



**Рис. 1.** Група критеріїв роєвого алгоритму в DIRS

Нехай  $i$ -у групу критеріїв запиту DIRS складають  $k$  критеріїв з  $U$ , де  $U$  – загальна кількість критеріїв значущості запиту в DIRS. Кількість варіантів почергового вибору  $k$  критеріїв з  $U$  становить  $\frac{U!}{(U-k)!}$ . У сформованих підмножинах з  $k$  критеріїв, кожна група має свою певну позицію. Однак, від перестановок критеріїв в просторі, що покривається підмножині, номер відповідного документа не змінюється.

Кількість підмножин з різними потужностями становить  $U$ . Тому максимальна кількість груп критеріїв значущості запиту (або робіт в термінах задачі про призначення) буде становити [4]

Кількість підмножин з різними потужностями становить  $U$ . Тому максимальна кількість груп критеріїв значущості запиту (або робіт в термінах задачі про призначення) буде становити [4]

$$N = \frac{\sum_{k=1}^U U!}{k!(U-k)!}, \quad (1)$$

де  $U$  – загальна кількість критеріїв значущості запиту в DIRS.

У зв'язку з цим виникає необхідність в розробці ефективного і швидкого нейромережевого алгоритму розв'язання задачі про призначення кожній групі критеріїв запиту однієї SERP з набору  $S$ , до якої зводиться задача ранжованого представлення знайдених DIRS елементів. На другому етапі реалізації методу ранжування необхідно так розподілити SERP за групами критеріїв, щоб кожна сторінка оцінювалася, переважно, однією групою критеріїв, кожна група критеріїв оцінювала, переважно, одну сторінку, і сумарна релевантність SERP за всіма комбінаторними групами критеріїв значущості DIRS була максимальною [14].

Позначимо через  $R = \|r_{ji}\| - N \times M$  матрицю продуктивностей (табл. 1), елементи якої  $r_{ji}$  формують релевантність документа з номером  $j$  відносно групи критеріїв з номером  $i$ , причому,  $M$  – загальна кількість SERP знайдених DIRS,  $N$  – загальна кількість комбінаторних груп критеріїв значущості запиту.

**Таблиця 1**

Вихідні параметри задачі про призначення в DIRS

	Група критеріїв 1	...	Група критеріїв $i$	...	Група критеріїв $N$
SERP 1	$r_{11}$	...	$r_{1i}$	...	$r_{1N}$
SERP ...	...	...	...	...	...
SERP $j$	$r_{j1}$	...	$r_{ji}$	...	...
SERP ...	...	...	...	...	...
SERP $M$	$r_{M1}$	...	$r_{Mj}$	...	$r_{MN}$

Позначимо через  $X = \|x_{ji}\| - N \times M$  матрицю невідомих, елемент якої  $x_{ji}$  приймає значення 1, якщо SERP з номером  $j$  буде оцінюватися з максимальною релевантністю за групою критеріїв з номером  $i$ , і значення 0, в іншому випадку. Обмеження математичної моделі представимо системою рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^M x_{ji} \leq 1, i = \overline{1, N} \\ \sum_{i=1}^N x_{ji} \leq 1, j = \overline{1, M} \\ x_{ji} \in \{0, 1\}, j = \overline{1, M}, i = \overline{1, N} \end{array} \right. \quad (2)$$

В наведеній системі перше рівняння означає, що кожна SERP оцінюється однією групою критеріїв. Відповідно до другого рівняння кожна група критеріїв оцінює одну сторінку пошуку. Умови третього рівняння є природними обмеженнями на введені змінні. Враховуючі це, визначаємо матрицю призначень  $X$ , при якій формується критерій оптимальності

$$F(X) = \sum_{i=1}^M \sum_{i=1}^N r_{ji} x_{ji} \rightarrow \max. \quad (3)$$

Задача (2)-(3) називається задачею про призначення з адитивним критерієм оптимальності. При розгляді задачі про призначення в стандартній формі передбачається, що кількість різних комбінаторних груп критеріїв дорівнює кількості SERP:  $M=N$ . Неважко показати, що введенням фіктивних груп критеріїв або фіктивних знайдених SERP, математична модель у відкритій формі (2) еквівалентна моделі (4) [8]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^M x_{ji} \leq 1, i = \overline{1, N}, \\ \sum_{i=1}^N x_{ji} \leq 1, j = \overline{1, M}, \\ 0 \leq x_{ji} \leq 1, j = \overline{1, M}, i = \overline{1, N}, \\ N = M. \end{array} \right. \quad (4)$$

Виходячи з того, що матриця обмежень умов (4) є абсолютно унімодулярною (цілочисельна матриця називається абсолютною або цілком унімодулярною, якщо будь-який її мінор дорівнює ("1", "-1" або "0"), то будь-який опорний план математичної моделі (4) є цілочисельним, звідси випливає еквівалентність математичних моделей (2) і (4) [6]. Крім того, так як з умов (4) і умов невід'ємності змінних автоматично випливає, що змінні не можуть бути більше "0", вихідна математична модель (2) еквівалентна (з точки зору пошуку оптимального рішення задачі про призначення) математичній моделі з обмеженнями (4), умовами  $M=N$  і обмеженнями  $x \geq 0, j=1,2,\dots,M$ . Нехай, наприклад, кількість знайдених елементів SERP перевищує кількість критеріїв (груп критеріїв)  $N$ . Введемо додаткові фіктивні критерії (групи критеріїв) з індексами:  $j=N+1, \dots, M$ . Коефіцієнти таблиці призначень, покладемо рівними нулю. В цьому випадку отримуємо задачу, сформульовану в стандартній формі. Якщо в оптимальному плані цієї задачі  $x_{ji}=1$ , тоді сторінка пошуку  $j$  оцінюється за фіктивним критерієм (групою критеріїв), тобто, залишається без роботи [9]. Метод з використанням нейромережевої моделі дозволяє ранжувати SERP як в разі множини  $V$  – критеріїв значимості, так і в граничному випадку  $V=1$ .

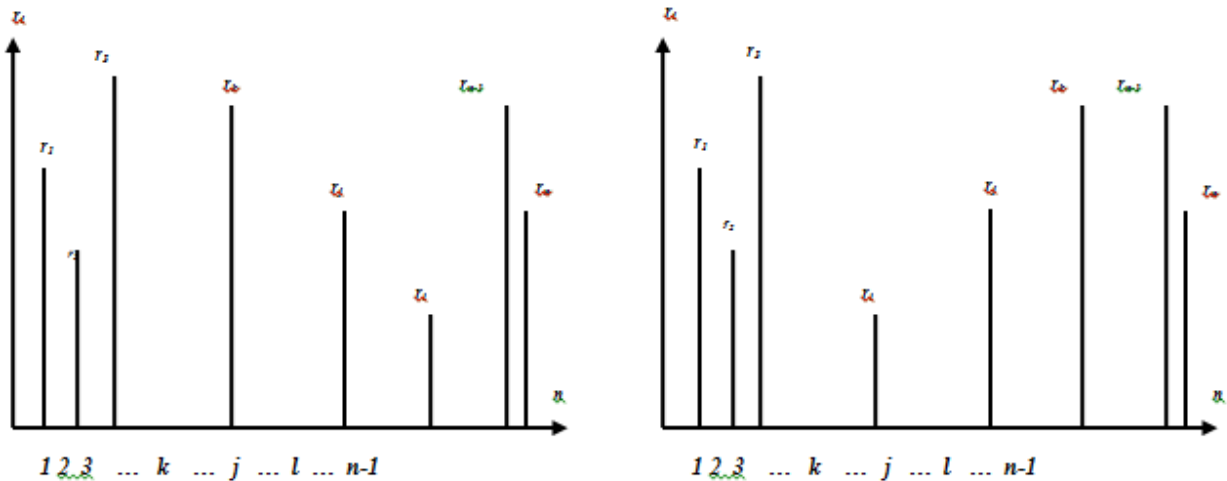
Переформулюємо завдання ранжирування наступним чином. Нехай є множина чисел – значень релевантності SERP, знайдених в результаті запиту в DIRS:  $\{r_i\}, i \in N=1\dots,n$ . Необхідно розставити числа в порядку зростання, тобто знайти таку перестановку індексів  $j = \pi(i)$ , тоді  $\forall j=1\dots(n-1) r_j \leq r_{j+1}$ . Побудуємо розв'язання цієї задачі на основі використання синтезованої вище нейроподібної моделі для вирішення задач комбінаторної оптимізації адаптивного алгоритму роевого інтелекту у проектуванні та управлінні інженерними системами [11]. З цією метою зведемо сформульовану задачу сортування чисел до задачі роевого інтелекту. Для цього доведемо таке твердження. Нехай існує довільна множина чисел  $\{r_i\}, i \in N=1\dots,n$  і монотонно зростаючий ряд додатних чисел  $\{a_j\}, j \in N=1\dots,n$ , таких, що  $\forall j \in 1\dots(n-1) a_j \leq a_{j+1}$ . На множині всіляких підстановок  $\{\pi(i)\} = \Pi, j = \pi(i)$  і задаємо лінійний функціонал виду

$$J[\pi(i)] = \sum_{j=1}^n a_j r_j. \quad (5)$$

Позначимо  $j^* = \pi^*(i)$  перестановку, яка сортує в порядку зростання задану довільну множину чисел  $\{r_i\}$ , тобто задовольняє умові

$$\pi^*(i) = \arg \max_{\pi(i) \in \Pi} \{J[\pi(i)]\} = \arg \max_{\pi(i) \in \Pi} \left\{ \sum_{j=1}^n a_j r_j \right\}. \quad (6)$$

Для доказу цього твердження візьмемо довільну підстановку  $\pi(i)$ , яка породжує наступну перестановку вихідної множини чисел  $(r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_j, \dots, r_i, \dots, r_n)$  (рис. 2а). Для визначеності вважатимемо, що  $k < l$  і  $r_k \geq r_i$ , тобто ця пара чисел  $(r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_j, \dots, r_i, \dots, r_n)$  в цій перестановці є не відсортованою у розумінні сформульованої вище задачі. Візьмемо другу підстановку  $\pi^*(i)$ , отриману з першої транспозиції  $k$ -го і  $i$ -го елементів. Цій підстановці буде відповідати перестановка вихідної множини чисел: , яка відрізняється від першої тим, що на  $k$ -му місці знаходиться число  $r_i$ , а на  $l$ -му – відповідно  $r_k$ . (рис. 2b) [13]. У такій перестановці ця пара чисел буде відсортована у форматі поставленої задачі.



**Рис. 2** (a,b) Перестановки вихідної множини чисел адаптивного алгоритму роевого інтелекту у проектуванні та управлінні інженерними системами

Визначимо значення функціоналу (5) на підстановках  $\pi(i)$ , і  $\pi^*(i)$ :

$$J[\pi(i)] = \sum_{j \in N} a_j r_j + a_k r_k + a_l r_l, \quad (7)$$

$$J[\pi^*(i)] = \sum_{\substack{j \in N \\ \{k,l\}}} a_j r_j + a_k r_l + a_l r_k. \quad (8)$$

і знайдемо їхню різницю

$$\Delta_{kl} = J[\pi^*(i)] - J[\pi(i)] = a_k r_l - a_l r_k - (a_k r_k + a_l r_l) = (a_k - a_l) \times (r_l + r_k).$$

В силу прийнятого припущення  $k < l$  і  $r_k \geq r_l$ , отже, по-перше:  $r_l - r_k \leq 0$ , по-друге:  $a_k - a_l < 0$ , так як ряд чисел  $\{a_j\}$  є монотонно зростаючим за визначенням. Звідки випливає

$$\Delta_{kl} = J[\pi^*(i)] - J[\pi(i)] \geq 0, \quad (9)$$

тобто значення введеного лінійного функціоналу (5) на перестановці, в якій деяка парачисел відсортована, більше або дорівнює значенню даного функціоналу на перестановці, що відрізняється тільки тим, що обрана пара чисел не відсортована. На третьому і четвертому етапах реалізації методу формується і використовується нейромережева модель розв'язання задачі формування адаптивного алгоритму роевого інтелекту у проектуванні та управлінні інженерними системами.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

Було досліджено проблеми управління інженерними системами в умовах зростання обсягів даних та складності мереж. Було сформовано нові методи та інструментальні засоби для розробки й використання адаптивних алгоритмів роевого інтелекту. Було розроблено алгоритми для забезпечення релевантності пошукових запитів у системах цифрового пошуку інформації (DIRS) з урахуванням семантико-синтаксичного аналізу текстів та інтелектуальних алгоритмів визначення значущості інформаційних ресурсів. Запропоновані алгоритми сприяють підвищенню точності проектування та ефективності управління інженерними системами.



## 6 ВИСНОВКИ

Визначено, що в умовах постійного збільшення обсягу даних та складності інженерних систем стає очевидною необхідність впровадження адаптивних алгоритмів розумного інтелекту. Такі алгоритми здатні забезпечити більш ефективно управління та проектування інженерних систем завдяки своїй здатності адаптуватися до змінних умов та забезпечувати високу релевантність отриманих результатів. Обґрунтовано, що для реалізації адаптивних алгоритмів розумного інтелекту потрібно розробити нові методи та інструментальні засоби, що включає застосування семантико-синтаксичного аналізу текстів, природно-мовних засобів та інтелектуальних алгоритмів визначення значущості інформаційних ресурсів. Слід забезпечити, щоб ці методи могли обробляти великі обсяги даних та генерувати максимально релевантні результати для проектувальників інженерних систем.

Доведено, що одним з ключових аспектів є розробка ефективних нейромережевих алгоритмів для розв'язання задачі призначення та ранжування пошукових запитів. Такі алгоритми повинні забезпечити оптимальний розподіл релевантності пошукових сторінок відповідно до груп критеріїв, що дозволить підвищити точність та ефективність пошуку інформації. Використання нейромережевих моделей дозволяє розглядати задачі комбінаторної оптимізації та забезпечувати високу продуктивність навіть у випадку проектування складних інженерних систем на основі розумного інтелекту.

## 7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають будь-яких фінансових чи нефінансових інтересів щодо матеріалів, представлених у цій статті, які слід розкривати.

## Література

1. Безклубенко І. С., Гетун Г. В., Баліна О. І., Буценко Ю. П. Дослідження властивостей множини ефективних значень критеріїв в задачі оптимізації інженерної мережі. *Управління розвитком складних систем*. 2022. № 51, стр. 81-86.
2. Вербівська Л. В. Застосування інструментів штучного інтелекту при управлінні конкурентоспроможністю підприємства. *Проблеми сучасних трансформацій. Серія: економіка та управління*. 2023. №(10). <https://doi.org/10.54929/2786-5738-2023-10-04-06>
3. Македон В. В., Маковецька А. О. Інформаційне забезпечення економічної безпеки підприємств в умовах ринкової нестабільності. *Міжнародний науковий журнал "Інтернаука". Серія: "Економічні науки"*. 2023. №12. <https://doi.org/10.25313/2520-2294-2023-12-9477>.
4. Македон В. В., Холод О. Г., Ярмоленко Л. І. Модель оцінки конкурентоспроможності високотехнологічних підприємств на засадах формування ключових компетенцій. *Академічний огляд*. 2023. № 2 (59). С. 75-89. DOI: 10.32342/2074-5354-2023-2-59-5.
5. Adibfar A., Costin A., Issa R.R.A. Design Copyright in Architecture, Engineering, and Construction Industry: Review of History, Pitfalls, and Lessons Learned. *Journal of legal affairs and dispute resolution in engineering and construction*. 2020. 12. 04520032, doi:10.1061/(ASCE)LA.1943-4170.0000421.
6. Alsabhan W. Human–Computer Interaction with a Real-Time Speech Emotion Recognition with Ensembling Techniques 1D Convolution Neural Network and Attention. *Sensors*. 2023. №23(3). p. 1386. <https://doi.org/10.3390/s23031386>.
7. Gan G., Ma Ch., Wu J. Data Clustering: Theory, Algorithms and Applications. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM, 2007. 455 p.
8. Korte B., Vygen J. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms (Algorithms and Combinatorics), Springer. New York, 2018. 455 p.

9. Lai H., Deng X., Chang T.-Y. P. BIM-Based Platform for Collaborative Building Design and Project Management. *Journal of Computing in Civil Engineering*. 2019. 33. 05019001. doi:10.1061/(ASCE)CP.1943- 5487.0000830.
10. Masoud R., Basahel S. The Effects of Digital Transformation on Firm Performance. *The Role of Customer Experience and IT Innovation*. 2023. №3. pp. 109–126. <https://doi.org/10.3390/digital3020008>
11. McAfee A., Brynjolfsson E. *Machine, Platform, Crowd: Harnessing Our Digital Future*. New York: W.W. Norton & Company, 2017. 340 p.
12. Oraee M., Hosseini M.R., Edwards D.J., Li, H., Papadonikolaki E., Cao D. Collaboration Barriers in BIM-Based Construction Networks: A Conceptual Model. *International Journal of Project Management*. 2019. No 37. pp. 839– 854, doi:10.1016/j.ijproman.2019.05.004.
13. Pajak K., Omelyanenko V., Makedon V., Shevchenko V., Ovcharenko I. Raising the level of financial security of the enterprise based on the basic risks differentiation. *Journal of Security and Sustainability Issues*. 2020. No 10(1). pp. 115-130. [https://doi.org/10.9770/jssi.2020.10.1\(9\)](https://doi.org/10.9770/jssi.2020.10.1(9)).
14. Scibilia A., Pedrocchi N., Fortuna L. Human Control Model Estimation in Physical Human–Machine Interaction: A Survey. *Sensors*. 2022. №22(5). P. 1732. <https://doi.org/10.3390/s22051732>.
15. Yashchenko V.A. Neural-like growing networks in the development of general intelligence. Neural-like element (P. I) *Mathematical machines and systems*. 2022. N4. P. 15-36.

## References

1. Bezklubenko, I. S., Getun, G. V., Balina, O. I., Butsenko, Yu. P. (2022). Doslidzhennya vlastyvostry mnozhyny efektyvnykh znachen' kryteriyiv v zadachi optymizatsiyi inzhenernoyi merezhi [Study of the properties of the set of effective criteria values in the engineering network optimization problem]. *Management of the development of complex systems*, No. 51, 81-86.
2. Verbiv's'ka, L. V. (2023). Zastosuvannya instrumentiv shtuchnoho intelektu pry upravlinni konkurentospromozhnisty pidpryyemstva [Application of artificial intelligence tools in managing the competitiveness of the enterprise]. *Problemy suchasnykh transformatsiy. Seriya: ekonomika ta upravlinnya*, (10). <https://doi.org/10.54929/2786-5738-2023-10-04-06>.
3. Makedon, V. V., Makovets'ka, A. O. (2023). Informatsiyne zabezpechennya ekonomichnoyi bezpeky pidpryyemstv v umovakh rynkovoyi nestabil'nosti. [Information provision of economic security of enterprises in conditions of market instability]. *Mizhnarodnyy naukovyy zhurnal "Internauka"*. Seriya: "Ekonomichni nauky", 12. Available at: <https://www.inter-nauka.com/issues/economic2023/12/9477>. <https://doi.org/10.25313/2520-2294-2023-12-9477>.
4. Makedon, V. V., Kholod, O. H., Yarmolenko, L. I. (2023). Model' otsinky konkurentospromozhnosti vysokotekhnolohichnykh pidpryyemstv na zasadakh formuvannya klyuchovykh kompetentsiy [The model of assessing the competitiveness of high-tech enterprises based on the formation of key competencies]. *Akademichnyy ohlyad*, 2(59), 75-89. DOI: 10.32342/2074-5354-2023-2-59-5.
5. Adibfar, A., Costin, A., Issa, R.R.A. (2020). Design Copyright in Architecture, Engineering, and Construction Industry: Review of History, Pitfalls, and Lessons Learned. *Journal of legal affairs and dispute resolution in engineering and construction*, 12, 04520032, doi:10.1061/(ASCE)LA.1943-4170.0000421. (in English).
6. Alsabhan, W. (2023). Human–Computer Interaction with a Real-Time Speech Emotion Recognition with Ensembling Techniques 1D Convolution Neural Network and Attention. *Sensors*, 23(3), 1386. <https://doi.org/10.3390/s23031386>.
7. Gan, G., Ma, Ch., Wu, J. (2007). *Data Clustering: Theory, Algorithms and Applications*. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM.
8. Korte, B., Vygen, J. (2018). *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms (Algorithms and Combinatorics)*, Springer, New York.
9. Lai, H., Deng, X., Chang, T.-Y. P. (2019). BIM-Based Platform for Collaborative Building Design and Project Management. *Journal of Computing in Civil Engineering*, 33. 05019001. doi:10.1061/(ASCE)CP.1943- 5487.0000830.

10. Masoud, R., Basahel, S. (2023). The Effects of Digital Transformation on Firm Performance. The Role of Customer Experience and IT Innovation, 3, 109–126. <https://doi.org/10.3390/digital3020008>. [in English].
11. McAfee, A., & Brynjolfsson, E. (2017). Machine, Platform, Crowd: Harnessing Our Digital Future. New York: W.W. Norton & Company.
12. Oraee, M., Hosseini, M.R., Edwards, D.J., Li, H., Papadonikolaki, E., Cao, D. (2019). Collaboration Barriers in BIM-Based Construction Networks: A Conceptual Model. International Journal of Project Management, 37, 839-854, doi:10.1016/j.ijproman.2019.05.004.
13. Pajak, K., Omelyanenko, V., Makedon, V., Shevchenko, V., Ovcharenko, I. (2020). Raising the level of financial security of the enterprise based on the basic risks differentiation. Journal of Security and Sustainability Issues, №10(1), 115-130. [https://doi.org/10.9770/jssi.2020.10.1\(9\)](https://doi.org/10.9770/jssi.2020.10.1(9)).
14. Scibilia, A., Pedrocchi, N., Fortuna, L. (2022). Human Control Model Estimation in Physical Human–Machine Interaction: A Survey. Sensors, 22(5), 1732. <https://doi.org/10.3390/s22051732>.
15. Yashchenko, V.A. (2022). Neural-like growing networks in the development of general intelligence. Neural-like element (P. I) Mathematical machines and systems, N4, 15–36.

**Кирилов Сергій Олександрович**

Одеський національний економічний університет,  
к.ф.-м.н., доцент,  
вул. Преображенська, 8, м. Одеса, Україна, 65000  
[kyrylovserhi@gmail.com](mailto:kyrylovserhi@gmail.com)  
ORCID: 0000-0002-6328-9361

**Сікора Ярослава Богданівна**

Житомирський державний університет імені Івана Франка,  
к.педаг.н., доцент,  
вул. Велика Бердичівська, 40, м. Житомир, Україна, 10008  
[iaroslava.sikora@gmail.com](mailto:iaroslava.sikora@gmail.com)  
ORCID: 0000-0003-2621-6638

**Рябчун Юлія Володимирівна**

Київський національний університет будівництва та архітектури,  
Ph.D.  
просп. Повітряних Сил, 31, м. Київ, Україна, 03037  
[super.etsy@ukr.net](mailto:super.etsy@ukr.net)  
ORCID: 0000-0002-8320-4038

*Для посилань:*

Кирилов С. О., Сікора Я. Б., Рябчун Ю. В. Розробка адаптивних алгоритмів роевого інтелекту у проєктуванні та управлінні інженерними системами. Механіка та математичні методи, 2024. Т. VI. № 2. С. 136–146

*For references:*

S. Kyrylov, Ya. Sikora, Yu. Riabchun. (2024). Development of adaptive algorithms of swarm intelligence in design and management of engineering systems. Mechanics and Mathematical Methods. VI (1). 136–146.

УДК 004.52

## НЕЙРОМЕРЕЖЕВІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЛЮДИНОМАШИННОГО СПІЛКУВАННЯ ТА РОЗПІЗНАВАННЯ

Кирилов С. О.<sup>1</sup>, Кирилова Л. О.<sup>1</sup>, Суворова С. Г.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Одеський національний економічний університет

<sup>2</sup>Пенітенціарна академія України

**Анотація:** Дослідження присвячене нейромережевій інтерпретації задачі людиномашинного спілкування та розпізнавання за множиною критеріїв, розглянутої як задачі про призначення. Основна мета полягає в зведенні цієї задачі до стандартної форми, де кількість груп критеріїв дорівнює кількості ранжированих запитів. У дослідженні визначено архітектуру нейронної мережі та запропоновано використання мережі бінарних нейронів, що представляє собою матрицю визначеної розмірності. Запропонована модель ранжирования базується на нейронній мережі, яка містить довільні зворотні зв'язки. Це дозволяє передавати збудження назад до нейрона, що сприяє повторному виконанню його функції. Однак у динамічних нейронних мережах виникає нестійкість, що виявляється у випадковій зміні станів нейронів без досягнення стаціонарних станів. Питання стійкості динаміки таких систем залишається відкритим. Розглянута дискретна нейромережа Хопфілда має такі характеристики: один шар елементів, кожен елемент зв'язується з усіма іншими, але не з самим собою; за один етап оновлюється лише один елемент; елементи оновлюються у випадковому порядку, але кожен оновлюється з однаковою частотою; функція виходу бінарна (значення "0" або "1"). Нейромережа Хопфілда є рекурентною: вихід мережі повторно використовується як введення до досягнення стійкого стану. Після запуску нейромережа змінює свій стан, поступово переходячи до усталеного режиму, що дозволяє ідентифікувати план оцінювання процесу людиномашинного спілкування за множиною критеріїв. Для уточнення результатів використовуються процедури випадкового пошуку. Запропонована енергетична функція мінімізується для забезпечення виконання обмежень та розв'язання задачі. Побудована функція досягає мінімуму лише в станах, що відповідають планам призначень. Визначення параметрів мережі здійснюється шляхом зіставлення отриманих функцій з енергетичною функцією в загальному вигляді. *Economic University* моделі продемонструвала, що нейромережа Хопфілда може бути успішно застосована для ранжирования запитів у системах людиномашинного спілкування та розпізнавання, забезпечуючи високу точність та ефективність вирішення задач ранжирования.

**Ключові слова:** нейромережева модель, нейрон, людиномашинне спілкування, енергетичні функція, оптимізуючий функціонал.

## NEURONET MATHEMATICAL MODELS OF HUMAN-MACHINE COMMUNICATION AND RECOGNITION

S. Kyrylov<sup>1</sup>, L. Kyrylova<sup>1</sup>, S. Suvorova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Odesa National Economic University

<sup>2</sup>Penitentiary Academy Of Ukraine

**Abstract:** The study is devoted to the neural network interpretation of the task of human-machine communication and recognition by multiple criteria, considered as a task of assignment. The main goal is to reduce this problem to a standard form, where the number of criteria groups is equal to the number of ranked documents. The study defined the architecture of a neural network and proposed the use of a network of binary neurons, which is a matrix of a certain dimension. The proposed ranking model is based on a neural network that contains arbitrary feedback. This allows the excitation



to be transmitted back to the neuron, which contributes to the repeated performance of its function. However, in dynamic neural networks instability occurs, which is manifested in a random change in the states of neurons without reaching stationary states. The question of stability of the dynamics of such systems remains open. The considered discrete Hopfield neural network has the following characteristics: one layer of elements, each element is connected to all others, but not to itself; only one element is updated per stage; elements are updated in random order, but each is updated with the same frequency; the output function is binary (value "0" or "1"). A Hopfield neural network is recurrent: the output of the network is reused as input until a steady state is reached. After starting, the neural network changes its state, gradually moving to a stable mode, which allows identifying a plan for evaluating the process of human-machine communication according to a set of criteria. Random search procedures are used to refine the results. The proposed energy function is minimized to ensure that the constraints are met and the problem is solved. The constructed function reaches a minimum only in the states corresponding to the assignment plans. The definition of the network parameters is carried out by comparing the obtained functions with the energy function in general form. The practical implementation of the model demonstrated that Hopfield's neural network can be successfully applied to document ranking in human-machine communication and recognition systems, providing high accuracy and efficiency in solving ranking problems.

**Keywords:** neural network model, neuron, human-machine communication, energy function, optimizing functional.

## 1 ВСТУП

В останні роки спостерігається стрімкий розвиток технологій штучного інтелекту (ШІ), зокрема нейромережових моделей, які значно змінюють способи взаємодії людини з комп'ютерними системами. Однією з ключових областей застосування нейромереж є людиномашинне спілкування та розпізнавання, яке стає все більш важливим у багатьох сферах життя. Нейромережові математичні моделі забезпечують високий рівень точності та ефективності в розпізнаванні мови, зображень, текстів та інших видів інформації, вони дозволяють створювати інтуїтивно зрозумілі інтерфейси для користувачів, підвищують продуктивність праці та покращують якість обслуговування в різних галузях, таких як медицина, освіта, промисловість та розваги. Актуальність дослідження також зумовлена необхідністю покращення взаємодії людини з машинами в умовах зростаючого обсягу даних та складності завдань. Використання нейромережових моделей для створення більш природних і зрозумілих способів спілкування сприяє підвищенню ефективності та зручності використання технологій. Крім того, дослідження нейромережових моделей у контексті людиномашинного спілкування має велике значення для розвитку технологій розпізнавання емоцій та намірів користувачів, що може бути використане для покращення користувацького досвіду та розробки адаптивних систем, які реагують на потреби користувачів у реальному часі. Таким чином, дослідження нейромережових математичних моделей людиномашинного спілкування та розпізнавання є надзвичайно актуальним і важливим для подальшого розвитку сучасних технологій та їх інтеграції в повсякденне життя.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Людиномашинне спілкування є багатогранною галуззю, що об'єднує знання з комп'ютерних наук, психології, лінгвістики та інших дисциплін. Від ранніх спроб автоматизувати спілкування за допомогою простих алгоритмів до сучасних моделей на основі нейронних мереж, цей напрямок постійно розвивається. Одним із ключових аспектів є розпізнавання мовлення та тексту, що описано в працях [1, 2].

Застосування нейронних мереж у задачах розпізнавання стало революційним кроком, що значно підвищило точність та ефективність цих процесів. Нейромережі, зокрема конволюційні нейронні мережі (CNN) та рекурентні нейронні мережі (RNN), широко використовуються для розпізнавання зображень, мовлення та текстів [3]. Розвиток глибокого навчання дозволив створювати складні моделі, які можуть навчатися на великих масивах даних та здійснювати точне розпізнавання.

Задачі оптимізації є центральними у багатьох дослідженнях, що стосуються нейромереж. Зокрема, методи оптимізації використовуються для навчання нейронних мереж та покращення їх продуктивності. У роботах [4, 5] розглядаються різні підходи до оптимізації, включаючи градієнтний спуск, стохастичний градієнтний спуск та інші методи.

Питання стійкості є важливим аспектом при розробці динамічних нейронних мереж. У дослідженні [6] розглядаються методи забезпечення стійкості нейромереж, включаючи аналіз спектральних властивостей матриць ваг та застосування стабілізуючих функцій активації. Сучасні дослідження акцентують увагу на інтеграції нейронних мереж у системи людиномашинного спілкування та розглядаються приклади використання нейронних мереж для створення чат-ботів, систем розпізнавання емоцій та адаптивних інтерфейсів. У роботах [7, 8] аналізуються різні моделі та алгоритми ранжування, зокрема з використанням нейронних мереж та

особлива увага приділяється питанням оптимізації ранжування та інтеграції різних критеріїв оцінки. Огляд літератури показує, що нейромережеві математичні моделі є потужним інструментом для вирішення задач людиномашинного спілкування та розпізнавання. Сучасні дослідження спрямовані на підвищення точності, стабільності та ефективності цих моделей. Подальші дослідження мають на меті інтеграцію нових методів оптимізації, аналізу стійкості та застосування нейромереж у різних прикладних контекстах.

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою дослідження є розробка та аналіз нейромережевих математичних моделей, які дозволяють вирішувати завдання людиномашинного спілкування та розпізнавання, зокрема, через застосування нейромережі Хопфілда. Дослідження спрямоване на визначення архітектури нейронної мережі, параметрів її функціонування, а також розробку методів для забезпечення стабільності динаміки системи та досягнення точних і ефективних результатів ранжування запитів за безліччю критеріїв.

Задачі дослідження:

- розглянути задачі людиномашинного спілкування та розпізнавання як задачі про призначення, що враховують множину критеріїв;
- побудувати нейромережеву модель ранжування запитів у системах людиномашинного спілкування та розпізнавання.

### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянемо нейромережевому інтерпретацію задачі людиномашинного спілкування та розпізнавання за безліччю критеріїв як задачі про призначення, за умови зведення задачі про призначення до стандартної форми (число груп критеріїв дорівнює числу ранжированих запитів). Визначимо архітектуру нейронної мережі, і введемо в розгляд мережу бінарних нейронів, що представляє собою матрицю розмірністю  $n \times n$ , де  $n = N - M$  – число груп критеріїв. За основу моделі ранжировання може бути взята нейронна мережа (рис. 3.), що містить довільні зворотні зв'язки, за якими передане збудження повертається до даного нейрона, і він повторно виконує свою функцію [9].

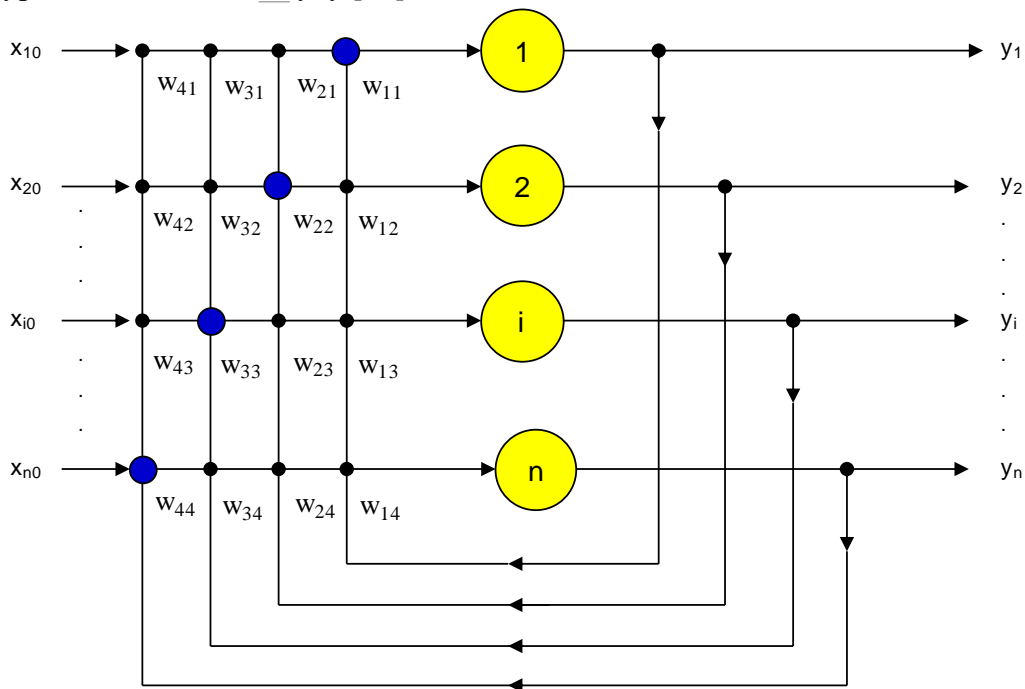
У динамічних нейронних мережах нестійкість проявляється в блукає зміні станів нейронів, що не приводить до виникнення стаціонарних станів. У загальному випадку відповідь на питання про стійкість динаміки довільної системи з зворотними зв'язками є вкрай складною і до теперішнього часу є відкритою (рис. 1.).

Нехай використовується дискретна нейромережа Хопфілда має наступні характеристики:

- 1). Один шар елементів (вхідні елементи, що представляють вхідний зразок, не враховуються).
- 2). Кожен елемент зв'язується з усіма іншими елементами, але елемент не зв'язується з самим собою.
- 3). За один етап оновлюється тільки один елемент.
- 4). Елементи оновлюються у випадковому порядку, але в середньому кожен елемент повинен оновлюватися в одній і тій самій мірі (частоті).
- 5). Введення елемента обмежено значеннями “0” або “1”, тобто функція виходу бінарна [10].

Нейромережа Хопфілда є рекурентною в розумінні того, що для кожного вхідного зразка вихід мережі повторно використовується в якості введення до тих пір, поки не буде досягнуто стійкого стану. Відповідним чином організована (запрограмована)

нейромережа після «запуску» змінює свій стан, поступово переходячи в усталений режим. За цим режимом ідентифікується результат – план оцінювання процесу людиномашинного спілкування та розпізнавання безліччю груп критеріїв, який може не збігатися з точним рішенням. Для уточнення результату, зазвичай, використовуються процедури випадкового пошуку [11].



**Рис. 1.** Нейромережа Хопфілда в задачі ранжування процесу людиномашинного спілкування та розпізнавання ( $x$  – вхідні пошукові запити в межах окремої системи;  $y$  – виходи нейрона,  $w$  – величини зміщень та синаптичних зв'язків)

Зручно вважати, що нейромережа Хопфілда не має вхідних елементів, так як вхідний вектор просто визначає початкові значення активності елементів. Елементи оновлюються тоді, коли всі елементи передадуть свої значення активності за наявними зваженим зв'язків, після чого обчислюється сума доданків (тобто береться скалярний доданок). Значення активності елемента виходить на основі використання деякого правила активізації. Кожній цілочисельній змінній  $x_{ij}$  – поставимо у відповідність вихідний сигнал  $ij$ -го нейрона  $u_{ij}$ , що стоїть в  $i$ -му рядку і в  $j$ -му стовпці матриці мережі

$$(x_{ij} = 1) \Leftrightarrow (u_{ij} = 1), \forall i, j \in \overline{1, N} \quad (1)$$

Сукупність збуджених нейронів інтерпретується як план призначень. Відповідно до (10), інтерпретуємо обмеження (2) і цільову функцію (3), в результаті отримуємо:

$$\sum_{j=1}^n u_{ji} = 1, \forall i \in \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n u_{ji} = 1, \forall j \in \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} = n, \quad (4)$$

$$\Phi(u) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} r_{ji} \rightarrow \max, \quad (5)$$



де  $u_{ji}$  – значення виходу нейромережі Хопфілда;  $r_{ji}$  – значення матриці продуктивності елементи якої  $r_{ji}$  представляють собою релевантність сторінки пошуку номером  $j$  щодо критерію (групи критеріїв) з номером  $i$ .

Сконструємо енергетичну функцію  $E^0(u)$ , мінімізація якої забезпечує виконання обмежень (2)-(3) і розв'язок задачі (4). Побудуємо її у вигляді

$$E^0(u) = E_{\psi}^0(u) + E_{\Phi}^0(u), \quad (6)$$

де останній доданок забезпечує оптимізацію функції вартості і з точністю до константи  $F > 0$  однозначно визначається наступним чином

$$E^0(u) = -F \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} r_{ji}, \quad (7)$$

а перший доданок забезпечує виконання обмежень і може бути побудований декількома способами. Відповідно до першого з них цей компонент енергетичної функції, що конструюється, має вигляд

$$E_{\psi}^0(u) = \frac{A}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{v \neq i}^n u_{ji} u_{ji} + \frac{B}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{\mu \neq i}^n u_{ji} u_{ji} + \frac{C}{2} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} - n \right)^2, \quad (8)$$

де  $A$ ,  $B$  і  $C$  – позитивні константи. Перший доданок приймає мінімальне і нульове значення лише в тому випадку, якщо кожен рядок матриці  $\{u_{ij}\}$  містить не більше однієї одиниці, другий доданок приймає мінімальне нульове значення, якщо кожен стовпець даної матриці містить не більше однієї одиниці, нарешті, третій доданок приймає мінімальне нульове значення, якщо у всій матриці  $\{u_{ij}\}$  міститься рівно  $n$  одиниць.

Побудована функція  $E_{\psi}^0(u)$  досягає свого мінімуму в усіх станах, які відповідають сукупності обмежень (2)-(3) і представляють собою план призначень. Відповідно до другого способу побудови цього компонента енергетичної функції, що конструюється, будемо мати

$$E_{\psi}^0(u) = \frac{A}{2} \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n u_{ji} - 1 \right)^2 + \frac{B}{2} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n u_{ji} - 1 \right)^2, \quad (9)$$

де перший доданок приймає мінімальне нульове значення тільки в тому випадку якщо в будь-якому рядку матриці  $\{u_{ij}\}$  буде тільки один збуджений нейрон, а другий доданок – якщо в будь-якому стовпці цієї матриці буде рівно один збуджений нейрон.

В цілому вказана функція приймає мінімальне нульове значення тільки у станах, які відповідають обмеженням (1)-(2) і представляють собою плани призначень. Підсумовуючи функцію (7) з функцією (8) або (9), сконструємо енергетичну функцію в завершеному вигляді

$$E^0(u) = \frac{A}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{v \neq i}^n u_{ji} u_{jv} + \frac{B}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{\mu \neq i}^n u_{ji} u_{j\mu} + \frac{C}{2} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} - n \right)^2 - F \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} r_{ji}, \quad (10)$$

або

$$E^0(u) = \frac{A}{2} \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n u_{ji} - 1 \right)^2 + \frac{B}{2} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n u_{ji} - 1 \right)^2 - F \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} r_{ji}. \quad (11)$$

Визначимо параметри мережі, зіставивши одну з отриманих функцій з енергетичною функцією, записаної в загальному вигляді

$$E(u, T, I) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n T_{ji\mu\nu} u_{ji} u_{\mu\nu} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} I_{ji}, \quad (12)$$

де  $T_{ji\mu\nu}$  – коефіцієнт зв'язку між входом  $ij$ -го нейрона і виходом  $\mu\nu$ -го;  $I_{ji}$  – зміщення  $ij$ -го нейрона.

У цьому виразі для енергетичної функції мережі навмисне опущений часовий параметр в зв'язку з тим, що при визначенні синапсів і зовнішніх зсувів він не відіграє істотної ролі як для мереж з дискретним часом, так і для мереж з безперервним часом. Більш того, даним виразом слід користуватися при визначенні параметрів синтезованих мереж, як з дискретними, так і з безперервними станами. Підставою для цього служить той факт, що енергетичні функції мереж з дискретними і з безперервними станами відрізняються тільки наявністю у останніх інтегрального доданка, яке як від значень синапсів, так і від зовнішніх зсувів в явному вигляді не залежить [12].

Для того, щоб визначити параметри мережі відповідно до побудованої енергетичної функції (10), наведемо вираз для цієї функції до виду (12)

$$E^0(u) = \frac{A}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{\nu \neq i} u_{ji} u_{j\nu} + \frac{B}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{\mu \neq i} u_{ji} u_{\mu i} + \frac{C}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n u_{ji} u_{\mu\nu} - Cn \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} - F \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} r_{ji} + \frac{C}{2} n^2. \quad (13)$$

Прирівняємо коефіцієнти при лінійних і квадратичних членах останнього виразу і енергії (12). Останній доданок з розгляду можна виключити, так як він не залежить від стану мережі спілкування. Зіставлення лінійних членів дозволить визначити значення зовнішніх зсувів, а зіставлення квадратичних членів дозволить визначити синаптичні зв'язки між нейронами. Аналіз першого доданка сконструйованої енергетичної функції свідчить про те, що будь-який нейрон мережі повинен мати синаптичні зв'язки з коефіцієнтом  $-A$  з усіма нейронами однойменного з ним рядка (умова  $\mu=i$ ) крім самого розглянутого нейрона (умова  $\nu \neq j$ ).

Другий доданок диктує наявність зв'язків з коефіцієнтом  $-B$  між нейронами однойменного стовпця (умова  $\nu=j$ ) крім власного зворотного зв'язку (умова  $\mu \neq i$ ). Третя складова свідчить про те, що всі нейрони мережі пов'язані один з одним синапсами з коефіцієнтами  $-C$ . Скориставшись параметром  $-\delta_{ji}$ , сформуємо результуючий вираз для синаптичних зв'язків мережі у вигляді

$$T_{ji\mu\nu} = -A\delta_{i\mu}(1-\delta_{iv}) - B\delta_{iv}(1-\delta_{i\mu}) - C = -A\delta_{i\mu} - B\delta_{iv} + (A+B)\delta_{i\mu}\delta_{iv} - C, \quad i, j, \mu, \nu \in \overline{1, n}. \quad (14)$$

Аналіз четвертого і п'ятого доданків сконструйованої енергетичної функції свідчить про те, що на всі нейрони мережі необхідно подавати зовнішні зміщення у вигляді

$$I_{ji} = -Cn - Fc_{ji}, \quad i, j \in \overline{1, n}. \quad (15)$$

Як правило, в практичних завданнях приймають  $F=I$  і  $A=B$ , тоді всі ненульові зв'язки мають однакову вагу, яка дорівнює  $A$ . Крім того, аналізуючи вирази (14) і (15), можна помітити, що наявність глобальних зв'язків з коефіцієнтом  $C$  кожного нейрона з

кожним в кінцевому стані мережі, відповідає плану призначень, забезпечує подачу на будь-який нейрон з боку всіх інших сумарного сигналу, який дорівнює  $Cn$ , який компенсується постійним зміщенням  $Cn$ . Отже, для спрощення структури синапсів мережі глобальними зв'язками з вагою  $C$  і частиною зсуву  $Cn$  в першому наближенні можна знехтувати [13].

Бажана модель нейронної мережі процесу людиномашинного спілкування та розпізнавання містить матрицю з  $n \times n$  нейронів, на кожен з яких подається зовнішнє зміщення, яке дорівнює відповідній продуктивності  $I_{ji} = -r_{ji}$ , а вихідний сигнал будь-якого нейрона  $u_{ji}$ , з коефіцієнтом  $A$ , подається на входи всіх нейронів однойменних з ним рядки і стовпці.

Інший варіант параметрів мережі для оптимального плану оцінювання процесу людиномашинного спілкування та розпізнавання можна отримати, використовуючи сконструйовану енергетичну функцію у вигляді (14). Аналогічно проведеній вище процедури наведемо цей вираз до нового виду (15)

$$E^0(u) = \frac{A}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^n u_{ji} u_{jv} + \frac{B}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{\mu=1}^n u_{ji} u_{\mu i} - A \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} - B \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} - F \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} r_{ji} + \frac{n}{2}(A+B). \quad (16)$$

Порівняємо коефіцієнти при лінійних і квадратичних членах, відкинувши останній доданок. В результаті отримуємо:

$$T_{ji\mu v} = -A\delta_{i\mu} - \delta_{iv}, \\ I_{ji} = -(A+B) - Fr_{ji}, i, j, \mu, v \in \overline{1, n}. \quad (17)$$

Крім розглянутого функціоналу, можна використовувати різні комбінації функцій (6) і (7) для конструювання енергетичної функції  $E^0(u)$ . В результаті будемо отримувати різні варіанти параметрів нейромережі. При побудові нейроподібні мережі з безперервними станами необхідно забезпечити умови знаходження точок спокою в кутах  $n$ -мірного куба її простору станів. Іншим способом забезпечення суворої бінарності вихідних сигналів нейронів в стійких станах є додавання до енергетичної функції, що конструюється, додаткової складової, що досягає мінімального значення на станах мережі, в яких вихідні сигнали нейронів беруть значення "0" або "1" [14]. Прикладом такої функції може служити наступна

$$E_p^0(u) = \frac{G}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} (1 - u_{ji}) = \frac{G}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} - \frac{G}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji}^2, \quad (18)$$

де  $G > 0$  – константа. Додавши цей доданок до раніше побудованої енергетичної функції, наприклад у вигляді (19), отримуємо

$$E^0(u) = \frac{A}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{v \neq i}^n u_{ji} u_{jv} + \frac{B}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{\mu \neq i}^n u_{ji} u_{\mu i} + \frac{C}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{\mu=1}^n \sum_{v=1}^n u_{ji} u_{\mu v} - \frac{G}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji}^2 - Cn \left( \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} - F \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} r_{ji} + \frac{C}{2} n_i^2 \right). \quad (19)$$

звідки визначимо наступні параметри нейромережі пошуку

$$\begin{aligned}
 T_{ji\mu\nu} &= -A\delta_{i\mu}(1-\delta_{iv}) - B\delta_{iv}(1-\delta_{i\mu}) - C + G\delta_{i\mu}\delta_{iv} = \\
 &= -A\delta_{i\mu} - B\delta_{iv} + (A+B+G)\delta_{i\mu}\delta_{iv} - C, \\
 I_{ji} &= \frac{G}{2} - Cn - Fr_{ji}, j, \mu, \nu \in \overline{1, n}.
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Об'єднавши вирази (20) і (16), можна сконструювати енергетичну функцію у такому вигляді

$$\begin{aligned}
 E^0(u) &= \frac{A}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{v=1}^n u_{ji}u_{jv} + \frac{B}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{\mu=1}^n u_{ji}u_{\mu i} - \frac{G}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji}^2 + \frac{G}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} - \\
 &- A \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} - B \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji} - F \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_{ji}r_{ji} + \frac{n}{2}(A+B),
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

звідки шукані параметри мережі визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned}
 T_{ji\mu\nu} &= -A\delta_{i\mu} - B\delta_{iv} + G\delta_{i\mu}\delta_{iv}, \\
 I_{ji} &= \left( A + B - \frac{G}{2} \right) - Fr_{ji}, j, \mu, \nu \in \overline{1, n}.
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Ранжування запитів людиномашинного спілкування та розпізнавання у разі єдиного критерію значущості, тобто в граничному випадку –  $V=I$ , реалізується при наступному припущенні: є безліч значень релевантності списку запитів, знайдених в результаті запиту:  $\{r_i\}$ ,  $i \in N=1\dots, n$ . В результаті ранжирування, числа розставляються в порядку зростання індексів  $j = \pi(i)$  так що,  $\forall j \in 1\dots(n-1), r_j \leq r_{j+1}$ .

Пара чисел  $\{r_k, r_l\}$  була обрана довільно. Аналогічні докази можна надати і до будь-якої іншої пари чисел. Зокрема, умова (1) буде справедливою для різних пар сусідніх елементів. В силу того, що будь-яка перестановка може бути представлена суперпозицією транспозиції сусідніх елементів, максимальне значення лінійного функціоналу буде досягтися на перестановці, в якій всі пари сусідніх елементів відсортовані [15]. Таким чином, вихідна задача пошуку сортуючої перестановки зведена до оптимізації лінійного функціоналу на множині всіляких перестановок, розв'язання якої визначається у вигляді (2). Для розв'язання такого завдання за допомогою нейроподібні мережі наведемо її нейромережевому інтерпретацію [16]. Уявімо довільну підстановку  $j = \pi(i)$  у вигляді матриці нейронів  $[V_{ij}]$  розмірністю  $n \times n$  наступним чином

$$(j = \pi(i)) \Leftrightarrow (V_{ij} = 1), \forall i, j \in \overline{1, n}.
 \tag{23}$$

На змістовному рівні збуджений стан нейрона  $V_{ij}=1$  відповідає тому факту, що  $i$ -й елемент вихідної множини значень релевантності  $r$ , займає  $j$ -е місце в підстановці  $\pi(i)$ . У будь-якому рядку і кожному стовпці такої матриці повинен бути рівно один збуджений нейрон, отже справедливі обмеження виду:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n V_{ij} &= 1, \forall j \in \overline{1, n}, \\
 \sum_{j=1}^n V_{ij} &= 1, \forall i \in \overline{1, n}.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Нейромережева інтерпретація оптимізуючого функціоналу буде представлена наступним чином

$$\phi(V) = \sum_{j=1}^n a_j \sum_{i=1}^n r_j V_{ij} \rightarrow \max_M \quad (25)$$

Це завершальний етап побудови алгоритму.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Порівнявши останні вирази з результатами нейромережевої інтерпретації задачі про призначення у вигляді (1)-(4), приходимо до висновку про те, що оптимізаційна постановка задачі людиномашинного спілкування та розпізнавання тотожна постановці задачі про призначення за умови, що елементи матриці продуктивностей останньої визначаються як

$$c_{ij} = a_j r_i \quad i, j \in \overline{1, n}. \quad (26)$$

Отже, подальше побудова нейромережі людиномашинного спілкування та розпізнавання буде повністю збігатися з побудовою мережі для розв'язання задачі про призначення. При цьому параметри мереж для вирішення як першої, так і другої задачі будуть визначатися одними і тими ж виразами. Зокрема, скориставшись параметрами мережі для вирішення задачі про призначення з урахуванням умови (22), отримаємо параметри мережі для вирішення задачі сортування в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} T_{j\mu\nu} &= -A\delta_{i\mu} - \delta_{i\nu}, \\ I_{ji} &= -(A+B) - Fr_{ji}, \quad j, \mu, \nu \in \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (27)$$

Використовуючи інші вирази для визначення параметрів мережі, вирішує завдання про призначення, можна отримати родину нейромереж для розв'язання задачі сортування даних в системі людиномашинного спілкування та розпізнавання.

## 6 ВИСНОВКИ

Дослідження показало, що задачі людиномашинного спілкування та розпізнавання можуть бути ефективно інтерпретовані як задачі про призначення. За умови зведення задачі про призначення до стандартної форми, де кількість груп критеріїв дорівнює кількості ранжируваних запитів, вдається досягти оптимального розподілу ресурсів і підвищити точність розпізнавання. Визначення архітектури нейронної мережі, що включає мережу бінарних нейронів, показало, що для досягнення стійких станів необхідно враховувати специфічні характеристики та зв'язки між нейронами. Використання енергетичної функції для мінімізації обмежень і цільової функції дозволяє забезпечити стабільність та оптимізацію функціонування нейромережі, що є критично важливим для динамічних нейронних мереж. Практична реалізація та верифікація запропонованої моделі показала, що нейромережа Хопфілда може бути успішно застосована для ранжування запитів у системах людиномашинного спілкування та розпізнавання. Розроблені методи дозволяють отримувати точні результати, які відповідають сукупності обмежень та забезпечують високий рівень продуктивності при вирішенні завдань ранжування.

## 7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

### Література

1. Gan G., Ma Ch., Wu J. Data Clustering: Theory, Algorithms and Applications. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM, 2007. 455 p.
2. Alsabhan W. Human–Computer Interaction with a Real-Time Speech Emotion Recognition with Ensembling Techniques 1D Convolution Neural Network and Attention. *Sensors*. 2023. №23(3). p. 1386. <https://doi.org/10.3390/s23031386>.
3. McAfee A., Brynjolfsson E. Machine, Platform, Crowd: Harnessing Our Digital Future. New York: W.W. Norton & Company, 2017. 340 p.
4. Македон В. В., Байлова О. О. Планування і організація впровадження цифрових технологій в діяльність промислових підприємств. Науковий вісник Херсонського державного університету. Серія «Економічні науки». 2023. Випуск 47. С. 16-26. DOI: 10.32999/ksu2307-8030/2023-47-3.
5. Yashchenko V.A. Neural-like growing networks in the development of general intelligence. Neural-like element (P. I) Mathematical machines and systems. 2022. N4. P. 15-36.
6. Дзямучич М. І., Шматковська Т. О. Вплив сучасних інформаційних систем і технологій на формування цифрової економіки. Економічний форум. 2022. №2. С. 3-8.
7. da Silva I.N., Spatti D.H., Flauzino R.A., Bartocci Liboni L.H., dos Reis Alves S.F. Artificial Neural Networks: A Practical Course. Springer International Publishing, 2016. 307 p.
8. Македон В. В., Холод О. Г., Ярмоленко Л. І. Модель оцінки конкурентоспроможності високотехнологічних підприємств на засадах формування ключових компетенцій. Академічний огляд. 2023. № 2 (59). С. 75-89. DOI: 10.32342/2074-5354-2023-2-59-5.
9. Hryshko V., Zinchenko I. Synergy of AI and business as a factor of management efficiency in the context of technology development. Science Journal «Economics and Region». 2023. Vol. 4(91). pp. 223-229. doi: [https://doi.org/10.26906/EiR.2023.4\(91\).3216](https://doi.org/10.26906/EiR.2023.4(91).3216).
10. Jin K. H., McCann M. T., Froustey E., Unser M. Deep convolutional neural network for inverse problems in imaging. IEEE Transactions on Image Processing. 2017. 26. pp. 4509–4522.
11. Makedon V., Dzeveluk A., Khaustova Y., Bieliakova O., Nazarenko I. Enterprise multi-level energy efficiency management system development. International Journal of Energy, Environment, and Economics. 2021. Volume 29. Issue 1. pp. 73-91.
12. Li Ruichao, Nawi Abdullah, Kang, Myoung. Human-machine Translation Model Evaluation Based on Artificial Intelligence Translation. EMITTER International Journal of Engineering Technology. 2023. №11. pp. 145-159. 10.24003/emitter.v11i2.812.
13. Zhao Ting. Artificial Intelligence in Mathematical Modeling of Complex Systems. EAI Endorsed Transactions on e-Learning. 2024. №10. 10.4108/eetel.5256.
14. Scibilia A., Pedrocchi N., Fortuna L. Human Control Model Estimation in Physical Human–Machine Interaction: A Survey. *Sensors*. 2022. №22(5). P. 1732. <https://doi.org/10.3390/s22051732>.
15. Pronina O., Piatyko O. The recognition of speech defects using convolutional neural network. CTE Workshop Proceedings [Online]. 2023. №10. pp. 153-166. Available from: <https://doi.org/10.55056/cte.554>.
16. Dawodi M., Baktash J.A., Wada T., Alam N., Joya M.Z. Dari Speech Classification Using Deep Convolutional Neural Network. 2020 IEEE International IOT, Electronics and Mechatronics Conference (IEMTRONICS). 2020. pp.1-4. Available from: <https://doi.org/10.1109/IEMTRONICS51293.2020.9216370>.

## References

1. Gan, G., Ma, Ch., Wu, J. (2007). *Data Clustering: Theory, Algorithms and Applications*. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM.
2. Alsabhan, W. (2023). Human–Computer Interaction with a Real-Time Speech Emotion Recognition with Ensembling Techniques 1D Convolution Neural Network and Attention. *Sensors*, 23(3), 1386. <https://doi.org/10.3390/s23031386>.
3. McAfee, A., & Brynjolfsson, E. (2017). *Machine, Platform, Crowd: Harnessing Our Digital Future*. New York: W.W. Norton & Company.
4. Makedon, V. V., Bailova, O. O. (2023). Planuvannya i orhanizatsiya vprovadzhennya tsyfrovyykh tekhnolohiy v diyal'nist' promyslovykh pidpryyemstv [Planning and organizing the implementation of digital technologies in the activities of industrial enterprises]. *Naukovyy visnyk Khersons'koho derzhavnoho universytetu. Seriya «Ekonomichni nauky»*, Issue 47, 16-26. DOI: 10.32999/ksu2307-8030/2023-47-3. [in Ukrainian].
5. Yashchenko, V.A. (2022). Neural-like growing networks in the development of general intelligence. *Neural-like element (P. I) Mathematical machines and systems*, N4, 15–36.
6. Dzyamulych, M. I., Shmatkovs'ka, T. O. (2022). Vplyv suchasnykh informatsiynykh system i tekhnolohiy na formuvannya tsyfrovoyi ekonomiky [Influence of modern information systems and technologies on the formation of the digital economy]. *Ekonomichnyy forum*, №2, 3-8. [in Ukrainian].
7. da Silva, I.N., Spatti, D.H., Flauzino, R.A., Bartocci Liboni, L.H., dos Reis Alves, S.F. (2016). *Artificial Neural Networks: A Practical Course*. Springer International Publishing.
8. Makedon, V. V., Kholod, O. H., Yarmolenko, L. I. (2023). Model' otsinky konkurentospromozhnosti vysokotekhnolohichnykh pidpryyemstv na zasadakh formuvannya klyuchovykh kompetentsiy [The model of assessing the competitiveness of high-tech enterprises based on the formation of key competencies]. *Akademichnyy ohlyad*, 2(59), 75-89. DOI: 10.32342/2074-5354-2023-2-59-5 [in Ukrainian].
9. Hryshko, V., Zinchenko, I. (2023). Synergy of ai and business as a factor of management efficiency in the context of technology development. *Science Journal «Economics and Region»*, 4(91), 223-229. doi: [https://doi.org/10.26906/EiR.2023.4\(91\).3216](https://doi.org/10.26906/EiR.2023.4(91).3216).
10. Jin, K. H., McCann, M. T., Froustey, E., Unser, M. (2017). Deep convolutional neural network for inverse problems in imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 26, 4509–4522.
11. Makedon, V., Dzeveluk, A., Khaustova, Y., Bieliakova, O., Nazarenko, I. (2021). Enterprise multi-level energy efficiency management system development. *International Journal of Energy, Environment, and Economics*, Volume 29, Issue 1, 73-91.
12. Li, Ruichao & Nawi, Abdullah & Kang, Myoung. (2023). Human-machine Translation Model Evaluation Based on Artificial Intelligence Translation. *EMITTER International Journal of Engineering Technology*, 11, 145-159. 10.24003/emitter.v11i2.812.
13. Zhao, Ting. (2024). Artificial Intelligence in Mathematical Modeling of Complex Systems. *EAI Endorsed Transactions on e-Learning*, 10. 10.4108/eetel.5256.
14. Scibilia, A., Pedrocchi, N., Fortuna, L. (2022). Human Control Model Estimation in Physical Human–Machine Interaction: A Survey. *Sensors*, 22(5), 1732. <https://doi.org/10.3390/s22051732>.
15. Pronina, O. and Piatyko, O. (2023). The recognition of speech defects using convolutional neural network. *CTE Workshop Proceedings [Online]*, 10, 153–166. Available from: <https://doi.org/10.55056/cte.554>.
16. Dawodi, M., Baktash, J.A., Wada, T., Alam, N. and Joya, M.Z. (2020). Dari Speech Classification Using Deep Convolutional Neural Network. 2020 IEEE International IOT, Electronics and Mechatronics Conference (IEMTRONICS), 1-4. Available from: <https://doi.org/10.1109/IEMTRONICS51293.2020.9216370>.

### **Кирилов Сергій Олександрович**

Одеський національний морський університет,  
к.ф.-м.н, доцент  
вул. Мечникова, 34, м. Одеса, Україна, 65029  
[kyrylovserhii@gmail.com](mailto:kyrylovserhii@gmail.com)



ORCID: 0000-0002-6328-9361

**Кирилова Людмила Олександрівна**

Одеський національний економічний університет,

к.ф.-м.н, старший викладач

вул. Преображенська, 8, м. Одеса, Україна, 65000

kirilovaludmilaalex@gmail.com

ORCID: 0009-0009-4577-242X

**Суворова Світлана Геннадіївна**

Пенітенціарна академія України,

к.е.н, доцент,

вул. Гонча, 34, м. Чернігів, Україна, 14000

svetlanasuvorovach@gmail.com

ORCID: 0000-0001-7089-2524

*Для посилань:*

Кирилов С. О., Кирилова Л. О., Суворова С. Г. Нейромережеві математичні моделі людиномашинного спілкування та розпізнавання. Механіка та математичні методи, 2024.Т. VI. № 2. с. 147–159

*For references:*

S. Kyrylov, L. Kyrylova, S. Suvorova. (2024). Neuronet mathematical models of human-machine communication and recognition. Mechanics and mathematical methods. VI (2). 147–159.



УДК 614.841

## МОДЕЛЮВАННЯ ВОГНЕЗАХИСТУ СВІТЛОПРОЗОРИХ ФАСАДНИХ КОНСТРУКЦІЙ З ВЛАШТУВАННЯМ ЗРОШУВАЧІВ

Майборода Р. І.<sup>1</sup>, Рашкевич Н. В.<sup>1</sup>, Отрош Ю. А.<sup>1</sup>, Балдук П. Г.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Національний університет цивільного захисту України

<sup>2</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Анотація:** Популярність світлопрозорих матеріалів у будівництві, особливо в висотних будівлях, створює виклики щодо вдосконалення підходів до забезпечення пожежної безпеки. Світлопрозорі конструкції мають обмежену. Під час пожежі вони можуть швидко нагріватися, тріскатися або навіть руйнуватися, що сприяє проникненню вогню в інші частини будівлі та збільшує швидкість поширення пожежі.

В роботі розглянуті практичні способи та прийоми обмеження поширення пожежі по фасадах будівлі, серед яких застосування протипожежних карнизів, захисних екранів з вогнетривкого матеріалу, обмеження площі віконного отвору, а також застосування водяного зрошування. Водяне зрошування є ефективним методом гасіння пожежі і охолодження фасадних елементів, але його параметри, такі як робочий тиск, витрати води, розташування, тощо потребують ретельного дослідження для досягнення максимальної ефективності.

Метою даної роботи є за допомогою програмного комплексу PyroSim дослідити ефективність застосування зрошувачів для захисту світлопрозорих конструкцій фасаду висотних будівель та визначити їх основні параметри.

За допомогою PyroSim була створена детальна тривимірну модель, яка враховує складні геометричні форми будівлі та вплив протипожежних систем з урахуванням особливостей світлопрозорих фасадів. У ході досліджень також враховані структурні елементи, що можуть впливати на поширення вогню і диму, а саме характеристики матеріалів, пожежне навантаження, встановлення віконних отворів. PyroSim, моделюючи поширення пожежі, дозволив врахувати теплові і димові потоки, конвективний вплив, що виникають під час пожежі, а також взаємодію зрошувачів з тепловим навантаженням.

Результати моделювання можуть бути використані для оптимізації проектування протипожежних систем і забезпечення відповідності будівельних норм питанням пожежної безпеки. Зокрема, моделювання дозволяє визначити найбільш ефективні способи розміщення зрошувачів, враховуючи специфічні умови та конструкційні особливості будівлі. Завдяки цьому можна не лише підвищити рівень захисту будівель від пожеж, але й мінімізувати витрати на встановлення і обслуговування пожежних систем.

**Ключові слова:** пожежа, моделювання, руйнування, зрошувач, PyroSim.

## MODELING OF FIRE PROTECTION OF TRANSPARENT FACADE STRUCTURES WITH SPRINKLERS

R. Maiboroda<sup>1</sup>, N. Rashkevich<sup>1</sup>, Yu. Otrosh<sup>1</sup>, P. Balduk<sup>2</sup>

<sup>1</sup>National University of Civil Defence of Ukraine

<sup>2</sup>Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract:** The popularity of translucent materials in construction, especially in high-rise buildings, creates challenges for improving approaches to fire safety. Translucent designs have a limited. During a fire, they can quickly heat up, crack or even collapse, which helps the fire to spread to other parts of the building and increases the speed of fire spread.



Practical methods and methods of limiting the spread of fire on building facades are considered in the work, including the use of fire eaves, protective screens made of fire-resistant material, limiting the area of the window opening, as well as the use of water irrigation. Water irrigation is an effective method of extinguishing fire and cooling facade elements, but its parameters, such as working pressure, water flow, location, etc., require careful research to achieve maximum efficiency.

The purpose of this work is to use the PyroSim software complex to investigate the effectiveness of sprinklers for the protection of transparent structures on the facade of high-rise buildings and to determine their main parameters.

With the help of PyroSim, a detailed three-dimensional model was created, which takes into account the complex geometric shapes of the building and the impact of fire protection systems, taking into account the features of translucent facades. In the course of research, structural elements that can affect the spread of fire and smoke are also taken into account, namely the characteristics of materials, fire load, installation of window openings. PyroSim, simulating the spread of a fire, made it possible to take into account heat and smoke flows, convective effects occurring during a fire, as well as the interaction of sprinklers with the heat load.

The results of such modeling can be used to optimize the design of fire protection systems and ensure the compliance of building regulations with fire safety issues. In particular, modeling allows you to determine the most effective ways to place sprinklers, taking into account the specific conditions and structural features of the building. Thanks to this, it is possible not only to increase the level of protection of buildings against fires, but also to minimize the costs of installing and maintaining fire systems.

**Keywords:** fire, simulation, destruction, sprinkler, PyroSim.

## 1 ВСТУП

Темпи висотного будівництва, з використанням світлопрозорих конструкцій, неухильно зростають. Це явище має безліч переваг, таких як естетичність, природне освітлення, енергоефективність, панорамний вигляд. Однак, поряд з цими перевагами, зростає важливість питань пожежної безпеки. Світлопрозорі фасади, хоча і привабливі та функціональні, можуть створювати певні виклики з точки зору захисту від пожежі. При виникненні займання в одній частині будівлі, тепло може швидко передаватися через скляні конструкції до інших частин, збільшуючи ризик поширення вогню. Високі температури можуть спричинити тріщини або навіть розрив скляних конструкцій, що створює додаткові небезпеки для евакуації людей та роботи пожежних. Питання забезпечення пожежної безпеки висотних будівель є актуальним [1, 2].

Важливою складовою забезпечення безпеки є використання вогнестійких матеріалів у конструкціях рам та ущільнень світлопрозорих фасадів. Однак, навіть з урахуванням цих заходів, ефективність захисту може бути обмеженою без додаткових систем активного захисту. Одним з перспективних рішень є встановлення зрошувачів, які можуть значно підвищити рівень безпеки. Зрошувачі є частиною автоматичних систем пожежогасіння, які активуються при виявленні пожежі та забезпечують швидке охолодження конструкцій, запобігаючи їх руйнуванню та поширенню вогню.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

До заходів щодо обмеження поширення пожежі на фасаді відносяться активні та пасивні заходи протипожежного захисту будівель. До активним заходам відносять пристрій систем автоматичного пожежогасіння або водяного зрошення світлопрозорих фасадів будівель, до пасивних - конструктивні рішення фасадів або будівель, що перешкоджають виходу полум'я на фасад або локалізують його розміри в прийнятих межах (вертикальний міжповерховий пояс чи протипожежні козирки) [3].

Світлопрозорі конструкції повинні відповідати вимогам вогнестійкості, що забезпечує запобігання поширенню вогню на інші поверхи чи частини будівлі. Важливою умовою є правильне виконання стиків і з'єднань між окремими елементами фасаду для запобігання утворенню проміжків, через які може поширюватися вогонь [4]. Крім того, необхідно передбачити встановлення протипожежних бар'єрів, які ускладнюють поширення полум'я уздовж фасаду [5]. Міжповерхові пояси виконують роль бар'єрів, через які пожежа не повинна перейти на поверх. Однак у висотних будинках із зовнішнього боку виникають значні, вертикально спрямовані вітрові потоки, здатні впливати на характер зовнішньої пожежі.

Значна частина наукових праць присвячена розробці та вдосконаленню методів випробувань на вогнестійкість [6, 7]. Введення нових стандартів та протоколів тестування дозволяє отримувати більш достовірні та репрезентативні результати.

Вогнестійкість світлопрозорої конструкції залежить не тільки від вогнестійкості склопакета, але й від елементів несучих конструкцій та їх здатності чинити опір пожежі. Дослідження вогнестійкості вогнезахисних залізобетонних конструкцій [8, 9] є важливим кроком до підвищення пожежної безпеки висотних будівель з світлопрозорими конструкціями, забезпечуючи обмеження поширення вогню.

Досліджуються різні підходи до моделювання пожежних ситуацій, включаючи експериментальні випробування в лабораторних умовах та комп'ютерне моделювання [10].

Дослідники [11, 12] зосереджують свою увагу на розробці нових технологій, що підвищують вогнестійкість світлопрозорих фасадів. Використання нових матеріалів, модифікація архітектурних рішень та вдосконалення систем вентиляції та інженерних

комунікацій – все це стає об'єктом досліджень для забезпечення надійної захисту від пожежі.

Так, японський вчений [13] за результатами численних вогневих експериментів встановив, що горизонтальний козирок розміром 0,74 м, розташований над вікном приміщення, що горить, не дозволяє полум'я зруйнувати вище розташоване вікно. Результати цих досліджень зробили внесок у нормативні вимоги багатьох країн.

Зарубіжними вченими [14, 15] за результатами наукових досліджень зроблено висновок у тому, що у висоту полум'я пожежі, що виходить з вікна палаючого приміщення, впливає потужність вогнища пожежі, а також співвідношення розмірів віконного отвору. Справедливо припустити, що одним із активних методів обмеження поширення пожежі на фасаді будівлі може бути метод, заснований на зниженні розмірів (площі) віконного отвору, через який полум'я може виходити назовні.

У роботі [16] представлені наочні результати комп'ютерного моделювання, що характеризують позитивний вплив наявності козирків на обмеження впливу полум'я на фасад будівлі.

В роботі [17] наводяться результати натурних досліджень загартованого скла з використанням водяних зрошувачів. Зазначається, що система водяного спринклерного зрошення здатна підвищити стійкість скла в умовах пожежі протягом години.

Однак, водяне зрошення, як спосіб захисту, має численні протиріччя у своїй ефективності, а також вимагає врахування великої кількості критеріїв, які впливають на ефективність захисту.

### **3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ**

Метою роботи є дослідження ефективності застосування зрошувачів для захисту світлопрозорих конструкцій фасаду висотних будівель та визначити їх основні параметри.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні наукові завдання:

- проаналізувати питання забезпечення вогнестійкості світлопрозорих конструкцій;
- обґрунтувати вибір інструментальної бази для визначення ефективності захисту зрошувачами світлопрозорих конструкцій фасаду висотних будівель
- за допомогою програмного комплексу PyroSim провести моделювання пожежі висотних будівлях зі світлопрозорих конструкцій фасаду з улаштуванням зрошувачів.

### **4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ**

Пожежі у висотних будинках, що відбуваються у всьому світі, свідчать про характер їх поширення з зовнішньої сторони будівлі. Це є значним викликом для забезпечення пожежної безпеки.

На рисунках 1-5 наведені резонансні події, які пов'язані з пожежами в висотних будівлях.



**Рис. 1.** Пожежа у м. Дубаї, ОАЕ (20 липня 2016 року)



**Рис. 2.** Пожежа у будівлі Grenfell Tower м. Лондон, Великобританія (14 червня 2017 року).



**Рис. 3.** Пожежа у м. Мілан, Італія (29 серпня 2021 року).



Рис. 4. Пожежа у м. Чанша, Китай (16 вересня 2022 року).



Рис. 5. Пожежа у м. Дубаї, ОАЕ (27 червня 2023 року).

На розвиток пожежі по фасаду висотних будинків впливає: потужність вогнища пожежі (чим потужніше вогнище пожежі, тим більше тепла та полум'я виділяється, що сприяє швидшому нагріванню і займання фасадних матеріалів); горюча обробка фасаду, що використовується для облицювання, утеплення, ущільнення; зовнішні умови (вітер, конвективні потоки, які піднімають полум'я, гаряче повітря на більшу висоту вгору вздовж фасаду).

Вогнестійкість світлопрозорої конструкції є одним із основних аспектів при проектуванні і виборі матеріалів для фасадів будівель, визначаючи здатність конструкції протистояти впливу вогню протягом певного часу, запобігаючи його поширенню та забезпечуючи безпеку людей і збереження майна. Основними факторами, що впливають на вогнестійкість, є матеріали та конструктивні рішення.

Матеріали, що використовуються, включають спеціальне вогнестійке скло, яке може бути багатошаровим або ламінованим із застосуванням спеціальних плівок і наповнювачів, що здатне утримувати свою цілісність і ізолюючі властивості при високих температурах. Для рам і профілів використовуються алюмінієві або сталеві профілі з вогнестійким заповнювачем або покриттям, що підвищує їх вогнестійкість. Світлопрозорі конструкції повинні проходити обов'язкове тестування на вогнестійкість

у сертифікованих лабораторіях, де визначається час, протягом якого конструкція зберігає свої захисні властивості при впливі високих температур. Крім того, необхідно використовувати протипожежні бар'єри, ущільнювачі і герметики, що перешкоджають поширенню вогню і диму через стики і з'єднання конструкцій.

Конструктивні рішення мають враховувати тип конструкції і її взаємодію з іншими елементами будівлі, інтегруючи вогнестійкі світлопрозорі фасади з системами протипожежного захисту, такими як автоматичні системи пожежогасіння і димовидалення.

Застосування програмного комплексу PyroSim для визначення ефективності захисту зрошувачами світлопрозорих конструкцій фасаду висотних будівель полягає в проведенні детального моделювання та аналізу пожежних сценаріїв. PyroSim є потужним інструментом, що дозволяє симулювати поширення вогню та вплив систем протипожежного захисту, включаючи зрошувачі.

Використання PyroSim передбачає:

1. Створення тривимірної моделі будівлі.
2. Розміщення зрошувачів.
3. Моделювання пожежі.
4. Аналіз теплових потоків і температурних полів.
5. Візуалізація і звітність.
6. Оптимізація систем протипожежного захисту.

На основі результатів симуляції можна підібрати оптимальне розташування та параметри зрошувачів для підвищення ефективності захисту.

Використання PyroSim дозволяє здійснити комплексний аналіз ефективності захисту зрошувачами світлопрозорих конструкцій фасаду висотних будівель, забезпечуючи високий рівень протипожежної безпеки та захисту майна та життя людей.

Для визначення параметрів зрошувачів з метою захисту світлопрозорих конструкцій фасаду висотних будівель в програмному комплексі PyroSim було створено (рис. 6) фрагмент монолітної залізобетонної висотної будівлі (6 поверхів) з габаритними розмірами:

- загальна висота – 18 м;
- висота поверху – 3 м;
- ширина – 14 м;
- глибина 10 м;
- колони - 0,6 x 0,6 м
- зовнішні не несучі стіни – 0,12 м;
- перегородки – 0,12 м;
- перекриття – 0,2 м;
- довжина кімнати – 5,5 м;
- глибина кімнати – 7 м.

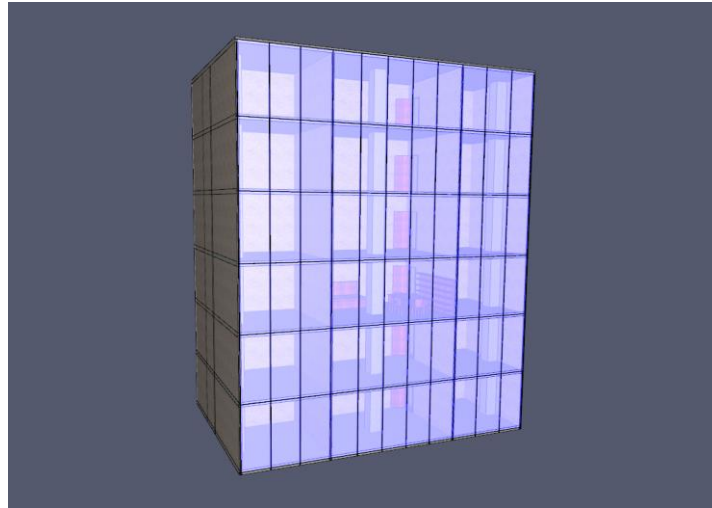


Рис. 6. Модель будинку відтвореного в PyroSim.

Основні конструктивні елементи будинку виконано з монолітного бетону типу «бетон важкий» густиною  $2280 \text{ кг/м}^3$ , питома теплоємність  $2,04 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}$  та теплопровідністю  $1,35 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ . Температура навколишнього середовища –  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Напрямок та сила відру не враховувалось.

Фасад будівлі виконано із двокамерного склопакету. Розміри вікон –  $1,3 \times 3 \text{ м}$ . Густина скла –  $2500 \text{ кг/м}^3$ . Питома теплоємність –  $0,68 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}$ . Теплопровідність –  $0,06 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ .

Для можливості визначення значень теплового потоку, що надходить від пожежі, розміщено 15 датчиків на задній від місця пожежі поверхні скла вікон (рис. 7).

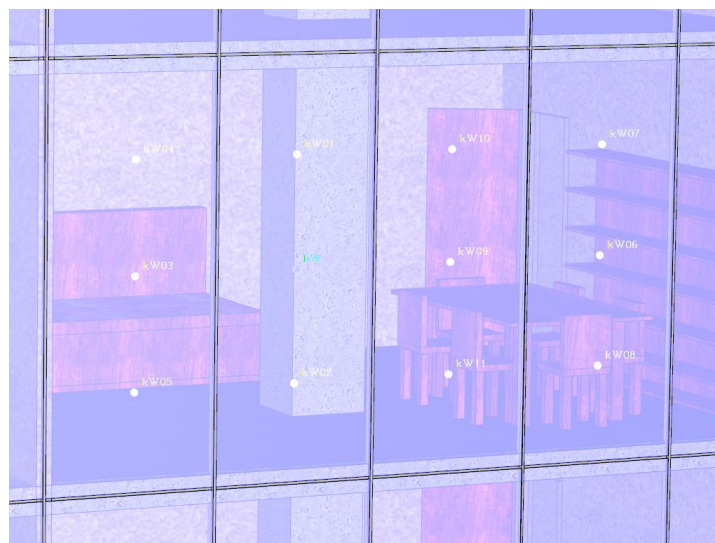


Рис. 7. Розміщення датчиків на задній від місця пожежі поверхні скла вікон.

За вихідними умовами пожежа виникає внаслідок необережного поводження під час куріння. Пожежне навантаження на поверхсі за аналітичними даними в середньому становить  $660 \text{ кВт/м}^2$  із максимальною температурою горіння  $1180 \text{ }^\circ\text{C}$ . Поширення полум'я по приміщенні відбувається із швидкістю  $0,027 \text{ м/с}$ . Під час проведення розрахунків не враховувалась робота систем протипожежного захисту, пожежа розвивалася вільно.

Відстань від зрошувачів, що розташовуються всередині по периметру зовнішніх огорожувальних світлопрозорих конструкцій фасаду, до цих конструкцій становить –  $0,5 \text{ м}$ , а відстань між зрошувачами –  $2 \text{ м}$  (рис. 8).





**Рис. 8.** Розміщення зрошувачів по периметру зовнішніх огорожувальних світлопрозорих конструкцій фасаду.

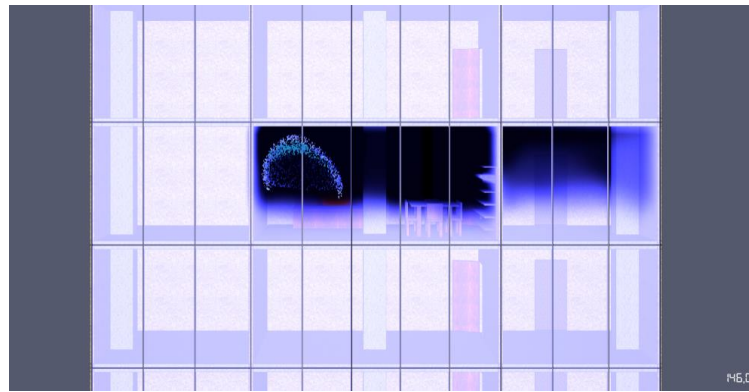
Параметри зрошувача (рис. 9):

- температура спрацювання – 74 °С;
- витрати води – 0,8 л/с;
- робочий тиск – 7 Па;
- к-фактор – 85;
- тип струминної течії – конічний.

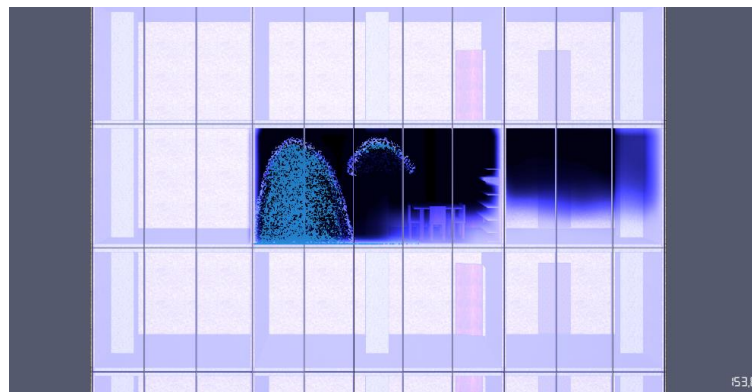


**Рис. 9.** Вигляд спринклера зрошувального.

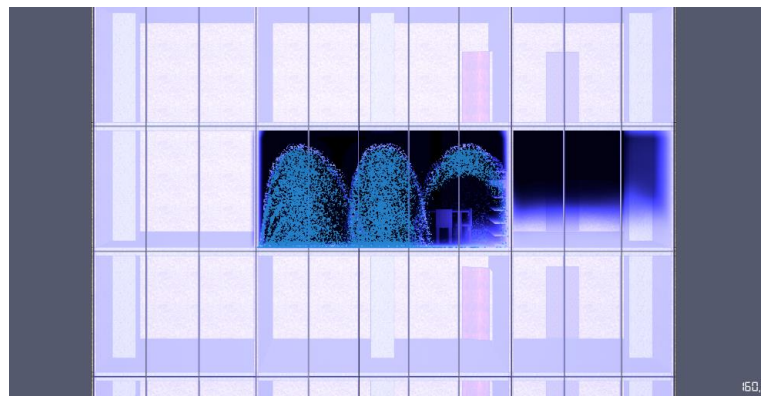
На 146 ( $\pm 1$ ) секунді від початку пожежі відбувається спрацювання першого, лівіше розташованого спринклера (рис. 10), на 133 ( $\pm 1$ ) секунді спрацьовує центральний (рис. 11) та на 134 ( $\pm 1$ ) секунді спрацьовує останній спринклер, який розташований праворуч (рис. 12).



**Рис. 10.** Графічне зображення спрацювання першого спринклера

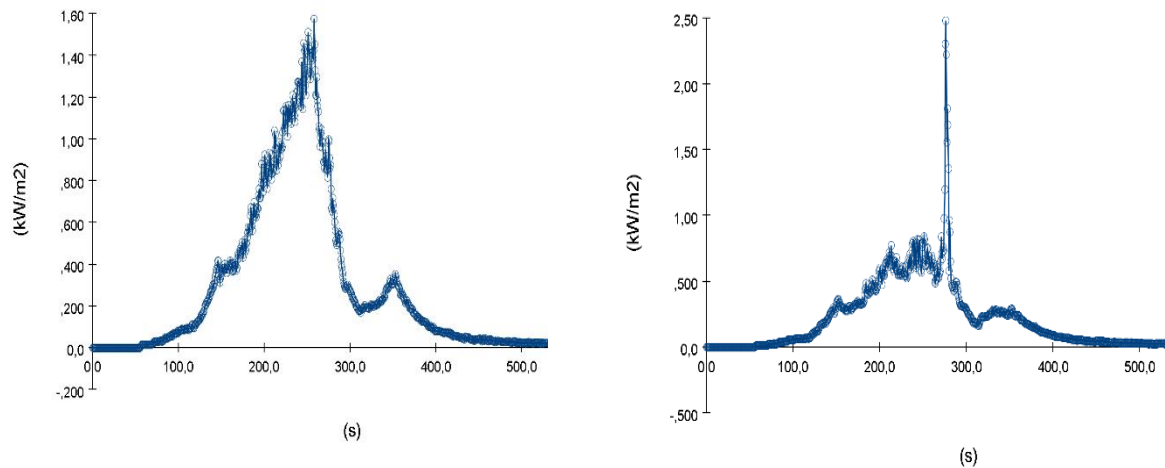


**Рис. 11.** Графічне зображення спрацювання другого спринклера



**Рис. 12.** Графічне зображення спрацювання третього спринклера

Максимальне значення падаючого теплового потоку на задній частині скла з необігрівній частині становила не більше  $2 \text{ кВт/м}^2$ , що в 20 разів менше критичного значення –  $40,3 \text{ кВт/м}^2$ , при якому опираючись на наукові дослідження не відбувається руйнування подвійного склопакета зі незагартованого скла товщиною 6 мм (рис. 13).



**Рис. 13.** Графік значень падаючого теплового потоку на задній частині скла з необігрівної частини у двох точках.

Зменшення значень теплового потоку в 20 разів від допустимих значень є результатом роботи спринклерних зрошувачів з витратою води 0,8 л/с.

В подальшому, не змінюючи умови, проведено моделювань для визначення мінімальних значень витрат води зі зрошувачів для забезпечення ефективного захисту.

Зменшуючи витрати від 0,8 л/с до 0,7 л/с, 0,6 л/с, та 0,5 л/с значення теплового потоку на задній частині скла з необігрівної частині підвищилася з 2 кВт/м<sup>2</sup> до 10,5 кВт/м<sup>2</sup>, 21,2 кВт/м<sup>2</sup>, 36,5 кВт/м<sup>2</sup> відповідно (табл. 1).

**Таблиця 1.**

Значення теплового потоку від пожежі на задній частині скла з необігрівної частині захищеного зрошувачами при різних витратах води з них

№ з/п	Витрати води зі зрошувача	Значення теплового потоку	Висновок
1	0,8 л/с	2 кВт/м <sup>2</sup>	задовольняє
2	0,7 л/с	10,5 кВт/м <sup>2</sup>	задовольняє
3	0,6 л/с	21,2 кВт/м <sup>2</sup>	задовольняє
4	0,5 л/с	36,5 кВт/м <sup>2</sup>	задовольняє

Провівши ряд чисельних розрахунків за допомогою PyroSim було визначено, що для ефективного захисту суцільного фасаду залізобетонних будівель, який виконано із подвійного склопакета зі незагартованими склом товщиною 6 мм розмірами 1,3 x 3 м, з розміщеному в ньому пожежним навантаженням 660 кВт/м<sup>2</sup> та максимальною температурою горіння 1180 °С, достатньо розмістити три зрошувачі.

Відстань від зрошувачів, що розташовуються всередині по периметру зовнішніх огорожувальних світлопрозорих конструкцій фасаду, до цих конструкцій повинна становити - 0,5 м, а відстань між зрошувачами - 2 м.

Так як під час розрахунків не було взято до уваги зміну температури навколишнього залежно від пори року, можливу зміну розташування пожежного навантаження, було умовно прийнято коефіцієнт безпеки - 1,3.

Мінімальні параметри зрошувача становили:

- температура спрацювання – 74 °С;
- витрати води – 0,6 л/с;
- робочий тиск – 7 Па;
- к-фактор – 85;
- тип струминної течії – конічний.

Зрошувачі можуть бути дуже ефективними для захисту світлопрозорих конструкцій фасаду висотних будівель.

Використання зрошувачів є важливим заходом забезпечення протипожежної безпеки. Зрошувачі можуть значно підвищити рівень захисту, запобігаючи поширенню вогню та зменшуючи шкоду від пожежі, а саме:

- сприяють охолодженню світлопрозорих конструкцій, знижуючи температуру скла і металевих профілів (це запобігає їхньому деформуванню і руйнуванню під впливом високих температур);
- зменшують теплове випромінювання;
- зменшують ризик утворення тріщин у склі через теплове навантаження, зберігаючи цілісність світлопрозорих елементів і запобігаючи їх руйнуванню;
- допомагають зменшити виділення диму та токсичних газів, що утворюються під час горіння, покращуючи умови для евакуації та роботи пожежно-рятувальних підрозділів;
- автоматичне спрацювання, забезпечує оперативність в ліквідації пожежі навіть за відсутності людей.

Зрошувачі можуть бути інтегровані з іншими протипожежними системами, такими як системи димовидалення і сигналізації, що забезпечує комплексний підхід до протипожежного захисту.

Однак, варто враховувати кілька викликів, з якими можуть зіткнутися системи зрошувачів у світлопрозорих конструкціях висотних будівель, а саме: висотні будівлі вимагають систем з високим тиском води, щоб забезпечити належне розпилювання на верхніх поверхах; постійний контакт з водою може викликати корозію металевих елементів, що вимагає використання спеціальних антикорозійних матеріалів.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Є необхідність встановлення зрошувачів, які можуть значно підвищити рівень безпеки. Зрошувачі забезпечують швидке охолодження конструкцій, запобігаючи їх руйнуванню та поширенню вогню. Слід зазначити, що водяне зрошення вимагає врахування великої кількості критеріїв, які впливають на ефективність захисту.

Вочевидь, доцільне застосування програмного комплексу PyroSim для визначення ефективності захисту зрошувачами світлопрозорих конструкцій фасаду висотних будівель полягає в проведенні детального моделювання та аналізу пожежних сценаріїв.

Використання PyroSim дозволяє здійснити комплексний аналіз ефективності захисту зрошувачами світлопрозорих конструкцій фасаду висотних будівель, забезпечуючи високий рівень протипожежної безпеки та захисту майна та життя людей.

Під час чисельного експерименту встановлено (табл. 1) величини значення теплового потоку від пожежі на задній частині скла з необігрівної частини захищеного зрошувачами при різних витратах води з них. Результати моделювання за допомогою програмного комплексу PyroSim показують правильне розташування та налаштування параметрів зрошувачів.

Використання зрошувачів є важливим заходом забезпечення протипожежної безпеки. Зрошувачі можуть значно підвищити рівень захисту, запобігаючи поширенню вогню та зменшуючи шкоду від пожежі.

Результати моделювання можуть бути використані для оптимізації проектування протипожежних систем.

## 6 ВИСНОВКИ

Світлопрозорі конструкції, такі як скляні фасади, забезпечують естетичний вигляд будівлі і максимальне використання природного освітлення, але вони також мають обмеження щодо вогнестійкості. В умовах пожежі такі конструкції можуть швидко нагріватися, що призводить до їхнього руйнування і сприяє поширенню вогню. Це створює додаткові ризики для безпеки мешканців і стійкості будівлі в цілому.

Системи водяного зрошування є ефективним методом гасіння пожежі та охолодження світлопрозорих фасадів. Результати моделювання за допомогою програмного комплексу PyroSim показують, що правильне розташування та налаштування параметрів зрошувачів можуть суттєво знизити ризик поширення вогню та зберегти конструктивну цілісність фасадів.

PyroSim є потужним інструментом для моделювання пожеж та впливу протипожежних систем на складних архітектурних об'єктах, зокрема висотних будівлях зі світлопрозорими фасадними конструкціями.

Результати моделювання можуть бути використані для оптимізації проектування протипожежних систем і забезпечення відповідності будівельних норм питанням пожежної безпеки. Це сприяє підвищенню рівня безпеки висотних будівель та мінімізації ризиків для життя і здоров'я людей.

## 7 ПОДЯКИ

Автори висловлюють щире подяку компанії Thunderhead Engineering (США) за підтримку цього дослідження.

## 8 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори статті не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

## Література

1. Полупан В.А., Рашкевич Н.В. Актуальність удосконалення системи пожежної безпеки в висотних будівлях. Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми пожежної безпеки 2022» («Fire Safety Issues 2022»). м. Харків: НУЦЗУ, 12.10.2022 р. С. 122–123.
2. Полупан В.А., Рашкевич Н.В. Важливість забезпечення пожежної безпеки висотних будівель. Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Problems of Emergency Situations». Харків: НУЦЗ України, 2023 р. С. 112–113.
3. ДБН В.2.2-41:2019 «Висотні будівлі. Основні положення». [https://online.budstandart.com/ua/catalog/doc-page?id\\_doc=84353](https://online.budstandart.com/ua/catalog/doc-page?id_doc=84353)
4. Knaack, U., Klein, T., Bilow, M., & Auer, T. (2014). *Façades: principles of construction*. Birkhäuser.
5. Čolić, A., & Pečur, I. B. (2020). Influence of horizontal and vertical barriers on fire development for ventilated façades. *Fire technology*, 56(4). 1725–1754.
6. Nguyen, Q., Ngo, T., Mendis, P., & Tran, P. (2013). Composite materials for next generation building facade systems. *Civil Engineering and Architecture*, 1(3). 88–95.
7. Anderson, J., Boström, L., Chiva, R., Guillaume, E., Colwell, S., Hofmann, A., & Tóth, P. (2021). European approach to assess the fire performance of façades. *Fire and materials*, 45(5). 598–608.
8. Отрош Ю.А., Ковальов А.І., Пурденко Р.Р., Рашкевич Н.В., Майборода Р.І. Дослідження вогнестійкості вогнезахисених залізобетонних конструкцій для підвищення рівня пожежної безпеки. *Проблеми надзвичайних ситуацій*, № 2(36). 2022. С. 102–122.

9. Степанко А.С., Отрош Ю.А., Кукузенко А.М., Рашкевич О.С., Рашкевич Н.В., Augusto Gerolin Пожежна небезпека теплоізоляційних вогнезахисних матеріалів: матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми пожежної безпеки 2022» («Fire Safety Issues 2022»). м. Харків: НУЦЗУ, 12.10.2022 р. С. 130–132.
10. Gravit, M., Klimin, N., Karimova, A., Fedotova, E., & Dmitriev, I. (2021, April). Fire resistance evaluation of tempered glass in software ELCUT. In Proceedings of International Scientific Conference on Telecommunications, Computing and Control: TELECCON 2019 (pp. 523-537). Singapore: Springer Singapore.
11. Гетун Г.В., Чухрай С.М. Новітні енергоефективні огорожувальні конструкції. Енергоефективність в будівництві та архітектурі, 4. 2013. С. 57–62.
12. Яковчук Р.С., Кагітін О.І. Заходи підвищення пожежної безпеки конструкцій фасадної теплоізоляції з вентиляльованим повітряним прошарком. 2022.
13. Yokoi, S. (1960). Study on the prevention of fire spread caused by hot upper current. Tokyo: Building Research Institute.
14. Longhua, Hu, Kaihua, Lu, Delichatsios, M., Linghui, He, & Fei, Tang. (2012). An experimental investigation and statistical characterization of intermittent flame ejecting behavior of enclosure fires with an opening. Combustion and Flame, 159(3). 1178–1184.
15. Oleszkiewicz, I. (1991). Vertical separation of windows using spandrel walls and horizontal projections. Fire Technology, 27 (4). 334–340.
16. Giraldo, M. Pilar, Avellaneda, J., Lacasta Ana M., & Rodriguez, V. (2012). Computer-simulation research on building-facade geometry for fire spread control in buildings with wood claddings. World Conference on Timber Engineering. Engineering technical, 17(1).
17. Kim, A.K., & Loughheed G.D. (1997). Fire protection of windows using sprinklers. Construction Technology Updates. Institute for Research in Construction, National Research Council of Canada, December.

## References

1. Polupan, V.A., Rashkevych, N.V. Aktual'nist' udoskonalennya systemy pozhezhnoyi bezpeky u vysotnykh budivlyakh. Materialy Mizhnarodnoyi naukovo-praktychnoyi konferentsiyi «Problemy pozhezhnoyi bezpeky 2022». Kharkiv: NUTSZU, 12.10.2022. 122–123.
2. Polupan, V.A., Rashkevych, N.V. Vazhlyvist' zabezpechennya pozhezhnoyi bezpeky vysotnykh budivel'. Materialy Mizhnarodnoyi naukovo-praktychnoyi konferentsiyi «Problemy nadzvychaynykh sytuatsiy». Kharkiv: NUTSZU Ukrainy, 2023. 112–113.
3. DBN V.2.2-41:2019 «Vysotni budivli. Osnovni polozhennya». [https://online.budstandart.com/ua/catalog/doc-page?id\\_doc=84353](https://online.budstandart.com/ua/catalog/doc-page?id_doc=84353)
4. Knaack, U., Klein, T., Bilow, M., & Auer, T. (2014). Façades: principles of construction. Birkhäuser.
5. Čolić, A., & Pečur, I. B. (2020). Influence of horizontal and vertical barriers on fire development for ventilated façades. Fire technology, 56(4). 1725–1754.
6. Nguyen, Q., Ngo, T., Mendis, P., & Tran, P. (2013). Composite materials for next generation building facade systems. Civil Engineering and Architecture, 1(3). 88–95.
7. Anderson, J., Boström, L., Chiva, R., Guillaume, E., Colwell, S., Hofmann, A., & Tóth, P. (2021). European approach to assess the fire performance of façades. Fire and materials, 45(5). 598–608.
8. Otrosh, Yu.A., Koval'ov, A.I., Purdenko, R.R., Rashkevych, N.V., Mayboroda, R.I. (2022). Do8. slidzhennya vohnestiykosti vohnezakhyschenykh zalizobetonnykh konstruktsiy dlya pidvyshchennya rivnya pozhezhnoyi bezpeky. Problemy nadzvychaynykh situatsiy, 2(36). 102–122.
9. Stepanko, A.S., Otrosh, Yu.A., Kukuzenko, A.M., Rashkevych, O.S., Rashkevych, N.V., Auhusto Herolin Pozhezhna nebezpeka teploizolyatsiynykh vohnezakhysnykh materialiv: materialy Mizhnarodnoyi naukovo-praktychnoyi konferentsiyi «Problemy pozhezhnoyi bezpeky». 2022» («Problemy pozhezhnoyi bezpeky 2022»). Kharkiv: NUTSZU, 12.10.2022 r. 130–132.
10. Gravit, M., Klimin, N., Karimova, A., Fedotova, E., & Dmitriev, I. (2021, April). Fire resistance evaluation of tempered glass in software ELCUT. In Proceedings of International Scientific Conference on Telecommunications, Computing and Control: TELECCON 2019 (pp. 523-537). Singapore: Springer Singapore.

11. Hetun, H.V., & Chukhray, S.M. (2013). Novitni enerhoefektyvni ohorodzhuval'ni konstruktsiyi. Enerhoefektyvnist' u budivnytstvi ta arkhitekturi, 4. 57–62.
12. Yakovchuk, R.S., & Kahitin, O.I. (2022). Zakhody pidvyshchennya pozhezhnoyi bezpeky konstruktsiyi fasadnoyi teploizolyatsiyi z ventilyatsiynym povitryanym prosharkom.
13. Yokoi, S. (1960). Study on the prevention of fire spread caused by hot upper current. Tokyo: Building Research Institute.
14. Longhua, Hu, Kaihua, Lu, Delichatsios, M., Linghui, He, & Fei, Tang. (2012). An experimental investigation and statistical characterization of intermittent flame ejecting behavior of enclosure fires with an opening. Combustion and Flame, 159(3). 1178–1184.
15. Oleszkiewicz, I. (1991). Vertical separation of windows using spandrel walls and horizontal projections. Fire Technology, 27 (4). 334–340.
16. Giraldo, M. Pilar, Avellaneda, J., Lacasta Ana M., & Rodriguez, V. (2012). Computer-simulation research on building-facade geometry for fire spread control in buildings with wood claddings. World Conference on Timber Engineering. Engineering technical, 17(1).
17. Kim, A.K., & Loughheed G.D. (1997). Fire protection of windows using sprinklers. Construction Technology Updates. Institute for Research in Construction, National Research Council of Canada, December.

**Майборода Роман Ігорович**

Національний університет цивільного захисту України  
викладач кафедри  
вул. Чернишевська, 94, Харків, Україна, 61023  
maiboroda.roman@ukr.net  
ORCID: 0000-0002-3461-2959

**Рашкевич Ніна Владиславівна**

Національний університет цивільного захисту України  
доктор філософії, доцент кафедри  
вул. Чернишевська, 94, Харків, Україна, 61023  
nine291085@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-5124-6068

**Отрош Юрій Анатолійович**

Національний університет цивільного захисту України  
д.т.н., професор  
вул. Чернишевська, 94, Харків, Україна, 61023  
yuriyotrosh@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-0698-2888

**Балдук Павло Георгійович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури  
к.т.н., професор кафедри  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029  
baldook.p@odaba.edu.ua  
ORCID: 0000-0002-9055-9005

*Для посилань:*

Майборода Р. І., Рашкевич Н. В., Отрош Ю. А., Балдук П. Г. Моделювання вогнезахисту світлопрозорих фасадних конструкцій з влаштуванням зрошувачів. Механіка та математичні методи, 2024.Т. VI. № 2. с. 160–174

*For references:*

R. Maiboroda, N. Rashkevich, Yu. Otrosh, P. Balduk. (2024). Modeling of fire protection of transparent facade structures with sprinklers. Mechanics and mathematical methods. VI (2). 160–174.

УДК 624

## ПРО ОБЧИСЛЕННЯ ІНСОЛЯЦІЇ ПРИМІЩЕНЬ

Патрашку Є. В.<sup>1</sup>, Колесник С. М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація:** Сонячне випромінювання має значний як позитивний, так і негативний вплив на всі процеси життєдіяльності людини. Будівництво і експлуатація споруд як житлових, так і промислових вимагає аналізу впливу сонця. Серед напрямів наукових досліджень, пов'язаних з сонячною радіацією, особливо актуальними є: сонячна енергетика, вплив сонця на огорожувальні конструкції споруд, досягнення сонячного комфорту в житлових та виробничих спорудах, забезпечення санітарно-гігієнічних норм.

Під інсоляцією розуміють величину притоку сонячної радіації, яку обчислюють в калоріях на одиницю площі горизонтальної поверхні за одиницю часу. Методи розрахунку інсоляції можна поділити на два типи: геометричні та енергетичні. Рівень інсоляції житлових приміщень регулюється державними будівельними нормами. Згідно з діючими нормами тривалість інсоляції житлових приміщень повинна становити не менше 2,5 годин в період з 22 березня по 22 вересня. В цих нормах визначені і рекомендовані методи обчислення. Вони, в основному, геометричні. Енергетичні методи обчислення інсоляції більш динамічні і зазнають змін, тому що вони враховують властивості матеріалів. А будівельні матеріали постійно модернізуються і мають різні реакції на сонячну радіацію. З іншого боку, енергетичні методи обчислення інсоляції є більш точними і враховують більше факторів, безпосередньо пов'язаних з конкретною спорудою чи приміщенням. Тому порівняльний аналіз інсоляції приміщень, обчислений різними методами є актуальною науковою проблемою. Розвиток комп'ютерних методів дослідження відкриває широкі можливості для моделювання стану інсоляції житлового приміщення на етапі проектування.

В роботі розроблено об'єктно-орієнтований метод обчислення інсоляції для житлових та виробничих приміщень. Це дає змогу побудувати просторову картину опромінення приміщення та продемонструвати вплив на цей процес зміни вхідних параметрів.

**Ключові слова:** сонячна радіація, інсоляція приміщень, проектування будівель.

## ON CALCULATING THE INSOLATION OF INDOOR SPACES

E. Patrashku<sup>1</sup>, S. Kolesnyk<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract:** Solar radiation has a significant both positive and negative impact on all processes of human life. The construction and operation of both residential and industrial buildings requires an analysis of the sun's influence. Among the areas of scientific research related to solar radiation, the following are particularly relevant: solar energy, the impact of the sun on building envelopes, achieving solar comfort in residential and industrial buildings, and ensuring sanitary and hygienic standards.

Insolation is defined as the amount of solar radiation inflow calculated in calories per unit area of a horizontal surface per unit time. Methods for calculating insolation can be divided into two types: geometric and energy-based. The insolation level of residential premises is regulated by state construction legislation. According to the current standards, the duration of insolation of residential premises should be at least 2,5 hours between 22 March and 22 September. These standards define and recommend calculation methods. They are mainly geometric. Energy-based methods for calculating insolation are more dynamic and subject to change, as they take into account the properties of materials. And building materials are constantly being modernized and have different reactions to solar radiation. On the other hand, energy-based methods of calculating insolation are more accurate and take into account more factors directly related to a particular building or room. Therefore, a





comparative analysis of indoor insolation calculated by different methods is an urgent scientific problem. The development of computer research methods opens up wide opportunities for modelling the insolation state of a dwelling at the design stage.

In this paper, an object-oriented method for calculating insolation for residential and industrial premises is developed. This makes it possible to build a spatial picture of the room's irradiation and demonstrate the impact of changes in input parameters on this process.

**Keywords:** solar radiation, indoor insolation, building design.

## 1 ВСТУП

Енергоефективність, здорове оточуюче середовище і відновлювальні джерела енергії – це мета розвитку людства. Ці цілі набувають все більшу актуальність в подальшому розвитку міського планування та будівництва. В Європі вже сьогодні в містах проживає до 75% населення і тому міста грають визначальну роль в сталому розвитку людства.

Міста ростуть, і по мірі активізації урбанізації спостерігається ущільнення, а також розширення за рахунок не міських земель. Міське планування повинно враховувати збільшення притоку людей. Прогнозується, що до 2050 року міські жителі складуть дві третини світового населення. Необхідність збереження сільського господарських угідь для вирішення проблем з продуктами харчування приводить до ущільнення існуючих забудов. Разом з тим, тенденція до ущільнення забудов негативно впливає на можливість доступу до сонячної енергії в містах, зменшуючи кількість сонячного та денного світла в жилих та виробничих приміщеннях.

Доступ до сонячних променів є важливим аспектом міської забудови. Але з точки зору міського планування це лише одна з багатьох складних проблем проектування, що включають транспорт, безпеку, шум, забруднення оточуючого середовища і багато іншого. Таким чином, планування доступу до сонячного світла вимагає простих методів для їх застосування на початкових стадіях проектування. Геометричні обмеження міського плану суттєво впливають як ззовні на споруди, так і на внутрішній стан приміщень. Можливість доступу до сонячної радіації визначається антропогенними обмеженнями та не може бути зміненим до кінця строку служби будівлі або до її реконструкції.

Вплив сонячної радіації на будівлі та їх мешканців можна зобразити в вигляді схеми (Рис.1).

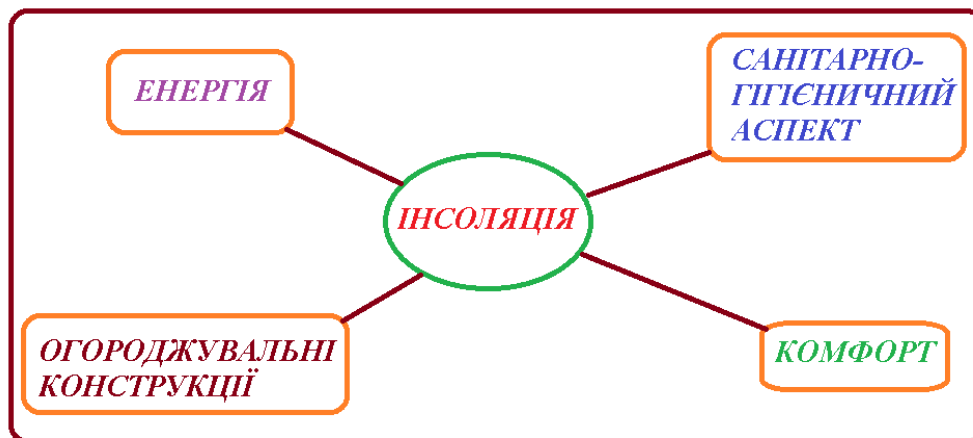


Рис.1 Аспекти впливу інсоляції

Випромінювання сонця є цінним джерелом енергії, але має і негативний вплив на огороджувальні конструкції. В Європейському Союзі відсутня законодавча база для вимірів та нормування сонячного опромінення в міських планах. Хоча існує законодавча вимога до кількості денного світла, зокрема, стандарт EN 17037 [9]. Відносно сонячного світла в Європі немає жорсткого законодавства і в різних країнах застосовуються різні підходи. Європейська рекомендація пропонує мінімальний рівень сонячного опромінювання, що досягає поверхні вікна на певний час в певну базову дату.

В цій роботі ми досліджуємо методи інсоляції приміщень з санітарно-гігієнічною метою.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Державні будівельні та санітарні норми України наведені в стандартах [1-3].

Відповідні норми Європейського Союзу для денного освітлення житлових приміщень містяться [9].

В роботах [5, 6, 8] описані геометричні методи оцінки інсоляції приміщень та споруд.

Дослідження [7, 10, 11] враховують вплив на інсоляцію додаткових факторів, зокрема, вплив тіні та інших конструкцій.

Огляд літератури за темою інсоляції житлових приміщень можна знайти в роботах [8, 10].

## 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Інсоляція приміщень забезпечує в них сприятливі санітарно-гігієнічні умови, так як викликає загибель хвороботворних бактерій, шкідливих мікроорганізмів. Також вона позитивно впливає на психофізіологічний стан людини.

В основу перших радянських норм по інсоляції були покладені мікробіологічні дослідження. Таким чином, в 1963 році була введена перша радянська норма інсоляції. Вона вимагала неперервну інсоляцію на протязі трьох годин. За період з 1963 року зникла вимога неперервності інсоляції та був зменшений мінімальний час. На сьогодні він складає не менше двох з половиною годин, тобто не менше 150 хвилин.

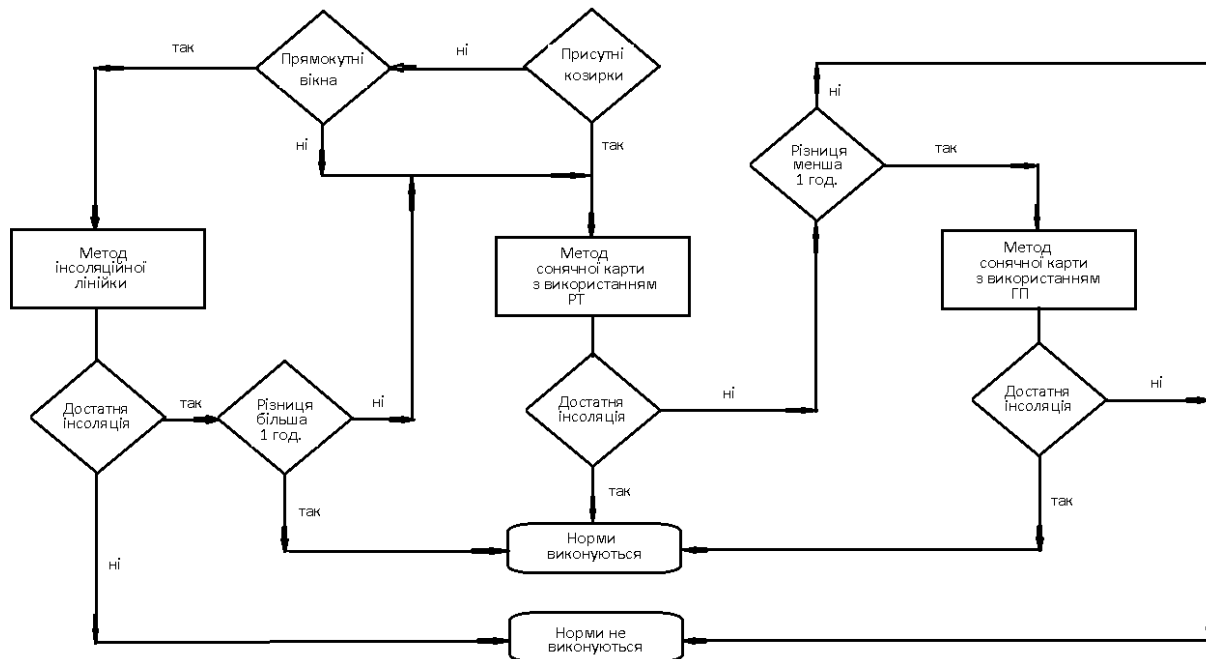
З 1 січня 2011 року в Україні діє стандарт, який регламентує розрахунки інсоляції приміщень та споруд. В розробці будівельних норм прийняли участь 27 спеціалістів з 10 наукових організацій України. В тому числі і фахівці з Одеської державної академії будівництва та архітектури. Колектив розробників складався з 19 докторів та кандидатів технічних, архітектурних, медичних та біологічних наук. Від Одеської державної академії будівництва та архітектури в роботі приймали участь кандидати технічних наук, доценти Є.В. Вітвицька та М.Т. Глікман.

До розробки будівельних норм спонукала необхідність впорядкування методів розрахунку інсоляції будівель та приміщень, що застосовуються при проектних роботах.

Гостро постало питання відсутності законодавчо закріплених правил розрахунку та питання їх місця в проектуванні. Практика вимагала розрахунків ще на етапі до проектною підготовки, при чому, як з точки зору санітарно-гігієнічних норм, так і енергозбереження. Була розроблена загальна методика дослідження, яку можна зобразити схемою (Рис. 2).

Застосування стандартизованого підходу до обчислення тривалості інсоляції є першим кроком в напрямку вдосконалення проектних робіт. Наступним кроком має стати розробка норм по розрахунку сонцезахисних методів.

Але розрахунок лише тривалості інсоляції не відповідає сучасним вимогам і можливостям. Зокрема, можливості моделювання впливу сонячної радіації на санітарно-гігієнічний та комфортний стан приміщення за допомогою програмного забезпечення.



**Рис.2** Рекомендований алгоритм використання різних методів розрахунку тривалості інсоляції приміщень при аналізі виконання санітарних норм

Нагальною є необхідність переходу до нормування кількісних показників інсоляції як з точки зору санітарно-гігієнічного впливу, так і з точки зору оптимізації теплового впливу. Саме тому, тема вивчення методів обчислення інсоляції і їх модифікація для потреб побудови якісних кількісних моделей є актуальною.

#### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Встановлено розрахункові параметри, що будуть покладені в основу енергетичного методу розрахунку інсоляції шляхом врахування інтенсивності та дози біологічно активного діапазону УФ радіації (В+С). Метод ґрунтується на визначенні такої дози УФ сонячної радіації, що пройшла через вікно в приміщення будівлі, за якої гинуть хвороботворні бактерії та шкідливі мікроорганізми, чим забезпечується нормований рівень бактерицидної ефективності (санації), як у повітрі житлових приміщень, так і на його поверхнях [5, 8].

З погляду енергії УФ опромінення, що надходить у приміщення, стає очевидною необхідність врахування прозорості шибок, площі світлоотвору (чим більша його площа, то більше енергії проникає в приміщення) та розміру приміщення (чим більший розмір приміщення, то меншою буде питома енергія, що припадає на одиницю об'єму повітря приміщення та одиницю його поверхонь). Ці параметри не враховують чинні норми з розрахунку інсоляції приміщень.

З урахуванням вищевикладеного, набув розвитку енергетичний метод з розрахунку інсоляції житлових приміщень.

Для розрахунків використовуються наступні вихідні дані.

1. Актинометричні дані щодо інтенсивності УФ сонячної радіації (діапазону < 320 нм), прямої  $J_{np}$  на нормальну до променів поверхню і розсіяної  $J_{роз}$ , що попадає на горизонтальну поверхню, розрахованої за годинами доби.

2. Орієнтація світлоотвору за сторонами горизонту (азимут нормалі до площини вікна  $A_n$ ).

3. Координати сонця ( $h_0$  і  $A_0$ ) на період інсоляції.

4. Параметри світлоотвору («у світлі»), ширина  $b$  і висота  $h$ , м.

5. Конструкція світлопрозорої частини вікон і типи скла.

6. База даних про коефіцієнти прозорості сучасного скла у діапазоні (В+С) УФ радіації за різних кутів падіння сонячного променя.

7. Параметри приміщення, глибина  $L$ , ширина  $B$  і висота  $H$ , м.

Послідовність розрахунку:

1. Визначення кута  $\theta$  (кута падіння сонячного променя на скло).

Кут  $\theta$  визначається за формулами сферичної тригонометрії

$$\cos\theta = \sin\delta \cdot \sin\varphi + \cos\gamma \cdot \cos\delta \cdot \cos\varphi,$$

де

$\varphi$  - географічна широта місцевості, град;

$\delta$  - нахил сонця, град;

$\gamma$  - часовий кут, град.

Можна використовувати спрощений метод визначення кута  $\theta$  з застосуванням схеми, поданої на рис. 3, якщо допускається невелика похибка.

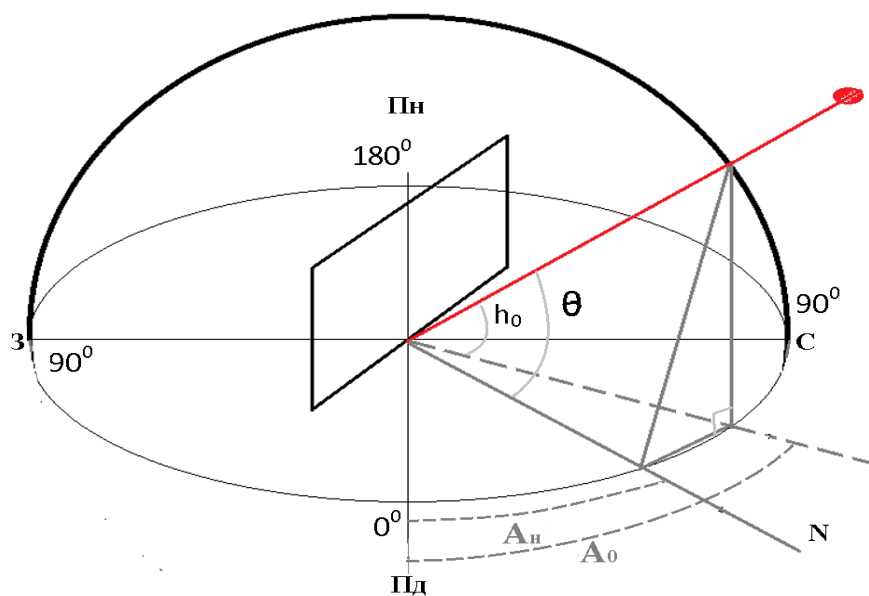


Рис. 3. Схема визначення кута  $\theta$  ( $N$  - нормаль до площини вікна)

З рис. 3 видно, що на поверхні півсфери, розташованої над колом горизонту, розташовується прямокутний трикутник. Катетами прямокутного трикутника є висота стояння сонця в дану годину доби  $h_0$  і різниця азимутів проекції сонячного променя на горизонтальну площину  $A_0$  та азимута нормалі до площини вікна  $A_n$ . Гіпотенуза цього прямокутного трикутника і дорівнюватиме куту  $\theta$ . У зв'язку з цим кут  $\theta$  визначиться за відомою теоремою Піфагора

$$\theta = \sqrt{h_0^2 + (A_0 - A_n)^2}.$$

Залежно від орієнтації вікна ( $A_n$ ) і часу доби (розташування сонця на небосхилі,  $A_0$ ) величина катета прямокутного трикутника може визначатися як різниця  $(A_0 - A_n)$ , або як різниця  $(A_n - A_0)$ .

1. Визначення сумарної інтенсивності  $J_{\text{сум}}$  УФ радіації, що приходить до фасаду будівлі з урахуванням орієнтації світлоотвору:

$$J_{\text{сум}} = J_{\text{пр}} + 0,5J_{\text{роз}} = J \cos\theta + 0,5J_{\text{роз}} \left[ \frac{\text{мВт}}{\text{м}^2} \right].$$

2. Визначення сумарної інтенсивності УФ радіації, що пройшла через віконну конструкцію в приміщення  $J_{прим}$ , з урахуванням поглинання УФ радіації у світлопрозорій конструкції.

$$J_{прим} = J_{сум} k_{сн} \left[ \frac{МВт}{м^2} \right],$$

де  $k_{сн}$  – коефіцієнт прозорості склопакета за кута  $\theta$ .

3. Повна кількість УФ енергії, що пройшла через площу вікна ( $Q$ )

$$Q = J_{прим} S,$$

4. Доза УФ радіації в повітрі приміщення ( $\Delta_n$ )

$$\Delta_n = 3,6Q \frac{\tau}{V} \left[ \frac{Дж}{м^3} \right]$$

де

$V$  - об'єм приміщення,

$\tau$  - тривалість опромінення, години.

5. Доза УФ радіації по поверхнях приміщення ( $\Delta_{пrx}$ )

$$\Delta_{пrx} = 3,6Q \frac{\tau}{F} \left[ \frac{Дж}{м^2} \right]$$

де  $F$  – площа всіх поверхонь приміщення за вирахуванням площі вікна,  $м^2$ ; 3,6 – коефіцієнт переведення розмірності  $МВт \cdot год$  у розмірність  $Дж$ .

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо приклад розрахунку інсоляції житлового приміщення. Нехай потрібно оцінити ефективність інсоляції житлового приміщення східної орієнтації в місті М (46<sup>0</sup> пн. ш.) під час опромінення впродовж 2 годин (з 7<sup>00</sup> до 9<sup>00</sup>), 22 березня.

Вихідні дані для розрахунку:

1. Параметри приміщення (ширина  $B = 3,0$  м; глибина  $L = 4,2$  м; висота  $H = 2,8$  м).

2. Параметри світлоотвору (ширина  $l = 1,9$  м; висота  $h = 1,65$  м).

3. Конструкція вікна – однокамерний склопакет.

4. Тип скла – силікатне скло Лисичанського заводу.

Послідовність розрахунку:

1. За містобудівними параметрами забудови визначається азимут нормалі до площини вікна,  $A_n = 90^\circ$  від напрямку на південь.

2. За часом опромінення визначають координати сонця середини періоду опромінення (на 8<sup>00</sup>),  $h_0 = 16,2^\circ$ ,  $A_0 = 64,4^\circ$  (від напрямку на південь).

3. За параметрами  $A_n$ ,  $h_0$  і  $A_0$  визначається кут між напрямком сонячного променя і нормою до площини вікна ( $\theta$ ) з використанням формул сферичної тригонометрії.

4. За актинометричними таблицями [4] визначається інтенсивність прямої УФ радіації діапазону  $< 320$  нм на нормальну до променів поверхню і розсіяної радіації того самого діапазону на горизонтальну поверхню, як це подано в [4] для березня місяця для широти 46<sup>0</sup>. У нашому випадку на середину періоду опромінення (на 8<sup>00</sup>): пряма  $J = 5,3$  мВт/м<sup>2</sup> і розсіяна на вертикальну поверхню  $0,5 \cdot J_{роз} = 27$  мВт/м<sup>2</sup>.

Інтенсивність прямої УФ радіації на вертикальній поверхні коригується кутом  $\theta$ :

$$J_{np} = J_{\perp} \cos \theta = 5,3 \cos 30,3 = 5,3 \cdot 0,863 = 4,6 \text{ мВт/м}^2$$

Інтенсивність сумарної УФ радіації перед фасадом східної орієнтації становитиме:

$$J_{\text{сум}} = J_{\text{пр}} + 0,5J_{\text{роз}} = 4,6 + 27 = 31,6 \frac{\text{мВт}}{\text{м}^2}.$$

5. Коефіцієнт прозорості склопакета при  $\theta = 30,3^\circ$  (див. [4]):

$$k_{\text{пр}} = k_1 + k_2 = 0,52 \cdot 0,52 = 0,27.$$

6. Інтенсивність УФ радіації в приміщенні після проходження через склопакет:

$$J_{\text{прим}} = J_{\text{сум}} k_{\text{ск}} = 31,6 \cdot 0,27 = 8,5 \text{ мВт} / \text{м}^2.$$

7. Повна кількість УФ енергії ( $Q$ ), що пройшла через площу вікна ( $S = h \cdot l, \text{м}^2$ ) у приміщення:

$$Q = J_{\text{ном}} S = 8,5 \cdot (1,69 \cdot 1,9) = 26,64 \text{ мВт}.$$

8. Доза УФ радіації під час двогодинного опромінення ( $\tau = 2$  години), отримана повітрям приміщення (об'єм приміщення  $V = LBH$  [ $\text{м}^3$ ])

$$\Delta_{\text{п}} = 3,6 \frac{Q\tau}{V} = \frac{3,6 \cdot 26,64 \cdot 2}{4,2 \cdot 3,0 \cdot 2,8} = 5,43 \text{ Дж} / \text{м}^3.$$

9. Доза УФ радіації під час двогодинного опромінення ( $\tau = 2$  години), отримана поверхнями приміщення [ $F = (2LB + 2LH + 2BH) - S$ ]:

$$\Delta_{\text{прх}} = 3,6 \frac{Q\tau}{F} = \frac{3,6 \cdot 26,64 \cdot 2}{(2 \cdot 4,2 \cdot 3,0 + 2 \cdot 4,2 \cdot 2,8 + 2 \cdot 3,0 \cdot 2,8) - 3,13} = 3,07 \text{ Дж} / \text{м}^2$$

Зіставлення отриманих доз УФ радіації з нормативними дозами для повітря приміщень ( $39 \text{ Дж} / \text{м}^3$ ) та його поверхонь ( $15 \text{ Дж} / \text{м}^2$ ) показує, що в цьому випадку рівень бактерицидної ефективності не забезпечено не для повітря приміщення  $\Delta_{\text{п}} = 5,43 < 39 \text{ Дж} / \text{м}^3$ , не для його поверхонь  $\Delta_{\text{прх}} = 3,07 < 15 \text{ Дж} / \text{м}^2$ . Збільшення тривалості інсоляції до 3 годин (з  $7^{00}$  до  $10^{00}$ ) також не дає необхідного рівня бактерицидної ефективності  $\Delta_{\text{п}} = 14,7 < 39 \text{ Дж} / \text{м}^3$ ,  $\Delta_{\text{прх}} = 8,3 < 15 \text{ Дж} / \text{м}^2$ , бо висока інтенсивність УФ-радіації в  $10^{00}$  різко знижується завдяки збільшенню кута  $\theta$ , а отже, і зниженню  $J_{\text{пр}}$  через пониження  $\cos \theta$ , а також зниженню  $J_{\text{прим}}$  через пониження  $k_{\text{ск}}$  при збільшенні  $\theta$ .

Таким чином, східну орієнтацію світлоотворів не можна вважати оптимальною.

Орієнтація світлоотворів на південно-східний напрямок краща. Якщо світловий отвір того самого приміщення орієнтувати на південний схід,  $A_{\text{н}} = 45^\circ$ , то рівень бактерицидної ефективності інсоляції залежатиме від часу доби, в який відбувається опромінення, і тривалості опромінення.

За двогодинного опромінення з  $9^{00}$  до  $11^{00}$  у повітрі приміщення доза УФ радіації залишається нижчою за норму  $\Delta_{\text{п}} = 29 < 39 \text{ Дж} / \text{м}^3$ , а поверхні приміщення отримують необхідну дозу опромінення  $\Delta_{\text{прх}} = 16,5 < 15 \text{ Дж} / \text{м}^2$ . За тригодинного опромінення з  $9^{00}$  до  $12^{00}$  повітря і поверхні приміщення отримують необхідну дозу опромінення ( $\Delta_{\text{п}} = 44,2 > 39 \text{ Дж} / \text{м}^3$ ,  $\Delta_{\text{прх}} = 25 > 15 \text{ Дж} / \text{м}^2$ ).

Рівень бактерицидної ефективності розглянутого приміщення за двогодинного опромінення буде забезпечено тільки за орієнтації світлоотвору на південь

( $\Delta_{\Pi} = 42,1 > 39 \text{ Дж} / \text{м}^3$ ,  $\Delta_{\text{прх}} = 23,8 > 15 \text{ Дж} / \text{м}^2$ ), південний схід або південний захід за малих азимутів нормалі до площини вікна ( $\Delta_{\Pi} = 39,9 > 39 \text{ Дж} / \text{м}^3$ ,  $\Delta_{\text{прх}} = 22,6 > 15 \text{ Дж} / \text{м}^2$ ). Пояснення цьому впливає з табл. 4, з якої видно, що в перші години, після сходу сонця, а також і перед заходом сонця, інтенсивність прямої радіації дорівнює нулю аж до 9-ї години ранку, а розсіяної – до 8-ї години. Цей факт підтверджує проблеми санування приміщень у ранні години доби за східної орієнтації світлоотвору і за великих азимутів нормалі до площини вікна для південно-східного напрямку.

## 6 ВИСНОВКИ

Сучасні потреби до більш щільної забудови міських територій вимагають нових методик розрахунку інсоляції житлових приміщень. Застосовувати їх потрібно як на етапі проектування будівель, так і при реконструкції. Новий етап розвитку будівельної індустрії вимагає об'єктно орієнтованих кількісних методів оцінювання інсоляції з урахуванням як мінімальних показників для забезпечення санітарно-гігієнічних вимог, так і верхніх, граничних значень для забезпечення енергоефективності та житлового комфорту. Енергетичний підхід є однією із можливостей досягнення потрібного результату.

## 7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори статті не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

## Література

1. Будинки і споруди. Настанова з розрахунку інсоляції об'єктів цивільного призначення. ДСТУ Н Б В.2.2-27:2010. (Дата введення 2011.01.01). Мінрегіонбуд України. К.: Укрархбудінформ, 2010. 81 с.
2. Санітарні норми та правила забезпечення інсоляції житлових та громадських будівель та територій житлової забудови. СН 2605-82. (Введено в дію з 2 липня 1982 р.). М.: Мінздрав СРСР. (Державні санітарні норми України), 1982. 3 с.
3. Житлові будинки. Основні положення. ДБН В.2.2.-15-2005. (Дата введення 2006.01.01). Держбуд України, К.: Укрархбудінформ, (Державні будівельні норми України), 2005. 50 с.
4. Посібник з будівельної кліматології. М.: БІ, 1977. 328 с.
5. Вітвицька О.В. Аналіз методів інсоляційних побудов. Одеса: ОДАБА, Теорія архітектури. Реставрація пам'яток, 2007, С.512-520.
6. Глікман М.Т., Арсірій А.Н., Клімчук Д.А. Принципи формування та оцінки світлопрозорих конструкцій в умовах реконструкції та модернізації будівель. Одеса: ОДАБА, Збірник СБКМД, 2006. №10. С.28-33.
7. Глікман М.Т., Гілодо А.Ю., Арсірій А.Н. Можливості вдосконалення систем природного освітлення при реконструкції та модернізації будівель. Світло люкс, 2005. №5. С. 26-28.
8. Chatzipoulka, C., & Nikolopoulou, M. Urban geometry, SVF and insolation of open spaces: London and Paris. Building Research and Information, 46(8), 2018. P. 881–898. <https://doi.org/10.1080/09613218.2018.1463015>
9. SSI, CEN. SS-EN 17037:2018+A1:2021 Daylight in buildings. European Committee for Standardization (CEN). 2021.
10. Kristiansen T., Jamil F., Nameed I.A., Hamdy M. Predicting annual illuminance and operative temperature in residential buildings using artificial neural networks, Build. Environ. 217. 2022, 109031, <https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2022.109031>.



11. Wang J., Wang Z., de Dear R., Luo M., Ghahramani A., Lin B. The uncertainty of subjective thermal comfort measurement, *Energy Build.* 181. P. 38–49, <https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2018.09.041>.

## References

1. Будинки і споруди. Настанова з розрахунку інсоляції об'єктів тсвил'ного призначення. (2010). DSTU N B V.2.2-27:2010. [Data vvedeniya 2011-01-01] / Minregionbud Ukrainy. K.: Ukrarhbudininform. (Derzhavnyj standart Ukrainy). [in Ukraine].
2. Sanitarnyye normy i pravila obespecheniya insolyatsiyej zhilyh i obshchestvennyh zdaniy i territorij zhiloy zastroyki. (1982). SN 2605-82. [Vvedeny v dejstviye so 2 iyulya 1982 g.] M.: Minzdrav SSSR. (Derzhavnye sanitarnyye normy Ukrainy). [in Ukraine].
3. Zhytlovi budynky. Osnovni polozhennya. (2005). DBN V.2.2.-15-2005. [Data vvedeniya 2006-01-01] / Derzhbud Ukrainy. K. : Ukrarhbudininform. (Derzhavni budivelni normy Ukrainy).
4. Posibnyk z budivelnoi klimatologii. (1977). M.: BI.
5. Vitvytska O.V. (2007). Analiz metodiv insoliatsiinykh pobudov. Odesa: ODABA. *Teoriia arkhitektury. Restavratsiia pamiatnykiv*. [in Ukraine].
6. Hlikman M.T., Arsirii A.N., Klimchuk D.A. (2006). Pryntsypy formuvannia svitloprozorykh konstruksii v umovakh rekonstruksii ta modernizatsii budivel. Odesa: ODABA, Zbirnyk SBKMD, 10. [in Ukraine].
7. Hlikman M.T., Glikman M.T., Arsirii A.N. (2005). Mozhlyvosti vdoskonalennia system pryrodnoho osvittlenia pry rekonstruksii ta modernizatsii budivel. *Svitlo liuks.* (5). 26-28. [in Ukraine].
8. Chatzipoulka, C., Nikolopoulou, M. (2018). Urban geometry, SVF and insolation of open spaces: London and Paris. *Building Research and Information*, 46(8). 881–898. <https://doi.org/10.1080/09613218.2018.1463015>.
9. SSI, CEN. (2021). SS-EN 17037:2018+A1:2021 Daylight in buildings. European Committee for Standardization (CEN).
10. Kristiansen T., Jamil F., Hameed I.A., Hamdy M. (2022). Predicting annual illuminance and operative temperature in residential buildings using artificial neural networks, *Build. Environ.* 217. 109031, <https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2022.109031>.
11. Wang J., Wang Z., de Dear R., Luo M., Ghahramani A., Lin B. The uncertainty of subjective thermal comfort measurement, *Energy Build.* (181). 38–49, <https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2018.09.041>.

### Патрашку Євген Вікторович

Одеська державна академія архітектури та будівництва,  
аспірант  
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029  
[patrashku07@gmail.com](mailto:patrashku07@gmail.com),  
ORCID: 009-0008-4802-2889

### Колесник Сергій Миколайович

Одеська державна академія архітектури та будівництва,  
аспірант,  
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029  
[serhiicool@gmail.com](mailto:serhiicool@gmail.com),  
ORCID: 0009-0009-5669-362

### Для посилань:

Патрашку Є. В., Колесник С. М. Про обчислення інсоляції приміщень. *Механіка та математичні методи*, 2024.Т. VI. № 2. с. 175–184.

### For references:

E. Patrashku, S. Kolesnyk. (2024). On calculating the insolation of indoor spaces . *Mechanics and mathematical methods*. VI (2). 175–184.

Наукове видання

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ  
MECHANICS AND MATHEMATICAL METHODS

Науковий журнал  
(українською та англійською мовами)

Відповідальний за випуск: Ковров А. В.

Підписано до друку 10.10.2024 р.  
Формат 60×84/8 Папір офісний Гарнітура Times  
Цифровий друк. Ум.-друк. арк. 21,39  
Наклад 50 прим. Зам. №24-23Е

Видавець і виготовлювач:  
**Одеська державна академія будівництва та архітектури**  
**Свідоцтво ДК № 4515 від 01.04.2013 р.**  
Україна, 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 4.  
тел.: (048) 729-85-34, e-mail: [rio@odaba.edu.ua](mailto:rio@odaba.edu.ua)

---

Надруковано в авторській редакції з готового оригінал-макету  
в редакційно-видавничому відділі ОДАБА