

УДК 539.3

## АНАЛІЗ РІВНОВАГИ ТОНКИХ ОРТОТРОПНИХ ПЛИТА НА ТРИПАРАМЕТРИЧНИЙ ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Делявський М. В.<sup>1</sup>, Мікуліч С. Б.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Луцький національний технічний університет

**Анотація:** У статті розв'язана задача про дослідження статичної рівноваги тонких ортотропних прямокутних плит, що спираються на трипараметричну пружну основу. Для розв'язання поставленої задачі у роботі побудовано математичну модель тонкої залізобетонної плити як однорідної ортотропної з усередненим модулем Губера. Запропоновано математичну модель трипараметричної пружної основи з урахуванням тертя між нижньою поверхнею плити та основою. Розроблений метод аналізу рівноваги таких плит дозволяє отримати точний розв'язок рівняння рівноваги з урахуванням граничних та поверхневих умов в окремих вузлах. Під час числової реалізації розробленого підходу запропоновано процедуру генерації таких вузлів. Розв'язок рівняння рівноваги представлено у вигляді суми силових функцій прогину та його функцій форми, помножених на невідомі параметри, які трактуються як ступінь свободи пластини. Такий підхід дозволив з високою точністю задовольнити граничні та поверхневі умови.

На основі отриманих розв'язків проведено аналіз напружено-деформованого стану тонкої однорідної ортотропної квадратної пластини, що повністю затиснута по контуру для випадку, коли плита піддається впливу розподіленого навантаження на її верхній частині та спирається на пружну основу. На основі отриманих у роботі розв'язків та формул, отриманих іншими авторами проведено порівняльний аналіз результатів для випадку трьох типів пружних основ: трипараметрична основа, основа Вінклера та плита з вільною нижньою поверхнею. На основі числових розрахунків встановлено, що пружна основа істотно зменшує прогин, нахил і момент у плиті. Результати, отримані для моделі Вінклера та трьох-параметричної моделі, відрізняються на 3% та 1,5% для прогинів на моментах відповідно. Встановлено, що результати, отримані в рамках запропонованої моделі, практично не залежать від коефіцієнта тертя між нижньою поверхнею плити та фундаментом.

**Ключові слова:** тонкі ортотропні пластини, трипараметрична основа, функції стану переміщень і напружень, функції форми та сили, крайові та поверхневі вузли.

## EQUILIBRIUM ANALYSIS OF THIN ORTHOTROPIC PLATES ON A TRIPARAMETRIC ELASTIC BASE

M. Delyavskyy<sup>1</sup>, S. Mikulich<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Lutsk National Technical University

**Abstract:** The paper deals with the problem of studying the static equilibrium of thin orthotropic rectangular plates resting on a three-parameter elastic base. To solve this problem, a mathematical model of a thin reinforced concrete slab as a homogeneous orthotropic plate with an averaged Huber's modulus is constructed. A mathematical model of a three-parameter elastic foundation is proposed, taking into account the friction between the lower surface of the plate and the foundation. The developed method for analyzing the equilibrium of such plates allows obtaining an exact solution of the equilibrium equation, taking into account the boundary and surface conditions at individual nodes. During the numerical implementation of the developed approach, a procedure for generating such nodes is proposed. The solution of the equilibrium equation is presented as the sum of the deflection force functions and its shape functions multiplied by unknown parameters, which are interpreted as the degree of freedom of the plate. This approach made it possible to satisfy the boundary and surface conditions with high accuracy.



On the basis of the obtained solutions, the stress-strain state of a thin homogeneous orthotropic square plate completely clamped along the contour is analyzed for the case when the plate is subjected to a distributed load on its upper part and rests on an elastic base. On the basis of the solutions obtained in this work and formulas obtained by other authors, a comparative analysis of the results for the case of three types of elastic bases is carried out: a three-parameter base, a Winkler base, and a plate with a free bottom surface. Based on numerical calculations, it was found that the elastic base significantly reduces the deflection, tilt and moment in the plate. The results obtained for the Winkler model and the three-parameter model differ by 3% and 1,5% for deflections and moments, respectively. It is established that the results obtained within the proposed model practically do not depend on the coefficient of friction between the lower surface of the plate and the foundation.

**Keywords:** thin orthotropic plates, three-parameter basis, state functions of displacements and stresses, shape and force functions, edge and surface nodes.

## 1 ВСТУП

Тонкі ортотропні пластини, що спираються на пружні основи, є моделями найбільш поширених елементів конструкцій, що використовуються в різних галузях промисловості та будівництва. Зокрема, такі пластини є моделями фундаментних балок і плит. Розробка методів оцінки прогинів прямокутних ортотропних пластин на пружній основі дозволяє впровадити отримані результати при проектуванні багатьох інженерно-геологічних споруд та конструкцій.

У літературі авторами використовуються різні моделі пружної основи. Найпростішою є модель Вінклера, що найбільш часто використовується в інженерних розрахунках. Це найпростіша модель, в якій передбачається лінійна залежність між прогином пластини та реакцією основи. Проте, використання цієї моделі дозволяє отримати точний розв'язок лише для балок на сталій пружній основі. У випадку побудови розв'язків задачі згину тонких пластин виникають певні труднощі, що пов'язані з наближеністю основних гіпотез при розв'язанні задач класичної теорії згину Кірхгофа. Це теорія деформування нульового порядку, оскільки тут нехтується вплив деформації зсуву.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Аналіз згину пластин Кірхгофа, що опираються на пружну основу Вінклера, виконано авторами у роботах [1] та [2] з використанням варіаційного методу Галоркіна-Власова. Методику розв'язання задачі про тонку прямокутну ортотропну пластину, що спирається на основу Вінклера, розроблено в роботі [3].

Аналіз згину довільно навантаженої повністю затиснутої ортотропної прямокутної пластини, що спирається на пружну основу, виконано також у роботі [4]. Розв'язок отримано в рамках класичної теорії пластин за допомогою методу скінченних інтегральних перетворень. Числові результати добре узгоджуються з іншими результатами, представленими в літературі. В роботі [5] проаналізовано динамічну поведінку пластини на основі Вінклера. Пластина навантажується силами, що виникають при посадці літака. Ефективність запропонованого підходу продемонстровано в чисельних дослідженнях.

У роботі [6] визначено основні недоліки моделі Вінклера: вихід ґрунту є не тільки під конструкцією, але й майже зовні; рівномірно навантажена конструкція не прогинається однаково, а згинається; коефіцієнт земляного полотна не є сталим, а залежить від конфігурації контактної поверхні та зовнішнього навантаження.

Використовуючи модель Власова, у роботах [7] та [8] вивчено поведінку прямокутної пластини на пружній основі. Дослідження виконувалися за допомогою методу скінченних елементів.

М. Celik та А. Saygun у [9] розробили концепцію скінченних елементів для пластин, що лежать на пружній основі, яка враховує деформації зсуву в поведінці пластини.

Найвідомішою моделлю пружної основи, яка широко використовується в інженерних розрахунках, є двопараметрична модель Вінклера-Пастернака. Вона має два параметри жорсткості: коефіцієнт поперечної жорсткості Вінклера і коефіцієнт зсувної жорсткості Пастернака.

У літературі отримано велику кількість розв'язків для круглих пластин. В роботі [10] розглядається задача згину круглої пластини, що спирається на двопараметричну пружну основу Власова. Розглядаються два типи моделей основи: поперечно ізотропна основа у вертикальному напрямку та основа Гібсона в

горизонтальному. Для розв'язання задачі використовується ітераційна процедура. Як приклад розглянуто пластину, що спирається на традиційну основу Власова, на яку діє зосереджена сила, прикладена в центрі пластини. В роботі [11] отримано розв'язок задачі згину круглої пластини, обпертої на двопараметричну модель пружної основи Вінклера – Пастернака, до нижньої поверхні якої прикладено горизонтальну та вертикальну сили тіла, що діють від основи. В роботі [12] в рамках модифікованої моделі Власова з використанням ітераційного методу розв'язано задачу дослідження статичної рівноваги кругових тонких пластин, що опираються на пружну основу Гібсона. Досліджено вплив неоднорідності ґрунту на згин пластини.

У роботі [13] авторами було дослідження задачі згину прямокутної пластини, що лежить на пружній основі, в рамках модифікованої моделі Власова. При дослідженні використано чотиривузловий згинальний елемент прямокутної пластини. Матриці жорсткості пластини та основи оцінювалися за допомогою МСЕ. Отримані результати добре узгоджуються з іншими результатами, доступними в літературі.

Р. Baofeng та ін. у [14] отримав розв'язок задачі про защемлену прямокутну тонку пластину, що спирається на пружну основу за допомогою методу симплектичної суперпозиції. Цей метод придатний для дослідження деформацій та зусиль у пластинчастих елементах за різних граничних умов.

Уточнена теорія тонких пластин, що опираються на пружну основу, розглянута С. Valabhan та А. Zenkour в роботах [15] та [16]. F. M-H. Huan та D. P. Thambiratnam у [17] проведено аналіз напруженого стану пластини на пружній основі за допомогою методу скінченних смуг.

М. Delyavskyy у працях [3], [18]-[21] розвинуто метод тримання розв'язків задач згину для тонких ортотропних пластинчастих елементів прямокутної форми на пружній основі Вінклера за використання макроелементного методу.

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

**Метою** дослідження є побудова розв'язків задачі про дослідження статичної рівноваги тонких ортотропних прямокутних плит, що спираються на трипараметричну пружну основу.

Для розв'язання поставленої задачі у роботі сформульовано та вирішено наступні **завдання**:

- 1) побудовано математичну модель тонкої залізобетонної плити як однорідної ортотропної з усередненим модулем Губера;
- 2) запропоновано математичну модель трипараметричної пружної основи з урахуванням тертя між нижньою поверхнею плити та основою;
- 3) розроблено метод аналізу рівноваги, що дозволяє отримати точний розв'язок задачі з урахуванням граничних та поверхневих умов в окремих вузлах;
- 4) запропоновано процедуру генерації вузлових елементів, що дозволяє ефективне проведення числового аналізу з високою точністю.

Розв'язок рівняння рівноваги представлено у вигляді суми силових функцій прогину та його функцій форми, помножених на невідомі параметри, які трактуються як ступінь свободи пластини. Такий підхід дозволив задовольнити граничні та поверхневі умови.

### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянемо задачу поперечного згину тонкої ортотропної прямокутної пластини товщиною  $h$ , що знаходиться під дією нормально розподіленого зовнішнього навантаження  $q(x_1, x_2)$  та  $p(x_1, x_2)$  прикладеного до верхньої та нижньої поверхні

пластини відповідно. Віднесемо її до декартової системи координат  $Ox_1x_2x_3$  розмістивши початок координат у центрі ваги пластини. Осі координат спрямуємо так, як показано на рис. 1.

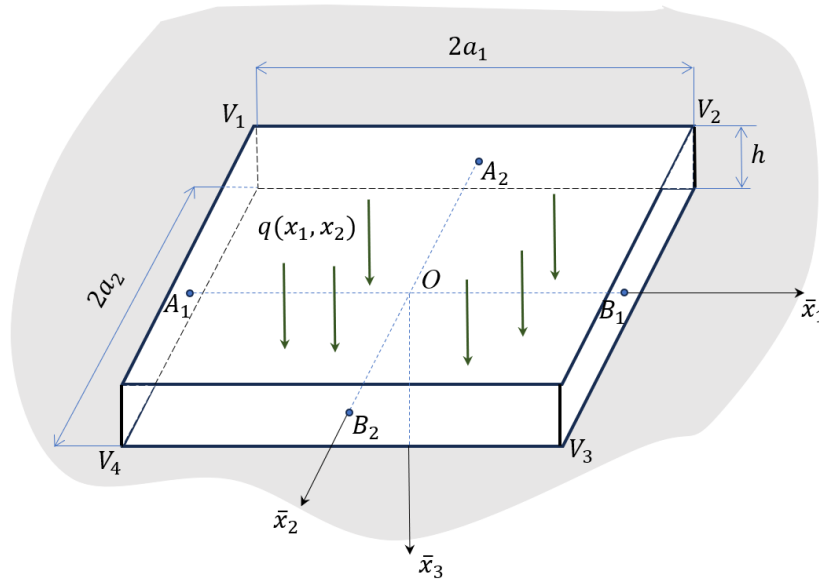


Рис. 1. Модель тонкої прямокутної пластини на пружній основі

Рівняння рівноваги такої пластини записуються у вигляді

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2D_{33} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = q - p, \quad (1)$$

де

$$D_{33} = (D_{12} + 2D_{66}). \quad (2)$$

Тут  $D_{11}$ ,  $D_{22}$  – згинальна жорсткість відносно осей  $x_1$  та  $x_2$ ,  $D_{66}$  – крутильна жорсткість,  $D_{12}$  – додаткова характеристика жорсткості,  $w(x_1, x_2)$  – прогин пластини. Пластина піддається дії зовнішнього розподіленого навантаження з інтенсивністю  $q(x_1, x_2)$ , що прикладене до верхньої межі пластини. До нижньої поверхні прикладені реакції основи  $r_{33}$ . Якщо пластина лежить на пружній основі (рис.1), то  $p(x_1, x_2) = r_{33}$ , тобто реакція основи, спрямована на нижню поверхню пластини, викликана прогином пластини.

Найпростішою моделлю пружної основи є модель Вінклера, де передбачається, що реакція основи пропорційна прогину плити

$$r_{33} = K_0 w, \quad (3)$$

де параметр  $K_0$  є коефіцієнтом жорсткості основи. Значення цього коефіцієнта для різних типів пружної основи наведено Z. Koczowski у [36].

Відповідно до моделі Вінклера, до нижньої поверхні плити прикладаються дотичні реакції,  $r_{\alpha 3}$ , ( $\alpha = 1, 2$ ) які викликані зсувами між нижньою поверхнею плити та фундаментом. Припустимо, що вони пропорційні дотичним переміщенням  $u_1, u_2$  нижньої поверхні пластини

$$r_{13} = -K_1 u_1|_{x_3=h/2}, \quad r_{23} = -K_2 u_2|_{x_3=h/2}. \quad (4)$$

Параметри  $K_0, K_1, K_2$  – коефіцієнти пружної основи. У цьому випадку маємо, що

$$p(x_1, x_2) = r_{33} + r_{13} + r_{23}. \quad (5)$$

Враховуючи, що в теорії тонких пластин дотичні переміщення визначають як похідну від прогину пластини, можна переписати співвідношення (4) у вигляді

$$r_{13} = \frac{h}{2} K_1 \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad r_{23} = \frac{h}{2} K_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad (6)$$

де  $K_1, K_2$  – є зсувні жорсткості у двох взаємно перпендикулярних напрямках.

Підставляючи співвідношення (3), (6) в рівняння (1) отримаємо неоднорідне просторове диференціальне рівняння четвертого порядку, яке описує поведінку тонких ортотропних плит, обперних на трипараметричну пружну основу

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2D_{33} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + K_0 w + K_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + K_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} = q. \quad (7)$$

На відміну від відомих у літературі рівнянь, воно містить парні та непарні похідні прогину пластини, що істотно ускладнює модель.

Загальний розв'язок рівняння (1) подамо у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння  $w_0$  та частинного розв'язку неоднорідного  $w_*$

$$w = w_0 + w_* \quad (8)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння запишемо у тензорному вигляді

$$w_0 = f_{kps}(x_s) \cdot T_{kp(3-s)}(x_{3-s}). \quad (9)$$

де  $f_{kps}(x_s)$  є невідомими функціями і  $T_{kp(3-s)}(x_s)$  – задані тригонометричні функції

$$T_{k1s}(x_s) = \sin(\delta_{ks} x_s); T_{k2s}(x_s) = \cos(\delta_{ks} x_s) \quad (10)$$

Параметри  $\delta_{ks}$  розраховуються за наступними формулами

$$\delta_{ks} = \frac{(2k-1)\pi}{2a_s}, \quad (11)$$

де  $a_s$  - це розміри пластини,  $p = 1, 2; s = 1, 2; k = 1, \dots, K$ . Параметр  $K$  визначає точність розв'язку. Тут використовується правило підсумовування Ейнштейна.

Переписуючи вирази для (9) щодо індексів  $p, s$  отримуємо

$$w_0(x_1, x_2) = f_{k21}(x_1) \cos(\delta_{k2} x_2) + f_{k11}(x_1) \sin(\delta_{k2} x_2) + f_{k22}(x_2) \cos(\delta_{k1} x_1) + f_{k12}(x_2) \sin(\delta_{k1} x_1). \quad (12)$$

Підставляючи представлення (10) і (12) у однорідне рівняння, зведено задачу до розв'язання звичайного диференціального рівняння з чотирма невідомими функціями:

$$\begin{aligned} & D_{11} \left\{ f_{k21}^{(IV)}(x_1) \cos(\delta_{k2} x_2) + f_{k11}^{(IV)}(x_1) \sin(\delta_{k2} x_2) + \right. \\ & \left. D_{k1}^4 f_{k22}(x_2) \cos(\delta_{k1} x_1) + \gamma_{k1}^4 f_{k12}(x_2) \sin(\delta_{k1} x_1) \right\} - \\ & - 2D_{33} \left\{ \delta_{k2}^2 f_{k21}''(x_1) \cos(\delta_{k2} x_2) + \delta_{k2}^2 f_{k11}''(x_1) \sin(\delta_{k2} x_2) + \right. \\ & \left. + \delta_{k1}^2 f_{k22}''(x_2) \cos(\delta_{k1} x_1) + \delta_{k1}^2 f_{k12}''(x_2) \sin(\delta_{k1} x_1) \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+D_{22} \left\{ \delta_{k_2}^4 f_{k_{21}}(x_1) \cos(\delta_{k_2} x_2) + \delta_{k_2}^4 f_{k_{11}}(x_1) \sin(\delta_{k_2} x_2) + \right. \\
 &+ f_{k_{22}}(x_2) \cos(\delta_{k_1} x_1) + f_{k_{12}}^{(IV)}(x_2) \sin(\delta_{k_1} x_1) \left. \right\} + \\
 &+K_0 \left\{ f_{k_{21}}(x_1) \cos(\delta_{k_2} x_2) + f_{k_{11}}(x_1) \sin(\delta_{k_2} x_2) + \right. \\
 &+ f_{k_{22}}(x_2) \cos(\delta_{k_1} x_1) + f_{k_{12}}(x_2) \sin(\delta_{k_1} x_1) \left. \right\} + \\
 &+K_1 \left\{ f'_{k_{21}}(x_1) \cos(\delta_{k_2} x_2) + f'_{k_{11}}(x_1) \sin(\delta_{k_2} x_2) - \right. \\
 &-\delta_{k_1} f_{k_{22}}(x_2) \sin(\delta_{k_1} x_1) + \delta_{k_1} f_{k_{12}}(x_2) \cos(\delta_{k_1} x_1) \left. \right\} + \\
 &+K_2 \left\{ -\delta_{k_2} f_{k_{22}}(x_1) \sin(\delta_{k_2} x_2) + \delta_{k_2} f_{k_{11}}(x_1) \cos(\delta_{k_2} x_2) + \right. \\
 &+ f'_{k_{22}}(x_2) \cos(\delta_{k_1} x_1) + f'_{k_{12}}(x_2) \sin(\delta_{k_1} x_1) \left. \right\} = 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Відокремлюючи змінні, отримуємо систему з звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку, яку можна розділити на дві незалежні системи диференціальних рівнянь щодо невідомих функцій  $f_{kps}(x_s)$ ,  $s = 1, 2$ ,  $p = 1, 2$ :

$$\begin{aligned}
 &D_{11} f_{k_{21}}^{(IV)}(x_1) - 2D_{33} \delta_{k_2}^2 f_{k_{21}}''(x_1) + (D_{22} \delta_{k_2}^4 + K_0) f_{k_{21}}(x_1) + \\
 &+ K_1 f'_{k_{21}}(x_1) + K_2 \delta_{k_2} f_{k_{11}}(x_1) = 0 \\
 &D_{11} f_{k_{11}}^{(IV)}(x_1) - 2D_{33} \delta_{k_2}^2 f_{k_{11}}''(x_1) + (D_{22} \delta_{k_2}^4 + K_0) f_{k_{11}}(x_1) + \\
 &+ K_1 f'_{k_{11}}(x_1) - K_2 \delta_{k_2} f_{k_{21}}(x_1) = 0 \\
 &(D_{11} \delta_{k_1}^4 + K_0) f_{k_{22}}(x_2) - 2D_{33} \delta_{k_1}^2 f_{k_{22}}''(x_2) + D_{22} f_{k_{22}}^{(IV)}(x_2) + \\
 &+ K_1 \delta_{k_1} f_{k_{12}}(x_2) + K_2 f_{k_{22}}'(x_2) = 0 \\
 &(D_{11} \delta_{k_1}^4 + K_0) f_{k_{12}}(x_2) - 2D_{33} \delta_{k_1}^2 f_{k_{12}}''(x_2) + D_{22} f_{k_{12}}^{(IV)}(x_2) - \\
 &- K_1 \delta_{k_1} f_{k_{22}}(x_2) + K_2 f_{k_{12}}'(x_2) = 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

Розв'язки цих систем представимо у вигляді:

$$f_{kps}(x_s) = \tilde{R}_{kps} \exp(\lambda_{kps} x_s), \quad k = 1, \dots, K, \quad p = 1, 2; \quad s = 1, 2 \tag{15}$$

Підсумовування щодо індексів  $k$ ,  $p$ ,  $s$  не виконується.

І підставляючи (15) у рівня (14) та враховуючи, що  $\exp(\lambda_{kps} x_s) \neq 0$  зведемо озв'язання задачі до системи лінійних алгебраїчних рівняння відносно невідомих коефіцієнтів  $\tilde{R}_{k1s}$  та  $\tilde{R}_{k2s}$ ,  $s = 1, 2$

$$\begin{aligned}
 &\tilde{R}_{k11} (D_{11} \lambda_{k1}^4 - 2D_{33} \delta_{k_2}^2 \lambda_{k1}^2 + K_1 \lambda_{k1} + D_{22} \delta_{k_2}^4 + K_0) - \tilde{R}_{k21} K_2 \delta_{k_2} = 0, \\
 &\tilde{R}_{k11} K_2 \delta_{k_2} + \tilde{R}_{k21} (D_{11} \lambda_{k1}^4 - 2D_{33} \delta_{k_2}^2 \lambda_{k1}^2 + K_1 \lambda_{k1} + D_{22} \delta_{k_2}^4 + K_0) = 0; \\
 &\tilde{R}_{k12} (D_{22} \lambda_{k2}^4 - 2D_{33} \delta_{k_1}^2 \lambda_{k2}^2 + K_2 \lambda_{k2} + D_{11} \delta_{k_1}^4 + K_0) - \tilde{R}_{k22} K_1 \delta_{k_1} = 0, \\
 &\tilde{R}_{k12} K_1 \delta_{k_1} + (D_{22} \lambda_{k2}^4 - 2D_{33} \delta_{k_1}^2 \lambda_{k2}^2 + K_2 \lambda_{k2} + D_{11} \delta_{k_1}^4 + K_0) \tilde{R}_{k22} = 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

(16) має ненульовий розв'язок коли визначник системи рівний нулю. З урахуванням цього отримуємо характеристичне рівняння для параметрів  $\lambda_{ks}$  виду:



$$\begin{aligned} (D_{11}\lambda_{k1}^4 - 2D_{33}\delta_{k2}^2\lambda_{k1}^2 + K_1\lambda_{k1} + (\delta_{k2}^4 D_{22} + K_0))^2 + (K_2\delta_{k2})^2 &= 0 \\ (D_{22}\lambda_{k2}^4 - 2D_{33}\delta_{k1}^2\lambda_{k2}^2 + K_2\lambda_{k2} + (\delta_{k1}^4 D_{11} + K_0))^2 + (K_1\delta_{k1})^2 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

(17) є алгебраїчними рівняннями восьмого порядку і мають лише комплексно-спряжені корені

$$\lambda_{ksv} = \alpha_{ksv} + i\beta_{ksv}; \lambda_{ks(v+4)} = \bar{\lambda}_{ksv} \quad v = 1 \div 4; \quad (18)$$

Щоб отримати дійні розв'язки (15) усі коефіцієнти

$$\tilde{R}_{kpsv} = \tilde{C}_{kpsv} + i\tilde{S}_{kpsv} \quad (v = 1, \dots, 4)$$

мають бути комплексно-спряжені. В результаті системи рівнянь (16) стають лінійно залежними. Вважатимемо, що незалежними є наступні рівняння:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{k11} (D_{11}\lambda_{k1}^4 - 2\delta_{k2}^2\lambda_{k1}^2 + K_1\lambda_{k1} + D_{22}\delta_{k2}^4 + K_0) - \tilde{R}_{21}K_2\delta_{k2} &= 0, \\ \tilde{R}_{k12} (D_{22}\lambda_{k2}^4 - 2D_{33}\delta_{k1}^2\lambda_{k2}^2 + K_2\lambda_{k2} + D_{11}\delta_{k1}^4 + K_0) - \tilde{R}_{k22}K_1\delta_{k1} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Як показано раніше, коефіцієнти  $\tilde{R}_{kp1v}, \tilde{R}_{kp2v}$  ( $p = 1, 2$ ), також є лінійно залежними. Як незалежні виберемо коефіцієнти  $R_{k1sv}$  функцій  $f_{k1s}(x_s)$ , які трактуватимемо як ступені вільності прогину пластини.

Розрахуємо степені комплексних коренів  $\lambda_{ksv} = \alpha_{ksv} + i\beta_{ksv}$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{ksv}^2 &= (\alpha_{ksv}^2 - \beta_{ksv}^2) + i(2\alpha_{ksv}\beta_{ksv}), \\ \lambda_{ksv}^3 &= (\alpha_{ksv}^3 - 3\alpha_{ksv}\beta_{ksv}^2) + i(-\beta_{ksv}^3 + 3\alpha_{ksv}^2\beta_{ksv}), \\ \lambda_{ksv}^4 &= (\alpha_{ksv}^4 + \beta_{ksv}^4 - 6\alpha_{ksv}^2\beta_{ksv}^2) + i(4\alpha_{ksv}^3\beta_{ksv} - 4\alpha_{ksv}\beta_{ksv}^3). \end{aligned} \quad (20)$$

та розділимо першу з рівнянь (19) на дійсну та уявну частини. У результаті ми отримаємо систему двох алгебраїчних рівнянь щодо чотирьох загальних параметрів  $\tilde{C}_{kpsv}, \tilde{S}_{kpsv}, v = 1 \div 4 \quad p = 1, 2$  і виразимо коефіцієнти  $\tilde{C}_{kpsv}$  і  $\tilde{S}_{kpsv}$  через коефіцієнти  $\tilde{C}_{k1sv}$  і  $\tilde{S}_{k1sv}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{k21v} &= K_{k11v} \cdot \tilde{C}_{k11v} - L_{k11v} \cdot \tilde{S}_{k11v}, \\ \tilde{S}_{k21v} &= L_{k11v} \cdot \tilde{C}_{k11v} + K_{k11v} \cdot \tilde{S}_{k11v} \end{aligned} \quad (21)$$

Виконавши аналогічні перетворення для другого рівняння системи (19), отримаємо:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{k22v} &= K_{k12v} \cdot \tilde{C}_{k12v} - L_{k12v} \cdot \tilde{S}_{k12v}, \\ \tilde{S}_{k22v} &= L_{k12v} \cdot \tilde{C}_{k12v} + K_{k12v} \cdot \tilde{S}_{k12v}. \end{aligned} \quad (21')$$

Тут введено такі позначення:

$$\begin{aligned} K_{k11v} &= \frac{[D_{11} \operatorname{Re}(\lambda_{k1v}^4) - 2D_{33}\delta_{k2}^2 \operatorname{Re}(\lambda_{k1v}^2) + K_1 \operatorname{Re}(\lambda_{k1v}) + D_{22}\delta_{k2}^4 + K_0]}{K_2\delta_{k2}}, \\ L_{k11v} &= \frac{[D_{11} \operatorname{Im}(\lambda_{k1v}^4) - 2D_{33}\delta_{k2}^2 \operatorname{Im}(\lambda_{k1v}^2) + K_1 \operatorname{Im}(\lambda_{k1v})]}{K_2\delta_{k2}}, \end{aligned}$$



$$K_{k12\nu} = \frac{\left[ D_{22} \operatorname{Re}(\lambda_{k2\nu}^4) - 2D_{33} \delta_{k1}^2 \operatorname{Re}(\lambda_{k2\nu}^2) + K_2 \operatorname{Re}(\lambda_{k2\nu}) + D_{11} \delta_{k1}^4 + K_0 \right]}{K_1 \delta_k^{[1]}},$$

$$L_{k12\nu} = \frac{\left[ D_{22} \operatorname{Im}(\lambda_{k2\nu}^4) - 2D_{33} \delta_{k1}^2 \operatorname{Im}(\lambda_{k2\nu}^2) + K_2 \operatorname{Im}(\lambda_{k2\nu}) \right]}{K_1 \delta_{k1}}.$$

При цьому ми тотожно задовольняємо систему рівнянь (16) і отримуємо точний розв'язок диференціального рівняння, який описує стан рівноваги тонкої ортотропної пластини, що спирається на трипараметричну пружну основу.

Введемо нові позначення

$$\tilde{C}_{k1sv} = R_{ksv}, \quad 2\tilde{S}k1sv = -R_{ks(v+4)} \quad (22)$$

де  $R_{ksv}, R_{ks(v+4)}$  - дійсні невідомі, що характеризують ступінь свободи прогину пластини. Використовуючи отримані залежності після громіздких перетворень ми виразимо розв'язок рівнянь (15) у вигляді:

$$f_{k1s}(x_s) = R_{ksv} F_{ksv}(x_s) + R_{ks(v+4)} \Phi_{ksv}(x_s)$$

$$f_{k2s}(x_s) = R_{ksv} \Psi_{ksv}(x_s) + R_{ks(v+4)} \Omega_{ksv}(x_s), \nu = 1, \dots, 4 \quad (23)$$

та диференціальних рівнянь (14) через фундаментальні функції:

$$F_{ksv}(x_s) = \frac{\exp(\alpha_{ksv} x_s) \cos(\beta_{ksv} x_s)}{\exp(\alpha_{ksv} a_s)}; \quad \Phi_{ksv}(x_s) = \frac{\exp(\alpha_{ksv} x_s) \sin(\beta_{ksv} x_s)}{\exp(\alpha_{ksv} a_s)};$$

$$\Psi_{ksv}(x_s) = K_{k1sv} F_{ksv}(x_s) - K_{k2sv} \Phi_{ksv}(x_s); \quad (24)$$

$$\Omega_{ksv}(x_s) = K_{k1sv} \Phi_{ksv}(x_s) + K_{k2sv} F_{ksv}(x_s).$$

Використовуючи співвідношення (24) запишемо загальний розв'язок однорідного рівняння (7) у вигляді

$$w_0(x_1, x_2) = R_{ksv} W_{ksv}(x_1, x_2) + R_{ks(v+4)} W_{ks(v+4)}(x_1, x_2). \quad (25)$$

Введені функції:

$$W_{ksv}(x_1, x_2) = \Psi_{ksv}(x_s) \cos(\delta_{k(3-s)} x_{(3-s)}) + F_{ksv}(x_s) \sin(\delta_{k(3-s)} x_{(3-s)})$$

$$W_{ks(v+4)}(x_1, x_2) = \Omega_{ksv}(x_s) \cos(\delta_{k(3-s)} x_{(3-s)}) + \Phi_{ksv}(x_s) \sin(\delta_{k(3-s)} x_{(3-s)})$$

$$W_{ksv}(x_1, x_2) = \Psi_{ksv}(x_s) \cos(\delta_{k(3-s)} x_{(3-s)}) + F_{ksv}(x_s) \sin(\delta_{k(3-s)} x_{(3-s)})$$

назвемо функціями форми прогину пластини, а введені коефіцієнти  $R_{kpsv}$  - як ступені вільності прогину пластини. Оскільки  $\max: k = k, p = 2, s = 2, v = 4$ , то їх загальна кількість дорівнює  $16K$ .

Щоб отримати частинний розв'язок диференціального рівняння (7), ми спочатку розкладаємо зовнішнє навантаження  $q(x_1, x_2)$  у тригонометричні ряди Фур'є

$$q(x_1, x_2) = Q_{pqmn} T_{pml}(x_1) T_{qn2}(x_2), \quad (26)$$

де вводяться наступні позначення:

$$T_{pml}(x_1) = \begin{cases} \sin(\delta_{1m} x_1), & p = 1, \\ \cos(\delta_{1m} x_1), & p = 2 \end{cases} \quad T_{qn2}(x_2) = \begin{cases} \sin(\delta_{2n} x_2), & q = 1, \\ \cos(\delta_{2n} x_2), & q = 2 \end{cases}$$

$$\delta_{sm} = \frac{(2m-1)\pi}{2a_s}; \quad s = 1, 2.$$

Коефіцієнти ряду (26) визначаються за формулами:

$$Q_{pqmn} = \frac{1}{a_1 a_2} \int_{-a_1}^{a_1} \int_{-a_2}^{a_2} q(x_1, x_2) T_{pm1}(x_1) T_{qn2}(x_2) dx_2 dx_1;$$

Частинний розв'язок рівняння (7) представимо в такому ж вигляді

$$w_* = W_{pqmn} T_{pm1}(x_1) T_{qn2}(x_2) \quad (27)$$

Цей розв'язок описує рівновагу внутрішніх реакцій і зовнішнього навантаження, прикладених в одних і тих же точках на поверхні пластини. Підставляючи вирази для функцій форми прогину з урахування тригонометричних розкладів у рівняння (7), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь четвертого порядку відносно невідомих коефіцієнтів  $W_{11mn}, W_{12mn}, W_{21mn}, W_{22mn}$ :

$$\begin{aligned} (D_{11}\delta_{m1}^4 + 2D_{33}\delta_{m1}^2\delta_{n2}^2 + D_{22}\delta_{n2}^4 + K_0)W_{22mn} + K_1\delta_{m1}W_{12mn} + K_2\delta_{n2}W_{21mn} &= Q_{22mn}, \\ (D_{11}\delta_{m1}^4 + 2D_{33}\delta_{m1}^2\delta_{n2}^2 + D_{22}\delta_{n2}^4 + K_0)W_{21mn} + K_1\delta_{m1}W_{11mn} - K_2\delta_{n2}W_{22mn} &= Q_{21mn}, \\ (D_{11}\delta_{m1}^4 + D_{33}2\delta_{m1}^2\delta_{n2}^2 + D_{22}\delta_{n2}^4 + K_0)W_{12mn} - K_1\delta_{m1}W_{22mn} + K_2\delta_{n2}W_{11mn} &= Q_{12mn}, \\ (D_{11}\delta_{m1}^4 + 2D_{33}\delta_{m1}^2\delta_{n2}^2 + D_{22}\delta_{n2}^4 + K_0)W_{11mn} - W_{21mn}K_1\delta_{m1} - K_2\delta_{n2}W_{12mn} &= Q_{11mn}. \end{aligned}$$

На основі отриманих розв'язків за використання відомих з теорії тонких ортотропних пластин формул, можна легко отримати вирази для визначення деформацій та внутрішніх силових факторів для моделі пластини, що спирається на трипараметричну пружну основу.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

У якості тестування розробленого методу дослідимо розподіл прогинів та моментів у прямокутній залізобетонній плиті, що рівномірно навантажена та затиснена вздовж границі. Прийmemo, що розміри плити  $2a_1 = 6\text{м}$ ,  $2a_2 = 4\text{м}$ , товщина  $h = 0,2\text{м}$ . Розрахунки виконаємо для випадку, коли інтенсивність рівномірно-розподіленого  $q = 20\text{кН} / \text{м}^2$ . Плита складається з бетонної матриці з модулем Юнга  $E_c = 2,3 \cdot 10^{10} \text{Н} / \text{м}^2$  та коефіцієнтом Пуассона  $\nu_c = 0,2$ , яка у двох взаємно перпендикулярних напрямках армована сталевими прутами з модулем  $E_s = 2 \cdot 10^{11} \text{Н} / \text{м}^2$  та коефіцієнтом Пуассона  $\nu_s = 0,3$  частки в плиті в напрямках осей  $x_1$  та  $x_2$  становлять  $\mu_1 = 0,2\%$ ,  $\mu_2 = 0,4\%$ , а відстані від центрів підсилення до середньої площини плити  $d_1 = 0,06\text{м}$  та  $d_2 = 0,046\text{м}$  відповідно.

Використовуючи усереднені модулі поперечно-армованої залізобетонної плити, запропоновані Т. М. Huber у [22], заміниmo гетерогенний композит на однорідний ортотропний із заданими ефективними (усередненими) модулями [23]:

$$D_{11} = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \left( \frac{h^3}{12} + \frac{n\mu_1}{1+n\mu_1} h d_1^2 \right), \quad D_{22} = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \left( \frac{h^3}{12} + \frac{n\mu_2}{1+n\mu_2} h d_2^2 \right)$$

$$\frac{D_{12}}{D_{11}} = \nu_c \sqrt{\frac{D_{11}}{D_{22}}}, \quad \frac{D_{66}}{1 - \nu_c^2} = \nu_c \frac{\sqrt{D_{11}D_{22}}}{2(1 + \nu_c)}, \quad (28)$$

де  $n = \frac{E_s}{E_c}$  - відношення модуля Юнга арматури (сталі) та бетону. Коефіцієнт фундаменту  $K_0 = 10^7 \text{ H / м}^2$ .

Припустимо, що введені тут усереднені модулі є жорсткістю на вигин, скручування та змішану жорсткість ортотропного матеріалу, що входить до рівняння (1) - (2).

Усереднені значення жорсткостей приймалися відповідно рівними

$$D_{11} = 16366372 \text{ H / м}^2,$$

$$D_{22} = 16747508 \text{ H / м}^2,$$

$$D_{66} = 6622337 \text{ H / м}^2,$$

$$D_{12} = 3311168 \text{ H / м}^2.$$

Жорсткість залізобетонної плити розраховано за формулами Губера (28).

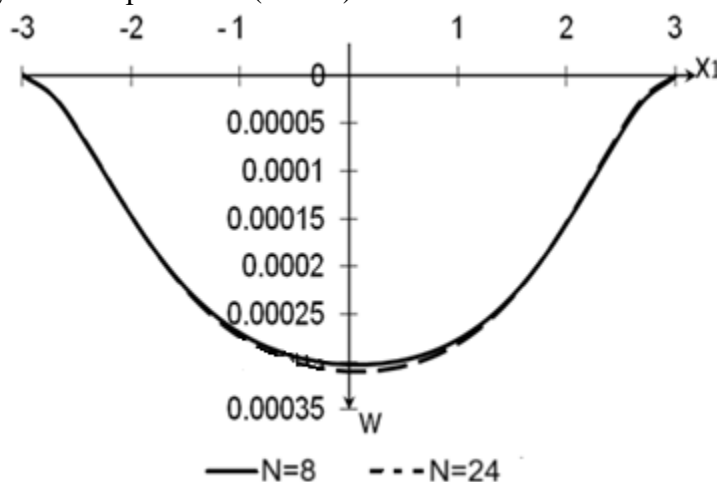
Крім того, при розрахунку враховується, що коефіцієнти фундаменту пов'язані наступним чином:

$$K_1 = \rho_1 K_0; \quad K_2 = \rho_2 K_0,$$

де  $\rho_1, \rho_2$  - коефіцієнти тертя між фундаментом і нижньою поверхнею плити. Припускається, що внаслідок ортотропії матеріалу пластини ці коефіцієнти різні в двох взаємно перпендикулярних напрямках. Відповідно до [23] коефіцієнт тертя бетону об ґрунт змінюється в діапазоні  $\rho = 0,3 \dots 0,6$  залежно від типу та стану ґрунту.

Розрахунки поведено для різної кількості крайових вузлів, рівномірно розподілених по контуру пластини. У першому наближенні ( $K=1$ ) було обрано ( $N=8$ ) вузлів, у другому ( $K=2$ ) - ( $N=16$ ) вузлів і так далі.

На рис.2 показано зміну прогину пластини в її центральній ділянці ( $x_2 = 0$ ) для першого ( $N=8$ ), другого та третього ( $N=24$ ) наближень.



**Рис. 2.** Прогин центральної ділянки ( $x_2 = 0$ ) пластини для різної кількості  $N$  крайових вузлів

Значення прогину в різних точках перерізу представлені в таблиці 1 для різної кількості наближень  $N$

**Таблиця 1**

Значення прогину пластини центральної ділянки пластини

$x_1$	Кількість вузлів			
	$N = 8$	$N = 24$	$N = 40$	$N = 160$
0	2.9724E-04	2.9876E-04	3.0357E-04	3.0358E-04
0,3	2.9612E-04	2.9763E-04	3.0221E-04	3.0221E-04
0,6	2.8996E-04	2.9144E-04	2.9526E-04	2.9527E-04
0,9	2.7757E-04	2.7898E-04	2.8166E-04	2.8167E-04
1,2	2.5716E-04	2.5848E-04	2.5979E-04	2.5980E-04
1,5	2.2698E-04	2.2814E-04	2.2802E-04	2.2803E-04
1,8	1.8588E-04	1.8683E-04	1.8536E-04	1.8537E-04
2,1	1.3476E-04	1.3545E-04	1.3284E-04	1.3285E-04
2,4	7.8188E-05	7.8588E-05	7.5262E-05	7.5264E-05
2,7	2.7027E-05	2.7165E-05	2.3976E-05	2.3965E-05
3	1.3032E-06	1.3099E-06	8.9465E-10	2.6149E-12

Аналіз результатів, представлених у таблиці 1, показує, що значення прогину центральної ділянки пластини практично не залежать від кількості крайових вузлів. Числові розрахунки показали, що результати розрахунків практично збігаються в третьому наближенні ( $N = 24$ ).

Проведені дослідження показали, що точність задоволення граничних умов прогину пластини вже в першому наближенні (8 вузлів на контурі пластини) дорівнює  $6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ . У двадцяти наближеннях (160 крайових вузлів) ця точність дорівнює  $3 \cdot 10^{-16} \text{ м}$ .

Використовуючи запропонований алгоритм розрахуємо величини нахилів  $u_1$  в окремих точках центрального перетину  $x_2 = 0$ . Відповідні результати розрахунків наведено у таблиці 2.

**Таблиця 2**

Величини нахилів  $u_1$  центрального перетину  
 $x_2 = 0$  плити

$x_1$	Кількість вузлових точок			
	$N=8$	$N=24$	$N=40$	$N=160$
0	-7.9226E-11	-8.1747E-11	-8.1819E-11	-8.1821E-11
0,3	1.5822E-06	1.7757E-06	1.7713E-06	1.7712E-06
0,6	3.4355E-06	3.7874E-06	3.7838E-06	3.7837E-06
0,9	5.7823E-06	6.2348E-06	6.2382E-06	6.2382E-06
1,2	8.7285E-06	9.2202E-06	9.2318E-06	9.2318E-06
1,5	1.2186E-05	1.2666E-05	1.2680E-05	1.2680E-05
1,8	1.5733E-05	1.6161E-05	1.6171E-05	1.6172E-05
2,1	1.8478E-05	1.8802E-05	1.8806E-05	1.8807E-05
2,4	1.8810E-05	1.8924E-05	1.8932E-05	1.8934E-05
2,7	1.4249E-05	1.3943E-05	1.3951E-05	1.3957E-05
3	1.1051E-06	2.2179E-07	4.3730E-08	-5.9944E-11

Отримані числові результати підтверджують ефективність та точність запропонованого підходу. Таким чином, граничні умови задачі задовольняються повністю. Максимальні значення нахилу для 8 і 160 вузлів відрізняються лише на 1,2 %.

Результати розрахунку величини моменту  $M_{11}$  у центральному перерізі плити представлені на рис. 3. Значення для 24 та 160 вузлів відрізняються на 0,13%.

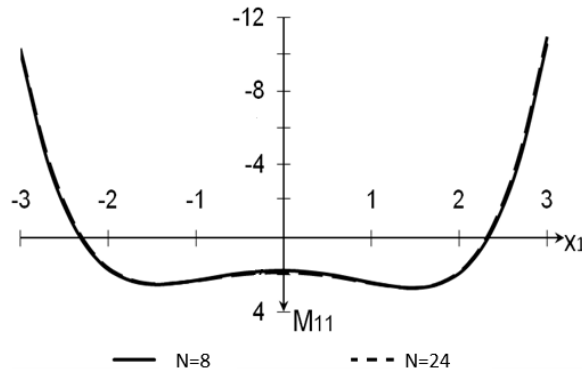


Рис. 3. Зміна моменту  $M_{11}$  в центральному перерізі плити

Використовуючи запропонований підхід розрахуємо прогини, нахили та моменти для різних випадків пружної основи. Дослідження проведемо для випадку квадратної залізобетонної плити, що затиснена по контуру та навантажена рівномірно-розподіленим навантаженням з інтенсивністю  $q$ . Відповідні результати максимальних величин прогинів, нахилів та моментів наведено у таблиці 3.

Таблиця 3

Порівняння результатів, отриманих для різних моделей пружної основи

Тип основи	Максимальні значення відповідних величин		
	$w$	$u_1$	$M_{11}$
Вільна поверхня	6.9040E-04	3.7724E-05	5385
Основа Вінклера	3.0614E-04	1.9030E-05	2621
Трипараметрична основа	2,9876E-04	1,8924E-05	2509

Розподіл величин прогинів та моментів в центральному перерізі квадратної залізобетонної плити, навантаженої рівномірно-розподіленим навантаженням, представлені на рис. 4

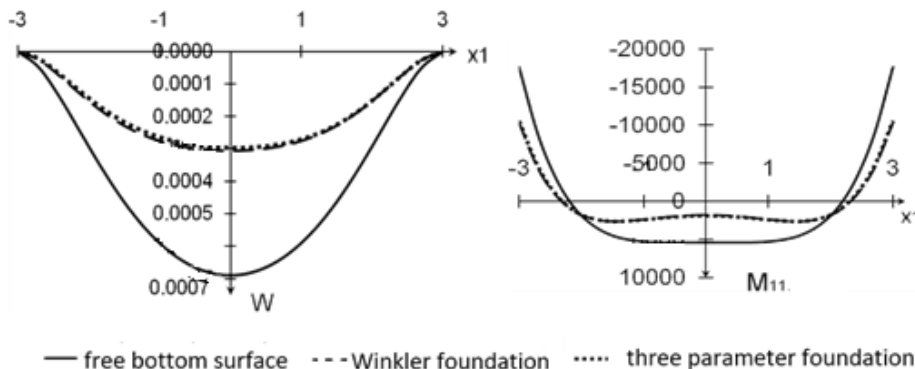


Рис. 4. Зміна переміщень (зліва) та моментів (справа) в центральному перерізі квадратної залізобетонної плити

Аналіз отриманих результатів дозволяє не тільки порівняти вплив пружної основи на розподіл переміщень та моментів у плиті, а і підтверджує точність та ефективність запропонованого підходу: величини прогинів та моментів відрізняються на 3 % та 1,5 % відповідно.

## 6 ВИСНОВКИ

У роботі побудовано математичну модель тонкої залізобетонної плити як однорідної ортотропної з усередненим модулем Губера. Запропоновано математичну модель трипараметричної пружної основи з урахуванням тертя між нижньою поверхнею плити та основою. На основі запропонованих у роботі методів дослідження проведено аналіз напружено-деформованого стану тонкої однорідної ортотропної квадратної пластини, повністю затиснутої по контуру у випадку, коли плита завантажується верхнім вантажем і спирається на пружну основу.

Розглянуто три типи пружних основ: трипараметрична основа, основа Вінклера та плита з вільною нижньою поверхнею. Проведено порівняльний аналіз результатів. Пружна основа істотно зменшує прогин, нахил і момент в плиті. Встановлено, що результати, отримані для основи моделі Вінклера та трьох параметричної відрізняються незначно: прогин на 3 % і момент лише на 1,5 %. Результати, отримані в рамках запропонованої моделі, практично не залежать від коефіцієнта тертя між нижньою поверхнею плити та фундаментом.

## 7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають будь-яких фінансових чи нефінансових інтересів щодо матеріалів, представлених у цій статті, які слід розкривати.

## Література

1. C.C. Ike, Flexural analysis of rectangular Kirchhoff plate on Winkler foundation using Galerkin-Vlasov variational method, *Math. Model. Eng. Probl.* 5 (2018) 83–92.
2. Y. G. Xiao and D. Feng, A fast computational algorithm for the element-free Galerkin method for a circular plate on elastic foundation subjected to concentrated load, *Chinese Journal of Solid Mechanics*, vol. 39, no. 5, (2018) 522–529.
3. M.V. Delyavskiy, N.V. Zdolbitska, L.I. Onyshko, A.P. Zdolbitskiy, Determination of the Stress-Strain State in Thin Orthotropic Plates on Winkler's Elastic Foundations, *Materials Science*, 50, № 6 (2015) 771–781.
4. A.M. Moniri Bidgoli, A.R. Daneshmehr, R. Kolahchi, Analytical bending solution of fully clamped orthotropic rectangular plates resting on elastic foundations by the finite integral transform method, *Journal of Applied and Computational mechanics*, v.1, issue 2 (2015) 52-58.
5. T.G. Konstantakopoulos, G.T. Michaltsos, Modelling and analysis of a plate on elastic foundation subjected to landing airplanes, *International Journal of Structural Stability and Dynamics* vol. 10, No. 01 (2019) 27-43.
6. . Wieghardt, Uber den Bolken auf nachgiebiger Unterlage, *K. Wieghardt ZAMM.* – 2, 3 (1992) 165–184.
7. A. Turhan, A consistent Vlasov model for analysis of plates on elastic foundations using the finite element method, PhD. dissertation, Graduate School of Texas Tech. University, Lubbock, TX, 1992.
8. R.C. Mishra, S.K. Chakrabarti, Shear and attachment effects on the behaviour of rectangular plates resting on tensionless elastic foundation, *Engineering Structures*, Volume 19(7) (1997) 551-567.
9. M. Celik M, A.A. Saygun, Method for the analysis of plates on a two-parameter foundation. *Int. J. Solids Struct.*, 36 (1999) 2891-2916.



10. Y. Feng, W. Fushed, J. Senging, W. Zijan, W. Zhen, Bending analysis of circular thin plates resting on elastic foundation using two modified Vlasov model, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China, 2020.
11. H. Karaşın, P. Gülkan, G. Aktas, A finite grid solution for circular plates on elastic foundations, *Journal of Civil Engineering* volume 19, (2015) 1157–1163.
12. Y. Feng, W. Ziyang, Y. Haifeng, L. Mengying, Iterative technique for circular thin plates on Gibson elastic foundation using modified Vlasov model, *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 9 (2019) 312-319.
13. A.K. Dutta, D. Bandyopadhyay, J.J. Mandal, Static analysis of thin rectangular plate resting on elastic foundation using modified Vlasov model, *Proceedings of the 12th Structural Engineering Convention (SEC 2022)*, NCDMM, MNIT Jaipur, India (2022) 1531-1537.
14. P. Baofeng, L. Rui, S. Yewang, B. Wang, Z. Yang. Analytical bending solutions of clamped rectangular thin plates resting on elastic foundations by the symplectic superposition method, *Applied Mathematics Letters*, 26 (2013) 355-361.
15. C.V.G. Valabhan, W.T. Straughan, Y.C. Das. Refined model for analysis of plate on elastic foundation. *Journal of Engineering Mechanics- ASCE* 117, 1991, 2830-2844
16. 20. A.M. Zenkour. The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundation. *International journal of Mechanical Science*. 51, 2009. 869-880
17. FM-H Huan, D.P. Thambiratnam, Analysis of plate resting on elastic supports by finite strip method, *Computers and Structures* 79, (2001) 2547-2557
18. M. Delyavskyy, K. Rosiński, Solution of non-rectangular plates with macroelement method, In: *AIP Conference Proceedings* 1822(1):020005, 2017.
19. M. Delyavskyy, K. Rosiński, N. Zdolbicka, O. Bilash, Macroelement analysis of thin orthotropic polygonal plate resting on the elastic Winkler's foundation, In: *AIP Conference Proceedings*, Volume 2077 (1):020014, 2019.
20. M. Delyavskyy, M. Rosiński, The New Approach to Analysis of Thin Isotropic Symmetrical Plates *Appl. Sci.* 10 (17), 5931, 2020.
21. M. Delyavskyy, J. Sobczak-Piąstka, K. Rosinski, D. Buchanec, Y. Famulyak, Solution of Thin Rectangular Plates with Various Boundary Conditions, In: *AIP Conf. Proc.* 2949, 020023, 2023.

## References

1. Ike, C. (2018) Flexural analysis of rectangular Kirchhoff plate on Winkler foundation using Galerkin-Vlasov variational method, *Math. Model. Eng. Probl.* 5, 83–92.
2. Xiao, Y., Feng, D. (2018) A fast computational algorithm for the element-free Galerkin method for a circular plate on elastic foundation subjected to concentrated load, *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 39, 5, 522–529.
3. Delyavskyy, M., Zdolbitska, N., Onyshko, L., Zdolbitskyi, A. (2015) Determination of the Stress-Strain State in Thin Orthotropic Plates on Winkler's Elastic Foundations, *Materials Science*, 50, 6 771–781.
4. Moniri Bidgoli, A., Daneshmehr, A., Kolehchi, R. (2015) Analytical bending solution of fully clamped orthotropic rectangular plates resting on elastic foundations by the finite integral transform method, *Journal of Applied and Computational mechanics*, 1, 2 52-58.
5. Konstantakopoulos, T., Michaltsos, G. (2019) Modelling and analysis of a plate on elastic foundation subjected to landing airplanes, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 10, 01, 27-43.
6. . Wieghardt, K. (1992) *Über den Bolken auf nachgiebiger Unterlage*, *ZAMM*, 2, 3 165–184.
7. Turhan, A. (1992) A consistent Vlasov model for analysis of plates on elastic foundations using the finite element method, PhD. dissertation, Graduate School of Texas Tech. University, Lubbock, TX,
8. Mishra, R., Chakrabarti, S. (1997) Shear and attachment effects on the behaviour of rectangular plates resting on tensionless elastic foundation, *Engineering Structures*, 19(7) 551-567.
9. Celik, M., Saygun, A. (1999) Method for the analysis of plates on a two-parameter foundation. *Int. J. Solids Struct.*, 36 2891-2916.



10. Feng, Y., Fushed, W., Senging, J., Zijan, W., Zhen, W. (2020) Bending analysis of circular thin plates resting on elastic foundation using two modified Vlasov model, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072.
11. Karaşin, H., Gülkan, P., Aktas, G. (2015) A finite grid solution for circular plates on elastic foundations, *Journal of Civil Engineering* 19 1157–1163.
12. Feng, Y., Ziyang, W., Haifeng, Y., Mengying, L. (2019) Iterative technique for circular thin plates on Gibson elastic foundation using modified Vlasov model, *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 9 312-319.
13. Dutta, A., Bandyopadhyay, D., Mandal, J. (2022) Static analysis of thin rectangular plate resting on elastic foundation using modified Vlasov model, *Proceedings of the 12th Structural Engineering Convention (SEC 2022), NCDMM, MNIT Jaipur, India* 1531-1537.
14. Baofeng, P., Rui, L., Yewang, S., Wang, B., Yang, Z. (2013) Analytical bending solutions of clamped rectangular thin plates resting on elastic foundations by the symplectic superposition method, *Applied Mathematics Letters*, 26 355-361.
15. Valabhan, C., Straughan, W., Das, Y. (1991) Refined model for analysis of plate on elastic foundation. *Journal of Engineering Mechanics- ASCE* 117 2830-2844
16. Zenkour, A. (2009) The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundation. *International journal of Mechanical Science*. 51, 869-880.
17. Huan, F., Thambiratnam, D. (2001) Analysis of plate resting on elastic supports by finite strip method, *Computers and Structures* 79 2547-2557.
18. M. Delyavskyy, K. Rosiński, Solution of non-rectangular plates with macroelement method, In: *AIP Conference Proceedings* 1822(1):020005, 2017.
19. Delyavskyy, M., Rosiński, K., Zdobicka, N., Bilash, O. (2019) Macroelement analysis of thin orthotropic polygonal plate resting on the elastic Winkler's foundation, In: *AIP Conference Proceedings*, 2077, 1 020014.
20. Delyavskyy, M., Rosiński, K. (2020) The New Approach to Analysis of Thin Isotropic Symmetrical Plates *Appl. Sci.* 10 (17), 5931.
21. Delyavskyy, M., Sobczak-Piąstka, J., Rosinski, K., Buchaniec D., Famulyak, Y. (2023) Solution of Thin Rectangular Plates with Various Boundary Conditions, In: *AIP Conf. Proc.* 2949, 020023.

**Делявський Михайло Володимирович**

Луцький національний технічний університет,  
д.т.н., професор  
вул. Потебні, 56 Луцьк, Україна, 43003  
delavski123@gmail.com,  
ORCID: 0000-0001-6952-0870

**Мікуліч Станіслав Борисович**

Луцький національний технічний університет,  
аспірант  
вул. Потебні, 56 Луцьк, Україна 43003  
svitlanarotko61@gmail.com,  
ORCID: 0009-0003-3287-217X

*Для посилань:*

Делявський М. В., Мікуліч С. Б. Аналіз рівноваги тонких ортотропних плита на трипараметричній пружній основі. *Механіка та математичні методи*, 2024. Т. 6. № 2. С. 31–46.

*For references:*

M. Delyavskyy, S. Mikulich. (2024). Equilibrium analysis of thin orthotropic plates on a triparametric elastic base. *Mechanics and mathematical methods*. VI (2). 31–46.