УДК 531.36, 531.38

ПРО СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ ВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДВОХ ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ ГІРОСКОПІВ ЛАГРАНЖА, ОДИН З ЯКИХ МАЄ ІДЕАЛЬНУ РІДИНУ

Кононов Ю. М[1].
[1]*Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України*

Анотація: На підставі відомих рівнянь руху системи зв'язаних гіростатів П. В. Харламова і функції стану С. Л. Соболєва виведені рівняння обертання вільної системи двох пружно пов'язаних гіроскопів Лагранжа, один із яких має довільну осесиметричну порожнину повністю заповнену ідеальною нестисливою рідиною. Тверди тіла з’єднані пружним відновлювальним сферичним шарніром. Виведено трансцендентне характеристичне рівняння збуренного рівномірного обертання розглядованної механічної системи. З урахування основного тону коливання рідини отримано характеристичне рівняння п’ятого порядку. На підставі критерію Льєнара – Шіпара, записаного в іннорному вигляді, виписані у вигляді системи чотирьох нерівностей необхідні умови стійкості рівномірного обертання гіроскопів Лагранжа та рідини. Відносно коефіцієнта пружності ці нерівності моють відповідно 1, 3, 6 та 8 ступені. Проведені аналітичні дослідження старших коефіцієнтів умов стійкості. Показано, що коли центр мас першого твердого тіла з рідиною або другого не співпадають з загальною точкою цих тіл, то при досить великих значення коефіцієнта пружності завжди будуть виконані необхідні умови стійкості. При відсутності пружності у шарнірі характеристичне рівняння має двократний нуловий корінь і в цьому разі умови стійкості потребують додаткових досліджень. Отримані умови стійкості є точними для еліпсоїдальної порожнини і наближеними для інших осесиметричних порожнин. Для уточнення отриманих умов стікості в цьому разі потрібно враховувати додаткові тони коливання ідеальної рідини.

Ключові слова: вільна системи двох гіроскопи Лагранжа, ідеальна рідина, пружний сферичний шарнір, рівномірне обертання, необхідні умови стійкості.

ON THE STABILITY OF THE ROTATION OF THE FREE SYSTEM OF TWO ELASTIC LAGRANGE GYROSCOPES, ONE OF WHICH HAS AN IDEAL LIQUID

Yu. Kononov[1]
[1]*Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine*

Abstract: On the basis of the known equations of motion of the system of coupled gyrostats by P. V. Kharlamov and the state function by S. L. Sobolev, the equations of rotation of a free system of two elastically coupled Lagrange gyroscopes were derived, one of which has an arbitrary axisymmetric cavity completely filled with an ideal incompressible fluid. The rigid bodies are connected by an elastic restoring spherical hinge. A transcendental characteristic equation of the perturbed uniform rotation of the mechanical system under consideration is derived. Taking into account the fundamental tone of the fluid oscillation, a characteristic equation of the fifth order is obtained. On the basis of the Liénard – Chipart criterion written in the inor form, the necessary conditions for the stability of the uniform rotation of the Lagrange gyroscopes and the fluid are written out as a system of four inequalities. With respect to the elasticity coefficient, these inequalities have degrees 1, 3, 6 and 8, respectively. Analytical studies of the leading coefficients of these stability conditions are carried out. It is shown that when the center of mass of the first solid body with liquid or the second does not coincide with the common point of these bodies, then at sufficiently large values of the elasticity coefficient the necessary stability conditions will always be satisfied. In the absence of elasticity in the hinge, the characteristic equation has a double zero root and in this case the stability conditions require additional studies. The obtained stability conditions are exact for an ellipsoidal cavity and approximate for other axisymmetric cavities. To clarify the obtained glass conditions for these voids, it is necessary to take into account additional tones of oscillation of an ideal liquid.

Keywords: the free system of two gyroscopes of Lagrange, an ideal liquid, an elastic spherical hinge, uniform rotation, the necessary conditions for stability.

1 ВСТУП

Данна стаття узагальнює результати роботи [1] на випадок, коли один із гіроскопів Лагранжа має довільну осесиметричну порожнину повністю заповнену ідеальною нестисливою рідиною. На підставі відомих рівнянь П. В. Харламова і функції стану С. Л. Соболєва отримано трансцендентне характеристичне рівняння збуренного рівномірного обертання розглядованної механічної системи. З урахування основного тону коливання ідеальної рідини отримано характеристичне рівняння п’ятого порядку ій проведено його аналітичне дослідження. У статті [1] преведено дуже добрий огляд робіт по дослідженню динаміка та стійкість руху систем зв'язаних твердих тіл та систем твердих тіл з рідиною. Доповнимо цей огляд тільки останніми та необхідними статтями.

У статтях [2, 3] та багато інших дослідження обертання твердого тіла та ідеальної рідини проводилися одночасно з рішенням рівнянь у частинних похідних, що дуже ускладнювало ці дослідження. Тому досить повно було проаналізовано лише випадок еліпсоїдальної порожнини. У роботах [4-6] аналогічні дослідження були проведені на підставі модального аналізу. Було отримано зліченну систему ЗДР, коефіцієнти яких визначаються рішеннями крайових задач гідродинаміки, які не залежать від часу та параметрів обертального руху твердого тіла. Таке відділення тимчасової координати від просторових координат дозволяє розглядати довільний збурений рух твердого тіла, а рішення крайових завдань знаходити для порожнин довільної форми. Отримані крайові задачі мають щільний спектр власних значень, розташованих на позитивній та негативній частинах дійсної осі. Наведено аналітичне рішення цих крайових завдань для еліпсоїдальної, софокусно-еліпсоїдальної, циліндричної та конічної порожнин. Побудовані області нестійкості рівномірного обертання вільного твердого тіла з рідиною для еліпсоїдальної та циліндричної порожнин. Зроблено висновок про стійкість обертання твердого тіла щодо осі з найбільшим моментом інерції та слабкої нестійкості, крім головних областей сильної нестійкості при обертанні щодо осі найменшого моменту інерції. Показано, що у разі еліпсоїдальної порожнини та порожнини, утвореної софокусними еліпсоїдами обертання, з нескінченного спектру власних частот збуджується єдина гармоніка, а у разі циліндричних та конічних порожнин цих гармонік нескінченно багато. Слід зазначити добрий кількісний збіг теоретичних розрахунків [2-5] з експериментальними даними [6, 7].

На підставі відомих рівнянь руху системи гіростатів П. В. Харломова [8] і роботи [9] у статтях [10, 11] були узагальнені результати робіт [2-6] на системи зв’язаних твердих тіл з ідеальною рідиною. В монографії [12] з єдиних позицій викладено підхід до задач про рух систем твердих тіл. Розглянуто моделі, що допускають різноманітні з'єднання тіл та їх загальні просторові рухи. Стаття [13] присвячена дослідженню стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором вільної системи двох твердих тіл, з’єднаних пружним відновлювальним сферичним шарніром. У роботі [14] показана можливість стабілізації нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною другим гіроскопом. В [15] представлений уніфікований і добре розроблений підхід до динаміки кутових рухів твердих тіл, що зазнають моментів збурення різної фізичної природи. В статті [16] розглянуто рух навколо центру мас сфероїда з порожниною, заповненою в’язкою рідиною. Асимптотичний підхід дозволяє отримати деякі якісні результати та описати нелінійну еволюцію кутового руху за допомогою спрощених усереднених рівнянь.

У даній статті продовжуються дослідження стійкості руху вільної системи двох твердих, які були розпочаті в роботах [1, 9-14]. Слід зазначати, що в роботах [9-12, 14] був застосован пружний шарнір Гука, а в статтях [1, 13] – пружний сферичний шарнір. У цій статті враховуються такі властивості пружного сферичного шарніра, які забезпечують рівність проекції кутових швидкостей гіроскопів на їхні осі симетрії. Це дозволяє дослідити вплив пружності шарніра на стійкість рівномірного обертання всієї системи.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

Розглянемо вільний рух двох пружно зв’язаних осесиметричних твердих тіл S_1 і S_2. Твердо тіло S_1 має осесиметричну порожнину τ, яка повністю заповнена нестисливою ідеальної рідиною. Тілами S_1 і S_2 мають спільну точку O_2. Розглядувана механічна система є системою гиростатів. Запишемо теорему про зміну моменту кількості руху і кількості руху для тіла S_i $(i=1,2)$. Для цього звільнимось від в'язів в точках O_2. Позначимо через $-\mathbf{R}_2$ і $-\mathbf{L}_2$ головний вектор і головний момент сил реакції в'язі, що діють на тіло S_1 з боку тіла S_2. Рівняння руху центру мас та рівняння зміни моменту кількості руху тіла S_i відносно центру мас тіла, точки C_i мають вигляд [8-10, 13, 14]:

$$m_i\dot{\mathbf{V}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i+1}; \tag{1}$$

$$(\mathbf{J}_i\boldsymbol{\omega}_i + (2-i)\boldsymbol{\lambda})^{\square} = \mathbf{M}_i + \mathbf{L}_i - \mathbf{L}_{i+1} - \mathbf{c}_i \times (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i+1}) \quad (i=1,2). \tag{2}$$

Тут $\mathbf{J}_i$ – центральний тензор інерції твердого тіла S_1з рідиною і відповідно твердого тіла S_2; $\boldsymbol{\lambda} = \rho\int_\tau \mathbf{r}\times\mathbf{u}\,d\tau$ – гіростатичний момент рідини; $\mathbf{u}$– вектор відносної швидкості рідини в порожнині τ_i; $\boldsymbol{\omega}_i$ – кутова швидкість твердого тіла S_i; $m = m_1 + m_2$ – маса всієї системи, $\mathbf{c}_1 = \overrightarrow{C_1O_2}$, $\mathbf{c}_2 = \overrightarrow{O_2C_2}$, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_3 = 0$, $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_3 = 0$; точкою «□» позначена абсолютна похідна.

Система рівнянь (2), з урахуванням (1), буде мати вигляд:

$$(\mathbf{J}_1\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\lambda})^{\square} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{L}_2 - \mathbf{c}_1 \times \left(m_2\mathbf{F}_1 - m_1\mathbf{F}_2 + m_2\dot{\mathbf{f}}_2\right)\big/ m;$$

$$(\mathbf{J}_2\boldsymbol{\omega}_2)^{\square} = \mathbf{M}_2 + \mathbf{L}_2 - \mathbf{c}_2 \times \left(m_2\mathbf{F}_1 - m_1\mathbf{F}_2 + m_2\dot{\mathbf{f}}_2\right)\big/ m, \tag{3}$$

де $\mathbf{f}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times m_1\mathbf{c}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times m_1\mathbf{c}_2$.

Зв’яжемо з кожним із тіл S_i незмінно базис $\mathbf{e}_1^i\mathbf{e}_2^i\mathbf{e}_3^i$ з вершиною в точці C_i, осі якого направимо по головних осях тензора інерції $\mathbf{J}_i$ і введемо нерухомий базис $\mathbf{e}_1^0\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$, вектор $\mathbf{e}_3^0$ якого протилежний вектору прискорення вільного падіння. Будемо вважати, що треті головні осі інерції проходять для тіл S_1 і S_2 через точку O_2, тобто будемо вважати, що центр мас тіл S_i лежить на цих осях. Нехай тверди тіла S_1 і S_2 пов’язані в точці O_2 пружним відновлювальним сферичним шарніром ($\boldsymbol{L}_2 = -k\,\boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{c}_2 \big/ (|\mathbf{c}_1||\boldsymbol{c}_2|)$, $k \ge 0$), який буде частково моделювати пружний шарнір Гука ($\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$), де $\omega_{0i} = \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{c}_i$.

Векторні рівняння (3) в проекціях на осі рухомого базису $\mathbf{e}_1^i\mathbf{e}_2^i\mathbf{e}_3^i$ приймуть вигляд:

$$A_1'\dot{p}_1+(C_1-A_1')r_1q_1+\mu\left[(\dot{p}_2-r_2q_2)\alpha_{22}^{12}-(\dot{q}_2+r_2p_2)\alpha_{21}^{12}+(p_2^2+q_2^2)\alpha_{23}^{12}\right]+Q_1=-k\alpha_{32}^{21};$$

$$A_1'\dot{q}_1-(C_1-A_1')r_1p_1-\mu\left[(\dot{p}_2-r_2q_2)\alpha_{12}^{12}-(\dot{q}_2+r_2p_2)\alpha_{11}^{12}+(p_2^2+q_2^2)\alpha_{13}^{12}\right]+Q_2=-k\alpha_{31}^{21};$$

$$A_2'\dot{p}_2+(C_2-A_2')r_2q_2+\mu\left[(\dot{p}_1-r_1q_1)\alpha_{22}^{21}-(\dot{q}_1+r_1p_1)\alpha_{21}^{21}+(p_1^2+q_1^2)\alpha_{23}^{21}\right]=-k\alpha_{32}^{21}; \quad (4)$$

$$A_2'\dot{q}_2-(C_2-A_2')\omega_{02}p_2-\mu\left[(\dot{p}_1-r_1q_1)\alpha_{12}^{21}-(\dot{q}_1+r_1p_1)\alpha_{11}^{21}+(p_1^2+q_1^2)\alpha_{23}^{21}\right]=-k\alpha_{31}^{21};$$

$$C_1\dot{r}_1+Q_3=0;\ C_2\dot{r}_2=0. \quad (5)$$

Тут p_i, q_i, r_i – проекції вектора кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}_i$ на вісі $\mathbf{e}_1^i\mathbf{e}_2^i\mathbf{e}_3^i$; $A_i'=A_i+m_1m_2c_i^2/m$; $\mu=m_1m_2c_1c_2/m$; $Q_j=(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\lambda}+\dot{\boldsymbol{\lambda}})\cdot\mathbf{e}_j^1$; $\alpha_{\mu\kappa}^{ij}=\mathbf{e}_\mu^i\cdot\mathbf{e}_\kappa^j$ – напрямні косинуси. Коефіцієнти $\alpha_{\mu\kappa}^{ij}$ можна виразити через $\alpha_{\mu\sigma}^{i0}$ і $\alpha_{\mu\sigma}^{j0}$ наступним чином $\alpha_{\mu\kappa}^{ij}=\sum_{\sigma=1}^{3}\alpha_{\mu\sigma}^{i0}\alpha_{k\sigma}^{j0}$ [9].

До системи рівнянь (4) потрібно додати рівняння для напрямних косинусів [9]:

$$\dot{\alpha}_{11}^{i0}=-q_i\alpha_{31}^{i0}+r_i\alpha_{21}^{i0};\quad \dot{\alpha}_{21}^{i0}=p_i\alpha_{31}^{i0}-r_i\alpha_{11}^{i0};$$

$$\dot{\alpha}_{12}^{i0}=-q_i\alpha_{32}^{i0}+r_i\alpha_{22}^{i0};\quad \dot{\alpha}_{22}^{i0}=p_i\alpha_{32}^{i0}-r_i\alpha_{12}^{i0};$$

$$\dot{\alpha}_{13}^{i0}=-q_i\alpha_{33}^{i0}+r_i\alpha_{23}^{i0};\quad \dot{\alpha}_{23}^{i0}=p_i\alpha_{33}^{i0}-r_i\alpha_{13}^{i0}; \quad (6)$$

$$\dot{\alpha}_{31}^{i0}=-p_i\alpha_{21}^{i0}+q_i\alpha_{11}^{i0};\quad \dot{\alpha}_{32}^{i0}=-p_i\alpha_{22}^{i0}+q_i\alpha_{12}^{i0};$$

$$\dot{\alpha}_{33}^{i0}=-p_i\alpha_{23}^{i0}+q_i\alpha_{13}^{i0}.$$

Система (4) – (6) допускає розв’язки:

$$p_i=q_i=0;\ r_i=\omega_0;\ \boldsymbol{u}=0\ (Q_j=0),$$

$$\alpha_{11}^{i0}=\cos\omega_0 t;\ \alpha_{12}^{i0}=\sin\omega_0 t;\ \alpha_{13}^{i0}=0;$$

$$\alpha_{21}^{i0}=-\sin\omega_0 t;\ \alpha_{22}^{i0}=\cos\omega_0 t;\ \alpha_{23}^{i0}=0;\alpha_{31}^{i0}=0;\ \alpha_{32}^{i0}=0;\ \alpha_{33}^{i0}=1,$$

які відповідають рівномірному обертанні твердих тіл і рідини як одного цілого з кутовою швидкостю ω_0 навколо вертикалі.

3 ЦІЛІ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

У даній статті будуть продовжені дослідження стійкості рівномірних обертань вільної системи двох твердих, які були розпочаті в роботах [1, 9-14]. Слід зазначати, що в роботах [9-12, 14] був застасован пружний шарнір Гука, а в статтях [1, 13] – пружний сферичний шарнір. У цій статті враховуються такі властивості пружного сферичного шарніра, які забезпечують рівність проекції кутових швидкостей гіроскопів на їхні осі симетрії. Це дозволяє дослідити вплив пружності шарніра на стійкість рівномірного обертання всієї системи.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Отримано трансцендентне характеристичне рівняння збуреного рівномірного обертання системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа, один з яких має довільну осесиметричну порожнину, повністю заповнену ідеальною нестисливою рідиною. З урахуванням основного тону коливання рідини проведені аналітичні дослідження умов стійкості рівномірного обертання цієї системи. Показано, що коли центр мас першого твердого тіла з рідиною або другого не збігається з спільною точкою твердих тіл, то при досить великих значеннях коефіцієнта пружності завжди будуть виконуватися необхідні умови стійкості. Отримані умови стійкості є точними для еліпсоїдної порожнини та наближеними для інших осесиметричних порожнин.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ. УМОВИ СТІЙКОСТІ РІВНОМІРНИХ ОБЕРТАНЬ ДВОХ ГІРОСКОПІВ ЛАГРАНЖА

Нехай в збуреному русі $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\Omega}_i$. де $|\boldsymbol{\Omega}_i|$ є величина першого порядку малості порівняно з $|\boldsymbol{\omega}_0|$. В цьому випадку рівняння (5) відокремлюється від інших рівнянь.

Запишемо рівняння (4) – (6) для збуреного руху, зберігаючи для змінних їхні попередні позначення:

$$\begin{aligned}
&A_1'\dot p_1 + (C_1 - B_1')\omega_0 q_1 + \mu(\dot p_2 - \omega_0 q_2) + Q_1 = -k\alpha_{23}^{10};\\
&A_1'\dot q_1 - (C_1 - A_1')\omega_{01} p_1 - \mu(\dot p_2 - \omega_{02} q_2) + Q_2 = -k\alpha_{13}^{10};\\
&A_2'\dot p_2 + (C_2 - A_2')\omega_0 q_2 + \mu(\dot p_1 - \omega_{01} q_1) = -k\alpha_{23}^{20};\\
&A_2'\dot q_2 - (C_2 - A_2')\omega_0 p_2 - \mu(\dot p_1 - \omega_0 q_1) = -k\alpha_{13}^{20};\\
&\dot\alpha_{13}^{i0} = \omega_0\alpha_{23}^{i0} - q_i;\ \dot\alpha_{23}^{i0} = -\omega_0\alpha_{13}^{i0} + p_i\ \ (i = 1, 2).
\end{aligned} \tag{7}$$

Згідно робіт [4, 5], у разі осесиметричної порожнини τ гіростатичний момент ідеальної рідини $\boldsymbol{\lambda}$ має вигляд $\boldsymbol{\lambda}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t)\boldsymbol{a}_n$, $\boldsymbol{a}_n = (a_n, -a_n)$, де $Q_2 = iQ_1$, $Q_3 = 0$, $Q_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\dot S_n - i\omega_0 S_n)$, $\lambda_n = 2\omega_0/\kappa_n$, власним числам κ_n, що заповнюють всюди щільно область $|\kappa_n| \ge 1$ дійсної осі, визначаються лише геометрією порожнини τ.

Коефіцієнти розкладання $S_n(t)$ знаходяться при розв'язуванні наступної зліченної системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь [4, 5]

$$N_n^2(\dot S_n - i\lambda_n S_n) + \boldsymbol{a}_n \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_1 = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots, \infty). \tag{8}$$

Перейдемо до нових змінних $\Omega_i = q_i' - ip_i'$, $\gamma_i = \alpha_{13}^i + i\alpha_{23}^i$, $S_n' = e^{-i\varphi} S_n$, $p_i' = p_i \sin\varphi + q_i \cos\varphi$, $q_i' = p_i \cos\varphi - q_i \sin\varphi$, $\alpha_{13}^i = \alpha_{13}^{0i}\sin\varphi + \alpha_{23}^{0i}\cos\varphi$, $\alpha_{23}^i = \alpha_{13}^{0i}\cos\varphi - \alpha_{23}^{0i}\sin\varphi$ $(\varphi = \omega_0 t)$, тоді система рівнянь (7)–(8) у нових змінних може бути записана наступним чином:

$$A_1'\ddot\gamma_1 + (i\tilde C_1 + k)\gamma_1 + \mu\ddot\gamma_2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \dot S_n' = 0;$$

$$A_2'\ddot{\gamma}_2+(i\tilde{C}_2+k)\dot{\gamma}_2+\mu\ddot{\gamma}_1=0; \tag{9}$$
$$\dot{S}_n'+i(\omega_0-\lambda_n)S_n'+(\ddot{\gamma}_1+i\omega_0\dot{\gamma}_1)a_n\Big/N_n^2=0 \quad (n=1,2,...),$$

де $\dot{\gamma}_i=\Omega_i$, $\tilde{C}_i=C_i\omega_0$.

Представивши шукані функції у вигляді $a\,\mathrm{e}^{\lambda t}$, запишемо характеристичне рівняння збуреного руху (9)

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu\lambda^2 \\ \mu\lambda^2 & F_2 \end{vmatrix}=0. \tag{10}$$

Тут

$$F_1=A_1'\lambda^2+i\tilde{C}_1\lambda+k-\lambda^2(i\lambda-\omega_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_n}{i\lambda-\tilde{\lambda}_n},\ E_n=\frac{2a_n^2}{N_n^2};\ \tilde{\lambda}_n=\left(1-\lambda_n\right)\omega_0;$$
$$F_2=A_2'\lambda^2+i\tilde{C}_2\lambda+k.$$

Із рівняння (10) слід, що при $\mu=0$ воно розпадається на два рівняння $F_1=0$ і $F_2=0$. Перше рівняння описує коливання одного гіроскопа Лагранжа з рідиною на який діє відновлювальний момент, а друге – гіроскопа Лагранжа без рідини на який теж діє відновлювальний момент. Це може бути, коли центр мас першого тіла або другого співпадає з загальною точкою O_2: $c_1=0$ або $c_2=0$.

У більшості практично важливих випадках основний ефект впливу рідини на рух твердого тіла можна врахувати, розглядаючи тільки основний тон коливання рідини λ_{i1}. У роботі [5] було досліджено збіжність рядів у характеристичному рівнянні (10) для циліндричної порожнини і оцінено вплив більш високих тонів на стійкість обертання твердого тіла. Показано, що за певних умов додавання нових тонів коливань рідини призводить до незначної кількісної зміни області нестійкості. Як було зазначено у вступі, що у випадку еліпсоїдальної порожнини та порожнини, утвореної співфокусними еліпсоїдами, з нескінченного спектру власних частот λ_n на рух твердого тіла впливає лише основна частота λ_1 ($E_n=0$ при $n\neq1$) [2-5].

При $n=1$ рівняння (10) отримає вигляд

$$a_5\lambda^5+ib_4\lambda^4+a_3\lambda^3+ib_2\lambda^2+a_1\lambda+ib_0=0. \tag{11}$$

Тут

$$a_5=A_1^*A_2'-\mu^2>0;\ b_4=C_1^*A_2'+\tilde{C}_2A_1^*+a_5\tilde{\lambda}_1;\ a_3=\left(A_1^*+A_2'\right)k-C_1^*\tilde{C}_2-\left(\tilde{C}_1A_2'+\tilde{C}_2A_1'\right)\tilde{\lambda}_1;$$
$$b_2=\left(\tilde{C}_1+\tilde{C}_2\right)k+\left[\left(A_1'+A_2'\right)k-\tilde{C}_1\tilde{C}_2\right]\tilde{\lambda}_1;\ \ a_1=\left[k-\left(\tilde{C}_1+\tilde{C}_1\right)\tilde{\lambda}_1\right]k;\ \ b_0=\tilde{\lambda}_1k^2;$$
$$A_1^*=A_1'-E_1>0;\ C_1^*=\tilde{C}_1-\tilde{E}_1;\ \tilde{E}_1=E_1\omega_0.$$

Стійкість консервативних систем визначається тим, що корені рівняння (11) повинні знаходитися на уявній осі. Для цього в рівнянні (11) покладемо $\lambda=i\sigma$ і це рівняння матиме вигляд

$$a_5\sigma^5+b_4\sigma^4-a_3\sigma^3-b_2\sigma^2+a_1\sigma+b_0=0. \tag{12}$$

Для того, щоб всі нулі рівняння (12) були різні і лежали на дійсній осі, згідно критерію Льєнара-Шіпара, записаного в іннорному вигляді [17], необхідно і достатньо, щоб матриця девьятого порядку, яка складена з коефіцієнтів цього рівняння, була іннорно-позитивною, тобто щоб були позитивно визначені матриці $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5, \Delta_7$ і Δ_9:

$$I_1 = |\Delta_1| = 5a_5 > 0;$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_5 & b_4 & -a_3 \\ 0 & 5a_5 & 4b_4 \\ 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 \end{vmatrix} > 0; \tag{13}$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 \\ 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 \\ 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 \\ 0 & 5a & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 \\ 5a & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 \end{vmatrix} > 0; \tag{14}$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 \\ 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 \\ 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 & 0 \\ 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0; \tag{15}$$

$$I_9 = |\Delta_9| = \begin{vmatrix} a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_4 & -a_3 & -b_2 & \tilde{a}_1 & b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 5a_5 & 4b_4 & -3a_3 & -2b_2 & \tilde{a}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_5 \tilde{I}_9 k^2 > 0. \tag{16}$$

Так як $a_5 > 0$, то $I_1 > 0$ і необхідні умови стійкість рівномірних обертань двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа, один із яких має рідину, визначається чотирьма нерівностями (13)-(16).

При відсутності пружності у шарнирі ($k = 0$) маємо $b_0 = a_1 = 0$ і рівняння (11) має двократний нуловий корінь. В цьому разі умови стійкості потребують додаткових досліджень.

Запишемо умови стійкості (13)-(16) відносно коефіцієнта пружності сферичного шарніру k:

$$I_{31}k + I_{30} > 0;$$
$$I_{53}k^3 + I_{52}k^2 + I_{51}k + I_{50} > 0;$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2024-6-2-6-17

$$I_{76}k^6+I_{75}k^5+...+I_{71}k+I_{70}>0; \tag{17}$$
$$\left(\tilde{I}_{98}k^8+\tilde{I}_{97}k^7+...+\tilde{I}_{91}k+\tilde{I}_{90}\right)k^2>0,$$

де

$$I_{31}=5(A_1^*+A_2')a_5>0;\ I_{53}=4a_5\left(f_5+10\mu^2\right);$$
$$I_{76}=4a_5\left(10\mu^2+f_5\right)\left(f_7+4\mu^2\right);\tilde{I}_{98}=16a_5\left(f_7+4\mu^2\right)^2; \tag{18}$$
$$f_5=3A_1^{*2}-5A_1^*A_2'+3A_2'^2>0;\ f_7=(A_1^*-A_2')^2>0.$$

Інші коефіцієнти не наведено через їхню громіздкість.

Із нерівностей (18) випливає, що при $\mu\neq 0$ старші коефіцієнти I_{31},I_{53}, I_{76} і $\tilde{I}_{98}$ нерівностей (17) додатні і при збільшені коефіцієнта пружності k ці нерівності завжди будуть виконані.

Таким чином, необхідні умови стійкості рівномірного обертання двох пружно зв’язаних гіроскопів Лагранжа, один з яких має ідеальну рідину, завжди будуть виконані при досить великих значеннях коефіцієнта пружності шарніра за умови, що центр мас першого гіроскопа з рідиною або другого не збігається з їх загальною точкою.

6 ВИСНОВКИ

Виведені рівняння обертання вільної системи двох пружно пов'язаних гіроскопів Лагранжа, один із яких має довільну осесиметричну порожнину повністю заповнену ідеальною нестисливою рідиною. Тверди тіла з’єднані пружним відновлювальним сферичним шарніром. Виведено трансцендентне характеристичне рівняння збуренного рівномірного обертання розглядованної механічної системи. Показано, що коли центр мас першого твердого тіла з рідиною або другого співпадають із загальною точкою цих твердих тіл, то характеристичне рівняння розпадається на два рівняння. Перше рівняння описує коливання одного гіроскопа Лагранжа з рідиною на який діє відновлювальний момент, а друге – одного гіроскопа Лагранжа без рідини на який теж діє відновлювальний момент. З урахування основного тону коливання рідини отримано характеристичне рівняння п’ятого порядку. На підставі критерію Льєнара – Шіпара, записаного в іннорному вигляді, виписані у вигляді системи чотирьох нерівностей необхідні умови стійкості рівномірного обертання гіроскопів Лагранжа та рідини. Відносно коефіцієнта пружності ці нерівності моють відповідно 1, 3, 6 та 8 ступені. Проведені аналітичні дослідження старших коефіцієнтів умов стійкості. Показано, що коли центр мас першого твердого тіла з рідиною або другого не збігаються із загальною точкою цих тіл, то при досить великих значення коефіцієнта пружності завжди будуть виконані необхідні умови стійкості. При відсутності пружності у шарнирі характеристичне рівняння має двократний нуловий корінь і в цьому разі умови стійкості потребують додаткових досліджень. Отримані умови стійкості є точними для еліпсоїдальної порожнини і наближеними для інших осесиметричних порожнин. Для уточнення отриманих умов стікості в цьому разі потрібно враховувати додаткові тони коливання ідеальної рідини.

7 ПОДЯКИ

Дослідження виконані в рамках програмно-цільової та конкурсної тематики НАН України № 2-19-П (науково дослідна робота за темою ВБ-15-18-21/479) і були частково підтримана грантом від Фонду Сімонса (Нагорода 00010584, Президентські дискреційні гранти на підтримку України, одержувач Кононов Ю.М.).

8 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автор статті не має відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

Література

1. Кононов Ю. М. Про стійкість обертання вільної системи двох пружно зв'язаних твердих тіл / Ю.Н. Кононов // Механіка та математичні методи. – 2023. – V(2) – С. 6– 15.
2. Соболев С. Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью / С. Л. Соболев // Журн. прикл. механики и техн. физики.–1960.–№ 3.– С. 20 –55.
3. Ишлинский А. Ю. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью / А. Ю. Ишлинский, М. Е. Темченко // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1960. – № 3. – С. 65–75.
4. Рвалов Р. В. О вращательном движении тела с полостью, содержащей жидкость / Р. В. Рвалов, В. М. Роговой // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 3. – С. 15–20.
5. Докучаев Л. В. Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, содержащей жидкость / Л. В. Докучаев, Р. В. Рвалов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.. – 1973. – № 2. – С. 6–14.
6. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами / Л. В. Докучаев. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
7. Десятов В. Т. Экспериментальное исследование устойчивости вращательного движения тел с жидким заполнением. Динамика космических аппаратов и исследование космического пространства / В. Т Десятов. – М.: Машиностроение, 1986. – С. 254–261.
8. Харламов П. В. Об уравнениях движения системы твердых тел / П. В. Харламов // Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр.– 1972. – **4**. – С. 52-73.
9. Савченко А. Я. Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел / А. Я. Савченко, И. А. Болграбская, Г. А. Кононыхин. К.: Наук. думка. 1991. – 166 с.
10. Кононов Ю. Н. О движения системы двух твердых тел с полостями, содержащими жидкость / Ю. Н. Кононов // Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр. – 1997. – Вып. 29. – С. 76– 85.
11. Кононов Ю. Н. Об устойчивости движения системы n связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость / Ю. Н. Кононов // Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр. – 2006. – Вып. 36. – С. 75– 82.
12. Болграбская И. А. Динамика систем связанных твёрдых тел / И. А. Болграбская, М. Е. Лесина, Д. А. Чебанов. – Серия "Задачи и методы: математика, механика, кибернетика". – ИПММ НАН Украины, Том 9. К.: Наукова Думка.– 2012.– 395 с.
13. Кононов Ю. М. Про стійкість обертання у середовищі з опором вільної системи двох пружно зв'язаних твердих тіл / Ю. Н. Кононов // Праці ІПММ НАН України. – 2023.– 37, №2.– С. 75 –84.
14. Kononov Yu. M. Stabilization of spinning Lagrange gyroscope filled with ideal fluid in a resisting medium / Yu. M. Kononov, Ya. I. Sviatenko // Int. Appl. Mech. – 2023. – **59**, № 2. – P. 207 – 217.
15. Chernousko F. L. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass / F. L. Chernousko, L. D. Akulenko, D. D. Leshchenko. Springer.– 2017.– 260 p.

16. Leshchenko D. Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque / D. Leshchenko, S. Ershkov, T. Kozachenko // J. Appl. Comput. Mech. – 2022. – 8, N 3 – P. 1023 – 1031.
17. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем / Э. Джури – М.: Наука.– 1979.– 304 с.
18. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем / Э. Джури – М.: Наука.– 1979.– 304 с.

References

1. Kononov, Yu. M. (2023). Pro stiikist obertannia vilnoi systemy dvokh pruzhno zviazanykh tverdykh til. Mekhanika ta matematichi metody. V(2), 6– 15 (in Ukraine).
2. Sobolev, S. L. (1960). O dvizhenii simmetrichnogo volchka s polost'yu, napolnennoy zhidko st'yu. Zhurn. prykl. mekhaniki i tekhn. fiziki. № 3, 20 –55 (In Russia).
3. Ishlinskiy, A. Yu, Temchenko, M. Ye. (1960). O malykh kolebaniyakh vertikal'noy osi volchka, imeyushchego po-lost', tselikom napolnennuyu ideal'noy neszhimayemoy zhidkost'yu. Zhurn. prikl. mekhaniki i tekhn. fiziki. № 3, 65–75 (In Russia).
4. Rvalov, R. V., Rohovoi, V.M. (1972). O vrashchatel'nom dvizhenii tela s polost'yu, soderzhashchey zhidkost'. Izv. AN SSSR. Mekhanyka tverdoho tela. № 3, 15–20 (In Russia).
5. Dokuchaev, L. V., Rvalov, R.V.(1973). Ob ustoychivosti statsionarnogo vrashcheniya tverdogo tela s polost'yu, zhidkost'. Izv. AN SSSR. Mekhanyka tverdoho tela. № 2, 6–14 (In Russia).
6. Dokuchaev, L. V. (1987). Nelineynaya dinamika letatel'nykh apparatov s deformiruyemymi elementami M.: Mashynostroenye, 232 (In Russia).
7. Desiatov, V. T. (1986). Eksperimental'noye issledovaniye ustoychivosti vrashchatel'nogo dvizheniya tel s zhidkim zapolneniyem. Dinamika kosmicheskikh apparatov i issledovaniye kosmiche-skogo prostranstva – M.: Mashynostroenye, 254–261 (In Russia).
8. Kharlamov, P. V. (1972). Ob uravneniyakh dvizheniya sistemy tverdykh tel . Mekhanyka tverdoho tela. Mezhved. sb. nauch. tr. 4, 52-73 (in Ukraine).
9. Savchenko, A. Ya., Bolgrabskaya, I.A., Kononyhin, G.A. (1991). Ustojchivost' dvizheniya sistem svyazannyh tvyordyh tel. K.: Nauk. Dumka,166 (in Ukraine).
10. Kononov, Yu. M. (1997). O dvizheniya sistemy dvukh tverdykh tel s polostyami, soderzhashchimi zhidkost'. Mehanika tverdogo tela. Mezhved. sb. nauch. tr. 29, 76– 85 (in Ukraine).
11. Kononov, Yu. M. (2006). Ob ustoychivosti dvizheniya sistemy svyazannykh tverdykh tel s polostyami, soder-zhashchimi zhidkost'. Mehanika tverdogo tela. Mezhved. sb. nauch. tr. 36, 75– 82 (in Ukraine).
12. Bolgrabskaya, I. A., Lesina, M.E., Chebanov, D.A. (2012). Dinamika sistem svyazannykh tvordykh tel. Seriya "Zadachi i metody: matematika, mekhanika, kibernetika". IPMM NAN Ukrainy, Tom 9. K.: Naukova Dumka, 395 (in Ukraine).
13. Kononov, Yu. M. (2023). Pro stiikist obertannia u seredovyshchi z oporom vilnoi systemy dvokh pruzhno zviazanykh tverdykh til. Pratsi IPMM NAN Ukrainy 37, №2, 75 –84 (in Ukraine).
14. Kononov, Yu. M., Sviatenko, Ya. I. (2023). Stabilization of spinning Lagrange gyroscope filled with ideal fluid in a resisting medium. Int. Appl. Mech.59, № 2, 207 – 217.
15. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer, 260.
16. Leshchenko, D., Ershkov, S. V., Kozachenko, T. (2022). Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque. J. Appl. Comput. Mech.8, № 3, 1023 – 1031.
17. Dzhuri, E. (1979). Innory i ustoychivost' dinamicheskikh sistem. – M.: Nauka, 304 (In Russia).

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2024-6-2-6-17

Кононов Юрій Микитович
Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України,
д.ф.-м.н., професор
вул. Добровольського, 1, Слов'янськ, Україна, 84100
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1609-0253

Для посилань:
Кононов Ю. М. Про стійкість обертання вільної системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа, один з яких має ідеальну рідину**.** Механіка та математичні методи, 2024. Т. 6. № 2. С. 6–17.

For references:
Yu. Kononov (2024). On the stability of the rotation of the free system of two elastic Lagrange gyroscopes, one of which has an ideal liquid. Mechanics and Mathematical Methods. 6 (2). 6–17.