

ISSN 2618-0650 (Print)
ISSN 2664-1364 (Online)

Механіка



та математичні методи

**Mechanics
and Mathematical Methods**

**Науковий журнал
The scientific journal**

VII/2/2025

УДК 531 : 51-7 (05)
М55

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

Науковий журнал



Засновник і видавець:

Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Том VII
№2
2025**

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: Серія КВ №23478–13318 Р від 13.07.2018 р.

Рішення Національної ради №1162 від 26.10.2023 р.,
протокол №24; ідентифікатор медіа: R30-01810

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
Серія ДК №4515 від 01.04.2013 р.

М55 Механіка та математичні методи : науковий журнал. — Одеса : ОДАБА, 2025. — Том VII. — №2. — 169 с.

В науковому журналі публікуються статті і огляди за спеціальностями:

- Е7 Математика;
- Е8 Статистика;
- F1 Прикладна математика;
- F2 Інженерія програмного забезпечення;
- F3 Комп'ютерні науки;
- F4 Системний аналіз та наука про дані;
- G9 Прикладна механіка;
- G19 Будівництво та цивільна інженерія.

Рекомендовано до друку Вченою радою Одеської державної академії будівництва та архітектури, протокол №2 від 18.09.2025 р.

Адреса: редакція журналу «Механіка та математичні методи»
Одеська державна академія будівництва та архітектури
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029

Телефони: (048)7234937, (048)7323402, (048)7298563

E-mail: mmm@odaba.edu.ua

Web: mmm-journal.com.ua

УДК 531 : 51-7 (05)
М55

ISSN 2618-0650 (Print)
ISSN 2664-1364 (Online)

Одеська державна академія
будівництва та архітектури, 2025

Редакційна колегія:

Головний редактор: Ковров А. В., к.т.н., проф., ректор Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Заступники головного редактора:

Крутий Ю. С., д.т.н., проф., професор кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Сур'янінов М. Г., д.т.н., проф., завідувач кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Відповідальний секретар: Кіосак В. А., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

- Бербюк В. Є., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри механіки та морських наук, Технічний університет Чалмерса, Гетеборг, Швеція;
- Ватуля Г. Л., д.т.н., проф., професор кафедри будівельної механіки та гідравліки Українського державного університету залізничного транспорту, Харків, Україна;
- Горик О. В., д.т.н., проф., професор кафедри будівництва та професійної освіти Полтавської державної аграрної академії, Полтава, Україна;
- Куріазопоулос А., к.т.н., доц., професор кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Кода Е., д.т.н., проф., декан факультету будівництва та інженерії середовища Варшавського природничого університету, Варшава, Польща;
- Кононов Ю. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач відділу теорії керуючих систем інституту прикладної математики та механіки НАН України, Слав'янск, Україна;
- Круглов В. Є., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна;
- Кучер М. К., д.т.н., проф., завідувач відділу конструкційних матеріалів інституту проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна;
- Лазарева Д. В., к.т.н., доцент кафедри динаміки машин та механічної інженерії національного університету «Одеська політехніка», Одеса, Україна;
- Лесечко О. В., к.ф.-м.н., доц., завідувач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Лещенко Д. Д., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри теоретичної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Ляшенко Т. В., д.т.н., проф., професорка кафедри процесів та апаратів в технології будівельних матеріалів Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Максимович О. В., д.т.н., проф., професорка кафедри зварювального виробництва, діагностики та відновлення металоконструкцій Національного університету "Львівська політехніка", Львів, Україна;
- Мікуліч О. А., д.т.н., проф., завідувачка кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна;
- Отрош Ю. А., д.т.н., проф., начальник кафедри пожежної профілактики в населених пунктах Національного університету цивільного захисту України, Харків, Україна;
- Пастернак Я. М., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри комп'ютерних наук та кібербезпеки Волинського національного університету імені Лесі Українки, Луцьк, Україна;
- Пневматікос Н., к.т.н., доц., доцент кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Савченко О. Г., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, Херсон, Україна;
- Трач В. М., д.т.н., проф., завідувач кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування, Рівне, Україна.

Видавничий редактор: Теорло Наталя Анатоліївна, асистент кафедри інформаційних технологій та прикладної математики

Технічний редактор: Гедулян Сергій Іванович, к.т.н., доцент кафедри процесів та апаратів в технології будівельних матеріалів

Лінгвістичний радник з англійської мови: Мар'яно Яніна Георгіївна, к.ф.н, доц., завідувачка кафедри іноземних мов

The composition of the editorial board:

Chief Editor: A. Kovrov, Ph.D., Professor, Rector of Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;

Deputy Chief Editor:

Yu. Krutii, Doctor of Technical Science, Professor, Professor of the Department of Information Technologies and Applied Mathematics of Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;

Suryaninov M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Mechanics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;

Assistant Editor: V. Kiosak, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Higher Mathematics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;

- V. Berbyuk, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor in Mechanical Systems, Division of Dynamics, Department of Mechanics and Maritime Sciences Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden;
- G. Vatulia, Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Structural Mechanics and Hydraulics Department, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine;
- O. Goryk, Doctor of Technical Science, Professor, Professor of the Department of Construction and Professional Education, Poltava State Agrarian Academy, Poltava, Ukraine;
- A. Kyriazopoulos, Ph.D., Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- E. Koda, Doctor of Technical Science, Professor, Dean of Construction and Environmental Engineering Faculty, University of Life Sciences, Warsaw, Poland;
- Y. Kononov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Control-system Theory Division, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Slavyansk, Ukraine;
- V. Kruglov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Chair of Methods of Mathematical Physics Odessa I. I. Mechnikov National University, Odesa, Ukraine;
- M. Kucher, Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Materials Division, G. S. Pisarenko Institute for Problems of Strength, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine;
- D. Lazareva, Ph.D., Associate Professor of the Department of Machine Dynamics and Mechanical Engineering of the Odesa Polytechnic National University, Odesa, Ukraine;
- O. Lesechko, Ph.D., Associate Professor, Head of Higher Mathematics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;
- D. Leshchenko, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Mechanics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;
- T. Lyashenko, Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Processes and Devices in Construction Materials Technology, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;
- O. Maksymovych, Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Welding Engineering, Diagnostics and Rebuilding of Metal Structures, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine;
- O. Mikulich, Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Engineering Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine;
- Y. Otrosh, Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Civil Protection Service, National University of Civil Defence of Ukraine, Kharkiv, Ukraine;
- Y. Pasternak, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of the of Computer Science and Cyber Security, Lesya Ukrainka Volyn National University, Lutsk, Ukraine;
- N. Pnevmatikos, Ph.D., Associate Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- O. Savchenko, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Algebra, Geometry and Mathematical Analysis Department, Kherson State University, Kherson, Ukraine;
- V. Trach, Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Bridges and Tunnels, Strength of Materials and Structural Mechanics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine.

Publishing Editor: Natalia Teorlo, Assistant Professor of the Department of Information Technologies and Applied Mathematics

Technical Editor: Serhii Hedulian, Ph.D., Associate Professor of the Department of Processes and Apparatuses in Building Materials Technology

Linguistic Adviser in English language: Yanina Marianko, Ph.D., Associate Professor, Head of the Department of Foreign Languages

ЗМІСТ

P. Alexanyan, L. Arutunyan, A. Sedryan, Yu. Yakuheva Plate problem of the theory of elasticity for a composite plane with cracks.....	6
Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи гіростата з рухомою масою в середовищі з опором.....	19
Крутий Ю. С., Перпері А. О., Вакуленко В. В., Ковальова І. Л. Аналітичний розрахунок балок змінної жорсткості на неоднорідній пружній основі Вінклера.....	28
M. Farhan Differentially driven wheeled robot constructed using lego mindstorms components.....	45
Кірсанов М. В., Стрельцов К. О., Барабаш І. В. Механохімічна активація портландцементу з добавками та їх вплив на міцність цементного каменю	58
R. Maiboroda, Y. Otrosh Improved thermomechanical model for predicting the behaviour of reinforced concrete structures under fire and explosion conditions.....	66
Шамич О. М., Холодова О. С., Човнюк Ю. В., Остапущенко О. П., Чередніченко П. П. Біомеханічний інжиніринг у спорті вищих досягнень: інформаційно-ентропійний підхід в аналізі фізіологічних сигналів засобами мехатроніки.....	86
Лобода К. В., Ходанен Т. В. Вплив жорсткого електрода, розташованого на межі поділу пружного біматеріалу, на його деформування	101
Лесечко О. В., Соловйов А. А. Тривимірні звідні псевдоріманові простори.....	116
Губаль Г. М., Гуда О. В., Одновол Д. Г. Нестационарні процеси на базі методів сингулярного розкладання і штучних нейронних мереж.....	133
A. Pysarenko Second order guided wave propagation in layered plates.....	147
Рачинська А. Л., Недєва О. А., Іщенко О. В. Інформаційна технологія візуалізації динаміки розвитку пожежі	160

CONTENT

P. Alexanyan, L. Arutunyan, A. Sedryan, Yu. Yakuheva Plate problem of the theory of elasticity for a composite plane with cracks	6
D. Leshchenko, T. Kozachenko Perturbed motions of a gyrost with a movable mass in a resistive medium.....	19
Yu. Krutii, A. Perperi, V. Vakulenko, I. Kovalova Analytical calculation of a beam on a Winkler elastic foundation with power-law inhomogeneity.....	28
M. Farhan Differentially driven wheeled robot constructed using lego mindstorms components.....	45
M. Kirsanov, K. Streltsov, I. Barabash Mechanochemical activation of portland cement with the addition and their influence on the strength of cement stone.....	58
R. Maiboroda, Y. Otrosh Improved thermomechanical model for predicting the behaviour of reinforced concrete structures under fire and explosion conditions.....	66
O. Shamykh., O. Kholodova, Yu. Chovnyuk, O. Ostapushchenko, P. Cherednichenko Biomechanical engineering in high-performance sports: the information-entropy approach to the analysis of physiological signals through mechatronic systems.....	86
K. Loboda, T. Khodanenko The effect of a rigid interface electrode on the deformation of a bimaterial plate.....	101
O. Lesechko, A. Soloviov Three-dimensional reducible pseudo-riemannian spaces.....	116
G. Hubal, O. Huda, G. Odnovol Non-stationary processes based on singular decomposition methods and artificial neural networks.....	133
A. Pysarenko Second order guided wave propagation in layered plates	147
A. Rachinska, O. Nedieva, O. Ishchenko Information technology for visualization of fire development dynamics	160

UDC 539.3

PLATE PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A COMPOSITE PLANE WITH CRACKS

P. Alexanyan¹, L. Arutunyan², A. Sedrakyan³, Yu. Yakusheva⁴

¹National University of Architecture and Construction Armenia

²Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Armenia

³Yerevan Educational and Scientific Institute of West Ukrainian National University RA Yerevan

⁴Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: This paper considers plane problem of linear elasticity theory for a composite plane formed by two half-planes with different elastic characteristics. It is assumed that there are cracks of finite or half-infinite length at the division line of the materials. To obtain analytical solutions, the method of integral Fourier transforms in a bipolar coordinate system is used with the application of Papkovitch–Neuber solution, which allows the problems to be reduced to a closed form and their rigorous mathematical solution to be carried out.

Two characteristic cases of weakening geometry are investigated: in the first case, the composite plane is weakened by a crack of finite length located along the bimaterial interface; in the second case, two semi-infinite cracks symmetrically located about the axis which separates the half-planes are considered. In both cases, ideal (perfect) contact interaction between materials outside the crack region is assumed.

A mixed boundary value problem is solved: normal and shear stresses are specified at the crack edges, while outside the crack, continuity of displacements and stresses is ensured at the material interface, which corresponds to the condition of complete contact. The specified load functions at the edges of the crack are assumed to be piecewise smooth and satisfy the conditions of Fourier series expandability.

The distributions of normal and shear stresses along the contact line and on the crack, faces are studied under various types of external loading. Particular attention is paid to the analysis of stress behavior features in the vicinity of crack ends, where singularities of a power-law nature are observed. The results obtained can be used in the analysis of the strength and fracture of inhomogeneous materials, as well as in modeling the stress-strain state near defects at the interfaces of media.

Keywords: composite body, crack, bipolar coordinates, Papkovitch–Neuber functions, Fourier transformation.

ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ СКЛАДЕНОЇ ПЛОЩИНИ З ТРІЩИНАМИ

Алексанян Р. К.¹, Арутюнян Л. А.², Седракян А. М.³, Якушева Ю. В.⁴

¹Національний університет будівництва та архітектури Арменії

²Інститут механіки НАН Арменії

³Єреванський навчально-науковий інститут Західноукраїнського національного університету

⁴Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: У цій статті розглядається плоска задача лінійної теорії пружності для складеної площини, утвореної двома півплощинами з різними пружними характеристиками. Припускається, що на лінії поділу матеріалів є тріщини скінченної або напівнескінченної довжини. Для отримання аналітичних розв'язків використовується метод інтегральних перетворень Фур'є в біполярній системі координат із застосуванням розв'язку Папковича-Нойбера, що дозволяє звести задачу до замкнутої форми та виконати її математичний розв'язок.



Досліджуються два характерні випадки геометрії ослаблення: у першому випадку складена площина ослаблена тріщиною скінченної довжини, розташованою вздовж біматеріальної межі поділу; у другому випадку розглядаються дві напівнескінченні тріщини, симетрично розташовані відносно осі, яка розділяє півплощини. В обох випадках передбачається ідеальна контактна взаємодія між матеріалами поза областю тріщини.

Розв'язується змішана крайова задача: на краях тріщини задаються нормальні та зсувні напруження, тоді як поза тріщиною забезпечується неперервність переміщень та напружень на межі поділу матеріалів, що відповідає умові повного контакту. Задані функції навантаження на краях тріщини вважаються кусочно-гладкими та задовольняють умови розкладання в ряди Фур'є.

Досліджуються розподіли нормальних та зсувних напружень вздовж лінії контакту та на границі тріщини при різних типах зовнішнього навантаження. Особлива увага приділяється аналізу особливостей поведінки напружень поблизу кінців тріщини, де спостерігаються сингулярності степеневого характеру. Отримані результати можуть бути використані при аналізі міцності та руйнування неоднорідних матеріалів, а також при моделюванні напружено-деформованого стану поблизу дефектів на межі поділу матеріалів.

Ключові слова: складене тіло, тріщина, біполярні координати, функції Папковича-Нейбера, перетворення Фур'є.

1 INTRODUCTION

Problems in elasticity theory related to the study of stress-strain states (SSS) in bodies with cracks are a significant trend in continuum mechanics and have wide application in engineering practice. Particularly topical are problems involving heterogeneous media containing defects such as cracks at the materials interface with different physical and mechanical characteristics. Such models allow adequate description of the behaviour of composite and laminated materials used in construction, aircraft engineering, mechanical engineering and other industries.

The analysis of stresses and displacements in the region of cracks at interface boundaries differs significantly from classical homogeneous problems due to the presence of elastic modulus jumps and possible peculiarities of contact interaction between material components. These peculiarities lead to the occurrence of singular stresses, which is particularly important to consider when assessing the strength and stability of structures.

This paper considers plane problems of static linear elasticity theory for a composite plane consisting of two half-planes with different elastic properties. Cracks of finite or semi-infinite length are assumed to exist at the division line between the materials. Such formulations model the most typical cases of local weakening in laminated media caused by operational damage or manufacturing defects.

The purpose of the present work is to obtain a rigorous analytical solution of the indicated problems using Fourier integral transforms in a bipolar coordinate system and the Papkovitch–Neuber functions. Special attention is paid to mixed boundary conditions: stresses are specified on the crack edges, while outside the crack region ideal contact between the materials is assumed.

The solutions obtained allow not only to analyse the distribution of stresses and displacements in the contact area and near the crack ends, but also to identify the nature of singularities arising in these areas. The results presented can be used to assess the strength characteristics of multilayer structures and predict their durability.

2 ANALYSIS OF LITERARY DATA AND RESOLVING THE PROBLEM

Problems involving cracks are related to problems of determining the stress-strain state in homogeneous and inhomogeneous elastic bodies, which are of interest in both theoretical and practical issues of strength of various structures. This has become the subject of research by many authors, among whom we note [2–8, 13, 14 and the references therein].

In work [2], the concentration of elastic stresses near dies, cuts, thin inclusions is considered. Fracture of composite materials is examined in the book by Cherepanov G.P. [3]. The distribution of stresses around cracks in plates and shells is studied in the book by Panasyuk V.V. and others [4]. A mixed problem for a composite plane weakened by a crack, where stress components are specified on one crack edge and displacement components on the other, is considered in [5]. Another mixed problem for a composite plane with two semi-infinite cracks is analyzed in [6]. A contact problem for an infinite plate with a finite crack reinforced with elastic pads of the same finite length is considered in [7]. In the paper by Arutunyan L.A. [8], the elastic equilibrium of a composite plane consisting of two half-planes with semi-infinite cracks having different elastic characteristics, with stresses applied on the interface line, is studied.

Problems of torsion and bending of rods of lunular profile, bending of lunular form, as well as some plane problems for such regions were studied in works [9, 10]. In [12]

(Tarantino A.M.), the problem of plane stress state with a crack in a Mooney–Rivlin material is considered.

In our works [13, 14], plane problems for a circular segment and a half-plane with a segmental notch under mixed boundary conditions are analyzed. In a series of papers by Gao Y.C. (with co-authors) [15–23], stress analysis near the crack tip in rubber-like material was performed. Cracks in homogeneous and inhomogeneous material were considered. It was shown that the character of stress singularity depends on the elastic parameters of the material, and in the case of plate tension its thickness at the crack tip tends to zero. In article [24], where the case of an interfacial crack on the boundary of two half-planes was examined, it was established that stresses have no oscillations at the crack tip, unlike in the linear problem of the interfacial crack.

In the work of Tarantino A.M. [25], the problem of plane stress state with a crack in a Mooney–Rivlin material was studied. The equilibrium equations were written through the Airy stress functions, and approximate values were obtained by the asymptotic method. In articles [28–30], the following problems for homogeneous and two-component planes are considered: a crack in a homogeneous plane; a crack at the interface of a half-plane with a rigid element; an interfacial crack. In all cases, the generalized neo-Hookean material model was used. Comparisons were made with the results of numerical solutions by the finite element method.

An exact global solution of the nonlinear plane strain problem with an interfacial crack for a John material was obtained in the work of Malkov V.M. [31], where the Muskhelishvili complex potential method was applied. Stresses in the nonlinear interfacial crack problem have root singularity and oscillation at the crack tips, as in the linear case. In [32], an asymptotic analysis of deformations near the crack tip in a homogeneous plane for the same material model was given. The aim was to show that there exists a region where the material loses ellipticity under large deformations.

In the work of Abeyaratne R., Yang J.S. [33], stress and strain fields near the crack tip under uniaxial tension for a special type of incompressible material model were studied. It was obtained that for this model the system of nonlinear differential equations may lose ellipticity under sufficiently large deformations. The asymptotics of stresses at the tip of an interfacial crack were studied in works of Herrmann J.M. [34, 35] for generalized neo-Hookean material, with results of a large number of calculations presented.

In the paper by Akopyan V.N. (with co-authors) [36], the plane strain state of a composite elastic plane with an interfacial crack was considered, on one of the crack edges of which an absolutely rigid punch, not reaching the crack tips, is indented with adhesion.

In the present paper, two specific plane problems of the theory of elasticity are considered for a composite plane consisting of two half-planes with different elastic characteristics. It is weakened along the contact line either by one finite crack or by two semi-infinite cracks, thus transforming the domain into a doubly connected or singly connected region.

3 PURPOSE AND TASKS OF THE STUDY

In the rectangular Cartesian coordinate system (x, y) the half-plane $y \geq 0$ has elastic characteristics, and the other half-plane has elastic characteristics G_1, ν_1 , and the half-plane $y \leq 0$ has elastic characteristics G_2, ν_2 (G_1, G_2 -shear moduli of the materials, ν_1, ν_2 - Poisson's ratio).

To solve the problem, we will use the bipolar coordinate system. The relation between the rectangular coordinates (x, y) and the bipolar coordinates α, β is given by the expressions

[1, 11, 12]: $qx = sh\alpha$, $qy = \sin \beta$, $aq = ch\alpha + \cos \beta$, where α - is the dimensional parameter.

The coordinate α varies from $-\infty$ to $+\infty$. In the first half-plane, on the left $\alpha < 0$, the axis oy is the coordinate line $\alpha = 0$, points $x = \pm a$, $y = 0$ correspond to the values of $\alpha = \pm\infty$. The coordinate β varies from $-\pi$ to $+\pi$. In the upper half-plane $\beta > 0$, in the lower $\beta < 0$. The segment $(-a, a)$ is the coordinate line $\beta = 0$. As for the segment ox at $x < -a$ and $x > a$, here the coordinate β undergoes a discontinuity equal to 2π , namely on the upper bank $\beta = \pi$ and on the lower bank $\beta = -\pi$.

The problem is solved using the Papkovitch-Neuber function. According to Papkovitch-Neuber, the general solution to a plane elasticity problem can be represented by three harmonic functions, since one of them is arbitrarily chosen. Taking advantage of this arbitrariness, we assume that one of the functions is identically zero.

Displacements U, V stresses and through $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ the Papkovitch-Neuber functions are expressed as follows:

$$\begin{aligned} 2GU(x, y) &= \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi_2(x, y)}{\partial y}, \\ 2GY(x, y) &= (3 - \nu) \partial \Phi_2(x, y) + \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_2(x, y)}{\partial y}, \\ \sigma_{x,y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 - 2\nu) \Phi_2(x, y) - \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \Phi_2(x, y)}{\partial y^2} \right], \\ \sigma_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[2\nu \Phi_2(x, y) + \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial y} \right] - y \frac{\partial^2 \Phi_2(x, y)}{\partial x^2}, \\ \sigma_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[2(1 - \nu) \Phi_2(x, y) - \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial y} \right] - y \frac{\partial^2 \Phi_2(x, y)}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

where $\Phi_0(x, y)$ and $\Phi_2(x, y)$ the Papkovitch-Neuber functions.

Statement of problem:

Let on the boundary line $y = 0$ the composite plane be weakened by a crack on the interval $|x| < a$, and a , on the semi-infinite intervals $|x| > a$ there is full contact between the materials (Fig.1).

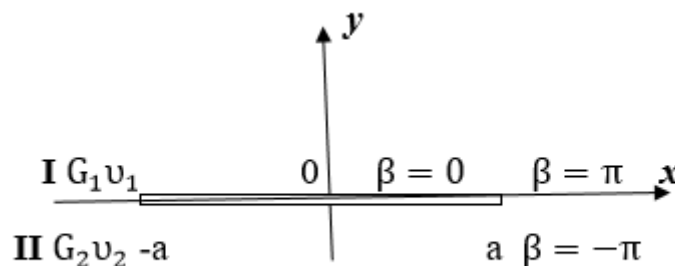


Fig. 1. Composite plane with a finite crack

Let us consider a mixed boundary value problem for the given domain, when on one crack edge normal displacements and shear stresses are specified, while on the other crack edge horizontal displacement and normal stresses are specified.

$$\tau_{x,y}^{(1)}(\alpha, 0) = \tau_1(\alpha), V_1(\alpha, 0) = V_0(\alpha), \sigma_y^{(2)}(\alpha, 0) = \sigma_2(\alpha), U_2(\alpha, 0) = U_0(\alpha). \quad (3)$$

It is assumed that the functions $\tau_1(\alpha)$, $\sigma_2(\alpha)$, $V_0(\alpha)$, $U_0(\alpha)$ satisfy the conditions of expandability into a Fourier integral. . On the contact line, full adhesion of the materials is assumed, i.e. displacements and stresses are equal:

$$\begin{aligned} U_1(\alpha, \pi) &= U_2(\alpha, -\pi), V_1(\alpha, \pi) = V_2(\alpha, -\pi), \\ \tau_{x,y}^{(1)}(\alpha, \pi) &= \tau_{x,y}^{(2)}(\alpha, -\pi), \sigma_y^{(1)}(\alpha, \pi) = \sigma_y^{(2)}(\alpha, -\pi). \end{aligned} \quad (4)$$

By means of expressions (2) and boundary conditions (3) and (4), through the harmonic functions $\Phi_0^{(m)}(\alpha, \beta)$, $\Phi_2^{(m)}(\alpha, \beta)$, $m=1,2$ they are written in the following form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1-2\nu) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \beta) - \Phi_3(\alpha, \beta) \right]_{\beta=0} &= \frac{a\tau_1(\alpha)}{ch\alpha + 1} \\ (3-4\nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, 0) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, 0) &= 2G_1 V_0(\alpha) \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \left[2(1-\nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \beta) - \Phi_3(\alpha, \beta) \right]_{\beta=0} &= \frac{a\tau_1(\alpha)}{ch\alpha + 1} \\ \frac{\partial \Phi_3^2(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} &= 2G_2 \frac{\partial U_0(\alpha)}{\partial \alpha} \\ \frac{1}{G_1} \frac{\partial \Phi_3^2(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\pi} &= \frac{1}{G_2} \frac{\partial \Phi_3^2(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=-\pi} \\ \frac{1}{G_1} \left[(3-4\nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \pi) - \Phi_3^{(1)}(\alpha, \pi) \right] &= \frac{1}{G_2} \left[2(1-\nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, -\pi) - \Phi_3^2(\alpha, -\pi) \right] \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \left[2(1-\nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^1(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=\pi} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left[2(1-\nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^2(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=-\pi} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1-2\nu_1) \Phi_2^{(1)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^1(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=\pi} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1-2\nu_2) \Phi_2^{(2)}(\alpha, \beta) - \Phi_3^2(\alpha, \beta) \right] \Big|_{\beta=-\pi}, \end{aligned} \quad (5)$$

where

$$\Phi_3^m(x, y) = \frac{\partial \Phi_0^m(x, y)}{\partial y}, \quad (m=1, 2). \quad (6)$$

4 BASIC RESULTS

The harmonic functions for the first problem are sought in the form of Fourier integrals [12]

$$\Phi_3^m(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_n^{(m)}(\lambda) ch\lambda\beta + B_n^{(m)}(\lambda) sh\lambda\beta] \frac{\exp(-\lambda\alpha)}{\lambda} d\lambda. \quad (7)$$

Substituting (7) in (5) we arrive at a system of algebraic equations for determining the quantities $A_n^{(m)}(\lambda)$ and $B_n^{(m)}(\lambda)$ ($m=1,2; n=1,2$), the right-hand sides of which contain the Fourier transform of the given functions.

After solving these systems, we obtain the following values for the unknown integration constants:

$$\begin{aligned} A_2^{(1)}(\lambda) &= \frac{2[\bar{v}_1(\lambda) - \bar{\tau}_1(\lambda)]}{\chi_1 + 1}, & A_2^{(1)}(\lambda) &= \frac{2[\bar{U}_2(\lambda) + \bar{\sigma}_2(\lambda)]}{\chi_2 + 1}, \\ A_3^{(1)}(\lambda) &= \frac{(\chi_1 - 1)\bar{v}_1(\lambda) - 2\chi_1\bar{\tau}_1(\lambda)}{\chi_1 + 1}, & B_3^{(2)}(\lambda) &= \bar{U}_2(\lambda), \\ B_2^{(1)}(\lambda) &= \frac{\mu\chi_2}{\chi_1} A_2^{(1)}(\lambda) \operatorname{cth}\lambda\pi - \frac{2\mu}{\chi_1} A_3^{(2)}(\lambda) \operatorname{cth}2\lambda\pi + \frac{m_1(\lambda)}{\chi_1 \operatorname{ch}\lambda\pi} + \frac{m_2(\lambda)}{\chi_1 \operatorname{sh}\lambda\pi}, \\ B_3^{(1)}(\lambda) &= -\mu A_3^{(2)}(\lambda) \operatorname{th}\lambda\pi + \frac{m_1(\lambda)}{\operatorname{ch}\lambda\pi}, & A_2^{(2)}(\lambda) &= \frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, & A_3^{(2)}(\lambda) &= \frac{\Delta_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \end{aligned} \quad (8)$$

where

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= a_{11}(\lambda)a_{22}(\lambda) - a_{12}(\lambda)a_{21}(\lambda), \\ \Delta_1(\lambda) &= a_{21}(\lambda)b_1(\lambda) - a_{12}(\lambda)b_2(\lambda), \\ \Delta_2(\lambda) &= a_{11}(\lambda)b_2(\lambda) - a_{21}(\lambda)b_1(\lambda), \\ b_1(\lambda) &= 2\chi_1 m_3(\lambda) \operatorname{sh}\lambda\pi - (\chi_1 + 1)m_2(\lambda) \operatorname{ch}\lambda\pi + (\chi_1 - 1)m_2(\lambda) \operatorname{sh}\lambda\pi, \\ b_2(\lambda) &= 2\chi_1 m_4(\lambda) \operatorname{ch}\lambda\pi - (\chi_1 - 1)m_2(\lambda) \operatorname{ch}\lambda\pi + (\chi_1 + 1)m_1(\lambda) \operatorname{sh}\lambda\pi, \\ m_1(\lambda) &= \mu B_3^{(2)}(\lambda) \operatorname{ch}\lambda\pi - A_3^{(1)}(\lambda) \operatorname{sh}\lambda\pi, \\ m_2(\lambda) &= -\chi_1 A_2^{(2)}(\lambda) \operatorname{ch}\lambda\pi - A_3^{(1)}(\lambda) \operatorname{sh}\lambda\pi - \mu\chi_1 B_2^{(2)}(\lambda) \operatorname{sh}\lambda\pi + \mu\chi_1 B_3^{(2)}(\lambda) \operatorname{sh}\lambda\pi, \\ m_3(\lambda) &= -\frac{\chi_1 + 1}{2} A_2^{(1)}(\lambda) \operatorname{sh}\lambda\pi + A_3^{(1)}(\lambda) \operatorname{sh}\lambda\pi + \frac{\chi_2 + 1}{2} B_2^{(2)}(\lambda) \operatorname{ch}\lambda\pi - B_3^{(2)}(\lambda) \operatorname{ch}\lambda\pi, \\ m_4(\lambda) &= -\frac{\chi_1 - 1}{2} A_2^{(1)}(\lambda) \operatorname{ch}\lambda\pi + A_3^{(1)}(\lambda) \operatorname{ch}\lambda\pi - \frac{\chi_2 - 1}{2} B_2^{(2)}(\lambda) \operatorname{sh}\lambda\pi + B_3^{(2)}(\lambda) \operatorname{sh}\lambda\pi, \\ a_{11}(\lambda) &= -\mu\chi_2(\chi_1 + 1) \operatorname{ch}^2\lambda\pi + \chi_1(\chi_2 + 1) \operatorname{sh}^2(\lambda\pi), \\ a_{12}(\lambda) &= -\mu_2(\chi_1 + 1) \operatorname{ch}^2\lambda\pi + (\mu\chi_1 - 2\chi_1 - \mu) \operatorname{sh}^2\lambda\pi, \\ a_{21}(\lambda) &= [\mu\chi_2(\chi_1 - 1) - \chi_1(\chi_2 - 1) \operatorname{ch}^2\lambda\pi], \\ a_{22}(\lambda) &= [2\chi_1 - \mu(\chi_1 - 1)] \operatorname{ch}^2\lambda\pi + \mu(\chi_1 + 1) \operatorname{sh}^2\lambda\pi, \\ \bar{\tau}_1(\lambda) &= \frac{ia}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_1(\alpha)}{\operatorname{ch}\alpha + 1} \exp(i\lambda\alpha) d\alpha, & \sigma_2(\lambda) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_2(\alpha)}{\operatorname{ch}\alpha + 1} \exp(i\lambda\alpha) d\alpha, \\ \bar{v}_0(\lambda) &= \frac{2G_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_0(\alpha) \exp(i\lambda\alpha) d\alpha, & \sigma_2(\lambda) &= \frac{2G_2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_0(\alpha)}{\partial \alpha} \exp(i\lambda\alpha) d\alpha, \\ \mu &= \frac{G_1}{G_2}, & \chi &= 3 - 4\nu_m \quad (m=1,2). \end{aligned} \quad (9)$$

2. In the second variant of the considered problem, on the boundary line in the semi-infinite intervals there is a crack, while on the section full contact between the materials is assumed (Fig. 2).

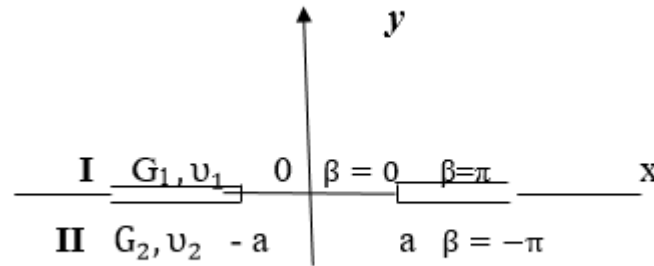


Fig. 2. Composite plane with an infinite crack

The boundary and contact conditions in this case have the form:

$$\begin{aligned} \tau_{x,y}^{(1)}(\alpha, \pi) = \tau_1(\alpha), V_1(\alpha, \pi) = V_0(\alpha), \sigma_y^{(2)}(\alpha, -\pi) = \sigma_2(\alpha), U_2(\alpha, -\pi) = U_0(\alpha), \\ U_1(\alpha, 0) = U_2(\alpha, 0), V_1(\alpha, 0) = V_2(\alpha, 0), \tau_{x,y}^{(1)}(\alpha, 0) = \tau_{x,y}^{(2)}(\alpha, 0), \sigma_y^{(1)}(\alpha, 0) = \sigma_y^{(2)}(\alpha, 0). \end{aligned} \quad (10)$$

In this case, the harmonic functions $\Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta)$ ($m=1, 2; n=1, 3$) are sought in the following form of Fourier integrals:

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(m)}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda (\pi + (-1)^m \beta) + (-1)^{m+1} B_n^{(m)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda (\pi + \\ + (-1)^m \beta)] \frac{\exp(-i\lambda \alpha)}{\lambda} d\lambda. \end{aligned} \quad (11)$$

After satisfying the boundary and contact conditions (10), as in the first problem, for the unknown integration constant ($m=1, 2; n=1, 2$) we obtain exactly the same expressions as in (8), (9).

In particular,

$$\bar{\tau}_1(\lambda) = -\frac{ia}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_1(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha + 1} \exp(i\lambda \alpha) d\alpha, \quad \sigma_2(\lambda) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_2(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha + 1} \exp(i\lambda \alpha) d\alpha \quad (12)$$

Let us consider a special case of the problems stated above, when on the lower edges of the cracks normal loads are applied, $b = a \operatorname{th} \frac{\alpha_0}{2}$, at the point in the first case and $b = a \operatorname{cth} \frac{\alpha_0}{2}$ in the second case.

5 DISCUSSION OF THE RESULTS OF THE STUDY

We calculate the normal and shear stresses on the contact line and on the crack edges. In the first case, we obtain:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)}(\alpha, \pi) = \sigma_{by}^{(2)}(\alpha, -\pi) = H_1[d_1 k_4 + (d_1 + 2d_2)k_3] \frac{a^2 \sqrt{|x| + \sqrt{x^2 - a^2}}}{2\sqrt{2}|x|} \frac{(x+a)^{2\theta} + (x-a)^{2\theta}}{(x^2 - a^2)^{3/4+\theta}}, \\ \tau_{x,y}^{(1)}(\alpha, \pi) = \tau_{by}^{(2)}(\alpha, -\pi) = H_1[d_3 k_6 + (d_3 - 2d_4)k_5] \frac{a^2 \sqrt{|x| + \sqrt{x^2 - a^2}}}{2\sqrt{2}|x|} \frac{(x+a)^{2\theta} + (x-a)^{2\theta}}{(x^2 - a^2)^{3/4+\theta}}, \\ \sigma_y^{(1)}(\alpha, 0) = H_1[d_1 k_2 + d_2 k_{13}] \frac{a^2}{\sqrt{2}\sqrt{a + \sqrt{a^2 - x^2}}} \frac{(x+a)^{2\theta} + (x-a)^{2\theta}}{(a^2 - x^2)^{3/4+\theta}}, \quad \tau_{x,y}^{(1)}(\alpha, 0) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

For the second case, we have:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{(1)}(\alpha, 0) = \sigma_y^{(2)}(\alpha, 0) &= -H_1[d_1 k_4 + (d_1 + 2d_2)\kappa_3] \frac{\sqrt{a + \sqrt{a^2 - x^2}}}{2\sqrt{2}} \frac{(x+a)^{2\theta} + (x-a)^{2\theta}}{(a^2 - x^2)^{3/4+\theta}}, \\ \tau_{x,y}^{(1)}(\alpha, 0) = \tau_{x,y}^{(2)}(\alpha, 0) &= H_1[d_3 k_6 + (d_3 - 2d_4)\kappa_5] \frac{a^2 \sqrt{a + \sqrt{a^2 - x^2}}}{2\sqrt{2}} \frac{(a+x)^{2\theta} + (x-a)^{2\theta}}{(a^2 - x^2)^{3/4+\theta}}, \\ \sigma_y^{(1)}(\alpha, \pi) &= H_1[d_1 k_2 - d_2 k_1] \frac{a^2}{\sqrt{2} \sqrt{|x| + \sqrt{x^2 - a^2}}} \frac{(x+a)^{2\theta} + (x-a)^{2\theta}}{(x^2 - a^2)^{3/4+\theta}}, \quad \tau_{x,y}^{(1)}(\alpha, -\pi) = 0.\end{aligned}\quad (14)$$

where

$$\begin{aligned}\alpha &= \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|, \quad \alpha_0 = \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right|, \\ \cos 4\pi\theta &= k_0, \quad k_0 = \frac{2(\mu-1)(\mu\chi_2-1)}{(\mu+\chi_2)(\mu\chi_2+1)}, \quad H_1 = \frac{2\mu P}{a\pi(\mu+\chi_1)(\mu\chi_2+1)}, \\ h_1 &= th\alpha\theta - th\alpha_0\theta, \quad h_2 = 1 - th\alpha\theta th\alpha_0\theta, \quad d_1 = 2\mu\chi_2 + \chi_1\chi_2 + 1, \\ h_3 &= th\frac{\alpha}{4} - th\frac{\alpha_0}{4}, \quad h_4 = 1 - th\frac{\alpha}{2} th\frac{\alpha_0}{2}, \quad d_2 = \chi_1 + \chi_2 - 2\mu\chi\chi_2, \\ h_5 &= 1 - th\frac{\alpha}{2} th\frac{\alpha_0}{2}, \quad h_6 = \frac{\sqrt{2}ch\alpha_0}{4h_3 \sin 4\pi\theta th\frac{\alpha_0}{2}}, \quad d_3 = \chi_1\chi_2 - 1, \quad d_4 = \chi_1 - \chi_2, \\ k_1 &= \frac{h_1 ch\alpha_0\theta}{4h_3 \sin 4\pi\theta th\frac{\alpha_0}{2}}, \quad k_2 = \frac{h_2 ch\alpha_0\theta}{4h_3 \cos 2\pi\theta th\frac{\alpha_0}{2}}, \\ k_3 &= h_6 \cos \pi\theta (h_1 h_3 - h_2 h_4 tg \pi\theta), \quad k_4 = -h_6 \cos 3\pi\theta (h_1 h_3 - h_2 h_4 tg 3\pi\theta), \\ k_5 &= h_6 \cos \pi\theta (h_1 h_4 - h_2 h_3 tg \pi\theta), \quad k_6 = -h_6 \cos \pi\theta (h_1 h_4 - h_2 h_3 tg 3\pi\theta).\end{aligned}\quad (15)$$

From here it is seen that the contact stresses at the crack tips have a power-law singularity of order $3/4 + \theta$. Moreover, when $k_0 \geq 0$ the order of singularity is a real number. In the case $k_0 < 0$ when the order of singularity is a complex number, i.e. we obtain a power-law singularity with oscillation. Note that in the case of a homogeneous plane $\theta = 0$ and the contact stresses at the crack tips have a singularity of order $3/4$.

6 CONCLUSIONS

The results obtained during analytical research of plane problems of elasticity theory for a composite plane with cracks at the interface between different materials allow us to draw a number of significant conclusions regarding the nature of the stress-strain state in the contact area and near the ends of the cracks.

In a particular case, simple forms for determining the contact points of the crack have a power-law singularity of order $3/4 + \theta$. Moreover, when $k_0 \geq 0$ order of singularity real number. In the case when $k_0 < 0$ the order of the singularity is a complex number, meaning we will have a power-law singularity with oscillation. At the crack edges, the shear stress is zero.

7 ACKNOWLEDGEMENTS

The authors express gratitude to Doctor of Technical Sciences, Professor Yuri Sergeyevich Krutiy for valuable advice during the preparation of the article for publication.

8 ETHICAL DECLARATIONS

The authors declare that there is no conflict of interest.

References

1. Uflyand, Ya. S. (1968). *Integral transforms in problems of elasticity theory*. Leningrad: Nauka.
2. Popov, G. Ya. (1982). *Stress concentration near punches, cuts, thin inclusions, and attachments*. Moscow: Nauka.
3. Cherepanov, G. P. (1983). *Fracture mechanics of composite materials*. Moscow: Nauka.
4. Ponasyuk, V. V., Savruk, M. P., & Dotsyshyn, A. P. (1976). *Stress distribution near cracks in plates and shells*. Kyiv: Naukova Dumka.
5. Akopyan, V. N. (1995). On a mixed problem for a composite plane weakened by a crack. *Proceedings of the NAS RA. Mechanics*, 48(4), 57–65.
6. Dashtain, L. L. (2003). On a mixed problem for a composite plane with two semi-infinite cracks. In *Proceedings of the XII Republican Conference of Young Scientists "Mechanics"* (pp. 75–82). Brest.
7. Agayan, K. L. (1976). On a contact problem for an infinite plate with a crack reinforced by elastic patches. *Proceedings of the Academy of Sciences of the Armenian SSR. Mechanics*, 29(4), 3–15.
8. Arutyunyan, L. A. (2008). A plane problem of a composite plane with cracks. In *International Scientific and Technical Conference "Architecture and Construction"* (pp. 34–37). Yerevan.
9. Uflyand, Ya. S. (1950). *Bipolar coordinates in the theory of elasticity*. Moscow: GTTI.
10. Eganyan, V. V. (1959). On the plane problem of elasticity theory for a circular "pocket". *Proceedings of Yerevan Polytechnic Institute. Mechanical Engineering*, 20(4).
11. Neuber, H. (1947). *Stress concentration*. Moscow–Leningrad.
12. Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M. (1962). *Tables of integrals, series, and products*. Moscow: Fizmatgiz.
13. Tarantino, A. M. (1996). Thin hyperelastic sheets of compressible material: Field equations, Airy stress function and an application in fracture mechanics. *Journal of Elasticity*, 44(1), 37–59. <https://doi.org/10.1007/BF00042526>.
14. Aleksanyan, R. K., Arutyunyan, L. A., & Sedrakyan, A. M. (2024). Plane problem for the exterior of a circular segment. *Slovak International Scientific Journal*, (80), 34–37. <https://doi.org/10.5281/zenodo.10651872>
15. Alexanyan, P. K., Sedrakyan, A. M., & Harutyunyan, L. A. (2024, December). Plate problems for a circular segment and a half-plane with a segmental notch with mixed boundary conditions. *Sciences of Europe*, 5(154), 26–30. <https://doi.org/10.5281/zenodo.14496585>
16. Gao, Y. C., & Durban, D. (1995). The crack tip field in a rubber sheet. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 14(5), 665–677.
17. Gao, Y. C., & Gao, T. S. (1996). Notch-tip fields in rubber-like materials under tension and shear mixed load. *International Journal of Fracture*, 78(3–4), 283–298.
18. Gao, Y. C., & Liu, B. (1996). Stress singularity near the notch tip of a rubber-like specimen under tension. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 15(2), 199–211.
19. Gao, Y. C. (1997). Large deformations field near a crack tip in a rubber-like material. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 26(3), 155–162.
20. Wang, Z. Q., & Gao, Y. C. (1997). Large strain field near a notch tip under tension. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 26, 163–168.
21. Gao, Y. C., & Gao, T. S. (1999a). Mechanical behavior of two kinds of rubber materials. *International Journal of Solids and Structures*, 36(36), 5545–5558.
22. Gao, Y. C., & Gao, T. S. (1999b). Analytical solution to a notch tip field in rubber-like materials under tension. *International Journal of Solids and Structures*, 36(36), 5559–5571.

22. Gao, Y. C., & Zhou, L. M. (2001). Interface crack tip field in a kind of rubber materials. *International Journal of Solids and Structures*, 38(34–35), 6227–6240.
23. Gao, Y. C. (2002). Analysis of the interface crack for rubber-like materials. *Journal of Elasticity*, 66(1), 1–19.
24. Knowles, J. K., & Sternberg, E. (1983). Large deformations near a tip of an interface crack between two Neo-Hookean sheets. *Journal of Elasticity*, 13(3), 257–293.
25. Tarantino, A. M. (1996). Thin hyperelastic sheets of compressible material: Field equations, Airy stress function and an application in fracture mechanics. *Journal of Elasticity*, 44(1), 37–59. <https://doi.org/10.1007/BF00042526>
26. Geubelle, P. H., & Knauss, W. G. (1994a). Finite strains at the tip of a crack in a sheet of hyperelastic material: I. Homogeneous case. *Journal of Elasticity*, 35(1–3), 61–98.
27. Geubelle, P. H., & Knauss, W. G. (1994b). Finite strains at the tip of a crack in a sheet of hyperelastic material: II. Special bimaterial case. *Journal of Elasticity*, 35(1–3), 99–138.
28. Geubelle, P. H. (1995). Finite deformation effects in homogeneous and interfacial fracture. *International Journal of Solids and Structures*, 32(6–7), 1003–1016.
29. Malkov, V. M., & Malkova, Yu. V. (2008). Plane problem of nonlinear elasticity for a harmonic material. *Vestnik of St. Petersburg University. Series 1: Mathematics, Mechanics, Astronomy*, (3), 114–126.
30. Ru, C. Q. (2003). Non-elliptic deformation field near the tip of a mixed-mode crack in a compressible hyperelastic material. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38(4), 521–530.
31. Abeyaratne, R., & Yang, J. S. (1987). Localized shear deformations near the tip of a mode I crack. *Journal of Elasticity*, 17(2), 93–112.
32. Herrmann, J. M. (1989). An asymptotic analysis of finite deformations near the tip of an interface crack. *Journal of Elasticity*, 21(3), 226–269.
33. Herrmann, J. M. (1992). An asymptotic analysis of finite deformations near the tip of an interface crack. Part II. *Journal of Elasticity*, 29(3), 203–241.
34. Akopyan, V. N., Amirjanyan, A. A., & Akopyan, L. V. (2022). Contact problem for a composite plane with a cut. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics*, 75(1–2), 16–26. <https://doi.org/10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-17>

Література

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968, 401с.
2. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подклучений. М.: Наука, 1982, 344с.
3. Черепанов Г. П. Механика разрушений композиционных материалов. М.: Наука, 1983, 296 с.
4. Понасюк В. В., Саврук М.П., Доцьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976, 445 с.
5. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. Изв. НАН РА, Механика, 1995, т. 48, №4, ст. 57-65.
6. Даштайн Л.Л. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, с двумя полу бесконечными трещинами. Мат. XII респуб. конф. Мл. уч. Механика, Бр. 2003, ст. 75-82.
7. Агаян К.Л. Об одной контактной задаче для бесконечной пластины с трещиной усиленной упругими накладками. Изв. АН Арм. ССР, механика, 1976, т. 29, №4, ст. 3-15.
8. Арутюнян Л.А. Плоская задача составной плоскости с трещинами. Междунар. научно-техн. конф. Арх и стр. 2008, Ереван, ст. 34-37.
9. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. М., ГТТИ. 1950.
10. Еганян В.В., К плоскость задаче теории упругости для круговой «луночки». Сб.науч. трудов ЕрПИ, 1959, N20, машиностроение, вып.4. Нейбер Г., Концентрация напряжений. М.-Л., 1947.
11. Градштейн И.С. и Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгизд, М., 1962.
12. Tarantino A. M. Thin Hyperelastic sheets of compressible material: Field equations, airy stress function and an application in fracture mechanics // J. of Elasticity. 1996. Vol.44, N1. P. 37-59.

13. Алексанян Р.К., Арутюнян Л.А., Седракян А.М., Плоская задача для внешности кругового сегмента / Slovak international scientific journal # 80, DOI: 10.5281/zenodo.10651872, p.34-37 (2024).
14. Alexanyan P.K., Sedrakyan A.M., Harutunyan L.A. Plate problems for a circular segment and a half-plane with a segmental notch with mixed boundary conditions. December 2024 Sciences of Europe, [Czech Journal of Animal Science](#) 5(No 154 (2024)):26-30. DOI: [10.5281/zenodo.14496585](#).
15. Gao Y. C., Durban D. The crack tip field in a rubber sheet // European J. of Mech., A/Solids. 1995. Vol.14, N5. P. 665-677.
16. Gao Y. C., Gao T. S. Notch-tip fields in rubber-like materials under tension and shear mixed load // Int. J. of Fracture. 1996. Vol.78, N3-4. P. 283-298.
17. Gao Y. C., Liu B. Stress singularity near the notch tip of a rubber like specimen under tension // European J. of Mech., A/Solids. 1996. Vol. 15, N2. P. 199-211.
18. Gao Y. C. Large deformations field near a crack tip in a rubber-like material // Theoretical and Applied Fracture mechanics. 1997. Vol. 26, N3. P. 155-162.
19. Wang Z. Q., Gao Y. C. Large strain field near a notch tip under tension // Theor. and Appl. Fract.Mech. 1997. Vol. 26. P. 163-168.
20. Gao Y. C., Gao T. S. Mechanical behavior of two kinds of rubber materials // Int. J. of Solids and Structures. 1999. Vol.36, N36. P. 5545-5558.
21. Gao Y. C., Gao T. S. Analytical solution to a notch tip field in rubber-like materials under tension // Int. J. of Solids and Structures. 1999. Vol. 36, N36. P. 5559-5571.
22. Gao Y. C., Zhou L. M. Interface crack tip field in a kind of rubber materials // Int. J. of Solids and Structure. 2001. Vol.38, N34-35. P. 6227-6240.
23. Gao Y. C. Analysis of the interface crack for rubber-like materials // J. of Elasticity. 2002. Vol. 66, N 1. P. 1-19.
24. Knowles J.K., Sternberg E. Large deformations near a tip of an interface crack between two Neo-Hookean sheets // J. of Elasticity. 1983. Vol.13, N3. P.257-293.
25. Tarantino A.M. Thin Hyperelastic sheets of compressible material: Field equations, airy stress function and an application in fracture mechanics // J. of Elasticity. 1996. Vol.44, N1. P.37-59
26. Geubelle P.H., Knauss W.G. Finite strains at the tip of a crack in a sheet of hyperelastic material: I. Homogeneous case // J. of Elasticity. 1994. Vol.35, N1-3. P.61-98.
27. Geubelle P.H., Knauss W.G. Finite strains at the tip of a crack in a sheet of hyperelastic material: II. Special bimaterial case // J. of Elasticity. 1994. Vol.35, N1-3. P.99-138.
28. Geubelle P.H. Finite deformation effects in homogeneous and interfacial fracture // Int. J. of Solids and Structures. 1995. Vol.32, N6-7. P.1003-1016.
29. Мальков В.М., Малькова Ю.В. Плоская задача нелинейной упругости для гармонического материала // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер.1: математика, механика, астрономия.2008. Вып.3, С.114-126.
30. Ru C.Q. Nonelliptic deformation field near the tip of a mixedmode crack in a compressible hyperelastic material // Int. J. of NonLinear Mech. 2003. Vol.38, N4. P.521-530.
31. Abeyaratne R., Yang J.S. Localized shear deformations near the tip of a mode I crack // J. of Elasticity. 1987. Vol.17, N2. P.93-112.
32. Herrmann J.M. An asymptotic analysis of finite deformations near the tip of an interface crack // J. of Elasticity. 1989. Vol.21, N3. P.226-269.
33. Herrmann J.M. An asymptotic analysis of finite deformations near the tip of an interface crack. Part II // J. of Elasticity. 1992. Vol.29, N3. P.203-241.
34. Акопян, В. Н. ; Амирджян, А. А. ; Акопян, Л. В., Контактная задача для составной плоскости с разрезом. Известия НАН Армении, Механика, 75, N 1-2, ст. 16-26, 2022, Doi: 10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-17.

Pafik Alexanyan

National University of Architecture and Construction Armenia
Doctor of physical and mathematical sciences, professor
Republic of Armenia, Yerevan Teryan-105
asedrakyan.phys@gmail.com

ORCID: 0009-0003-9047-3601

Levon Arutunyan

Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Armenia

PhD, Associate Professor

Republic of Armenia, Yerevan, 0019, 24B, Marshall Baghramian Ave.,

arutunyanlevon@gmail.com

ORCID: 0009-0000-8845-8136

Armen Sedrakyan

Yerevan Educational and Scientific Institute of West Ukrainian National University

PhD, Associate Professor

RA Yerevan, Avan, Acharyan st. 31

asedrakyan.phys@gmail.com

ORCID: 0000-0003-2166-3754

Yuliya Yakuheva

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

assistant professor,

Didrikhson st. 4, Odesa, Ukraine, 65029

yakusheva.j@odaba.edu.ua

ORCID:0009-0000-6010-9559

For references:

P. Alexanyan, L. Arutunyan, A. Sedrakyan, Yu. Yakuheva. (2025). Plate problem of the theory of elasticity for a composite plane with craks. Mechanics and Mathematical methods. VII (2). 6–18.

Для посилань:

Алексанян Р. К., Арутюнян Л. А., Седрякян А. М. Якушева Ю. В. Плоска задача теорії пружності для складеної площини з тріщинами. Механіка та математичні методи, 2025. Т. VII. № 2. С. 6–18.

[Plate problem of the theory of elasticity for a composite plane with craks](#) © 2025 by [P. Alexanyan, L. Arutunyan, A. Sedrakyan, Yu. Yakuheva](#). is licensed under [CC BY 4.0](#)

УДК 531.381

ЗБУРЕНІ РУХИ ГІРОСТАТА З РУХОМОЮ МАСОЮ В СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ

Лещенко Д. Д.¹, Козаченко Т. О.¹

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: Розвиток досліджень задач динаміки твердого тіла, яке рухається навколо нерухомої точки полягає в тому, що тіла не є абсолютно твердими, а близькі до ідеальних моделей. Вплив неідеальностей може бути виявленим на основі методів сингулярних збурень, усереднення та інших асимптотичних методів нелінійної механіки. Він зводиться до наявності додаткових доданків в динамічних рівняннях Ейлера для фіктивного твердого тіла.

Припускається, наприклад, що динамічно симетричне тіло містить сферичну порожнину, заповнену рідиною великої в'язкості (при малих числах Рейнольдса) і в'язкопружний елемент, який моделюється рухомою масою, з'єднаною демпфером з корпусом. Ці рухи можуть бути зумовлені наявністю рідини в порожнинах в тілі (наприклад, рідке паливо, окислювач в резервуарах ракети). Наявність рухомої маси моделює присутність нежорстко закріплених елементів на космічному апараті, що при тривалому періоді часу має суттєвий вплив на його рух відносно центра мас. Крім того, на тіло діє малий момент сил опору середовища.

У статті за допомогою методу усереднення знайдено наближений розв'язок рівнянь у випадку задачі про рух в середовищі з опором динамічно симетричного гіростата з рухомою масою. Проведено чисельне інтегрування усередненої системи рівнянь руху тіла. Графічні зображення розв'язків представлені та обговорені. Побудовано графіки зміни величин квадратів екваторіальної та осьової компонент кутової швидкості. Одержані кількісні та якісні результати досліджень руху в середовищі з опором динамічно симетричного твердого тіла з порожниною, заповненою вязкою рідиною, та з рухомою масою. Досліджено еволюцію збуреного руху Ейлера-Пуансо під впливом малих внутрішніх і зовнішніх моментів. Перевага цієї роботи полягає в отриманні оригінальних асимптотичних розв'язків та чисельних розрахунків, які описують еволюцію руху даної механічної системи. Робота може розглядатися як розвиток попередніх задач про рух твердого тіла під дією малих моментів окремо (порожнини заповненою рідиною великої в'язкості, середовища з опором, рухомої маси). Стаття вносить вклад в вивчення задач руху штучних супутників і рухів членів екіпажу відносно цих тіл, рухів обертових снарядів з масою.

Ключові слова: тверде тіло, середовище з опором, рухома маса, в'язка рідина.

PERTURBED MOTIONS OF A GYROSTAT WITH A MOVABLE MASS IN A RESISTIVE MEDIUM

D. Leshchenko¹, T. Kozachenko¹

¹Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: Investigation of the dynamics of a rigid body moving about a fixed point implies that the bodies are not absolutely rigid but are close to ideal models. The effect of nonidealities can be analyzed by singular perturbation methods, averaging, or other asymptotic methods of nonlinear mechanics. It is reduced to the presence of additional terms in Euler's dynamics equations for a fictitious rigid body.

It is assumed that, for example, the dynamically symmetric body contains a spherical cavity filled with a highly viscous fluid (at small Reynolds numbers) and a viscoelastic element that is modeled by a moving mass connected to the body by a strong damper. These motions may have various case: for example, the presence of fluid in the cavities in the body (e.g., liquid fuel or oxidizer in the tanks of



rocket). The moving mass models loosely attached elements in a space vehicle, which can significantly affect the vehicle's motion relative to its center of mass during a long period of time. In addition, the body affected by a small medium resistance torque.

The paper develops an approximate solution by means of an averaging method for the perturbed motion of this rigid body. The numerical integration of the averaged system of equations is conducted for the body motion. The graphical presentations of the solutions are represented and discussed. The graphs of changes in the squared values of the equatorial and axial components of the angular velocity are constructed. The quantitative and qualitative results of the study of motion in a medium with resistance of a dynamically symmetric solid with a cavity filled with a viscous liquid and a moving mass are obtained. Evolution of perturbed Euler-Poinsot motion under the influence of small internal and external torques is studied. The advantage of this work is in receiving the original asymptotic and numerical calculations, as well as solutions that describe the evolution in of a rigid body with cavity, filled with a viscous fluid and with a moving mass. The paper can be considered as mainstreaming of previous works for the problem of rigid body motion under the action of small torques (cavity filled with a fluid of high viscosity, moving mass, resistive medium). Results summed up in this paper make it possible to analyze motions of artificial satellites, of spinning projectiles with mass and the activities of crew members about a vehicle.

Keywords: rigid body, resistive medium, movable mass, cavity, viscous fluid.

1 ВСТУП

Космічний корабель або супутник в своєму русі відносно центра мас зазнає вплив моментів сил різної фізичної природи. Це, наприклад, моменти, викликані рухом внутрішніх мас, які можуть виникати через такі фактори, як наявність обертових компонентів (роторів, гіроскопів), а також переміщеннями екіпажу в випадку пілотованого апарату.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Проблеми динаміки тіл з порожнинами, що містять рідину, відносяться до класичних задач механіки [1, 2]. В статті [1] досліджується сумісний вплив рідини великої в'язкості в порожнині твердого тіла і рухомої маси, з'єднаної з тілом пружним зв'язком з в'язким тертям або з квадратичною дисипацією, на рух динамічно симетричного тіла. В статті [2] вивчається рух в середовищі з опором близького до динамічно сферичного твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною при малих числах Рейнольдса.

В статті [3] розглядається можливість демпфування нутаційних коливань за допомогою в'язкої рідини, яка заповнює порожнини в роторі або в рамках гіроскопа. В [4] показана можливість стабілізації нестійкого рівномірного обертання в середовищі з опором «сплячого» гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною за допомогою другого обертового гіроскопа та пружних сферичних шарнірів.

Велика кількість робіт присвячена дослідженню обертання твердого тіла з рухомими внутрішніми масами [1, 5-11]. Огляд робіт з цієї тематики представлений в [5, 8-11]. В книзі [6] вивчається вплив внутрішньої пружності та дисипації на рух супутника відносно центра мас. В статті [8] за допомогою методу усереднення отримано наближене розв'язання задачі про рух в середовищі з опором близького до динамічно сферичного твердого тіла з в'язкопружним елементом. В роботі [9] досліджується задача про рух в середовищі з опором динамічно симетричного твердого тіла з рухомою масою, яка з'єднана з тілом пружною в'яззю при наявності в'язкого тертя. В [10] за допомогою метода усереднення одержується наближене розв'язання задачі про рух динамічно симетричного твердого тіла з в'язкопружним елементом під дією постійного моменту в зв'язаних осях. В статті [11] проведено асимптотичне розв'язування системи рівнянь Ейлера з додатковими збурюючими моментами сил для близького до динамічно сферичного твердого тіла з в'язкопружним елементом під дією сталого моменту в зв'язаних з тілом осях.

Важливою областю застосування динаміки твердого тіла є механіка гіроскопічних систем. Ряд випадків інтегрування рівнянь руху твердого тіла в середовищі з опором розглянуто в [12-15]. У статті [16] розглядається збурений рух космічного апарату, що обертається, на круговій орбіті під дією малого аеродинамічного моменту, пропорційного кутовій швидкості тіла. В [17] одержані умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опором.

Розглянемо просторовий рух динамічно симетричного тіла, що містить сферичну порожнину, заповнену рідиною великої в'язкості. Рух відбувається відносно центра інерції. До точки на осі симетрії тіла (у її недеформованому стані) прикріплена рухома точкова маса, яка з'єднана в'язкопружним демпфером з корпусом [1]. Окрім того, на тіло діє момент сил опору середовища, який пропорційний кутовому моменту тіла із «замерзлою» рідиною [2, 8, 13, 15]

В даному випадку наближена система рівнянь збуреного руху в проекціях на головні центральні осі інерції має вигляд [1, 2] (крапка позначає похідну за часом t):

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= \frac{\beta P}{\nu A^2} C(A - C)pr^2 + Fqr + Dpr^4 - \varepsilon \lambda Ap, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= \frac{\beta P}{\nu A^2} C(A - C)qr^2 - Fpr + Dqr^4 - \varepsilon \lambda Aq, \\ C\dot{r} &= \frac{\beta Pr}{\nu A} (C - A)(p^2 + q^2) - AC^{-1}Dr^3(p^2 + q^2) - \varepsilon \lambda Cr. \end{aligned} \quad (1)$$

де p, q, r – проекції вектора абсолютної кутової швидкості $\vec{\omega}$ на зв'язані осі, A і C – головні центральні моменти інерції системи, λ – додатний коефіцієнт пропорційності, який залежить від фізичних характеристик середовища та форми тіла, β – густина рідини, $P > 0$ – скалярна величина, яка для сферичної порожнини радіуса b визначається за формулою $P = 8\pi b^7 / 525$ [1, 2]. Перші доданки в правих частинах рівнянь (1) відображають момент сил в'язкої рідини у порожнині тіла в межах асимптотичного наближення. При цьому передбачається, що число Рейнольдса мале: $Re \ll 1$ [1], ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості рідини $\nu = 1/Re \gg 1$ і $\nu^{-1} \ll 1$. Будемо вважати, що безрозмірний параметр $\nu^{-1} \sim \varepsilon$.

Коефіцієнти L, S , що входять у рівняння (2) задаються через параметри системи за формулами:

$$\begin{aligned} F &= m\rho^2 \Omega^{-2} A^{-3} C (A^2(p^2 + q^2) + C^2 r^2), \\ D &= m\rho^2 \Lambda \Omega^{-4} C^3 (A - C) A^{-4} \end{aligned} \quad (2)$$

Коефіцієнти F, D характеризують вплив збурюючих моментів сил, які обумовлені наявністю в'язкопружного елемента. Позначимо, m як масу рухомої точки, а ρ – відстань від центра мас недеформованої системи до місця її кріплення, яке, згідно з припущенням, розташоване на осі динамічної симетрії тіла. Константи $\Omega^2 = c/m$, $\Lambda = \delta/m$ визначають частоту коливань та інтенсивність їх згасання відповідно; параметр c характеризує жорсткість (тобто коефіцієнт пружності), тоді як δ є коефіцієнтом в'язкого тертя в демпфері.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Досліджується випадок демпфера, коли коефіцієнти Ω, Λ задовольняють нерівностям [1, 8]:

$$\Omega^2 \square \Lambda \omega \square \omega^2 \quad (3)$$

Умова (3) дозволяє ввести малий параметр в (3) і вважати вказані збурюючі моменти малими. Це створює можливість застосування асимптотичного методу усереднення [18]. Крім того, виконання нерівності (3) дає підстави нехтувати вільними коливаннями точкової маси, які обумовлені початковими відхиленнями, внаслідок їх швидкого згасання. Натомість основна увага приділяється вимушеним квазістаціонарним рухам, які спричинені обертанням тіла.

Припустимо, що $\Omega^2 \square \varepsilon$, $\Lambda \Omega^{-4} \sim \varepsilon$.

У випадку, коли $\varepsilon = 0$, $\Omega^2 = 0$, $\Lambda \Omega^{-4} = 0$, $\nu^{-1} = 0$, система (1) інтегрується, при цьому $r = r_0$.

Якщо $r_0 \neq 0$, то в цьому випадку змінні p, q здійснюють гармонійні коливання, частота яких $|(C - A)r_0|$ залежить від r_0 та система рівнянь (1) є нелінійною.

Загальний породжувальний розв'язок системи (1) має вигляд [19]:

$$p = a \cos \varphi, \quad q = a \sin \varphi, \quad r = r_0 \quad (4)$$

Застосуємо його як перетворення до змінних a, r , де $a > 0$, $a = \text{const}$, $\varphi = r(C - A)A^{-1}t$.

В результаті одержимо, що $\dot{a} = \dot{p} \cos \varphi + \dot{q} \sin \varphi$. Підставимо в цей вираз $\dot{p}$ і $\dot{q}$ з перших двох рівнянь (1). Далі проводимо процедуру усереднення одержаного рівняння для a за фазою φ [18] і, враховуючи, що $a^2 = p^2 + q^2$ запишемо рівняння (1) для r у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon \frac{\beta P}{A^3} C(A - C)r^2 a + \varepsilon m \rho^2 C^3 (A - C)A^{-5}r^4 a - \varepsilon \lambda a, \\ \frac{dr}{dt} &= \varepsilon \frac{\beta P r}{AC} (C - A)a^2 - \varepsilon m \rho^2 A^{-3} C(A - C)r^3 a^2 - \varepsilon \lambda r. \end{aligned} \quad (5)$$

Здійснюючи заміну змінних $x = a^2$, $y = r^2$ систему (5) приведемо до наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= 2x \left[\frac{\beta P}{A^3} C(A - C)y + m \rho^2 A^{-5} C^3 (A - C)y^2 - \lambda \right], \\ \frac{dy}{d\tau} &= -2y \left[\frac{\beta P}{AC} (A - C)x + \varepsilon m \rho^2 A^{-3} C(A - C)xy + \lambda \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

В цій системі x, y – повільні змінні ($\tau = \varepsilon t$).

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Система (6) проінтегрована чисельно за початкових умов $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ та параметрів $\rho = 1$; $m = 1$; $\varepsilon = 0.1$; $P_0 = 0.48$; $\beta = 1260$; $C = 1$; $A = 1.2, 1.5, 2.0, 2.5$; $\lambda = 0.1, 0.5$. Розв'язок системи отримано в математичному пакеті Maple із використанням методу Рунге-Кутти-Фельберга п'ятого порядку точності.

На рис. 1 – 3 наведено графічне представлення величин квадратів екваторіальної $x = a^2$ та осьової компонент $y = r^2$ кутової швидкості твердого тіла у випадках: $A = 1.2, 1.5, 2.0, 2.5$ і $\lambda = 0.1$ (рис. 1, 3), та $A = 1.2, 1.5, 2.0, 2.5$ і $\lambda = 0.5$ (рис. 2), при незмінних інших параметрах.

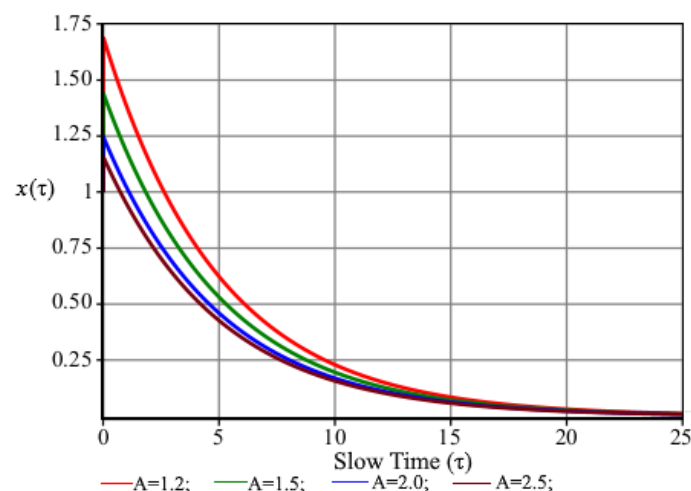


Рис. 1. Графіки змінної x у випадку $\lambda = 0.1$

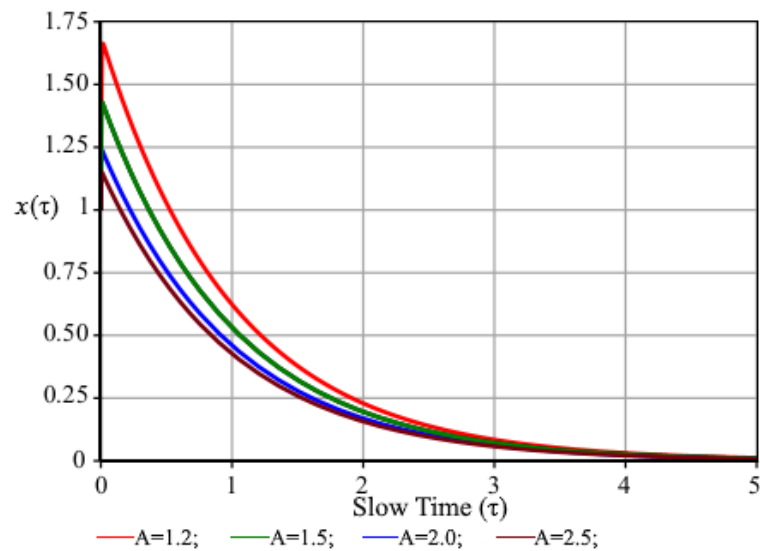


Рис. 2. Графіки змінної x у випадку $\lambda = 0.5$

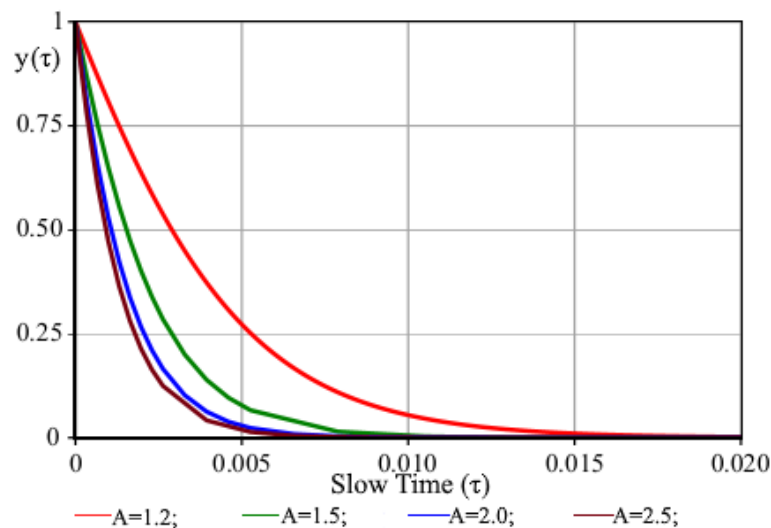


Рис. 3. Графік змінної y у випадку $\lambda = 0.1$

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Як бачимо з рис. 1 – 3 змінні $x = a^2$ та $y = r^2$ спадають асимптотично наближаючись до нуля. У випадку виконання співвідношення $A/C \sim 1$, $A > C$ спостерігається стрімке зростання величини x на достатньо малому часовому інтервалі. Однак при більших значеннях A темп зростання $x = a^2$ знижується і близьке до випадку $A = C$ (сфери). Змінна y прагне до нуля на дуже малому проміжку часу $[0; 0.02]$.

Також характер спадання величин квадратів екваторіальної та осьової компонент кутової швидкості твердого тіла залежить від властивостей середовища та форми тіла. При зростанні величини λ (при однакових інших параметрах) спадання змінних $x = a^2$ та $y = r^2$ відбувається швидше.

6 ВИСНОВКИ

В результаті дослідження в середовищі з опором руху твердого тіла зі сферичною порожниною, заповненою рідиною високої в'язкості, та з рухомою масою, зв'язаною з тілом пружною в'язкою при наявності в'язкого тертя одержано систему рівнянь руху в стандартній формі. Після переходу до усередненої системи знайдено чисельний розв'язок задачі. Еволюція руху твердого тіла описується розв'язками, які можуть бути використаними, при дослідженні орієнтації та стабілізації руху супутника відносно центра мас і рухів членів екіпажів відносно цих тіл.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

Література

1. Leshchenko D. D., Sallam S. N. Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*, 1992. 28(8). P. 524–528.
2. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Еволюція обертань сфероїда з порожниною, заповненою в'язкою рідиною в середовищі з опором. *Праці ІПММ НАН України*, 2021. Том 35. № 2. С. 152–160.
3. Ivashchenko B. P. Motion of a gyroscope with a cavity filled with a viscous liquid. *Soviet Applied Mechanics*, 1978. 14. P. 872–876.
4. Kononov Y. M., Svyatenko Y. I. Stabilization of a Spinning Lagrange Gyroscope Filled with Ideal Fluid in a Resisting Medium. *International Applied Mechanics*, 2023. 59(2). P. 207–217.
5. He L., Sheng T., Kumar K. D., Zhao Y., Ran D., Chen X. Attitude maneuver of a satellite using moving masses. *Acta Astronautica*, 2020. 176. P. 464–475.
6. Thomson W. T. *Introduction to Space Dynamics*. New York: Dower, 1986, 317p.
7. Jansses F. L. and Van der Ha J. C. Stability of spinning satellite under axial thrust, internal mass motion, and damping. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2015. 38 (4). P. 761–771.
8. Leshchenko D., Rachinskaya A. Evolution of rotational motions in a resistive medium of a nearly dynamically spherical rigid body with a movable mass. *Праці ІПММ НАН України*, 2024. Том 38. № 1. С. 44–53.
9. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи твердого тіла з рухомою масою в середовищі з опором. *Механіка та математичні методи*, 2023. Т. 5. № 2. С. 16–24.
10. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи твердого тіла з рухомою масою під дією постійного моменту. *Механіка та математичні методи*, 2025. Т. 7. № 1. С. 6–14.
11. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи близького до динамічно сферичного твердого тіла з рухомою масою під дією постійних моментів в зв'язаних з тілом осях. *Механіка та математичні методи*, 2024. Т. 6. № 2. С. 18–30.
12. Magnus K. Kreisel. *Theorie und Anwendungen*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1971.
13. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 288с.
14. Leimanis E. *The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies About a Fixed Point*. Berlin: Springer, 1965. 337 p.
15. Routh E. J. *Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part II*. New York: Dover Publications, 1955. 484 p.
16. Inarrea M., Lanchares V. Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006. 41(1). P. 86–100.
17. Kononov Yu. M. Stability of a uniform rotation of an asymmetric rigid body in a resisting medium under a constant moment. *International Applied Mechanics*, 2021. 57(4). P. 432–439.
18. Митропольский Ю. А. *Метод усреднения в нелинейной механике*. К.: Наукова Думка, 1971. 440 с.

19. Landau L. D. and Lifshitz E. M. *Mechanics. Volume 1 of Course of Theoretical Physics*. Boston, Johannesburg, Melbourne, New Delhi, Singapore: Butterworth-Heinemann, 2000.

References

1. Leshchenko, D. D., Sallam, S. N. (1992). Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*. 28(8). 524–528.
2. Leshchenko, D. D., Kozachenko, T. O. (2021). Evolution of rotations of a spheroid with cavity containing a viscous fluid in a resistive medium. *Proceeding of IAMM NAS of Ukraine*. 35 (2). 152-160. [in Ukrainian]
3. Ivashchenko, B. P. (1978). Motion of a gyroscope with a cavity filled with a viscous liquid. *Soviet Applied Mechanics*. 14. 872–876.
4. Kononov, Y. M., Svyatenko, Y. I. (2023). Stabilization of a Spinning Lagrange Gyroscope Filled with Ideal Fluid in a Resisting Medium. *International Applied Mechanics*. 59(2). 207–217.
5. He, L., Sheng, T., Kumar, K. D., Zhao Y., Ran D., Chen X. (2020). Attitude maneuver of a satellite using moving masses. *Acta Astronautica*. 176. 464–475.
6. Thomson, W.T. (1986). *Introduction to Space Dynamics*. New York: Dower.
7. Jansses, F. L. and Van der Ha J. C. (2015). Stability of spinning satellite under axial thrust, internal mass motion, and damping. *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 38(4). 761-771.
8. Leshchenko, D. D. & Rachinskaya, A. L. (2024). Evolution of motions in a resistive medium of a body with a movable mass. *Proceeding of IAMM NAS of Ukraine*. 38 (1). 44-53.
9. Leshchenko, D., Kozachenko, T. (2023). Perturbed motions of a rigid body with a movable mass in a resistive medium. *Mechanics and Mathematical methods*. 5 (2). 16–24. [in Ukrainian]
10. Leshchenko, D., Kozachenko, T. (2025). Perturbed motions of a rigid body with a movable mass under the action of constant torque. *Mechanics and Mathematical Methods*. 7 (1). 6–14. [in Ukrainian]
11. Leshchenko, D., Kozachenko, T. (2024). Perturbed motions of a nearly dynamically spherical rigid body with a movable mass subject to constant body-fixed torque. *Mechanics and Mathematical methods*. 6 (2). 18–30.
12. Magnus, K. (1971). *Kreisel. Theorie and Anwendungen*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
13. Koshlyakov, V. N. (1985). *Zadachi dinamiki tverdogo tela i prikladnoj teorii giroskopov: Analiticheskie metody* [Problems in Dynamics of Solid Bodies and in Applied Gyroscope Theory: Analytical Methods]. Nauka, Moskva.
14. Leimanis, E. (1965). *The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies About a Fixed Point*. Berlin: Springer.
15. Routh, E. J. (1955). *Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part II*. New York: Dover Publications.
16. Inarrea, M., Lanchares, V. (2006). Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 41(1). 86–100.
17. Kononov, Yu. M. (2021). Stability of a uniform rotation of an asymmetric rigid body in a resisting medium under a constant moment. *International Applied Mechanics*. 57(4). 432–439.
18. Mitropolskiy, Yu. A. (1971). *Metod usredneniya v nelineynoy mehanike* [Averaging method in nonlinear mechanics]. Kyiv, Naukova Dumka.
19. Landau, L. D., and Lifshitz, E. M. (2000). *Mechanics. Volume 1 of Course of Theoretical Physics*. Boston, Johannesburg, Melbourne, New Delhi, Singapore: Butterworth-Heinemann.

Лещенко Дмитро Давидович

Одеська державна академія будівництва та архітектури,

д.ф.-м.н., професор

вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029

leshchenko_d@ukr.net

ORCID: 0000-0003-2436-221X



Козаченко Тетяна Олександрівна

Одеська державна академія будівництва та архітектури,
к.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029
kushpil.t.a@gmail.com
ORCID: 0000-0001-9034-3776

Для посилань:

Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи гіростата з рухомою масою в середовищі з опором. Механіка та математичні методи, 2025. Т. VII. № 2. С. 19–27.

For references:

D. Leshchenko, T. Kozachenko. (2025). Perturbed motions of a gyrostat with a movable mass in a resistive medium. Mechanics and Mathematical methods. VII (2). 19–27.

Збурені рухи гіростата з рухомою масою в середовищі з опором © 2025 by Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. is licensed under CC BY 4.0

УДК 539.3

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК БАЛОК ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ НА НЕОДНОРІДНІЙ ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ВІНКЛЕРА

Крутий Ю. С.¹, Перпері А. О.¹, Вакуленко В. В.¹, Ковальова І. Л.¹

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: Ціллю дослідження є подальший розвиток аналітичних методів розрахунку на згин балок, що опираються на неоднорідну (змінну) суцільну пружну основу Вінклера. Неоднорідність основи характеризується змінним погонним коефіцієнтом постелі. У даній роботі розглядається узагальнений випадок, коли згинальна жорсткість, коефіцієнт постелі та навантаження задаються будь-якими неперервними функціями від координати серединної лінії балки. Виписані точні формули для фундаментальних функцій та частинного розв'язку відповідного диференціального рівняння четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами. Дані функції є безрозмірними та представляються абсолютно і рівномірно збіжними рядами по степеням безрозмірного параметру зі змінними коефіцієнтами, які визначаються за допомогою рекурентних інтегральних співвідношень. В свою чергу, через вказані функції виражаються формули для параметрів напружено-деформованого стану (НДС) балки – прогину, кута повороту, згинального моменту та поперечної сили. Невідомі константи інтегрування в цих формулах виражені через початкові параметри, які знаходяться після реалізації заданих граничних умов. Для зручності практичного застосування фундаментальні функції та частинний розв'язок рівняння трансформуються до формату степеневих рядів. Тим самим, розрахунок балки на згин зводиться до процедури чисельної реалізації явних аналітичних формул для параметрів НДС. Для реалізації отриманих формул створено програмний код на Visual Basic в програмному середовищі Excel. Тим самим, забезпечено можливість розрахунку балок у програмному режимі.

На прикладі продемонстровано практичне застосування отриманих розв'язків. Виконані розрахунки для балки з вільними кінцями у вигляді зрізаної піраміди, ширина та висота якої змінюються за лінійними законами. Результати розрахунку представлені в чисельному та графічному форматах. Отримані чисельні значення є точними, оскільки запропонований підхід ґрунтується на точному розв'язку відповідного диференціального рівняння. Наявність таких розв'язків дозволяє шляхом порівняння оцінювати точність розв'язків, отриманих за допомогою різного роду наближених методів.

Ключові слова: балка, змінна згинальна жорсткість, неоднорідна пружна основа, гіпотеза Вінклера, змінне навантаження, точний розв'язок, аналітичний розрахунок.

ANALYTICAL CALCULATION OF A BEAM ON A WINKLER ELASTIC FOUNDATION WITH POWER-LAW INHOMOGENEITY

Yu. Krutii¹, A. Perperi¹, V. Vakulenko¹, I. Kovalova¹

¹Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: The aim of the study is to further develop analytical methods for the bending analysis of beams resting on an inhomogeneous (variable) continuous Winkler elastic foundation. The inhomogeneity of the foundation is characterized by a spatially varying bedding (subgrade reaction) modulus. This work considers a generalized case in which the flexural rigidity, foundation modulus, and external loading are defined as arbitrary continuous functions of the coordinate along the beam's centerline. Exact expressions are derived for the fundamental functions and a particular solution of the corresponding fourth-order differential equation with variable coefficients. These functions are



dimensionless and are represented as absolutely and uniformly convergent power series in a dimensionless parameter, with variable coefficients determined using recurrent integral relations. The stress–strain state (SSS) parameters of the beam–deflection, rotation angle, bending moment, and shear force—are expressed through the aforementioned functions. The unknown integration constants in these expressions are determined from the prescribed boundary conditions. For practical application, both the fundamental functions and the particular solution are transformed into a power series format. As a result, the bending analysis of the beam reduces to a numerical implementation of explicit analytical formulas for the SSS parameters. A software implementation of the derived formulas was developed using Visual Basic within the Excel environment, thus enabling beam analysis in a computational mode.

A practical example is provided to demonstrate the application of the obtained solutions. Calculations are performed for a beam with free ends shaped as a truncated pyramid, whose width and height vary linearly. The results are presented both numerically and graphically. The obtained numerical values are exact, as the proposed approach is based on an exact solution to the corresponding differential equation. The availability of such solutions allows for the assessment of the accuracy of approximate methods by direct comparison.

Keywords: beam, variable flexural rigidity, inhomogeneous elastic foundation, Winkler foundation hypothesis, variable loading, exact solution, analytical analysis.

1 ВСТУП

Конструкція, що являє собою балку на пружній основі, часто застосовується в інженерній практиці, в тому числі, в будівництві, в залізничній та гірничодобувній галузях, гідротехніці, кораблебудуванні, аерокосмічній техніці, біомеханіці та інших.

Взаємодія між конструкціями та опорними ґрунтовими середовищами має вирішальне значення в проектуванні фундаментів і завжди привертала увагу як науковців, так і інженерів. Проектування та будівництво безпечних будівель і споруд вимагає точного моделювання взаємодії конструкції з ґрунтовою основою [1-6]. Тому найбільш поширені балочні конструкції на пружній основі саме в будівництві та цивільній інженерії. До таких конструкцій можуть бути віднесені стрічкові фундаменти будівель та споруд, фундаменти гребель, доки, фундаменти підкранових колій, шпали залізничної колії, різного роду трубопроводи, укладені на ґрунт та ін. При проектуванні тунелів та підземних трубопроводів модель балки на пружному фундаменті широко використовується для аналізу деформації конструкції, що зумовлена осіданням ґрунту [7-10]. В гірничодобувній галузі модель конструкції на пружній основі застосовується для визначення тиску в контакті між гірничими опорами та опорною стінкою [11]. При проектуванні залізничних колій та при вивченні їх поведінки під час руху поїзда також зазвичай застосовують модель балки на пружному фундаменті [12-18].

З числа існуючих моделей основи [5, 6, 19] значного поширення набула так звана модель Вінклера (гіпотеза коефіцієнта постелі). У цій моделі пружна основа, на яку опирається конструкція, представляється у вигляді набору вертикальних, близько розташованих, не пов'язаних між собою пружин. Таку ситуацію загалом можна описати єдиним параметром, який називають коефіцієнтом (модулем) пружності основи чи коефіцієнтом постелі. У найпростішому випадку, коли основа вважається однорідною, коефіцієнт постелі є сталим.

Вважається, що Вінклерова основа є найбільш прийнятною для практичних цілей за умови правильного вибору чисельного значення коефіцієнту жорсткості основи та врахування в необхідних випадках його змінності [3]. Результати розрахунку конструкцій з використанням цієї моделі близько відповідають дослідним даним [3]. Про необхідність враховувати змінність (неоднорідність) основи також наголошується в сучасній публікації [20], оскільки на погляд авторів припущення про однорідність основи далеке від реальності.

Існує ряд модифікацій моделі Вінклера, які в інтегральній формі дозволяють враховувати неоднорідні властивості пружної основи. Найбільш розповсюдженою модифікацією є модель змінного коефіцієнта постелі. Зокрема, така модель знайшла широке застосування при розрахунках напружено-деформованого стану фундаментів конструкцій, які лежать на лесових ґрунтах, для яких характерне просідання. У такому випадку коефіцієнт постелі – це змінна величина, яка залежить від координати, в якій визначається осадка поверхні основи.

Змінною також може бути і згинальна жорсткість балки. Непризматичні балки зі змінним поперечним перерізом мають велике значення в інженерії завдяки своїй здатності відповідати архітектурним вимогам та оптимізувати вагу та міцність конструкцій [21]. Подібні балки також можуть використовуватись з метою економії матеріалів. Ще один сенс застосування таких балок полягає в тому, що навантаження часто нерівномірно розподілено уздовж довжини конструкції. Згинальна жорсткість для вказаних балок буде змінною величиною.

У будівельній галузі широке застосування отримали залізобетонні балки. Після утворення тріщин у перерізах під дією навантаження, у таких балках утворюються

ділянки зі зниженою згинальною жорсткістю [5, 22]. У зв'язку з цим жорсткість стає змінною уздовж довжини балки.

Останнім часом широке застосування у різних галузях науки і техніки знаходять конструкції із функціонально-градієнтних матеріалів [23-28]. Серед різноманіття функціонально-градієнтних конструкцій, важливим класом є балки з властивостями матеріалу, які змінюються уздовж довжини [29]. Такому новому поколінню композитів властиві змінні характеристиками, такі як пружність, щільність, теплопровідність і т.д. Згинальна жорсткість таких балок також буде змінною уздовж довжини.

Задача про статичний розрахунок балок сталої жорсткості, що опираються на однорідну пружну основу Вінклера, загалом добре вивчена. Застосування відповідних розв'язків в інженерній практиці не викликає труднощів. Набагато складніше справа, коли згинальна жорсткість балки та/або коефіцієнт постелі змінні. Універсальний аналітичний метод розрахунку для такого випадку в науковій літературі відсутній. Ймовірною причиною може бути той факт, що з математичної точки зору задача зводиться до необхідності розв'язання диференціального рівняння згину четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами. Знаходження загального інтегралу для такого рівняння є складною математичною проблемою. Відома лише обмежена кількість окремих випадків, коли розв'язки знаходяться в замкненій формі [2, с. 108–114, 30, с. 203, 204].

Отже, знаходження точного розв'язку диференціального рівняння згину зі змінними коефіцієнтами та розробка на його основі аналітичного методу розрахунку балок є актуальною. Оскільки в даній роботі реалізовано саме такий підхід, то її тема актуальна.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Детальний огляд публікацій про статичний розрахунок балок на неоднорідній (змінній) пружній основі надано в публікаціях [31, 32, 33]. Щодо балок сталої жорсткості на змінній пружній основі Вінклера найбільш узагальнену ситуацію розглянуто у роботі [33], де запропоновано аналітичний метод розрахунку для випадку довільного неперервно-змінного коефіцієнту постелі. Також в значній кількості публікацій розглядаються випадки балок змінної жорсткості на однорідній пружній основі, серед яких виділимо [34-38]. Натомість публікації, в яких одночасно згинальна жорсткість балки та коефіцієнт постелі вважаються змінними, в науковій періодиці зустрічаються рідко [39-43]. При цьому узагальнена ситуація, коли діюче на балку навантаження також буде змінним, трактується як найбільш складна [44].

У роботі [39] розроблено простий скінченний елемент балки на пружному фундаменті з використанням поліноміальної функції переміщення, який дає змогу визначати значення прогину та згинального моменту для призматичних або неприєматичних балок, що опираються на фундаменти зі змінними або нелінійними реакціями пружної основи. У публікації [40] розроблено нову модель ґрунтової основи для ймовірного аналізу МСЕ гнучкої балки, що опирається на просторово-випадковий неоднорідний ґрунт, який моделюється методом Монте-Карло. Фактично, ця робота стосується оцінки впливу випадкових параметрів ґрунту на реакцію балки, що опирається на неоднорідний фундамент Вінклера-Пастернака. Рівняння руху були отримані з використанням співвідношень фон-Кармана та були розв'язані за допомогою ітераційного методу Ньютон-Рафсона. Новизною дослідження є те, що тут враховується неоднорідність ґрунту, неоднорідність балки та ефект зсуву. Встановлено, що змінність параметрів ґрунту мають значний вплив на реакцію конструкції. У статті [41] представлено новий ефективний метод оцінки точних матриць жорсткості та маси неоднорідної балки Бернуллі-Ейлера, що лежить на пружному фундаменті Вінклера.

Неоднорідність може виникати внаслідок змінного перерізу та/або за рахунок змінного модуля пружності матеріалу балки. Припускається, що різкі зміни у перерізі балки відсутні. Ключовим моментом методу є оцінка двох ідеальних навантажень, що в цій роботі досягається шляхом апроксимації їх двома поліномами. А конкретніше, осьове навантаження апроксимоване лінійним поліномом, а поперечне – кубічним поліномом. Чисельна реалізація методу є простою, а результати добре корелюють з тими, що отримані з точних розв'язків, доступних у літературі. У роботі [42] представлено розв'язок граничного інтегрального рівняння для задачі про згин неоднорідних балок, що опираються на неоднорідний три-параметричний пружний фундамент. Модель фундаменту включає параметри Вінклера та Пастернака. Оскільки властивості поперечного перерізу балки змінюються вздовж її довжини, отримані диференціальні рівняння мають змінні коефіцієнти, що значно ускладнює математичну задачу. Розв'язок рівнянь досягається за допомогою методу аналогових рівнянь Кацікаделіса. Кілька балок аналізуються за різних граничних умов та розподілів навантаження, що ілюструє метод та демонструє його ефективність і точність. У дослідженні [43] запропоновано новий метод статичного аналізу нескінченної неоднорідної балки, що опирається на змінну пружну основу та знаходиться під дією зовнішніх навантажень. Для цього виведено відповідне інтегральне рівняння, яке еквівалентне вихідному диференціальному рівнянню. Використовуючи інтегральне рівняння, розроблено новий функціонально-ітераційний метод як загальний підхід до змінного поперечного перерізу балки. Запропонований метод є досить простим і легким у застосуванні. Наведено ілюстративний приклад для перевірки достовірності запропонованого методу. Автори стверджують, що для точного розв'язку потрібно лише кілька ітерацій.

Отже, аналіз публікацій підтверджує актуальність розробки аналітичного методу розрахунку балок при довільних неперервних змінних згинальній жорсткості, коефіцієнті постелі та навантаження.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ціль дослідження – подальший розвиток аналітичних методів розрахунку балок змінної жорсткості на неоднорідній пружній основі.

Задачі дослідження:

1. Отримати точні формули для параметрів НДС балки з довільною неперервною змінною згинальною жорсткістю, що опирається на неперервно-змінну пружну основу Вінклера;
2. Виконати аналітичний розрахунок реальної балочної конструкції.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглядається задача про статичний розрахунок балки з довільною неперервною змінною згинальною жорсткістю $E(x)I(x)$, що опирається на суцільну неоднорідну пружну основу, для якої прийнято гіпотезу Вінклера. На рис. 1 представлено розрахункову схему балки, де $q(x)$ – задане розподілене змінне поперечне навантаження, $y(x)$ – прогин (просадка основи), $\varphi(x)$ – кут повороту. На рис. 2 показані внутрішні зусилля, які виникають у поперечних перерізах балки, а саме, згинальний момент $M(x)$ та поперечна сила $Q(x)$.

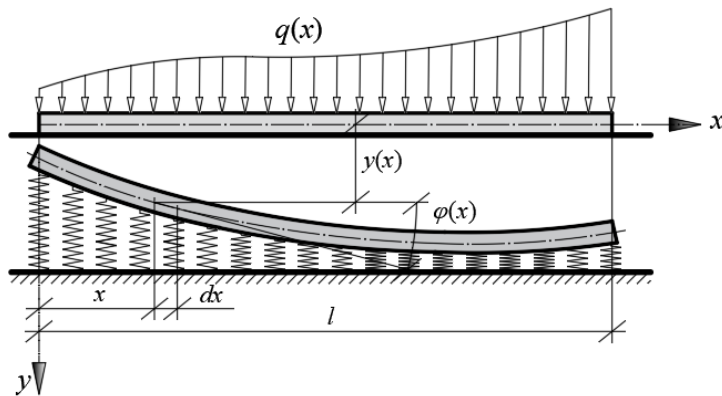


Рис. 1. Розрахункова схема балки

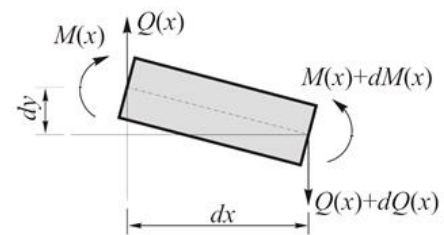


Рис. 2. Внутрішні зусилля

Неоднорідність пружної основи характеризується змінним погонним коефіцієнтом постелі, який у загальному випадку може являти собою будь-яку неперервну функцію. Для згинальної жорсткості $E(x)I(x)$, коефіцієнта постелі $k(x)$ та навантаження $q(x)$ приймаємо форму запису:

$$E(x)I(x) = E_0 I_0 A(x); \quad k(x) = k_0 B(x); \quad q(x) = q_0 C(x), \quad (1)$$

де $E_0 I_0$, k_0 , q_0 – значення відповідних величин у певній характерній точці балки (наприклад, в точці $x = 0$), $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ – безрозмірні неперервні функції, що виражають закони зміни своїх величин уздовж довжини балки.

Диференціальне рівняння згину балки [45] у нашому випадку набуває вигляду

$$E_0 I_0 (A(x) y''(x))'' + k_0 B(x) y(x) = q_0 C(x). \quad (2)$$

Після знаходження з цього рівняння функції прогинів $y(x)$, решта параметрів стану знайдуться за допомогою диференціальних залежностей, відомих з теорії згину балок:

$$\varphi(x) = y'(x); \quad M(x) = -E_0 I_0 A(x) y''(x); \quad Q(x) = -E_0 I_0 (A(x) y''(x))'. \quad (3)$$

Точний розв'язок диференціального рівняння (2) можна знайти за допомогою методу прямого інтегрування, який розвинуто в [46]. Зокрема, в [33] побудовано точний розв'язок (2) для випадку сталої жорсткості балки. При цьому, як і в даній статті, неоднорідність основи там також характеризується довільним неперервно-змінним коефіцієнтом постелі. Щоб не повторювати однотипну процедуру методу прямого інтегрування, запишемо тільки кінцеві формули, якими визначається точний розв'язок рівняння (2):

$$y(x) = y(0)X_1(x) + \varphi(0)l X_2(x) - M(0) \frac{l^2}{E_0 I_0} X_3(x) - Q(0) \frac{l^3}{E_0 I_0} X_4(x) + \frac{q_0 l^4}{E_0 I_0} X_5(x); \quad (4)$$

$$X_n(x) = \beta_{n,0}(x) - K \beta_{n,1}(x) + K^2 \beta_{n,2}(x) - K^3 \beta_{n,3}(x) + \dots \quad (n=1, 2, 3, 4, 5); \quad (5)$$

$$K = \frac{k_0 l^4}{E_0 I_0};$$

$$\beta_{n,0}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1} \quad (n=1, 2); \quad \beta_{n,0}(x) = \frac{1}{l^2} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \left(\frac{x}{l}\right)^{n-3} dx dx \quad (n=3, 4); \quad (6)$$

$$\beta_{5,0}(x) = \frac{1}{l^4} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x \int_0^x C(x) dx dx dx dx; \quad (7)$$

$$\beta_{n,k}(x) = \frac{1}{l^4} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x \int_0^x B(x) \beta_{n,k-1}(x) dx dx dx dx \quad (n=1, 2, 3, 4, 5) (k=1, 2, 3, \dots). \quad (8)$$

Важливо зауважити, що функції (5) безрозмірні [46]. Константи інтегрування в загальному розв'язку (4) виражені через початкові параметри $y(0)$, $\varphi(0)$, $M(0)$, $Q(0)$, для визначення яких слугуватимуть задані граничні умови.

Підставляючи (4) в рівності (3), отримаємо формули для визначення інших параметрів НДС балки:

$$\varphi(x) = y(0) \frac{1}{l} \tilde{X}_1(x) + \varphi(0) \tilde{X}_2(x) - M(0) \frac{l}{E_0 I_0} \tilde{X}_3(x) - Q(0) \frac{l^2}{E_0 I_0} \tilde{X}_4(x) + \frac{q_0 l^3}{E_0 I_0} \tilde{X}_5(x); \quad (9)$$

$$M(x) = -y(0) \frac{E_0 I_0}{l^2} \hat{X}_1(x) - \varphi(0) \frac{E_0 I_0}{l} \hat{X}_2(x) + M(0) \hat{X}_3(x) + Q(0) l \hat{X}_4(x) - q_0 l^2 \hat{X}_5(x); \quad (10)$$

$$Q(x) = -y(0) \frac{E_0 I_0}{l^3} \hat{X}_1(x) - \varphi(0) \frac{E_0 I_0}{l^2} \hat{X}_2(x) + M(0) \frac{1}{l} \hat{X}_3(x) + Q(0) \hat{X}_4(x) - q_0 l \hat{X}_5(x), \quad (11)$$

де

$$\tilde{X}_n(x) = l X'_n(x); \quad \hat{X}_n(x) = l^2 A(x) X''_n(x); \quad \hat{X}_n(x) = l^3 (A(x) X''_n(x))' \quad (n=1, 2, 3, 4, 5)$$

– безрозмірні функції [46].

Для зручності практичної реалізації наведених формул, апроксимуємо задані функції $f(x) = 1/A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ рядами Маклорена:

$$f(x) = A_0 + A_1 \left(\frac{x}{l}\right) + A_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + A_j \left(\frac{x}{l}\right)^j + \dots; \quad (12)$$

$$B(x) = B_0 + B_1 \left(\frac{x}{l}\right) + B_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + B_j \left(\frac{x}{l}\right)^j + \dots; \quad (13)$$

$$C(x) = C_0 + C_1 \left(\frac{x}{l}\right) + C_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + C_j \left(\frac{x}{l}\right)^j + \dots. \quad (14)$$

Після цього, враховуючи (6)-(8), (12)-(14), формули (5) трансформуються до степеневих рядів

$$X_n(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k c_{n,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j} \quad (n=1, 2, 3, 4, 5), \quad (15)$$

де

$$c_{n,0,0} = 1; \quad c_{n,0,j} = 0 \quad (n=1, 2) (j=1, 2, 3, \dots); \quad (16)$$

$$c_{n,0,j} = \frac{A_j}{(n+j-2)(n+j-1)} \quad (n=3, 4) (j=0, 1, 2, \dots); \quad (17)$$

$$c_{5,0,j} = \frac{1}{(j+3)(j+4)} \sum_{i=0}^j \frac{A_{j-i} C_i}{(i+1)(i+2)} \quad (j=0, 1, 2, \dots); \quad (18)$$

$$c_{n,k,j} = \frac{1}{(n+4k+j-2)(n+4k+j-1)} \sum_{i=0}^j \frac{A_{j-i} \sum_{s=0}^i B_{i-s} c_{n,k-1,s}}{(n+4k+i-4)(n+4k+i-3)} \quad (19)$$

$$(n=1, 2, 3, 4, 5) (k=1, 2, 3, \dots) (j=0, 1, 2, \dots).$$

Таким чином, формулами (4), (9)-(19) забезпечена можливість аналітичних розрахунків балок для узагальненого випадку, коли жорсткість балки, коефіцієнт постелі та навантаження можуть задаватись будь-якими неперервними функціями, що залежать від координати серединної осі балки.

Для реалізації отриманих формул створено відповідний програмний код на Visual Basic в програмному середовищі Excel. Тим самим, забезпечено можливість розрахунку балок у програмному режимі.

Приклад розрахунку

Розглянемо балку з вільними кінцями у вигляді зрізаної піраміди, ширина та висота якої змінюються за такими лінійними законами (рис. 3):

$$b(x) = b_0 - (b_0 - b_l) \frac{x}{l}; \quad h(x) = h_0 - (h_0 - h_l) \frac{x}{l}. \quad (20)$$

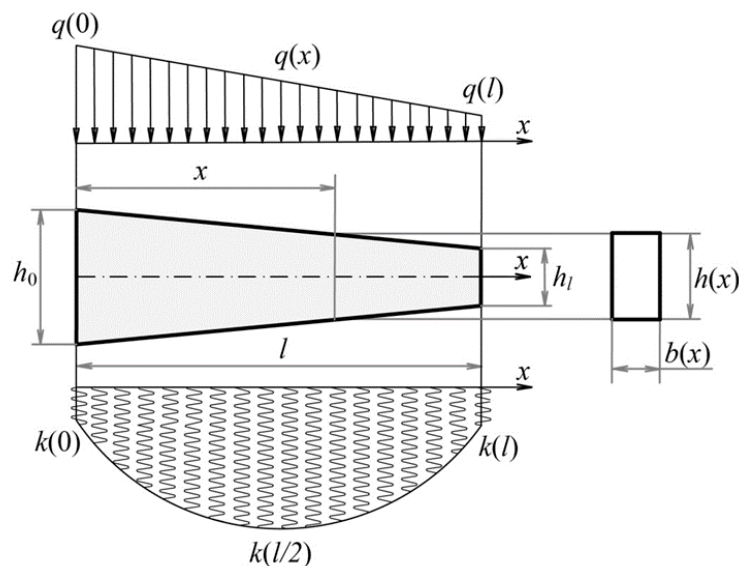


Рис. 3. Розрахункова схема балки

Балка опирається на параболічно-змінну пружну основу

$$k(x) = k\left(\frac{l}{2}\right) \left(1 - 4 \left(1 - \frac{k(0)}{k(l/2)}\right) \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\right)^2\right), \quad k\left(\frac{l}{2}\right) \neq 0 \quad (21)$$

та знаходиться під дією лінійно-змінного навантаження:

$$q(x) = q(0) \left(1 - \left(1 - \frac{q(l)}{q(0)}\right) \frac{x}{l}\right), \quad q(0) \neq 0. \quad (22)$$

Задані граничні умови запишуться так: $M(0) = 0$; $Q(0) = 0$; $M(l) = 0$; $Q(l) = 0$. Отже, два початкові параметри $M(0)$, $Q(0)$ уже відомі. Інші два $y(0)$, $\varphi(0)$ знайдемо із системи рівнянь, яку отримаємо після реалізації граничних умов на правому кінці $x = l$, скориставшись (10), (11). В підсумку одержимо:

$$y(0) = \frac{q_0 l^4}{E_0 I_0} \frac{\hat{X}_2(l) \hat{X}_5(l) - \hat{X}_2(l) \hat{X}_5(l)}{\hat{X}_1(l) \hat{X}_2(l) - \hat{X}_1(l) \hat{X}_2(l)}; \quad \varphi(0) = -\frac{q_0 l^3}{E_0 I_0} \frac{\hat{X}_1(l) \hat{X}_5(l) - \hat{X}_1(l) \hat{X}_5(l)}{\hat{X}_1(l) \hat{X}_2(l) - \hat{X}_1(l) \hat{X}_2(l)}.$$

Модуль пружності матеріалу балки вважаємо сталим. В такому разі, користуючись формулою для моменту інерції прямокутного перерізу та враховуючи (20), для жорсткості балки будемо мати:

$$EI(x) = EI_0 A(x); I_0 = \frac{b_0 h_0^3}{12}; A(x) = \left(1 - (1 - \gamma) \frac{x}{l}\right) \left(1 - (1 - \delta) \frac{x}{l}\right)^3,$$

де

$$\gamma = \frac{b_l}{b_0}, b_0 \geq b_l \neq 0; \delta = \frac{h_l}{h_0}, h_0 \geq h_l \neq 0.$$

Отже,

$$f(x) = \left(1 - (1 - \gamma) \frac{x}{l}\right)^{-1} \left(1 - (1 - \delta) \frac{x}{l}\right)^{-3}.$$

З метою визначення коефіцієнтів ряду (12), запишемо спочатку відповідні ряди для множників функції $f(x)$. Скориставшись формулою Ньютона для бінома з довільним дійсним показником степеня α , яка має вигляд [47]

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots,$$

будемо мати:

$$\left(1 - (1 - \gamma) \frac{x}{l}\right)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \gamma)^j \left(\frac{x}{l}\right)^j; \left(1 - (1 - \delta) \frac{x}{l}\right)^{-3} = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \left(\frac{x}{l}\right)^j, \quad (23)$$

де

$$\delta_0 = 1, \delta_{j+1} = \frac{j+3}{j+1} (1 - \delta) \delta_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Перемноживши ряди (23), отримаємо

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^j (1 - \gamma)^{j-k} \delta_k \right) \left(\frac{x}{l}\right)^j.$$

Зіставляючи даний ряд з рядом (12), визначаємо коефіцієнти:

$$A_0 = \delta_0; A_j = \sum_{k=0}^j (1 - \gamma)^{j-k} \delta_k \quad (j = 1, 2, 3, \dots).$$

Залишилось визначити коефіцієнти рядів (13), (14). Співставляючи формули (21), (22) з (1), знаходимо:

$$k_0 = k\left(\frac{l}{2}\right); B(x) = \left(1 - 4 \left(1 - \frac{k(0)}{k(l/2)}\right) \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\right)^2\right); q_0 = q(0); C(x) = 1 - \left(1 - \frac{q(l)}{q(0)}\right) \frac{x}{l}.$$

Звідси легко визначити шукані коефіцієнти:

$$C_0 = 1; C_1 = -\left(1 - \frac{q(l)}{q(0)}\right); C_j = 0 \quad (j = 2, 3, 4, \dots).$$



$$B_0 = \frac{k(0)}{k(l/2)}; B_1 = 4 \left(1 - \frac{k(0)}{k(l/2)} \right); B_2 = -4 \left(1 - \frac{k(0)}{k(l/2)} \right); B_j = 0 \quad (j = 3, 4, 5, \dots).$$

Вихідні дані:

Матеріал балки – бетон, $E = 1,5 \cdot 10^7 \text{ кПа}$;

Довжина балки $l = 5 \text{ м}$;

Ширина підосви лівого кінця $b_0 = 0,4 \text{ м}$;

Ширина підосви правого кінця $b_l = 0,2 \text{ м}$;

Висота лівого кінця $h_0 = 0,6 \text{ м}$; Висота правого кінця $h_l = 0,3 \text{ м}$;

$k(0) = k(l) = 2 \cdot 10^3 \text{ кН} / \text{м}^2$; $k(l/2) = 4 \cdot 10^3 \text{ кН} / \text{м}^2$;

$q(0) = 120 \text{ кН} / \text{м}$; $q(l) = 50 \text{ кН} / \text{м}$.

Результати розрахунків наведено в табл. 1 та на рис. 4, 5.

Таблиця 1

Значення параметрів НДС балки

x	$y(x), [\text{мм}]$	$\varphi(x), [\text{рад}]$	$M(x), [\text{кНм}]$	$Q(x), [\text{кН}]$
0	39,029975	-0,005822	0,000000	0,000000
0,25	37,574618	-0,005821	-1,148871	-8,571606
0,5	36,120111	-0,005814	-4,003043	-13,748596
0,75	34,668549	-0,005796	-7,791624	-16,145504
1	33,223231	-0,005763	-11,891618	-16,330698
1,25	31,788468	-0,005711	-15,816193	-14,824897
1,5	30,369365	-0,005638	-19,202603	-12,099871
1,75	28,971573	-0,005541	-21,799827	-8,577554
2	27,601011	-0,005420	-23,456064	-4,629788
2,25	26,263558	-0,005276	-24,106257	-0,578848
2,5	24,964713	-0,005111	-23,759862	3,301131
2,75	23,709230	-0,004930	-22,489087	6,781785
3	22,500724	-0,004737	-20,417843	9,677233
3,25	21,341269	-0,004539	-17,711622	11,839985
3,5	20,230995	-0,004345	-14,568471	13,156247
3,75	19,167737	-0,004164	-11,211195	13,540951
4	18,146778	-0,004008	-7,880777	12,932938
4,25	17,160815	-0,003886	-4,830946	11,290845
4,5	16,200318	-0,003805	-2,323600	8,590346
4,75	15,254586	-0,003767	-0,624693	4,823397
5	14,314031	-0,003760	0,000000	0,000000

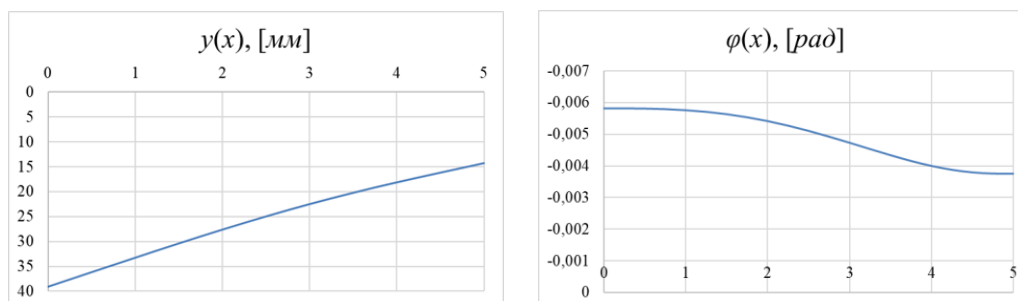


Рис. 4. Епюри кінематичних параметрів

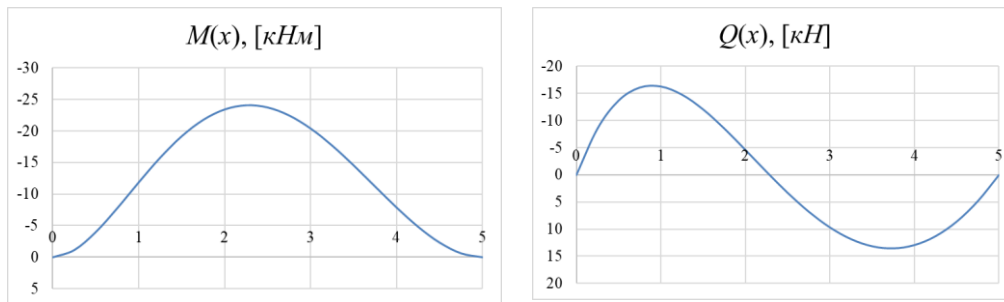


Рис. 5. Епюри силових параметрів

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Наведена розробка є логічним продовженням досліджень, започаткованих в публікації [33]. По суті, мова йде про поширення отриманих в [33] точних розв'язків на випадок змінної неперервної згинальної жорсткості балки. Оскільки отримані кінцеві розрахункові формули ґрунтуються на точному розв'язку диференціального рівняння, то отримані результати розрахунку слід трактувати як точні. Такі розв'язки є особливо цінними, адже вони можуть служити критеріями, по яким можна оцінювати точність різного роду наближених розв'язків.

6 ВИСНОВКИ

1. Отримані точні формули для статичного розрахунку балок у випадку, коли згинальна жорсткість, коефіцієнт постелі та навантаження задаються будь-якими неперервними функціями. Такі формули дозволяють отримати більш достовірну картину НДС балки порівняно з наближеними методами.
2. Запропонований підхід є ефективним у обчислювальному відношенні та дає можливість отримувати точні результати для статичних розрахунків балок зі змінними параметрами. Він не потребує дискретизації конструкції та є реальною альтернативою застосуванню наближених методів при розв'язанні даного класу задач.
3. Впровадження авторського підходу в інженерну практику забезпечить більшу точність розрахунків.

Література

1. Hayashi K. Theorie des trägers auf elastischer unterlage: Und ihre anwendung auf den tiefbau, nebst einer tafel der kreisund hyperbelfunktionen. Springer, 1921.
2. Hetényi M. Beams on elastic foundation: Theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering. University of Michigan Press, 1946.
3. Клепиков С.Н. Расчет конструкций на упругом основании. Будівельник, 1967.
4. Tiwari K., & Kuppa R.. Overview of methods of analysis of beams on elastic foundation. IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering, 11(5), 2014. 22–29. <https://doi.org/10.9790/1684-11562229>
5. Singh H., & Jha J.N. Constitutive models for sustainable design of foundation systems. In Ukieri Concrete Congress-Innovations in Concrete Construction, 2014. 2122–2133.
6. Madhira M., Abhishek S.V., & Rajyalakshmi K. (2015). Modelling ground–foundation interactions. In *Hyderabad, India: International Conference on Innovations in Structural Engineering, At Osmania University*, 2015. 91–106.
7. Klar A., Vorster T., Soga K., & Mair R.J. (2005). Soil–pipe interaction due to tunnelling: comparison between Winkler and elastic continuum solutions. *Géotechnique*, 55(6), 2005. 461–466. <https://doi.org/10.1680/geot.2005.55.6.461>
8. Dai C.Q., Wang, L., & Wang Y.J. (2011). Deformation study of lining on overlap tunnels based on elastic foundation beam. *Applied Mechanics and Materials*, 94, 2011. 1875–1878. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.94-96.1875>

9. Zhen L., Chen J.-J., Wang J.-H., & Qiao P.-Z.. Elastic buckling analysis of steel pipe-jacking embedded in the Winkler foundation. In Geo-Shanghai 2014 (pp. 481–490). American Society of Civil Engineers. <https://doi.org/10.1061/9780784413449.047>
10. Xiong Z., Kou, L., Zhao J., Cui H., & Wang B. Isogeometric Analysis of Longitudinal Displacement of a Simplified Tunnel Model Based on Elastic Foundation Beam. CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences, 136(1), 2023. 1–22. <https://doi.org/10.32604/cmes.2023.024833>
11. Frydryšek K., Jančo R., & Gondek H. Solutions of beams, frames and 3D structures on elastic foundation using FEM. International journal of mechanics, 7(4), 2013. 362–369.
12. Cai Z., Raymond G.P., & Bathurst R.J. Estimate of static track modulus using elastic foundation models. Transportation Research Record, 1470, 1994, 65–72.
13. Skoglund, K. A. A study of some factors in mechanistic railway track design [Doctoral thesis, Norwegian University of Science and Technology, Faculty of Engineering Science and Technology], 2002. <http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:no:ntnu:diva-103>
14. Cojocaru E. C., Irschik H. & Schlacher K.. Concentrations of pressure between an elastically supported beam and a moving Timoshenko-beam. Journal of Engineering Mechanics, 129(9), 2003. 1076–1082. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9399\(2003\)129:9\(1076\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9399(2003)129:9(1076))
15. Puzavac L., Popović Z. & Lazarević L. Influence of track stiffness on track behaviour under vertical load. Promet-Traffic&Transportation, 24(5), 2012. 405–412. <https://doi.org/10.7307/ptt.v24i5.1176>
16. Slobodyanyuk, M., Nikitina, A., Nechayev, G., & Rakovskaya N. Mathematical model of deformation of railway sleeper track structure with the step change of stiffness on the elastic Winkler foundation of the constant stiffness. Teka Komisji Motoryzacji i Energetyki Rolnictwa, 14(2), 2014. 152–163.
17. Lamprea-Pineda, A.C., Connolly, D.P., & Hussein, M.F.M. Beams on elastic foundations – A review of railway applications and solutions. Transportation Geotechnics, 33, 2022, 100696. <https://doi.org/10.1016/j.trgeo.2021.100696>
18. Yelce, T.U., Balci, E., & Bezgin, N.Ö. A discussion on the beam on elastic foundation theory. Challenge, 9(1), 2023. 34–47. <https://doi.org/10.20528/cjsmec.2023.01.004>
19. Wang Y. H., Tham L.G., & Cheung Y. K. Beams and plates on elastic foundations: A review. Progress in Structural Engineering and Materials, 7(4), 2005. 174–182. <https://doi.org/10.1002/pse.202>
20. Foyouzat M.A., Mofid M., & Akin J.E. On the dynamic response of beams on elastic foundations with variable modulus. Acta Mechanica, 227(2), 2015. 549–564. <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1485-1>
21. Nguyen D.K. Large displacement response of tapered cantilever beams made of axially functionally graded material. Composites Part B: Engineering, 55, 2013. 298–305. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.06.024>
22. Deminov P. The stiffness of a reinforced concrete beam with random parameters the cracks formation. E3S Web of Conferences, 410, 2023. 02025. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202341002025>
23. Truong T.T., Nguyen-Thoi T., & Lee J. Isogeometric size optimization of bi-directional functionally graded beams under static loads. Composite Structures, 227, 2019. 111259. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111259>
24. Lieu Q.X., & Lee J. An isogeometric multimesh design approach for size and shape optimization of multidirectional functionally graded plates. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 343, 2019. 407–437. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.08.017>
25. Thang P.T., Nguyen-Thoi T., & Lee J. Shape and material optimization for buckling behavior of functionally graded toroidal shells. Thin-Walled Structures, 157, 2020. 107129. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107129>
26. Wang C., Koh J.M., Yu, T. Xie, N.G. & Cheong, K.H. (2020). Material and shape optimization of bi-directional functionally graded plates by GIGA and an improved multi-objective particle swarm

- optimization algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 366, 2020. 113017. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113017>
27. Truong T.T., Lee S., & Lee J. An artificial neural network-differential evolution approach for optimization of bidirectional functionally graded beams. *Composite Structures*, 233, 2020. 111517. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111517>
28. Abo-Bakr H.M., Abo-Bakr R.M., Mohamed S.A., & Eltaher M.A. Multi-objective shape optimization for axially functionally graded microbeams. *Composite Structures*, 258, 2021. 113370. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113370>
29. Cao D., Wang B., Hu W., & Gao Y. (2020). Free vibration of axially functionally graded beam. *Mechanics of functionally graded materials and structures*. IntechOpen, 2020. <https://doi.org/10.5772/intechopen.85835>
30. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Наукова думка, 1972.
31. Froio D., & Rizzi E. Analytical solution for the elastic bending of beams lying on a variable Winkler support. *Acta Mechanica*, 227(4), 2016. 1157–1179. <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1508-y>.
32. Al-Azzawi Adel A. & Al-Madani M. H. A state of the art review on beams on non-uniform elastic foundations. *ARNP Journal of Engineering and Applied Sciences*, 13(7), 2018. 2647–2660. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202341005027>
33. Krutii Y., Surianinov M., Petrash S., & Yezhov M. Development of an analytical method for calculating beams on a variable elastic Winkler foundation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 1162(1), 2021. 012009. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1162/1/012009>
34. Jang T.S. A new semi-analytical approach to large deflections of Bernoulli–Euler–v. Karman beams on a linear elastic foundation: Nonlinear analysis of infinite beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 66, 2013. 22–32. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.10.005>
35. Jang T.S. A general method for analyzing moderately large deflections of a non-uniform beam: An infinite Bernoulli–Euler–von Karman beam on a nonlinear elastic foundation. *Acta Mechanica*, 225(7), 2014. 1967–1984. <https://doi.org/10.1007/s00707-013-1077-x>
36. Poliakov A.M., Shtanko P.K., & Pakhaliuk V.I. (2019). Calculation of a variable cross-section beam on an elastic foundation with two coefficients of compliance. *Journal of Physics: Conference Series*, 1353, 2019. 012110. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012110>
37. Штанько П.К., & Рягин С.Л. Расчет балки переменного сечения на упругом основании квазианалитическим методом. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 1, 2019. 62–66.
38. Akhmediev S., Mikhailov V., Tazhenova G., Bakirov M., Filippova T., & Tokanov D. Calculating a beam of variable section lying on an elastic foundation. *Journal of Applied Engineering Science*, 2023. 87–93. <https://doi.org/10.5937/jaes0-38800>
39. Wasti S.T., & Senkaya E. A simple finite element for beams on elastic foundations. *Strain*, 31(4), 1995. 135–142. <https://doi.org/10.1111/j.1475-1305.1995.tb00977.x>
40. Meriem S., & Djamel N. Stochastic finite element analysis of nonlinear beam on Winkler-Pasternack foundation. In *International conference on numerical modelling in engineering* (pp. 14–29). Springer Singapore, 2018. https://doi.org/10.1007/978-981-13-2405-5_2
41. Tsiatas G.C. (2014). A new efficient method to evaluate exact stiffness and mass matrices of non-uniform beams resting on an elastic foundation. *Archive of Applied Mechanics*, 84(5), 2014. 615–623. <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0820-7>
42. Tsiatas G.C. Nonlinear analysis of non-uniform beams on nonlinear elastic foundation. *Acta Mechanica*, 209(1), 2010. 141–152. <https://doi.org/10.1007/s00707-009-0174-3>
43. Jang T.S., & Sung H.G. A new semi-analytical method for the non-linear static analysis of an infinite beam on a non-linear elastic foundation: A general approach to a variable beam cross-section. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(4), 2012. 132–139. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.04.005>

44. Liu H., Huang Y., & Zhao Y. A unified numerical approach to the dynamics of beams with longitudinally varying cross-sections, materials, foundations, and loads using Chebyshev spectral approximation. *Aerospace*, 10(10), 2023. 842.
<https://doi.org/10.3390/aerospace10100842>
45. Тимошенко, С.П. Курс теории упругости. Наукова думка, 1972.
46. Крутий Ю.С. Розробка методу розв'язання задач стійкості і коливань деформівних систем зі змінними неперервними параметрами: дис. д-ра техн. наук: 01.02.04. Луцьк, 2016.
47. Smorynski, C. A treatise on the binomial theorem. College Publications, 2012

References

1. Hayashi, K. (1921). *Theorie des trägers auf elastischer unterlage: Und ihre anwendung auf den tiefbau, nebst einer tafel der kreisund hyperbelfunktionen*. Springer.
2. Hetényi, M. (1946). *Beams on elastic foundation: Theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering*. University of Michigan Press.
3. Klepykov, S.N. (1967). *Raschet konstruktysyi na upruhom osnovanyy*. Budivelnik. [Calculation of structures on an elastic foundation. Budivelnik] [in Russian].
4. Tiwari, K., & Kuppa, R. (2014). Overview of methods of analysis of beams on elastic foundation. *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering*, 11(5), 22–29.
<https://doi.org/10.9790/1684-11562229>
5. Singh, H., & Jha, J.N. (2014). Constitutive models for sustainable design of foundation systems. In *Ukieri Concrete Congress-Innovations in Concrete Construction*, 2122–2133.
6. Madhira, M., Abhishek, S.V., & Rajyalakshmi, K. (2015). Modelling ground–foundation interactions. In *Hyderabad, India: International Conference on Innovations in Structural Engineering, At Osmania University*, 91–106.
7. Klar, A., Vorster, T., Soga, K., & Mair, R.J. (2005). Soil–pipe interaction due to tunnelling: comparison between Winkler and elastic continuum solutions. *Géotechnique*, 55(6), 461–466.
<https://doi.org/10.1680/geot.2005.55.6.461>
8. Dai, C.Q., Wang, L., & Wang, Y.J. (2011). Deformation study of lining on overlap tunnels based on elastic foundation beam. *Applied Mechanics and Materials*, 94, 1875–1878.
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.94-96.1875>
9. Zhen, L., Chen, J.-J., Wang, J.-H., & Qiao, P.-Z. (2014). Elastic buckling analysis of steel pipe-jacking embedded in the Winkler foundation. In *Geo-Shanghai 2014* (pp. 481–490). American Society of Civil Engineers. <https://doi.org/10.1061/9780784413449.047>
10. Xiong, Z., Kou, L., Zhao, J., Cui, H., & Wang, B. (2023). Isogeometric Analysis of Longitudinal Displacement of a Simplified Tunnel Model Based on Elastic Foundation Beam. *CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 136(1), 1–22.
<https://doi.org/10.32604/cmcs.2023.024833>
11. Frydryšek, K., Jančo, R., & Gondek, H. (2013). Solutions of beams, frames and 3D structures on elastic foundation using FEM. *International journal of mechanics*, 7(4), 362–369.
12. Cai, Z., Raymond, G.P., & Bathurst, R.J. (1994). Estimate of static track modulus using elastic foundation models. *Transportation Research Record*, 1470, 65–72.
13. Skoglund, K. A. (2002). *A study of some factors in mechanistic railway track design* [Doctoral thesis, Norwegian University of Science and Technology, Faculty of Engineering Science and Technology].
<http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:no:ntnu:diva-103>
14. Cojocar, E. C., Irschik, H., & Schlacher, K. (2003). Concentrations of pressure between an elastically supported beam and a moving Timoshenko-beam. *Journal of Engineering Mechanics*, 129(9), 1076–1082.
[https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9399\(2003\)129:9\(1076\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9399(2003)129:9(1076))
15. Puzavac, L., Popović, Z., & Lazarević, L. (2012). Influence of track stiffness on track behaviour under vertical load. *Promet-Traffic&Transportation*, 24(5), 405–412.
<https://doi.org/10.7307/ptt.v24i5.1176>
16. Slobodyanyuk, M., Nikitina, A., Nechayev, G., & Rakovskaya, N. (2014). Mathematical model of deformation of railway sleeper track structure with the step change of stiffness on the elastic

- Winkler foundation of the constant stiffness. *Teka Komisji Motoryzacji i Energetyki Rolnictwa*, 14(2), 152-163.
17. Lamprea-Pineda, A.C., Connolly, D.P., & Hussein, M.F.M. (2022). Beams on elastic foundations – A review of railway applications and solutions. *Transportation Geotechnics*, 33, 100696. <https://doi.org/10.1016/j.trgeo.2021.100696>
 18. Yelce, T.U., Balci, E., & Bezgin, N.Ö. (2023). A discussion on the beam on elastic foundation theory. *Challenge*, 9(1), 34-47. <https://doi.org/10.20528/cjsmec.2023.01.004>
 19. Wang, Y.H., Tham, L.G., & Cheung, Y.K. (2005). Beams and plates on elastic foundations: A review. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 7(4), 174–182. <https://doi.org/10.1002/pse.202>
 20. Foyouzat, M.A., Mofid, M., & Akin, J.E. (2015). On the dynamic response of beams on elastic foundations with variable modulus. *Acta Mechanica*, 227(2), 549–564. <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1485-1>
 21. Nguyen, D.K. (2013). Large displacement response of tapered cantilever beams made of axially functionally graded material. *Composites Part B: Engineering*, 55, 298–305. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.06.024>
 22. Deminov, P. (2023). The stiffness of a reinforced concrete beam with random parameters the cracks formation. *E3S Web of Conferences*, 410, 02025. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202341002025>
 23. Truong, T.T., Nguyen-Thoi, T., & Lee, J. (2019). Isogeometric size optimization of bi-directional functionally graded beams under static loads. *Composite Structures*, 227, 111259. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111259>
 24. Lieu, Q.X., & Lee, J. (2019). An isogeometric multimesh design approach for size and shape optimization of multidirectional functionally graded plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 343, 407-437. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.08.017>
 25. Thang, P.T., Nguyen-Thoi, T., & Lee, J. (2020). Shape and material optimization for buckling behavior of functionally graded toroidal shells. *Thin-Walled Structures*, 157, 107129. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107129>
 26. Wang, C., Koh, J.M., Yu, T., Xie, N.G., & Cheong, K.H. (2020). Material and shape optimization of bi-directional functionally graded plates by GIGA and an improved multi-objective particle swarm optimization algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 366, 113017. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113017>
 27. Truong, T.T., Lee, S., & Lee, J. (2020). An artificial neural network-differential evolution approach for optimization of bidirectional functionally graded beams. *Composite Structures*, 233, 111517. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111517>
 28. Abo-Bakr, H.M., Abo-Bakr, R.M., Mohamed, S.A., & Eltaher, M.A. (2021). Multi-objective shape optimization for axially functionally graded microbeams. *Composite Structures*, 258, 113370. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113370>
 29. Cao, D., Wang, B., Hu, W., & Gao, Y. (2020). Free vibration of axially functionally graded beam. *Mechanics of functionally graded materials and structures*. IntechOpen. <https://doi.org/10.5772/intechopen.85835>
 30. Tymoshenko, S.P. (1972). *Kurs teoryi uprugosti*. Naukova dumka. [Course of the theory of elasticity. Naukova Dumka]. [in Russian].
 31. Froio, D., & Rizzi, E. (2016). Analytical solution for the elastic bending of beams lying on a variable Winkler support. *Acta Mechanica*, 227(4), 1157–1179. <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1508-y>.
 32. Al-Azzawi Adel, A. & Al-Madani, M. H. (2018). A state of the art review on beams on non-uniform elastic foundations. *ARNP Journal of Engineering and Applied Sciences*, 13(7), 2647–2660. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202341005027>
 33. Krutii, Y., Surianinov, M., Petrash, S., & Yezhov, M. (2021). Development of an analytical method for calculating beams on a variable elastic Winkler foundation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 1162(1), 012009. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1162/1/012009>

34. Jang, T.S. (2013). A new semi-analytical approach to large deflections of Bernoulli–Euler–v. Karman beams on a linear elastic foundation: Nonlinear analysis of infinite beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 66, 22–32.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.10.005>
35. Jang, T.S. (2014). A general method for analyzing moderately large deflections of a non-uniform beam: An infinite Bernoulli–Euler–von Karman beam on a nonlinear elastic foundation. *Acta Mechanica*, 225(7), 1967–1984.
<https://doi.org/10.1007/s00707-013-1077-x>
36. Poliakov, A.M., Shtanko, P.K., & Pakhaliuk, V.I. (2019). Calculation of a variable cross-section beam on an elastic foundation with two coefficients of compliance. *Journal of Physics: Conference Series*, 1353, 012110.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012110>
37. Shtanko, P.K., & Riahyn, S.L. (2019). *Raschet balky peremennogo secheniya na uprugom osnovanyy kvazyanalytycheskym metodom*. Novi materialy i tekhnolohii v metalurhii ta mashynobuduvanni. [Calculation of a beam of variable cross-section on an elastic foundation using a quasi-analytical method. New materials and technologies in metallurgy and mechanical engineering] . 1, 62–66. [in Russian].
38. Akhmediev, S., Mikhailov, V., Tazhenova, G., Bakirov, M., Filippova, T., & Tokanov, D. (2023). Calculating a beam of variable section lying on an elastic foundation. *Journal of Applied Engineering Science*, 87–93. <https://doi.org/10.5937/jaes0-38800>
39. Wasti, S.T., & Senkaya, E. (1995). A simple finite element for beams on elastic foundations. *Strain*, 31(4), 135–142. <https://doi.org/10.1111/j.1475-1305.1995.tb00977.x>
40. Meriem, S., & Djamel, N. (2018). Stochastic finite element analysis of nonlinear beam on Winkler-Pasternack foundation. In *International conference on numerical modelling in engineering* (pp. 14–29). Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-13-2405-5_2
41. Tsiatas, G.C. (2014). A new efficient method to evaluate exact stiffness and mass matrices of non-uniform beams resting on an elastic foundation. *Archive of Applied Mechanics*, 84(5), 615–623. <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0820-7>
42. Tsiatas, G.C. (2010). Nonlinear analysis of non-uniform beams on nonlinear elastic foundation. *Acta Mechanica*, 209(1), 141–152.
<https://doi.org/10.1007/s00707-009-0174-3>
43. Jang, T.S., & Sung, H.G. (2012). A new semi-analytical method for the non-linear static analysis of an infinite beam on a non-linear elastic foundation: A general approach to a variable beam cross-section. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(4), 132–139.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.04.005>
44. Liu, H., Huang, Y., & Zhao, Y. (2023). A unified numerical approach to the dynamics of beams with longitudinally varying cross-sections, materials, foundations, and loads using Chebyshev spectral approximation. *Aerospace*, 10(10), 842.
<https://doi.org/10.3390/aerospace10100842>
45. Tymoshenko, S.P. (1972). *Kurs teoryy uprugosti*. Naukova dumka. [Course of the theory of elasticity. Naukova Dumka]. [in Russian].
46. Krutii Yu.S. (2016). *Rozrobka metodu rozviazannia zadach stiikosti i kolyvan deformivnykh system zi zminnymy neperervnymy parametramy: dys. d-ra tekhn. nauk: 01.02.04*. Lutsk. [Exploration of the method of unraveling the problems of stability and bending of deformable systems with changeable non-permanent parameters]. [in Ukraine].
47. Smorynski, C. (2012). *A treatise on the binomial theorem*. College Publications.

Крутий Юрій Сергійович

Одеська державна академія будівництва та архітектури,

д.т.н., професор

вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029

yurii.krutii@gmail.com

ORCID: 0000-0001-7105-3087



Перпері Алла Олександрівна

Одеська державна академія будівництва та архітектури

к.т.н., доцент

вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029

a.perperi@odaba.edu.ua

ORCID: 0000-0001-7112-6864

Вакуленко Владислав Володимирович

Одеська державна академія будівництва та архітектури,

аспірант,

вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029

91vvv19@gmail.com

ORCID: 0009-0008-4410-7666

Ковальова Ірина Лаврентіївна

Одеська державна академія будівництва та архітектури

к.т.н., доцент

вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029

kovaeva1102@ukr.net

ORCID: 0000-0002-0918-1376

Для посилань:

Крутий Ю. С., Перпері А. О., Вакуленко В. В., Ковальова І. Л. Аналітичний розрахунок балок змінної жорсткості на неоднорідній пружній основі Вінклера. Механіка та математичні методи, 2025. Т. VII. № 2. С. 28–44.

For references:

Yu. Krutii, A. Perperi, V. Vakulenko, I. Kovalova. (2025). Analytical calculation of a beam on a Winkler elastic foundation with power-law inhomogeneity. Mechanics and mathematical methods. VII (2). 28–44.

Аналітичний розрахунок балок змінної жорсткості на неоднорідній пружній основі Вінклера. © 2025 by Крутий Ю. С., Перпері А. О., Вакуленко В. В., Ковальова І. Л. is licensed under CC BY 4.0

UDK 621.8

DIFFERENTIALLY DRIVEN WHEELED ROBOT CONSTRUCTED USING LEGO MINDSTORMS COMPONENTS

M. Farhan¹

¹*Baghdad University*

Abstract: The design, modeling, and implementation of mobile robotic systems have emerged as a prominent research direction in the field of automation and intelligent systems. With continuous advancements in embedded control systems, sensors, and computational platforms, mobile robots have become increasingly capable of performing complex tasks in dynamic environments. These systems not only provide a practical foundation for theoretical research in kinematics, control theory, and artificial intelligence, but also offer real-world applicability in areas such as manufacturing, logistics, search and rescue operations, and educational robotics.

One of the most commonly used platforms for experimentation and demonstration of autonomous behavior is the line-following robot (LFR). The LFR serves as a foundational model for studying feedback control, real-time processing, and sensor integration. In order to ensure efficient line tracking, the robot must exhibit fast response times, precise path correction capabilities, and consistent behavior under varying environmental conditions. These requirements impose challenges on both hardware design and the development of robust software algorithms for motion control and sensor data processing.

This paper presents a comprehensive study on the design and realization of a line-following robot utilizing a differential drive mechanism built with Lego Mindstorms EV3 components. The robot is equipped with a color sensor for real-time line detection and employs a digital feedback control algorithm to adjust wheel velocities accordingly. A key focus of the work is to demonstrate that high-quality line-following behavior can be achieved using relatively simple control strategies, provided that proper system modeling and parameter tuning are carried out.

To validate the performance of the control system, simulation models were developed using MATLAB Simulink. These models allow for visualization and testing of the robot's dynamic response under various track geometries and sensor conditions, enabling refinement of the control parameters prior to physical implementation. The use of the EV3 software environment for programming ensures compatibility with the Lego hardware while maintaining flexibility in algorithm development.

The results of both simulation and real-world experiments confirm that even with low-complexity control logic, the robot is capable of achieving stable, accurate, and responsive tracking of predefined paths. The simplicity of the system also makes it suitable for educational purposes, allowing students and researchers to explore core principles of robotics, including sensor fusion, feedback control, and mechatronic integration. Furthermore, this work lays the groundwork for future research in enhancing the performance of mobile robots through the integration of machine learning, adaptive control techniques, and multi-sensor systems.

Keywords: Digital control, line following robot.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ПРИВОДНИЙ КОЛІСНИЙ РОБОТ, СКОНСТРУЙОВАНИЙ З ВИКОРИСТАННЯМ КОМПОНЕНТІВ LEGO MINDSTORMS

Фархан М.¹

¹*Багдадський університет*

Анотація: Проектування, моделювання та реалізація мобільних робототехнічних систем стали одним із провідних напрямів досліджень у галузі автоматизації та інтелектуальних



систем. Завдяки безперервному розвитку вбудованих систем керування, сенсорних технологій і обчислювальних платформ, мобільні роботи отримали здатність виконувати складні завдання в динамічних середовищах. Такі системи не лише забезпечують практичну базу для теоретичних досліджень у галузях кінематики, теорії керування та штучного інтелекту, але й мають широке застосування в реальному житті – зокрема, в промисловості, логістиці, пошуково-рятувальних операціях та освітніх проєктах.

Однією з найпоширеніших платформ для експериментів і демонстрації автономної поведінки є робот, що слідує по лінії (LFR – Line-Following Robot). Такий тип роботів є базовою моделлю для вивчення систем зворотного зв'язку, обробки даних у реальному часі та інтеграції сенсорів. Для забезпечення ефективного слідування за лінією робот повинен демонструвати швидке реагування, точну корекцію траєкторії та стабільну роботу за різних зовнішніх умов. Ці вимоги створюють виклики як для апаратної реалізації, так і для розробки надійних алгоритмів керування та обробки даних із сенсорів.

У даній роботі представлено комплексне дослідження процесу проєктування та реалізації робота, що слідує за лінією, з використанням диференціального приводу, зібраного на основі компонентів Lego Mindstorms EV3. Робот оснащено кольоровим сенсором для виявлення лінії в реальному часі, а також цифровим алгоритмом зворотного зв'язку для регулювання швидкості обертання коліс. Основна увага зосереджена на демонстрації того, що високоякісне слідування за лінією можна забезпечити за допомогою відносно простих алгоритмів керування, за умови коректного моделювання системи та налаштування параметрів.

Для верифікації ефективності системи керування розроблено і проаналізовано моделі у середовищі MATLAB Simulink. Ці моделі дали змогу візуалізувати динамічну реакцію робота за різних конфігурацій траєкторії та умов роботи сенсорів, що дало змогу оптимізувати параметри керування до фізичної реалізації. Програмування здійснювалось у середовищі EV3 Software, що забезпечує сумісність з апаратною платформою Lego та гнучкість у розробці алгоритмів.

Результати моделювання та експериментів підтверджують, що навіть за використання алгоритмів з низькою обчислювальною складністю, робот здатен забезпечити стабільне, точне та швидке слідування за заданою траєкторією. Простота системи також робить її придатною для використання в освітньому середовищі, дозволяючи студентам і дослідникам вивчати основи робототехніки, включаючи сенсорну інтеграцію, зворотний зв'язок та мехатроніку. Крім того, ця робота створює основу для подальших досліджень у напрямі підвищення продуктивності мобільних роботів за рахунок впровадження методів машинного навчання, адаптивного керування та мультисенсорних систем.

Ключові слова: Цифрове керування, робот, що слідує за лінією.

1 INTRODUCTION

Robotics is a branch of engineering that involves the conception, design, manufacture and operation of robots. The field overlaps with electronics, computer science, artificial intelligence, mechatronics, nanotechnology, bioengineering and control engineering. Robots are mechatronic engineering products, capable of acting autonomously while implementing assigned behaviors in various physical environments. The developed use of robots in many areas makes the fundamental understanding of them fundamental [1-3].

In recent years there has been a rapid increase in the use of digital controllers in control system. It has become routinely practicable to design very complicated digital controllers and to carry out the extensive calculations required for their design. The current adoption of digital rather than analog control in robotics is due to the genuine advantages found in working with digital signals rather than continuous time signals[4-7].

The use of analog controllers in control engineering poses problems such as limited accuracy, susceptibility to noise and drift of power supply, cost ineffectiveness and less flexibility. Digital control systems are more suitable for modern control systems because of reduced cost, noise immunity and speed [8].

Line following robots need to adapt accurately, faster, efficiently and cheaply to changing operating conditions. The drawbacks prominent in analog controllers reduce their suitability in robotics. Hence, the necessity for digital controllers which provide better performance capabilities [9].

2 ANALYSIS OF LITERARY DATA AND RESOLVING THE PROBLEM

2.1 Lego Mindstorms line follower robot design

A line follower shown in Fig.1 is a mobile robot which is able to follow a visible line on a surface consisting of contrasting colours. To build and run the robot, the required hardware included; Lego EV3 brick, power supply, 2 large servo motors, a set of wheels, colour sensor, connector cables, beams, axles, bushes and pins. The EV3 brick formed part of the chassis, equipped with wheels. The servo motors are used to drive the two front wheels. Two rear small castor wheels supported the robot. The robot had a colour sensor mounted at the front end to identify the line. It is centered between the two front wheels, which are separated by a distance of 7.4 cm. It is designed to follow an oval track made of black electrical tape (18 mm wide) on a white surface.

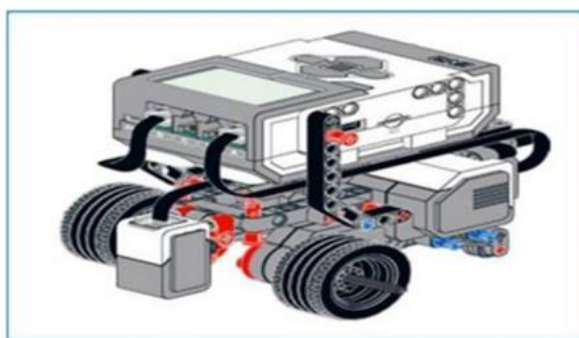


Fig. 1. Line following robot

2.2 Study of Lego Mindstorms EV3 motor

Lego Mindstorms has not published the EV3 motor's electromechanical characteristics. Table 1 shows the proposed parameters used in this paper, while, Table 2 shows the operational specifications.

Table 1

Lego Mindstorms EV3 large motor characteristics

Motor Parameter	Unit	Value
Torque constant	N.m/A	0.2
Back e.m.f. constant	V.s/rad	0.5
Armature resistance	Ω	5
Armature inductance	H	0.005
Viscous damping coefficient, B	N.m/rad.s	0.0006
Rotor inertia coefficient, J	N.m	0.001

Table 2

Operational specifications

Nominal Voltage	7.2V or 9V
Rotation Speed at no load	160 – 170 rpm
Running Torque	0.20 N-m
Stall Torque	0.40 N-m

Fig.2 shows the motor model simulated using MATLAB Simulink.

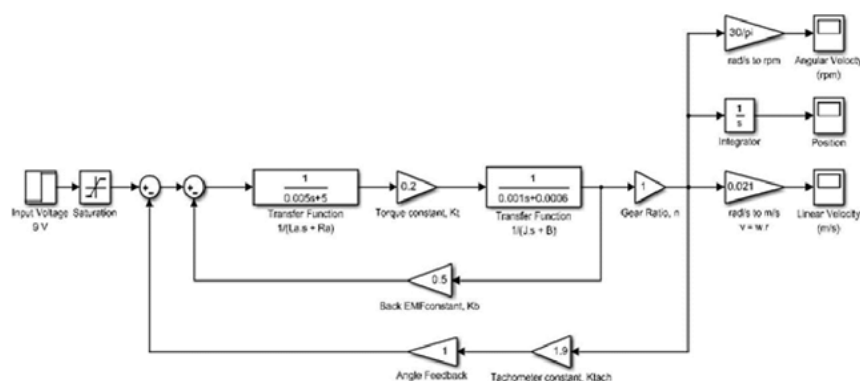


Fig. 2. Motor implementation on Simulink

2.3 Line following robot algorithms

Line following works by using the colour sensor (in reflected light intensity mode) to read the changes in the reflected light levels along the edge of a dark and light surface. The reflected light intensity is measured as a percentage from 0% (very low reflectivity) to 100% (very high reflectivity). More light is reflected from a white surface compared to the black surface. Depending on the light sensor value, the motors are directed to vary the speed.

In a program, white and black values are defined using a threshold value. Threshold is the average of the sensor value with the sensor on the black line and one found on the white area. Different measurements for black and white depend on factors such as the light level in the room, the robot's battery level, and the type of surface used.

The light sensor will read the light value. Then the robot can be programmed such that if the sensor sees black, which is when the sensor value is less than the threshold, the robot should turn right, else it should turn left. The basic line following approach is shown in Fig.3, and can be summarized as follows:

1. The robot will be started. It will then be set to move forward. It will be made to steer right until it detects the line edge.
2. Once the sensor sees black, the robot will continue to go forward while turning left gradually.
3. Whenever the sensor will see white (i.e. the robot leaving the line), the robot will turn to the right until the sensor finds black again.
4. The sequence then will be repeated in a loop, unless the robot is stopped.

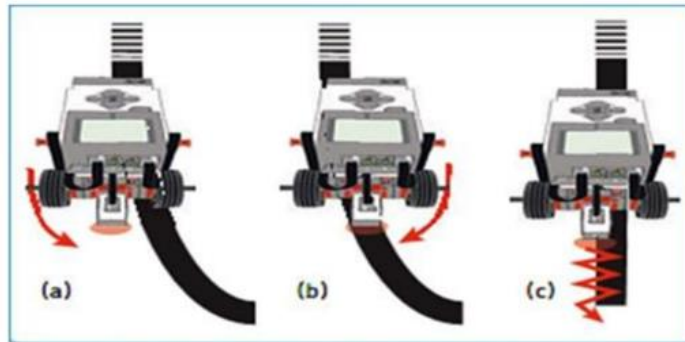


Fig. 3. Basic line following approach

2.4 Digital controller design

A robot without a controller will oscillate a lot about the line, leading to more consumption of battery power, less speed and following the line less efficiently.

When designing a line following robot, the transient response specifications are defined as:

1. Rise time: It is how fast the robot will try to get back to the line after it has drifted off.
2. Overshoot: The distance past the line edge the robot will tend to go as it is responding to an error.
3. The amount of overshoot indicates the relative stability of the system.
4. Steady-state error: The offset from the line as the robot follows a long straight line.
5. Settling time: The time the LFR will take to settle down when it encounters a turn.

The performance criteria are stipulated as follows:

1. Constant speed of 0.1m/s to be maintained despite the presence of turns.
2. Steady-state error: Less than 2%
3. Settling time of less than 0.1 seconds
4. Overshoot (%) of less than 1.0
5. Finite phase margin

The robot controller to be designed is to be modified until the transient response met is satisfactory.

2.4.1 Proposed controller design

The proposed controller is a Proportional-plus-Integral-plus-Derivative (PID) digital controller.

The PID controller would control the position of the robot with quick response time and minimize the overshoot. The proportional part would determine the magnitude of turn required to correct the error sensed. The integral part would improve the steady state error (proportional offset) which increases while the robot is not on the line. The derivative part

would measure the deviation from the path and minimize overshoot. It would reduce the oscillating effect about the line. The derivative control is used to provide anticipative action.

2.5 Implementation of line following control algorithm for Lego Mindstorms EV3 hardware

Fig.4 shows the Simulink line tracking program with PID controller, while Fig.5 shows EV3 software line following program with PID controller. Sensors and motors contain blocks that interface with the EV3 hardware. Actual speed values block uses the values from each motor encoder to calculate the position and velocity of the robot. Desired velocity takes the user-provided velocity (m/s) and converts it into the desired state values for the velocity controller. Desired light takes the color sensor's white and black values to choose an appropriate reference value for the light. Velocity control has the PID controller implementation to control the forward velocity. Line tracking controller has the PID controller implementation to control the turning.

However, to download and run a line tracking Simulink model on the Lego Mindstorms EV3 robot, EV3 Wi-Fi Dongle or USB Ethernet Adaptor, and Wi-Fi Router are required to set up a network connection between EV3 brick and host computer.

The line following program is then written in EV3 software programming language. The black and white light intensity values are calibrated accordingly for the robot and the track. Using the provided USB cable, the program is downloaded and run on the robot. PID parameters (K_p , K_i and K_d) tuning is done experimentally to achieve smoother line tracking.

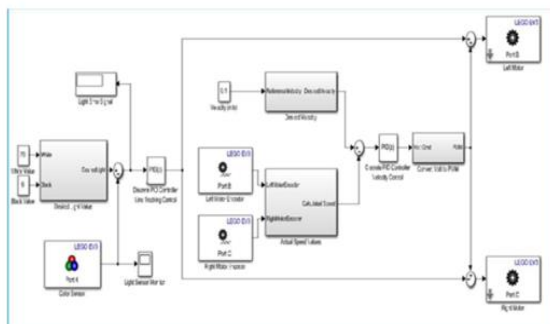


Fig. 4. Simulink line tracking program with PID controller

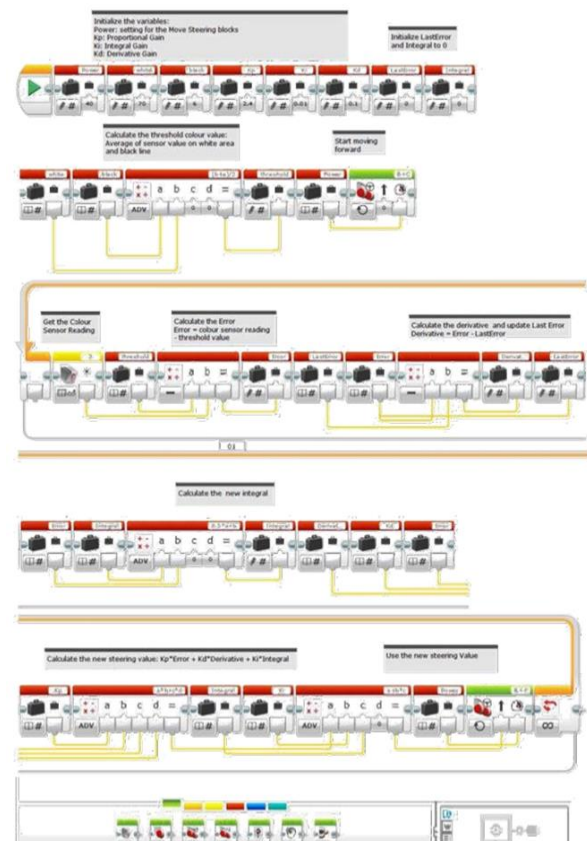


Fig. 5. EV3 Software line following program with PID controller

3 PURPOSE AND TASKS OF STADY

3.1 EV3 large motor characteristics

Table 3 shows the EV3 motor load characteristics, from which the linear relationship between power level and EV3 large motor speed noticeable as shown in Fig.6. Also, from table 3, the rotation speed of the EV3 large motor is proportional to the input voltage.

Table 3

EV3 motor load characteristics

Input Voltage	Torque	Rotation speed	Current	Mechanical power	Electrical power	Efficiency
4.5 V	17.3 N.cm	24 rpm	0.69 A	0.43 W	3.10 W	14 %
6.0 V	17.3 N.cm	51 rpm	0.69 A	0.92 W	4.14 W	22 %
7.5 V	17.3 N.cm	78 rpm	0.69 A	1.41 W	5.17 W	27 %
9.0 V	17.3 N.cm	105 rpm	0.69 A	1.90 W	6.21 W	31 %
10.5 V	17.3 N.cm	132 rpm	0.69 A	2.39 W	7.24 W	33 %
12.0 V	17.3 N.cm	153 rpm	0.69 A	2.77 W	8.28 W	33 %

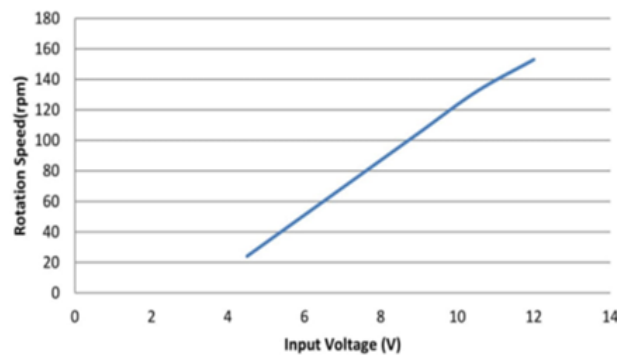


Fig. 6. Graph of rotation speed against applied voltage

3.2 PID parameters tuning

Different values of PID parameters (K_p, K_i, K_d) are chosen in order to get the step response.

1. For $K_p = 1$, $K_i = 0$, $K_d = 0$

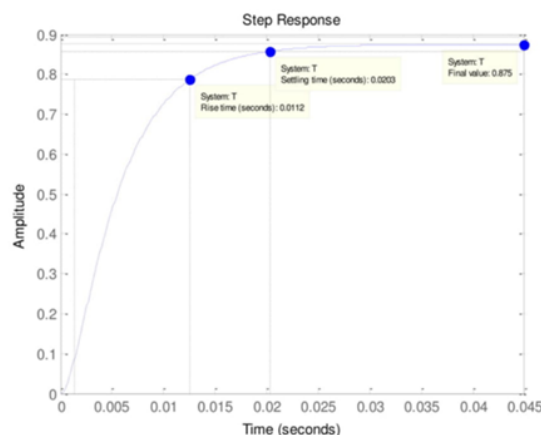


Fig. 7. Step response: $K_p = 1$

Observations:

Rise time = 0.0112 seconds.

Settling time = 0.0203 seconds.

Final value = 0.875.

2. For $K_p = 5$, $K_i = 0$, $K_d = 0$

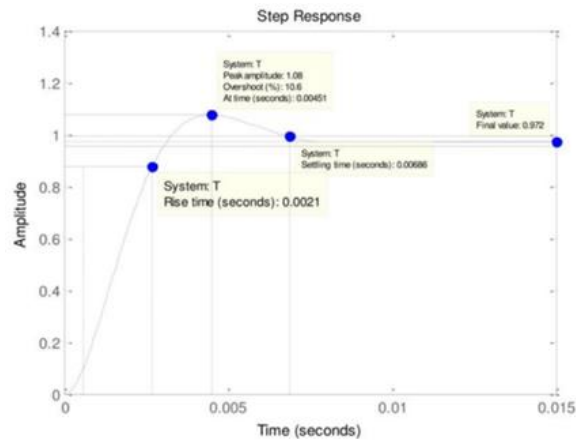


Fig. 8. Step response: $K_p = 5$

Observations:

Rise time = 0.0021 seconds.

Settling time = 0.00686 seconds.

Final value = 0.972.

Overshoot (%) = 10.6.

Peak amplitude = 1.08.

3. For $K_p = 2.4$, $K_i = 0$, $K_d = 0$

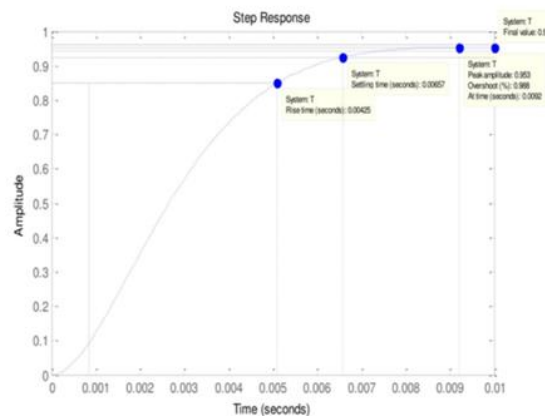


Fig. 9. Step response: $K_p = 2.4$

Observations:

Rise time = 0.00425 seconds.

Settling time = 0.00657.

Final value = 0.94.

Overshoot (%) = 0.988.

Peak amplitude = 0.953.

4. For $K_p = 2.4$, $K_i = 0.01$, $K_d = 0$

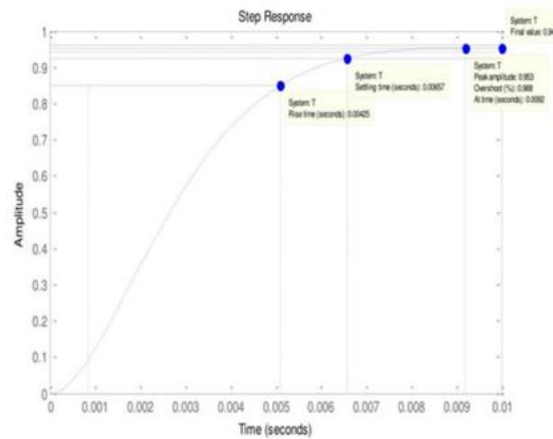


Fig. 10. Step response: $K_p = 2.4$, $K_i = 0.01$, $K_d = 0$

Observations:

Rise time = 0.00425 seconds.
Settling time = 0.00657 seconds.
Final value = 0.944.
Overshoot (%) = 0.988.
Peak amplitude = 0.988.

5. For $K_p = 2.4$, $K_i = 0.01$, $K_d = 0.1$

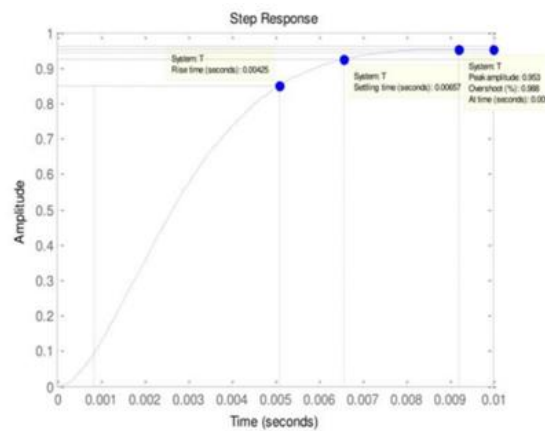


Fig. 11. Step response: $K_p = 2.4$, $K_i = 0.01$, $K_d = 0$

Observations:

Rise time = 0.00425 seconds.
Settling time = 0.00657 seconds.
Final value = 0.944.
Overshoot (%) = 0.988.
Peak amplitude = 0.953.

3.3 Frequency response

Frequency responses are obtained for different values of PID parameters.

1. For $K_p = 5$, $K_i = 0$, $K_d = 0$

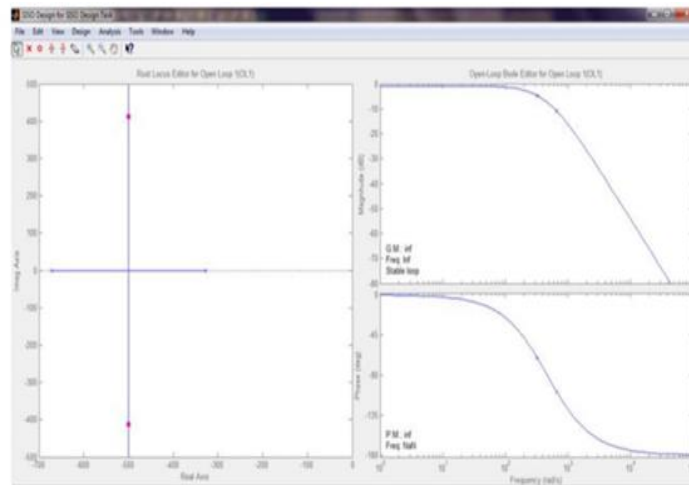


Fig. 12. Various frequency plots for the compensated system during tuning ($K_p = 5$)

Observations:

The root locus exhibited complex closed loop poles.
Both the phase and gain margin are infinite.
The system is stable.

2. For $K_p = 2.4$, $K_i = 0.01$, $K_d = 0.1$

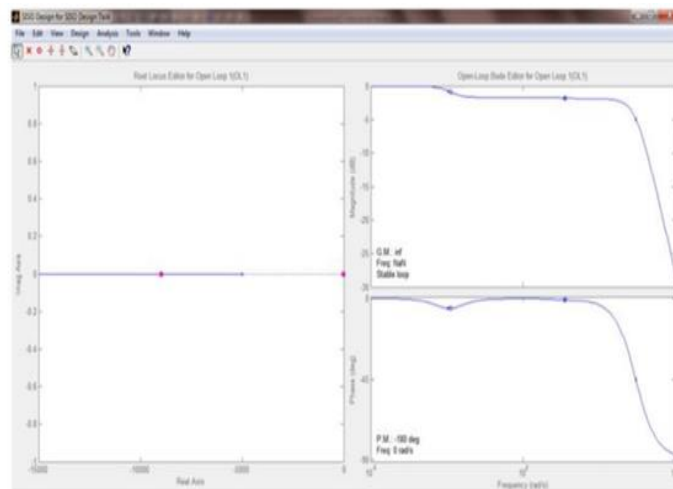


Fig. 13. Various frequency plots for the compensated system ($K_p = 2.4$, $K_i = 0.01$, $K_d = 0.1$)

Observations:

The root locus closed-loop poles changed from complex to real.
The system is still stable.
The infinite gain margin showed inherent stability.

4 BASIC RESULTS

The effects of each of controller parameters, K_p , K_i , and K_d on the line following robot are summarized in the table 4.

Table 4

Effects of increasing PID parameters

Parameter	Rise Time	Overshoot	Settling Time	Steady-state Error
K_p	Decrease	Increase	Small change	Decrease
K_i	Decrease	Increase	Increase	Eliminate
K_d	Small change	Decrease	Increase	No change

The difficulty of tuning increased with the number of parameters that are to be adjusted. To observe the response that resulted from the tuning adjustments, it is necessary to wait for several minutes. This made the tuning by trial-and-error a tedious and time-consuming task.

In practice, the stability of a mathematical model is not sufficient to guarantee acceptable system performance or even to guarantee the stability of the physical system that the model represented. This is because of the approximate nature of mathematical models.

The main problems associated with the implementation of digital control are related to the effects of quantization and sampling. The advantages of digital control outweigh its implementation problems for most of the applications.

5 DISCUSSION OF THE RESULTS OF THE STUDY

The study demonstrates the effectiveness of a simple line-following robot system combining low-cost hardware with a straightforward digital control algorithm. Both experimental and simulation results showed reliable line-tracking performance across various conditions, with calibration of the color sensor and tuning of control parameters proving critical. Minor variations in lighting or surface reflectivity affected sensor readings, but adjusting detection thresholds and proportional gains minimized deviations. MATLAB Simulink simulations provided insight into dynamic behavior, allowing iterative testing of control strategies and reducing physical debugging time.

Differential drive control with a proportional controller was sufficient for stable tracking on moderately curved paths, though sharper curves revealed limitations, suggesting the potential for PID control or sensor fusion improvements. Implementation on the Lego Mindstorms EV3 platform facilitated rapid development, intuitive debugging, and real-time testing, making it suitable for education and prototyping. Overall, the results show that accessible, low-cost systems can achieve robust autonomy and control accuracy, providing a foundation for future work on adaptive navigation, obstacle avoidance, and machine learning-based path optimization.

6 CONCLUSIONS

A line following robot was designed and built using Lego Mindstorms EV3 components. Digital control algorithms were developed. The advantages and limitations of implementing the digital control on different software were studied. The effectiveness of using PID controller for optimum line tracking was demonstrated by inspecting the movement pattern of the robot while following the track. To obtain the desired control response, K_p , K_i , and K_d were successfully determined by tuning.

7 ETHICAL DECLARATIONS

The author has no relevant financial or non-financial interests to report.

References

1. Mutheke, M. (2015). *Digital control of a line following robot*. Graduation Project, University of Nairobi, Kenya.
2. Pathak, A., Pathan, R. K., Tutul, A. U., Tousi, N. T., Rubaba, A. S., & Bithi, N. Y. (2017). Line follower robot for industrial manufacturing process. *International Journal of Engineering Inventions*, 6(10), 10–17. Retrieved from <https://www.ijejournal.com/papers/Vol.6-Iss.10/B0610011017.pdf>
3. Chowdhury, N. H., Khushi, D., & Rashid, M. M. (2017). Algorithm for line follower robots to follow critical paths with minimum number of sensors. *International Journal of Computer*, 24(1), 13–22. Retrieved from <https://ijcjournal.org/InternationalJournalOfComputer/article/view/819>
4. Kumaresan, P., Priya, G., Kavitha, B. R., Ramya, G., & LawanyaShri, M. (2017). Case study: A line following robot for hospital management. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 116(24), 529–537.
5. Attar, A., Ansari, A., Desai, A., Khan, S., & Sonawale, D. (2017). Line follower and obstacle avoidance bot using Arduino. *International Journal of Advanced Computational Engineering and Networking*, 5(4), 18–21.
6. Tayal, S., Rao, H. P. G., Bhardwaj, S., & Aggarwal, H. (2020). Line follower robot: Design and hardware application. In *Proceedings of the 2020 8th International Conference on Reliability, Infocom Technologies and Optimization (ICRITO)* (pp. 1–5). IEEE.
7. Amorim, J. S. J. C. C., Fernandes, J. H. O., Canella, A. L. C., Santos, T. M. B., Lima, J., & Pinto, M. F. (2023). Control tuning approach and digital filter application for competitive line follower robot. In *Proceedings of the 2023 Latin American Robotics Symposium (LARS), 2023 Brazilian Symposium on Robotics (SBR), and 2023 Workshop on Robotics in Education (WRE)* (pp. 1–6). IEEE.
8. Pavón, W., Campaña, J., Santamaria, P., Iza, C., & Zapata, R. (2023). Intelligent control system for line follower robot: From theory to implementation on the mechatronics field. In *Proceedings of the 2023 IEEE International Conference on Dependable, Autonomic and Secure Computing, International Conference on Pervasive Intelligence and Computing, International Conference on Cloud and Big Data Computing, International Conference on Cyber Science and Technology Congress (DASC/PiCom/CBDCom/CyberSciTech)* (pp. 1–6). IEEE.
9. Chekuri, R. R., Shivaram, V., Shravan, K., Sai, T. V., Chinnaiiah, M. C., & Krishna, D. H. (2024). Design and implementation of line follower robot on SoC with SDK. In *Proceedings of the 2024 3rd International Conference for Innovation in Technology (INOCON)* (pp. 1–6). IEEE.
10. Kaiser, M., & Islam, M. (2017). Line follower robot: Fabrication and accuracy measurement by data analysis. *International Journal of Robotics and Automation*, 4(1), 1–10.
11. Baharuddin, M. S., & Abidin, M. Z. (2017). Analysis of line sensor configuration for the advanced line follower robot. *Journal of Robotics and Control*, 3(2), 45–50.

Література

1. Mutheke, M. (2015). *Digital control of a line following robot*. Graduation Project, University of Nairobi, Kenya.
2. Pathak, A., Pathan, R. K., Tutul, A. U., Tousi, N. T., Rubaba, A. S., & Bithi, N. Y. (2017). Line follower robot for industrial manufacturing process. *International Journal of Engineering Inventions*, 6(10), 10–17. Retrieved from <https://www.ijejournal.com/papers/Vol.6-Iss.10/B0610011017.pdf>
3. Chowdhury, N. H., Khushi, D., & Rashid, M. M. (2017). Algorithm for line follower robots to follow critical paths with minimum number of sensors. *International Journal of Computer*, 24(1), 13–22. Retrieved from <https://ijcjournal.org/InternationalJournalOfComputer/article/view/819>
4. Kumaresan, P., Priya, G., Kavitha, B. R., Ramya, G., & LawanyaShri, M. (2017). Case study: A line following robot for hospital management. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 116(24), 529–537.

5. Attar, A., Ansari, A., Desai, A., Khan, S., & Sonawale, D. (2017). Line follower and obstacle avoidance bot using Arduino. *International Journal of Advanced Computational Engineering and Networking*, 5(4), 18–21.
6. Tayal, S., Rao, H. P. G., Bhardwaj, S., & Aggarwal, H. (2020). Line follower robot: Design and hardware application. In *Proceedings of the 2020 8th International Conference on Reliability, Infocom Technologies and Optimization (ICRITO)* (pp. 1–5). IEEE.
7. Amorim, J. S. J. C. C., Fernandes, J. H. O., Canella, A. L. C., Santos, T. M. B., Lima, J., & Pinto, M. F. (2023). Control tuning approach and digital filter application for competitive line follower robot. In *Proceedings of the 2023 Latin American Robotics Symposium (LARS), 2023 Brazilian Symposium on Robotics (SBR), and 2023 Workshop on Robotics in Education (WRE)* (pp. 1–6). IEEE.
8. Pavón, W., Campaña, J., Santamaria, P., Iza, C., & Zapata, R. (2023). Intelligent control system for line follower robot: From theory to implementation on the mechatronics field. In *Proceedings of the 2023 IEEE International Conference on Dependable, Autonomic and Secure Computing, International Conference on Pervasive Intelligence and Computing, International Conference on Cloud and Big Data Computing, International Conference on Cyber Science and Technology Congress (DASC/PiCom/CBDCCom/CyberSciTech)* (pp. 1–6). IEEE.
9. Chekuri, R. R., Shivaram, V., Shravan, K., Sai, T. V., Chinnaiiah, M. C., & Krishna, D. H. (2024). Design and implementation of line follower robot on SoC with SDK. In *Proceedings of the 2024 3rd International Conference for Innovation in Technology (INOCON)* (pp. 1–6). IEEE.
10. Kaiser, M., & Islam, M. (2017). Line follower robot: Fabrication and accuracy measurement by data analysis. *International Journal of Robotics and Automation*, 4(1), 1–10.
11. Baharuddin, M. S., & Abidin, M. Z. (2017). Analysis of line sensor configuration for the advanced line follower robot. *Journal of Robotics and Control*, 3(2), 45–50.

Mhnd Farhan

Baghdad University,
assistant prof.

Ph.D.

Iraq, Baghdad

mhndfarhan@yahoo.com

ORCID: 0009-0007-0541-6995

For references:

M. Farhan (2025). Differentially driven wheeled robot constructed using LEGO mindstorms components. *Mechanics and mathematical methods*. VII (2). 45–57.

Для посилань:

Фархан М.. Диференціально-приводний колісний робот, сконструйований з використанням компонентів LEGO MINDSTORMS. *Механіка та математичні методи*, 2025. Т. VII. № 2. С. 45–57.

[Differentially driven wheeled robot constructed using LEGO mindstorms components.](#) © 2025 by [M. Farhan](#) is licensed under [CC BY 4.0](#)

УДК 666.9.022

МЕХАНОХІМІЧНА АКТИВАЦІЯ ПОРТЛАНДЦЕМЕНТУ З ДОБАВКАМИ ТА ЇХ ВПЛИВ НА МІЦНІСТЬ ЦЕМЕНТНОГО КАМЕНЮ

Кірсанов М. В.¹, Стрельцов К. О.¹, Барабаш І. В.¹

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: Розглянуті у статті експериментальні результати пов'язані з визначенням впливу механохімічної активації змішаного портландцементу в присутності суперпластифікуючої добавки SP-5 на міцність цементного каменю на стиск у віці 3-х та 7-и діб. Такий цемент отримували змішуванням портландцементу ПЦ-I 500 з меленим кварцовим піском ($S = 350 \text{ м}^2 / \text{кг}$) в кількості від 30 до 60 %. Перспективним методом покращення міцності на стиск цементного каменю є інтенсивна механохімічна активація змішаного цементу в швидкісному активаторі турбулентного типу в присутності суперпластифікуючої добавки, кількість якої варіювалася в діапазоні від 0 до 1 % маси змішаного в'язучого.

Експериментальні дослідження проводилися з використанням Д-оптимального математичного плану з варіюванням наступних факторів: X_1 – витрата меленого кварцового піску (45 ± 15) % від маси змішаного в'язучого; X_2 – кількість суперпластифікуючої добавки SP-5 – ($0,5 \pm 0,5$) % від маси змішаного в'язучого. Одержані математичні моделі свідчать про те, що максимальний вплив (із перерахованих факторів) на міцність цементного каменю надає вміст меленого піску у змішаному в'язучому. Наступним за впливом на міцність цементного каменю є витрата суперпластифікатора SP-5. Сумісний вплив механохімічної активації та суперпластифікатора дозволяє підвищити міцність цементного каменю в діапазоні від 23 до 42 %, що дозволяє в значній мірі підвищити діапазон витрати меленого кварцового піску, як мінеральної добавки до цементу.

Ключові слова: механоактивація, портландцемент, суперпластифікатор, мінеральна добавка, міцність на стиск, фактори варіювання.

MECHANOCHEMICAL ACTIVATION OF PORTLAND CEMENT WITH THE ADDITION AND THEIR INFLUENCE ON THE STRENGTH OF CEMENT STONE

M. Kirsanov¹, K. Streltsov¹, I. Barabash¹

¹Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: The experimental results considered in the article are related to determining the influence of mechanochemical activation of mixed Portland cement in the presence of a superplasticizing additive on the compressive strength of cement stone at the age of 3 and 7 days. Such cement was obtained by mixing Portland cement PC-I 500 with ground quartz sand in an amount of 30 to 60%. A promising method for improving the compressive strength of cement stone is intensive mechanochemical activation of mixed cement in a high-speed activator of a turbulent type in the presence of a superplasticizing additive, the amount of which varied in the range from 0 to 1% by weight of the mixed binder.

Experimental studies were conducted using the D-optimal mathematical plan with variations in the following factors: X_1 – consumption of ground quartz sand (45 ± 15) % of the mass of the mixed binder; X_2 – amount of superplasticizer additive SP-5 – ($0,5 \pm 0,5$) % from the mass of the mixed binder. The obtained mathematical models indicate that the maximum influence (of the listed factors) on the strength of cement stone is exerted by the content of ground sand in the mixed binder. The next



in influence on the strength of cement stone is the consumption of superplasticizer *SP* – 5. The combined effect of mechanochemical activation and superplasticizer allows to increase the strength of cement stone in the range from 33 to 42 %, which allows to significantly increase the range of consumption of ground quartz sand as a mineral additive to cement.

Keywords: mechanical activation, Portland cement, superplasticizer, mineral additive, compressive strength, variation factors.

1 ВСТУП

Важливою проблемою в технології виготовлення змішаних цементів є створення оптимальних комбінацій портландцементу з мінеральними добавками, наявність яких надає можливість підвищити потенційні можливості в'язучого. В якості мінеральної добавки до цементів широке розповсюдження одержали кварцові піски, наявність яких у їх складі забезпечує не тільки зниження собівартості змішаного в'язучого, але і надає йому ряд позитивних властивостей (зменшення величини екзотермічного розігріву, зниження усадки та ін.). В статті розглядаються питання, які пов'язані з розглядом впливу механохімічної активації портландцементу, кількості добавки меленого кварцового піску та суперпластифікатору на міцність на стиск цементного каменю. Сумісне використання меленого кварцового піску, суперпластифікатору *SP-5* та механохімічної активації змішаного в'язучого сприяє отриманню цементного каменю з покращеною міцністю на стиск.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Одним з найбільш розповсюджених способів зниження собівартості портландцементу є введення до його складу тонкомелених інертних мінеральних добавок, зокрема, меленого піску [1-5]. Технологічно такий цемент отримують як сумісним помелом портландцементного клінкеру, двоводного гіпсу та мінеральної добавки так і ретельним змішуванням портландцементу з меленою мінеральною добавкою [6-9].

В роботах [10-14] переконливо показано, що ефект від введення в портландцемент мінеральних добавок значно підсилюються в турбулентних потоках, які досягаються в процесі механохімічної активації змішаного цементу. Застосування швидкісних змішувачів для активації цементу в поєднанні з використанням меленого кварцового піску та суперпластифікатору, на наш погляд, забезпечить прискорення процесів тверднення цементу, що дозволить відмовитись як від термовологої обробки так і від використання дефіцитних швидкотверднучих цементів.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Вище викладене зумовило мету досліджень, яка полягає у визначенні впливу механохімічної активації портландцементу з добавкою меленого кварцового піску (30...60 %) та суперпластифікатору *SP-5* (0...1 %) на міцність на стиск цементного каменю у 3-х та 7-и добовому віці.

Активация портландцементу здійснювалася за рахунок інтенсивного впливу на водну цементу та цементно-піщану суміш ($S_{\text{піску}} = 350 \text{ м}^2 / \text{кг}$) у швидкісному змішувачі турбулентного типу впродовж 2-х хвилин. Використання швидкісного змішувача сприяє фізико-хімічній активації поверхневого шару як тонкодисперсних зерен портландцементу так і меленого кварцового піску. Наявність такої активації забезпечує інтенсифікацію процесів гідратації цементу, що віддзеркалюється на зростанні міцності цементного каменю, особливо в ранні терміни твердіння. Турбулентний змішувач характеризується високою швидкістю обертів робочого органу, яка складає 1800 об/хв.

Експериментальні дослідження проводилися з використанням в якості в'язучого портландцементу марки ПЦ-I 500 ПАТ «Волинь Цемент». За своїми властивостями портландцемент відповідає вимогам ДСТУ Б В.2.7-46:2010 «Цементи загальнобудівного призначення. Технічні умови». Цементно-піщане в'язуче



отримували шляхом ретельного змішування портландцементу та меленого кварцового піску, витрата якого коливалася в діапазоні від 30 до 60 % маси змішаного в'язучого. Питома поверхня меленого кварцового піску приймалася рівною $350 \text{ м}^2 / \text{кг}$. Пластифікація суміші здійснювалася за рахунок використання суперпластифікатору SP-5, витрата якого, як відмічалось раніше по тексту, коливається в діапазоні від 0 до 1 % маси змішаного в'язучого.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для визначення сумісного впливу механоактивації, а також добавки до цементу меленого кварцового піску та витрати суперпластифікатору SP-5 на міцність цементного каменю у віці 3-х та 7-и діб, був проведений 2-х факторний експеримент, де в якості незалежних перемінних були прийняті: X_1 – витрата меленого кварцового піску (45 ± 15) % від маси змішаного в'язучого; X_2 – кількість суперпластифікуючої добавки SP-5 – ($0,5 \pm 0,5$) % від маси змішаного в'язучого. Для контролю умовами експерименту передбачалося одержання для всіх рядків математичного плану рівнов'язких сумішей (діаметр розпливу їх на приборі Сутторда складав 120 мм), які не були піддані механохімічній активації, табл. 1.

Таблиця 1

План експерименту та витрати компонентів

№	Рівні варіювання		Витрата компонентів цементного тіста на один заміс, г				В/Т	Розплив цементного тіста, мм	
			Портландцемент, г	Мелений пісок, г	SP-5, г	Вода замішування, г		контроль	Механо- активація
	X_1	X_2							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1	-1	1400	600	0	757	0,38	122	139
2	-1	0	1400	600	10	672	0,34	120	145
3	-1	1	1400	600	20	623	0,31	120	156
4	0	-1	1100	900	0	736	0,37	119	137
5	0	0	1100	900	10	640	0,32	120	141
6	0	1	1100	900	20	582	0,29	118	151
7	1	-1	800	1200	0	720	0,36	120	136
8	1	0	800	1200	10	617	0,31	121	140
9	1	1	800	1200	20	579	0,30	122	148

Аналіз експериментальних даних, наведених у табл. 1, свідчить про те, що механохімічна активація протягом 2-х хвилин цементно-вміщуючої композиції з добавкою меленого кварцового піску (45 ± 15 % від маси змішаного в'язучого) сприяє зростанню діаметру розпливу суміші в середньому на 14...21 %.

Міцність цементного каменю на стиск у 3-х та 7-и добовому віці як на механоактивованому змішаному в'язучому так і на в'язучому, яке не підлягало механоактивації (контроль), наведені у табл. 2.

Таблиця 2

План експерименту та міцність цементного каменю на стиск тривалістю 3-и та 7-м діб

№	Рівні варіювання		Відгуки			
			$R_{cm}^k, \text{МПа}$		$R_{cm}^m, \text{МПа}$	
	X_1	X_2	3 доби	7 діб	3 доби	7 діб
1	2	3	4	5	6	7
1	-1	-1	20,1	32,3	26,4	43,2
2	-1	0	24,2	36,6	33,5	48,2
3	-1	1	26	40,3	36,2	54,3
4	0	-1	15,8	23,4	20,3	32,7
5	0	0	18,5	28,5	24,6	36,9
6	0	1	21	32,1	29,7	42,4
7	1	-1	12,7	21,1	16,4	28,4
8	1	0	15,3	23,6	21,1	32,3
9	1	1	17,1	27,0	23,9	36,1

Примітка: R_{cm}^k – міцність цементного каменю на змішаному в'язучому, яке не підлягало механоактивації, МПа; R_{cm}^m – міцність цементного каменю на механоактивованому змішаному в'язучому, МПа.

Внаслідок статистичної обробки експериментальних даних були отримані математичними моделі (1...4), які з високою вірогідністю ($\geq 0,95$) відображають вплив досліджуваних факторів на міцність на стиск цементного каменю як на звичайному (немеханоактивованому) змішаному в'язучому (1, 2) так і на механоактивованому змішаному в'язучому (3, 4):

$$R_{cm}^{k.3}(\text{МПа}) = 18,8 - 4,2X_1 + 0,8X_1^2 - 0,4X_1X_2 + 2,6X_2 - 0,6X_2^2 \quad (1)$$

$$R_{cm}^{k.7}(\text{МПа}) = 28,3 - 6,3X_1 + 2,2X_1^2 - 0,5X_1X_2 + 3,8X_2 - 0,2X_2^2 \quad (2)$$

$$R_{cm}^{m.3}(\text{МПа}) = 25,7 - 5,8X_1 + 1,4X_1^2 - 0,6X_1X_2 + 4,5X_2 - 0,9X_2^2 \quad (3)$$

$$R_{cm}^{m.7}(\text{МПа}) = 37,1 - 8,2X_1 + 3,1X_1^2 - 0,9X_1X_2 + 4,8X_2 + 0,4X_2^2 \quad (4)$$

де $R_{cm}^{k.3}, R_{cm}^{k.7}$ – міцність на стиск цементного каменю на змішаному в'язучому, яке не підлягало механоактивації, МПа;

$R_{cm}^{m.3}, R_{cm}^{m.7}$ – міцність на стиск цементного каменю на механоактивованому змішаному в'язучому, МПа.

Аналіз математичних моделей (1...4) дозволяє зробити висновок про те, що максимальний вплив на міцність цементного каменю як на механоактивованому змішаному в'язучому так і на змішаному в'язучому, яке не піддавалося механоактивації, надає витрата меленого кварцового піску. Як і передбачалося, зростання його кількості в змішаному в'язучому для цементного каменю тривалістю в 7-м діб з 30 до 60 % (механоактивація відсутня) сприяє зниженню міцності цементного каменю з 32,3 МПа до 20,2 МПа, тобто майже на 63 % (суперпластифікатор відсутній). Для цементного каменю на механоактивованому в'язучому, зростання кількості

меленого піску з 30 до 60 % також викликає зниження міцності цементного каменю, але вже з 43,1 до 26,7 МПа. Слід визначити, що в цьому разі механоактивація сприяє підвищенню міцності цементного каменю з 20,2 МПа (контроль) до 26,7 МПа, тобто більше ніж на 32 %. Сумісне використання механоактивації та 1 % суперпластифікатору забезпечує отримання міцності на стиск цементного каменю тривалістю в 7-м діб становить 38,6 МПа (при наявності 60 % меленого піску у змішаному в'язучому), тобто майже на 20 % більшою у порівнянні з контролем.

Аналізуючи вплив варійованих факторів на міцність цементного каменю слід відзначити, що сумісне застосування механоактивації змішаного в'язучого у сукупності з використанням суперпластикуючої добавки дозволяє в широкому діапазоні керувати міцністю цементного каменю на стиск тривалістю в 3-и та 7-м діб.

Аналіз математичних моделей (1-4) дозволяє визначити значення варійованих факторів X_1 та X_2 , при використанні яких забезпечуються максимальна та мінімальна міцність цементного каменю в досліджуваному інтервалі часу, табл. 3.

Таблиця 3

Значення факторів X_1 та X_2 , які забезпечують досягнення
максимальної та мінімальної міцності цементного каменю

а)

	В'язуче механоактивоване					
	Термін тверднення					
	3 доби		$R_{cm}, \text{МПа}$	7 діб		$R_{cm}, \text{МПа}$
	X_1	X_2		X_1	X_2	
min	+1	-1	16,5	+1	-1	28,5
max	-1	+1	37,1	-1	+1	54,5

б)

	Механоактивація в'язучого відсутня (контроль)					
	Термін тверднення					
	3 доби		$R_{cm}, \text{МПа}$	7 діб		$R_{cm}, \text{МПа}$
	X_1	X_2		X_1	X_2	
min	+1	-1	12,6	+1	-1	20,7
max	-1	+1	26,2	-1	+1	40,9

Аналізуючи вплив варійованих факторів на міцність цементного каменю як на механоактивованому змішаному в'язучому так і на в'язучому, яке не підлягало механоактивації слід відмітити, що за рахунок варіювання факторами впливу (механохімічна активація, витрата меленого кварцового піску та концентрація суперпластифікатору) можливо регулювати міцність цементного каменю на стиск в 3-х добовому віці з 12,6 МПа до 37,1 МПа, а в 7-и добовому віці – від 20,7 МПа до 54,5 МПа.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Одержані експериментальні результати свідчать про те що:

а) механохімічна активація водної цементно-вміщуючої композиції з добавкою меленого кварцового піску (45 ± 15 %) забезпечує зростання діаметру розпливу суміші в середньому на 14...21 % (в порівнянні з контролем);

б) механохімічна активація портландцементу з добавкою меленого кварцового піску (45 ± 15 %) та суперпластифікатору SP-5 (1%) забезпечує зростання міцності

цементного каменю трилістю в 3-и та 7-м діб в середньому на 23...42 % (в порівнянні з контролем).

6 ВИСНОВКИ

Механохімічна активація портландцементу з добавкою меленого кварцового піску (30...60 %) в присутності Суперпластифікатору SP-5 є ефективним рецептурно-технологічним впливом, який забезпечує зростання міцності цементного каменю на стиск в ранньому віці (3...7 діб) в середньому на 23...42 % (в порівнянні з контролем).

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають будь-яких фінансових чи нефінансових інтересів щодо матеріалів, представлених у цій статті, які слід розкривати.

Література

1. Гоц В.І. Бетони і будівельні розчини. Київ: УВПК «ЕксОб». 2003. 468с.
2. Рунова Р.Ф., Гоц В.І., Саницький М.А. та ін. Конструкційні матеріали нового покоління та технології їх впровадження в будівництво. К.:УВПК «ЕксОб». 2008. 360с.
3. Дворкін Л.Й., Дворкін О.Л., Гарніцький Ю.В. Модифіковані золотмісні сухі будівельні суміші для мурувальних та клейових розчинів. НУВГП. Рівне. 2013. 325с.
4. Саницький М.А., Кропивницька Т.П., Гев'юк У.М. Швидкотверднучі клінкер-ефективні цементи та бетони. Монографія. Львів: ТОВ «Простір-М». 2021. 206с.
5. Кондратьєва Н.В. Нанотехнології у виробництві будівельних матеріалів. Будівництво України. № 6. 2012. С.2-9.
6. Саницький М.А., Кропивницька Т.П., Рихліцька О.В., Яніцький О.Б. Швидкотверднучі клінкер-ефективні бетони. Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Зб. наук. праць. Вип. 38. Рівне. 2020. С.258-266.
7. Дворкін Л.Й., Житковський В.В., Марчук В.В. та ін. Ефективні технології бетонів та розчинів із застосуванням техногенної сировини: Монографія. Рівне: НУВГП. 2017. 424с.
8. Саницький М.А., Позняк О.Р., Кіракевич І.І., Топилко Н.І. Сучасні бетони на основі комплексних модифікаторів нової генерації. Будівельні матеріали, виробы та санітарна техніка. 2008. №2(29). С.98-102.
9. Рунова Р.Ф., Косовський Ю.Л. Технологія модифікованих будівельних розчинів. Київ: КНУБА. 2007. 236с.
10. Хайніке Г. Трибохімія. Переклад з нім. 1987. 584с.
11. Барабаш І.В., Пірогов Д.О. Активация цемента и її вплив на структуроутворення цементновміщуючих композицій. Зб. наукових праць «Сучасне будівництво та архітектура». Вип. 6. Одеса, ОДАБА. 2023. С.82-89.
12. Linbo Jiang, Zhi Wang, Xueliang Gao. Effect of nanoparticles and surfactants on properties and microstructures of foam and foamed concrete. Construction and Building Materials. 2024. Vol.411.
13. Barabash I.V., Babiy I.M., Streltsov K.O. Intensive separate technology and its influence on the properties of cement-Water compositions, solutions and concretes on their basis. Modern construction and architecture. Issue № 2. Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture. 2022. P.44-51.
14. Вировой В.М. та ін. Механоактивация в технологии бетонів. ОДАБА. 2014. 148с.

References

1. Гоц, В. І. (2003). *Бетони і будівельні розчини*. Київ: УВПК «ЕксОб».
2. Рунова, Р. Ф., Гоц, В. І., Саницький, М. А., та ін. (2008). *Конструкційні матеріали нового покоління та технології їх впровадження в будівництво*. Київ: УВПК «ЕксОб».

3. Дворкін, Л. Й., Дворкін, О. Л., & Гарніцький, Ю. В. (2013). *Модифіковані золоті сухі будівельні суміші для мурувальних та клейових розчинів*. Рівне: НУВГП.
4. Саницький, М. А., Кропивницька, Т. П., & Гев'юк, У. М. (2021). *Швидкотверднучі клінкер-ефективні цементні та бетони* [Монографія]. Львів: ТОВ «Простір-М».
5. Кондратьєва, Н. В. (2012). Нанотехнології у виробництві будівельних матеріалів. *Будівництво України*, № 6, 2–9.
6. Саницький, М. А., Кропивницька, Т. П., Рихліцька, О. В., & Яніцький, О. Б. (2020). Швидкотверднучі клінкер-ефективні бетони. *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Зб. наук. праць*, Вип. 38, 258–266.
7. Дворкін, Л. Й., Житковський, В. В., Марчук, В. В., та ін. (2017). *Ефективні технології бетонів та розчинів із застосуванням техногенної сировини* [Монографія]. Рівне: НУВГП.
8. Саницький, М. А., Позняк, О. Р., Кіракевич, І. І., & Топилко, Н. І. (2008). Сучасні бетони на основі комплексних модифікаторів нової генерації. *Будівельні матеріали, виробництво та санітарна техніка*, №2(29), 98–102.
9. Рунова, Р. Ф., & Косовський, Ю. Л. (2007). *Технологія модифікованих будівельних розчинів*. Київ: КНУБА.
10. Хайніке, Г. (1987). *Трибохімія* [Переклад з нім.].
11. Барабаш, І. В., & Пірогов, Д. О. (2023). Активізація цементу і її вплив на структуроутворення цементновміщуючих композицій. *Сучасне будівництво та архітектура*, Вип. 6, 82–89.
12. Jiang, L., Wang, Z., & Gao, X. (2024). Effect of nanoparticles and surfactants on properties and microstructures of foam and foamed concrete. *Construction and Building Materials*, 411, Article 125678. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2023.125678>
13. Barabash, I. V., Babiy, I. M., & Streltsov, K. O. (2022). Intensive separate technology and its influence on the properties of cement-water compositions, solutions and concretes on their basis. *Modern Construction and Architecture*, Issue 2, 44–51.
14. Вировой, В. М., та ін. (2014). *Механоактивація в технології бетонів*. Одеса: ОДАБА.

Кірсанов Микола Володимирович

Одеська державна академія будівництва та архітектури,
аспірант
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029
niki.reserve@gmail.com
ORCID: 0009-0009-2377-159X

Стрельцов Костянтин Олександрович

Одеська державна академія будівництва та архітектури
к.т.н., доцент,
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029
0989051837@ukr.net
ORCID: 0000-0002-5463-7395

Барабаш Іван Васильович

Одеська державна академія будівництва та архітектури,
д.т.н., професор,
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029
dekansti@ukr.net
ORCID: 0000-0003-0241-4728

Для посилань:

Кірсанов М. В., Стрельцов К. О., Барабаш І. В. Механохімічна активація портландцементу з добавками та їх вплив на міцність цементного каменю. *Механіка та математичні методи*, 2025. Т. VII. № 2. С. 58–65.

For references:

M. Kirsanov, K. Streltsov, I. Barabash (2025). Mechanochemical activation of portland cement with the addition of ground quartz sand and superplasticizer SP-5 and their influence on the strength of cement stone. *Mechanics and Mathematical Methods*. VII (2). 58–65.

Механохімічна активація портландцементу з добавками та їх вплив на міцність цементного каменю. © 2025 by Кірсанов М. В., Стрельцов К. О., Барабаш І. В. is licensed under CC BY 4.0

UDC 614.841

IMPROVED THERMOMECHANICAL MODEL FOR PREDICTING THE BEHAVIOUR OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES UNDER FIRE AND EXPLOSION CONDITIONS

R. Maiboroda¹, Y. Otrosh¹

¹National University of Civil Protection of Ukraine

Abstract: The article presents the results of a study aimed at improving the thermomechanical model for predicting the behaviour of monolithic reinforced concrete structures when exposed to elevated fire temperatures and overpressure from a deflagration explosion. The relevance of the topic is due to the growing requirements for the reliability of modern buildings, especially critical infrastructure facilities, where the combination of thermal and dynamic loads creates particularly dangerous operating conditions. The model is implemented using the finite element method, which makes it possible to comprehensively take into account transient heat transfer, temperature-dependent material properties, and impulsive loads from explosions, described in the form of triangular and exponential functions. The dynamic behaviour of reinforced concrete structures is represented by the equation of motion, considering temperature-dependent stiffness, Rayleigh damping, and thermal deformations of both concrete and reinforcement.

A comparative analysis of code-specified material properties and the results of full-scale tests was carried out. Significant differences were found in the curves describing the reduction in strength and initial modulus of elasticity when concrete is heated, as well as in the strength values of reinforcement of different grades. Based on experimental data, analytical and polynomial relationships were proposed that reproduce the actual behaviour of heavy concrete and lightweight expanded clay aggregate concrete at elevated temperatures, along with formulas for determining reduction factors for reinforcement strength. This ensures a significant improvement in the accuracy of predictions of the load-bearing capacity and deformability of reinforced concrete structures. The model can be used as a tool in methodologies for assessing the robustness of monolithic reinforced concrete buildings against progressive collapse caused by fire and explosion. At the same time, the limitations of the model are outlined: it does not take into account crack formation, creep, or the spatial effects of blast wave propagation. Directions for further research are identified, aimed at expanding the practical applicability of the model and improving methods for assessing the structural stability of buildings.

Keywords: monolithic reinforced concrete buildings; fire; deflagration explosion; finite element method; temperature-dependent properties; reinforcement resistance reduction coefficients, progressive collapse.

УДОСКОНАЛЕНА ТЕРМОМЕХАНІЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ ПОВЕДІНКИ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КОНСТРУКЦІЙ В УМОВАХ ПОЖЕЖІ ТА ВИБУХУ

Майборода Р. І.¹, Отрош Ю. А.¹

¹Національний університет цивільного захисту України

Анотація: У статті представлено результати дослідження, спрямованого на удосконалення термомеханічної моделі для прогнозування поведінки монолітних залізобетонних конструкцій за умов дії підвищених температур пожежі та надлишкового тиску від дефлаграційного вибуху. Актуальність теми зумовлена зростанням вимог до надійності сучасних будівель, особливо об'єктів критичної інфраструктури, де поєднання теплових і динамічних навантажень створює особливо небезпечні умови експлуатації. Модель реалізовано із застосуванням методу скінченних елементів, що дозволяє комплексно враховувати нестационарний теплообмін, температурно-залежні характеристики матеріалів та імпульсні навантаження від вибухів,



описані у вигляді трикутних і експоненційних функцій. Динамічна поведінка залізобетонних конструкцій подається рівнянням руху з урахуванням температурно-залежної жорсткості, демпфування за Релеєм та термічних деформацій як бетону, так і арматури.

Проведено порівняльний аналіз нормативних характеристик матеріалів та результатів натурних випробувань. Виявлено істотні розбіжності у кривих, що описують зниження міцності та початкового модуля пружності бетону при нагріванні, а також у значеннях міцності арматури різних класів. На основі експериментальних даних запропоновано аналітичні та поліноміальні залежності, які відтворюють фактичну поведінку важкого бетону та бетону на легкому заповнювачі (керамзитобетону) за підвищених температур, а також формули для визначення коефіцієнтів зниження міцності арматури. Це забезпечує суттєве підвищення точності прогнозування несучої здатності та деформативності залізобетонних конструкцій. Розроблена модель може використовуватися як інструмент у методиках оцінювання живучості монолітних залізобетонних будівель щодо прогресуючого руйнування, спричиненого пожежею та вибухом. Водночас окреслено обмеження моделі: не враховується утворення тріщин, повзучість та просторові ефекти поширення вибухової хвилі. Визначено напрями подальших досліджень, орієнтованих на розширення практичної застосовності моделі та вдосконалення методів оцінювання конструктивної стійкості будівель.

Ключові слова: монолітні залізобетонні будівлі; пожежа; дефлаграційний вибух; метод скінченних елементів; температурно-залежні характеристики; коефіцієнти зниження міцності арматури; прогресуюче руйнування.

1 INTRODUCTION

Modern monolithic reinforced concrete buildings are widely used in civil and industrial construction due to their high operational properties, versatility, and cost-effectiveness. However, in emergency situations such as fires and explosions, these structures are subjected to significant thermal and dynamic effects, which reduce their load-bearing capacity and deformability and may lead to progressive collapse. Ensuring an adequate level of reliability and robustness of building structures under such conditions is one of the key challenges of modern construction.

Existing design codes [1, 2] provide relationships for accounting for the influence of elevated temperatures on the strength and deformability of concrete and reinforcement. However, the results of full-scale tests show significant discrepancies between the code-specified curves and the actual behaviour of materials, which may reduce the accuracy of predicting the performance of structures under high-temperature and explosive loading. As a result, there is a need to improve analytical models that incorporate the changes in thermophysical and strength properties of materials obtained from experimental tests, as well as the dynamic character of explosive loading.

One promising approach is the application of thermomechanical models within the finite element method framework. Such models enable a comprehensive account of heat transfer processes, temperature-dependent material properties, thermal expansion effects, and the dynamic nature of loads. Enhancing these models provides a basis for improving the accuracy of evaluating the structural stability of reinforced concrete structures and reducing the risk of progressive collapse.

2 ANALYSIS OF LITERARY DATA AND RESOLVING THE PROBLEM

Monolithic reinforced concrete structures are widely used in civil and industrial construction due to their combination of high strength, durability, constructability, and cost-effectiveness. They are employed in the construction of buildings and facilities of various types, ranging from residential complexes to critical infrastructure. However, evidence from accidents and disasters indicates that even such structures remain vulnerable when exposed to extreme factors. The most hazardous among these are fires and explosions, which can cause a significant reduction in load-bearing capacity, loss of stability, and, in critical cases, structural progressive collapse [1–3].

The effect of high temperatures on concrete and reinforcement has been the subject of extensive research over many years. Scientific works by Khoury G. A. [1], Lie T. T. [2], Milovanov A. F. [3], and others present experimental relationships that describe changes in the strength, modulus of elasticity, and deformability of materials under heating. In most countries, design practice relies on the provisions of standards EN 1992–1–1, EN 1992–1–2, and the national standard DBN V.2.6-98, which provide generalized curves for considering the influence of temperature on the properties of concrete and reinforcement. However, numerous experimental studies demonstrate that the actual behaviour of materials differs significantly from these normative relationships. This discrepancy is explained by variations in concrete composition, type of aggregates, moisture content, curing conditions, and service environment [1–4]. As a result, calculations based solely on normative curves may not always ensure sufficient accuracy in predicting the behaviour of structures exposed to fire.

The issue of blast resistance of structures is also actively studied in the international literature. Numerous works are devoted to modelling the impact of shock waves on building systems, determining explosion pressure, its duration, and the consequences for load-bearing elements. However, most of these studies focus on the isolated analysis of explosive loads without considering the prior heating of structures. At the same time, practical experience from real accidents indicates that fire and explosion often occur in combination (for example,

at industrial and energy facilities), creating particularly hazardous operating conditions [4–6]. Special attention in recent research has been paid to the phenomenon of progressive collapse, in which the local failure of a single element triggers a cascade of failures throughout the entire structural system. The works of Otrosh Y. and Maiboroda R. [4–6] have demonstrated that, in order to prevent this phenomenon, there is a need for models capable of adequately capturing the combined effects of elevated temperatures and dynamic loads.

One promising approach is the use of thermomechanical models within the finite element method. Such models allow for comprehensive consideration of non-stationary heat transfer, temperature-dependent material properties, thermal expansion effects, and impulse explosive loads. However, most existing solutions are simplified and do not fully incorporate experimental data, which limits the accuracy of the assessment of structural stability. In addition, integrated models that simultaneously reproduce the combined effects of fire and explosion remain insufficiently investigated, and the available results require systematization and verification.

Thus, the analysis of the literature confirms the relevance of improving the accuracy of predicting the stability of reinforced concrete structures under combined fire and explosion effects. The research problem consists in developing an improved thermomechanical model based on the results of field tests and regulatory provisions, which would reduce uncertainty in predictions and thereby enhance the reliability and safety of modern building structures.

3 PURPOSE AND TASKS OF THE STUDY

The aim of the study is to develop and substantiate an improved thermomechanical model for predicting the behaviour of reinforced concrete structures under fire and explosion conditions, taking into account experimental data and design code provisions.

To achieve this aim, the following research tasks have been defined:

1. Identify and describe the components of a mathematical model of the fire resistance of building structures. Compare the characteristics of concrete and reinforcement at elevated temperatures with code-specified curves and the results of full-scale tests.

2. Propose analytical relationships to describe the reduction in strength and initial modulus of elasticity of concrete, as well as reduction factors for the strength of reinforcement of different grades at elevated temperatures.

3. Develop an improved thermomechanical model within the finite element method framework, taking into account heat transfer, thermal expansion of materials, and the dynamic nature of explosive loading.

4 BASIC RESULTS

To assess the stability of monolithic reinforced concrete buildings as a result of fire and deflagration explosion, a mathematical model has been improved, which allows calculations to be performed for the structural system of the entire building, taking into account contact heat exchange between structures and dynamic loads from the explosion.

Thermal effects.

Thermal effects are expressed as absorbed heat flux $\dot{h}_{net}$ Wt/m^2 on the surface of the structure, in accordance with clause 3.1 of EN 1991–1–2. On the heated surface, the absorbed heat flux $\dot{h}_{net}$ must be determined taking into account convective and radiative heat transfer

$$\dot{h}_{net} = \dot{h}_{net,c} + \dot{h}_{net,r}, \quad (1)$$

where: $\dot{h}_{net,c}$ – convective component of absorbed heat flux, Wt/m^2 ; $\dot{h}_{net,r}$ – radiative component of absorbed heat flux, Wt/m^2 .

The convective component of absorbed heat flux is determined by the formula:

$$\dot{h}_{net,c} = \alpha_c (\Theta_g - \Theta_m), \quad (2)$$

where α_c – convective heat transfer coefficient, Wt/m^2 ; Θ_g – temperature of the gas environment adjacent to the structure exposed to fire, °C; Θ_m – of the structure surface, °C.

The absorbed heat flux $\dot{h}_{net}$ on the non-heated surface of structures should be determined using formula (2), where $\alpha_c = 4Wt/m^2$. The convective heat transfer coefficient $\alpha_c = 9Wt/m^2$ provided that the effects of radiative heat transfer are taken into account.

The radiation component of the absorbed heat flux per unit of surface area is determined by the formula

$$\dot{h}_{net,r} = \Phi \varepsilon_m \varepsilon_f \sigma [(\Theta_r + 273)^4 - (\Theta_m + 273)^4], \quad (3)$$

where Φ – angular coefficient; ε_m – degree of blackness of the structure surface; ε_f – emissivity of the flame; σ – Stefan-Boltzmann constant ($5,67 \cdot 10^{-8} Wt/m^2 K^{-4}$); Θ_r – effective radiation temperature of the fire environment, °C; the emissivity of fire is usually taken as $\varepsilon_f = 1,0$.

In cases where structures are exposed to fire on all sides, the radiation temperature Θ_r can be represented by the temperature of the gas environment Θ_g around the structure. The surface temperature Θ_m is determined by the thermal calculation of the structure in accordance with Part 1-2 in the fire resistance calculation of EN 1992, EN 1996 and EN 1999, respectively. The temperature of the gas environments Θ_g can be taken as the nominal temperature conditions in accordance with clause 3.2 of EN 1991–1–2 or in accordance with the fire models given in clause 3.3 of EN 1991–1–2.

Thermal characteristics of concrete.

When calculating the fire resistance of reinforced concrete structures, a distinction is made between concretes based on silicate (granite, syenite, diorite) and limestone (limestone containing at least 80% of the weight of the concrete limestone component) aggregates. The nature of the change in the specific heat capacity of concrete $c_p(\theta)$, $kJ/(kgK)$ is shown in Figure 1.

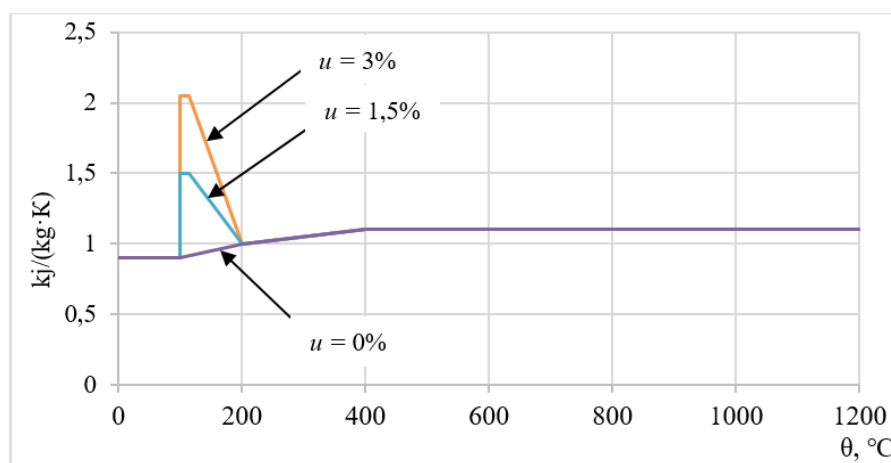


Fig. 1. Dependence of the specific heat capacity $c_p(\theta)$ of concrete on silicate aggregate with moisture content $u = 0; 1.5$ and 3% on temperature

The thermal conductivity of concrete λ_c is determined within the range between the lower and upper limit values (Figure 2). The thermal conductivity value can be set within the range defined by the lower and upper limits.

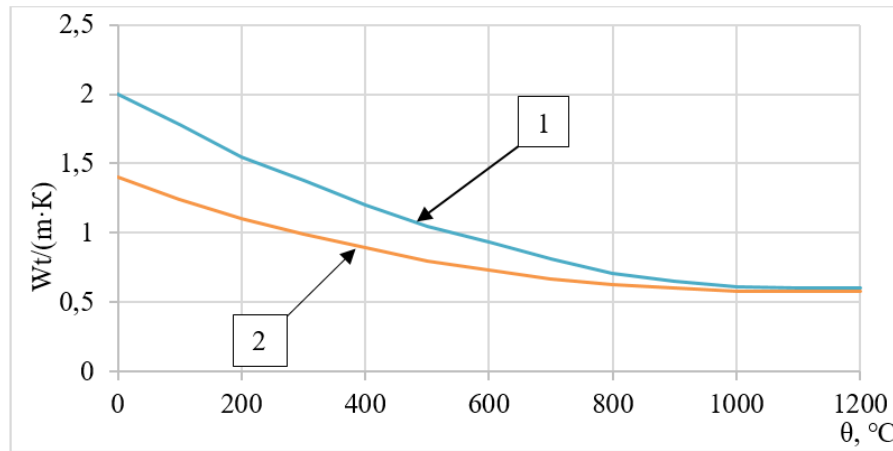


Fig. 2. Dependence of concrete thermal conductivity λ_c on temperature: 1 – upper limit; 2 – lower limit

In general, when the model parameters depend on temperature and radiation occurs, equation (4) is non-stationary and non-linear. It is solved using the finite element method.

Nominal temperature conditions.

The standard temperature regime is the nominal temperature regime defined in Eurocode 1 to represent a fully developed fire in a fire compartment. It is determined by the formula:

$$\Theta_g = 20 + 345 \lg(8t + 1). \quad (4)$$

The convective heat transfer coefficient is $\alpha_c = 25Wt / m^2$.

The temperature regime of an external fire is the nominal temperature regime designed for the external surface of external enclosing walls that may be exposed to fire from different parts of the facade, i.e. directly from inside the corresponding fire compartment or compartment located below or adjacent to the corresponding external wall. It is determined by the formula:

$$\Theta_g = 660(1 - 0,687e^{-0,32t} - 0,313e^{-3,8t}) + 20. \quad (5)$$

The convective heat transfer coefficient is $\alpha_c = 25Wt / m^2$.

The hydrocarbon temperature regime is the nominal temperature regime that shows the effects of a hydrocarbon fire. It is determined by the formula:

$$\Theta_g = 1080(1 - 0,325e^{(-0,167t)} - 0,675e^{-2,5t}) + 20. \quad (6)$$

The convective heat transfer coefficient is: $\alpha_c = 50Wt / m^2$.

The calculation of reinforced concrete and steel-reinforced concrete structures consists of two stages.

The first stage begins with determining the load-bearing capacity at a normal temperature of 20 °C, i.e. using Eurocode 2 EN 1992–1-1:2010 or DBN V.2.6–98:2009. These standards propose using equations to describe the relationship between σ_c i ϵ_c for short-term axial loading. Equation (7), which is used in Eurocode 2 EN 1992–1-1:2010

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta}, \quad (7)$$

where $\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$ – ratio of deformations in compressed concrete; ε_{c1} – deformations at maximum stresses, according to the table $k = \frac{1,05E_{cm}|\varepsilon_{c1}|}{f_{cm}}$ – coefficient according to DBN V.2.6-98:2009; E_{cm} – modulus of elasticity, according to Table 3.1; f_{cm} – maximum stresses, according to the table 3.1.

Equation (7) and equation (8) in the form of a fifth-degree polynomial are based on the results of numerous experimental studies conducted by the Scientific Research Institute of Building Structures, the statistical processing of which made it possible to propose a more complete regulatory framework.

$$\sigma_c = f_{(ck),(cd)} \sum_{k=1}^5 a_k \eta^k. \quad (8)$$

Both formulas have defined limits of use

$$0 < \varepsilon_c \leq |\varepsilon_{cu1}|, \quad (9)$$

where ε_{cu1} – nominal limit deformations of concrete.

Work [7] shows that the upward branches of the graphs according to DBN and EN 1992–1–1 practically coincide. Both normative documents provide concrete classes, values of relative concrete compression deformation ε_{c1} at maximum stresses f_{cm} , nominal concrete deformation limits ε_{cu1} (values of relative concrete compression deformation limits) and the average value of the initial concrete elastic modulus E_{cm} (GPa). The data given in Tables 3.1 and 3.2 are sufficient for calculating reinforced concrete structures at a temperature of 20 °C. In this case, the concrete strength classes, concrete compression deformation ε_{c1} at maximum stresses f_{cm} , nominal concrete deformation limits ε_{cu1} , average value of the initial modulus of elasticity of concrete E_{cm} average value of the initial modulus of elasticity of concrete.

The stress-strain relationship takes the form

$$\sigma_{c,\theta=20} = f_{cm,\theta=20} \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta}, \quad (10)$$

where:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c \div \varepsilon_{c1,\theta=20} &= \varepsilon_c \div 0,0021; k_{\theta=20} = 1,05E_{cm,\theta=20} |\varepsilon_{c1,\theta=20}| \div f_{cm,\theta=20} = \\ &= 1,05 \cdot 31000 \cdot 0,0021 \div 30 = 2,2785 \text{ МПа}; \\ \sigma_{cm,\theta=20} &= 30 \left(2278,5 \cdot \varepsilon_c / 0,0021 - (\varepsilon_c \div 0,0021)^2 \right) \div (1 + (2,2785 - 2) / (\varepsilon_c \div 0,0021)). \end{aligned}$$

When calculating structures under high-temperature influences, it is necessary to take into account the temperature regime of the fire and its duration. The load-bearing capacity and deformability of building structures exposed to fire are influenced by the physical and mechanical properties of the construction material, which change depending on the heating temperature. In particular, these properties are determined by the strength limit and elastic modulus of the material from which the structures are made. The dependence of the change in strength characteristics was obtained using the least squares method for prismatic strength and has the following mathematical expression [8, 9].

The formulas obtained using the least squares method for the calculated strength value are 5th degree polynomials [10]:

– for expanded clay concrete in the range from 60 °C to 700 °C;

$$\alpha_{\theta} = \frac{f_{cd,\theta}}{f_{cd}} = 4,519 \cdot 10^{-30} \theta^5 - 1,299 \cdot 10^{-25} \theta^4 + 1,652 \cdot 10^{-22} \theta^3 - 2,555 \cdot 10^{-6} \theta^2 + 1,020 \cdot 10^3 \theta + 0,98, \quad (11)$$

– for heavy concrete in the range from 60 °C to 700 °C;

$$\alpha_{\theta} = \frac{f_{cd,\theta}}{f_{cd}} = 4,303 \cdot 10^{-28} \theta^5 - 7,555 \cdot 10^{-25} \theta^4 + 4,863 \cdot 10^{-22} \theta^3 - 3,608 \cdot 10^{-6} \theta^2 + 2,320 \cdot 10^3 \theta + 0,6184. \quad (12)$$

To assess the impact of high temperatures, the relationships given in design codes, in particular in standard EN 1992–1–2, which are generally accepted in modern structural design, are widely used in engineering practice. However, the use of code-specified values alone does not always provide the required level of accuracy, since the actual behaviour of materials may differ significantly from the standardised relationships due to various technological and structural factors. In this regard, it becomes particularly important to compare the theoretical curves obtained according to the standard with the results of full-scale tests, which makes it possible to identify general patterns of strength reduction, clarify the nature of changes in material properties, and objectively evaluate the adequacy of the adopted calculations.

Figure 3 presents comparative plots of the relative strength of lightweight expanded clay concrete and heavy concrete according to EN 1992-1-2 and the results of experimental studies.

Table 1 summarises the numerical values of strength changes for the specified materials in the range from 20 °C to 1200 °C, which makes it possible not only to perform a quantitative analysis of the differences between the calculated and experimental results but also to observe the discrepancies at different stages of temperature exposure.

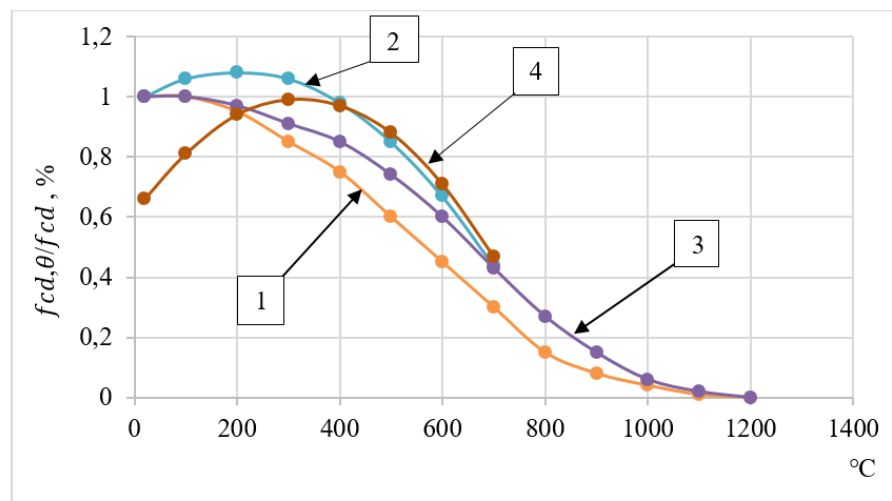


Fig. 3. Comparative graph showing the decrease in concrete strength with increasing temperature:

1) expanded clay concrete according to EN 1992-1-2; 2) expanded clay concrete according to the results of field tests; 3) heavy concrete according to EN 1992-1-2; 4) heavy concrete according to the results of field tests.

Table 1
Comparative table showing the decrease in concrete strength with increasing temperature

temperature of concrete °C	$\alpha_{\theta} = \frac{f_{cd,\theta}}{f_{cd}}$					
	Expanded clay concrete (silicate)		Difference	Heavy concrete (carbonate)		Difference
	EN 1992-1-2	Testing		EN 1992-1-2	Testing	
20	1,0	1,0	0,0	1,0	0,66	-0,34
100	1,0	1,06	0,06	1,0	0,81	-0,19
200	0,95	1,08	0,13	0,97	0,94	0,03
300	0,85	1,06	0,21	0,91	0,99	-0,08
400	0,75	0,98	0,22	0,85	0,97	-0,12
500	0,60	0,85	0,25	0,74	0,88	-0,14
600	0,45	0,67	0,22	0,60	0,71	-0,11
700	0,30	0,44	0,14	0,43	0,47	0,04
800	0,15	-	-	0,27	-	-
900	0,08	-	-	0,15	-	-
1000	0,04	-	-	0,06	-	-
1100	0,01	-	-	0,02	-	-
1200	0,00	-	-	0,00	-	-

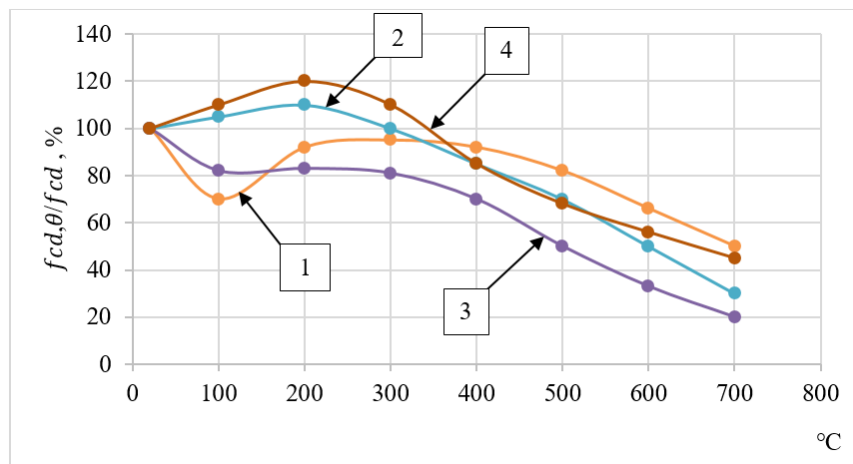


Fig. 4. The effect of high temperatures on the calculated compressive strength of concrete: 1) ordinary heavy concrete; 2) expanded clay concrete; 3) high-strength concrete; 4) expanded clay-perlite concrete

Table 2
Decrease in concrete compressive strength with increasing temperature

temperature (°C)	Regular heavy concrete	Expanded clay concrete	High-strength concrete	Expanded clay aggregate concrete
1	2	3	4	5
20	100	100	100	100
100	70	105	82	110
200	92	110	83	120
300	95	100	81	110
400	92	85	70	85
500	82	70	50	68
600	66	50	33	56
700	50	30	20	45

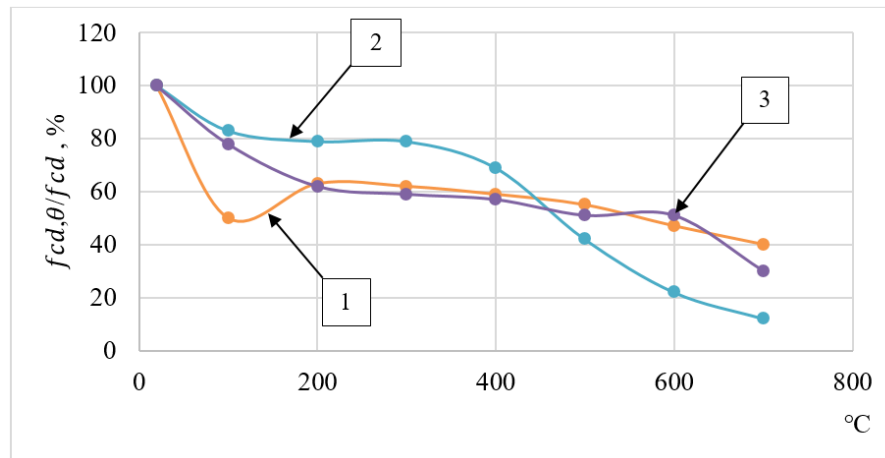


Fig. 5. The effect of high temperatures on the calculated tensile strength of concrete:
1) heavy concrete; 2) high-strength concrete; 3) expanded clay-perlite concrete

Table 3

Decrease in concrete tensile strength with increasing temperature

temperature (°C)	Heavy concrete	High-strength concrete	Expanded clay aggregate concrete
20	100	100	100
100	50	83	78
200	63	79	62
300	62	79	59
400	59	69	57
500	55	42	51
600	47	22	51
700	40	12	30

An increase in the heating temperature of the material contributes to a decrease in its initial elastic modulus [11]. A general view of the change in the elastic modulus of concrete with temperature is shown in Figure 6.

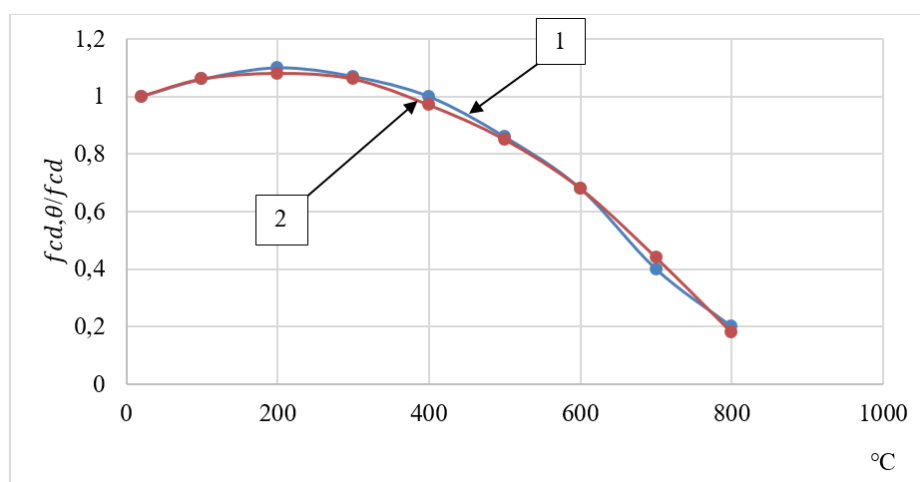


Fig. 6. Dependency graphs " $f_{cd, \theta} / f_{cd} - \theta$ " for expanded clay concrete: 1) normative; 2) experimental

Table 4
The significance of the dependence of the initial modulus
of elasticity $f_{cd,\theta} / f_{cd} - \theta$ for expanded clay
concrete at elevated temperatures

temperature, °C	Normative	Experimental
20	1	1
100	1,06	1,06
200	1,1	1,08
300	1,07	1,06
400	1	0,97
500	0,86	0,85
600	0,68	0,68
700	0,4	0,44
800	0,2	0,18

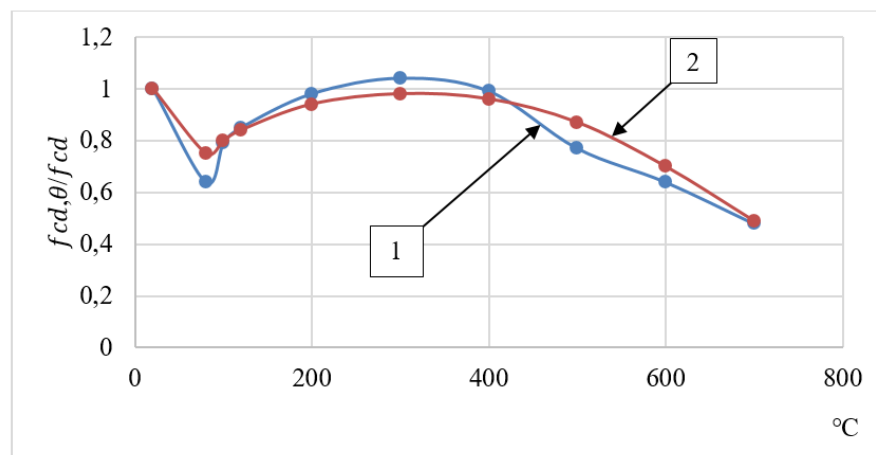


Fig. 7. Graphs showing the dependence of the initial modulus of elasticity $f_{cd,\theta} / f_{cd} - \theta$ on temperature for heavy concrete: 1) normative; 2) experimental

Table 5
The significance of the dependence of the initial modulus
of elasticity $f_{cd,\theta} / f_{cd} - \theta$ for heavy concrete

temperature, °C	Normative	Experimental
20	1	1
80	0,64	0,75
100	0,79	0,8
120	0,85	0,84
200	0,98	0,94
300	1,04	0,98
400	0,99	0,96
500	0,77	0,87
600	0,64	0,7
700	0,48	0,49

The dependence of the initial modulus of elasticity of concrete on temperature can be obtained by analogy with the dependencies for concrete strength using the least squares method.

The formulas obtained using the least squares method for the initial modulus of elasticity are as follows [8, 9]:

– for expanded clay concrete in the range from 120 °C to 800 °C

$$\beta_{\theta} = \frac{E_{cm,\theta}}{E_{cm}} = 0,00367 \left(\frac{\theta}{100} - 16,47 \right)^2 + 0,022, \quad (12)$$

– for heavy concrete in the range from 120 °C to 800 °C

$$\beta_{\theta} = \frac{E_{cm,\theta}}{E_{cm}} = 1,2 - \frac{\theta}{100} \left(0,14 + 0,0012 \frac{\theta}{100} \right). \quad (13)$$

The graphs of the dependence of the initial modulus of elasticity of concrete $E_{cm,\theta} / E_{cm} - \theta$ for expanded clay concrete and heavy concrete, which are constructed according to formulas (12) and (13), are shown in Figures 9 and 10, respectively. Curves 1 are constructed based on data from [7]; theoretical curves 2 are constructed according to formula (12) for expanded clay concrete and formula (13) for heavy concrete.

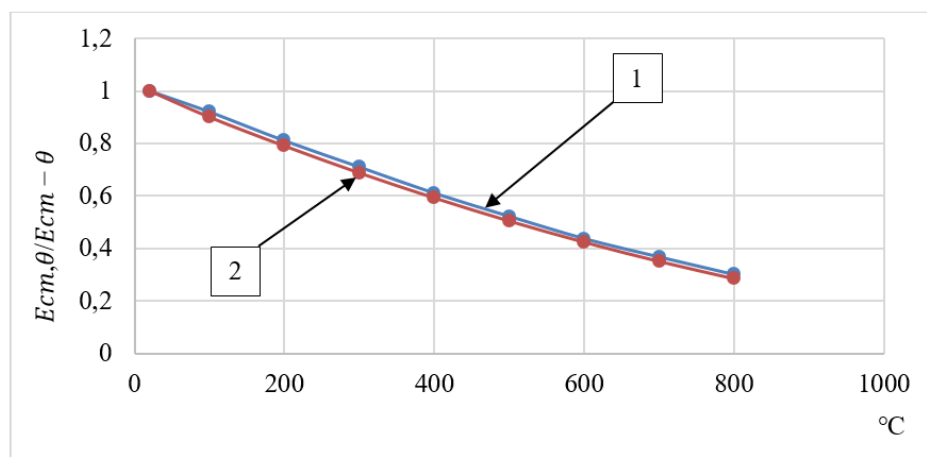


Fig. 8. Graphs showing the dependence of the initial modulus of elasticity $E_{cm, \theta} / E_{cm} - \theta$ on temperature for expanded clay concrete: 1) according to data from A.F. Milovanov; 2) according to formula 12

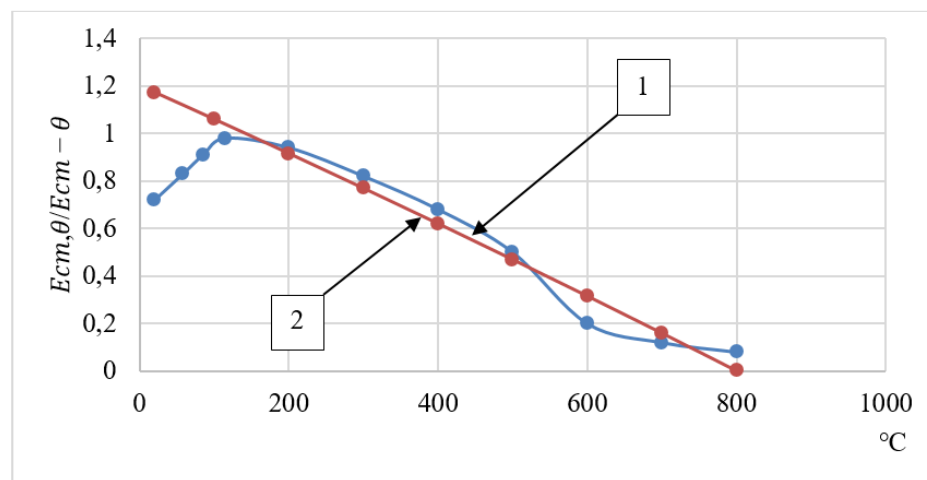


Fig. 9. Graphs showing the dependence of the initial modulus of elasticity $E_{cm, \theta} / E_{cm} - \theta$ on temperature for heavy concrete: 1) according to data from A.F. Milovanov; 2) according to formula 13

The reduction in the calculated resistance of reinforcing steel can be taken into account by introducing a coefficient of reduction in the characteristic value of resistance depending on temperature $k_{y,\theta}$, the function for calculating which can be established in the first approximation based on the experimental data obtained [9].

For different classes of reinforcement, using the least squares method, the following analytical dependencies have been established, comparative graphs of which are shown in Figure 10:

– for reinforcement of class A240C:

$$k_{(y,\theta)}^{A240} = 1 - 0,00134\theta + 1,6 \cdot 10^{-7} \theta^2, \quad (14)$$

– for reinforcement of class A400C:

$$k_{(y,\theta)}^{A400} = 0,91 - 0,0004\theta - 1,06 \cdot 10^{-6} \theta^2, \quad (15)$$

– for reinforcement of class A500C:

$$k_{(y,\theta)}^{A500} = 0,942 - 0,00046\theta - 1,15 \cdot 10^{-6} \theta^2, \quad (16)$$

– for reinforcement of class A600C:

$$k_{(y,\theta)}^{A600} = 0,951 - 0,00025\theta - 1,15 \cdot 10^{-6} \theta^2. \quad (17)$$

In addition, an equation was obtained for determining the average value of the resistance reduction coefficient:

$$k_{y,\theta}^{red} = 1 - 0,0006\theta - 1,0 \cdot 10^{-6} \theta^2. \quad (18)$$

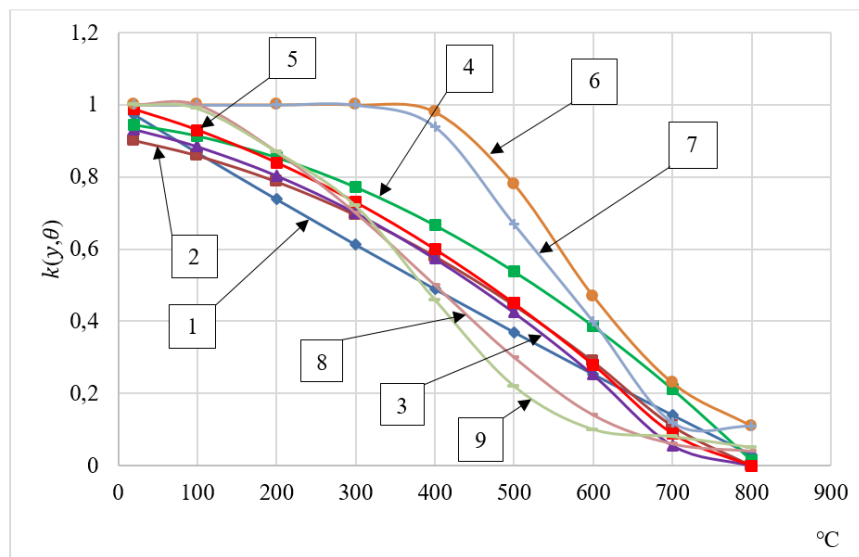


Fig. 10. Comparative graph of values of coefficients of reduction in the calculated resistance of reinforcement depending on temperature $k_{y,\theta}$: – according to experimental data [3]: 1) reinforcement class A240C; 2) reinforcement class A400C; 3) reinforcement class A500C; 4) class A600C reinforcement; 5) average value of the reduction coefficient; – according to EN 1992–1–1: 6) hot-rolled non-prestressed reinforcement; 7) cold-formed non-prestressed reinforcement; 8) class A pre-stressed reinforcement; 9) class B pre-stressed reinforcement

The strength and deformation properties of reinforcement at elevated temperatures are determined according to the stress-strain diagram EN 1992–1–2.

The thermal deformation of concrete $\varepsilon_{s_i}(\theta)$ is defined as the relative change in the length of a concrete sample when heated to a temperature θ , compared to its length at a temperature of 20 °C

$$\varepsilon_{s_i}(\theta) = \frac{l(\theta) - l_0}{l_0}, \quad (19)$$

where: $l(\theta)$ – length of the sample at temperature θ ; l_0 – length of the sample at 20 °C.

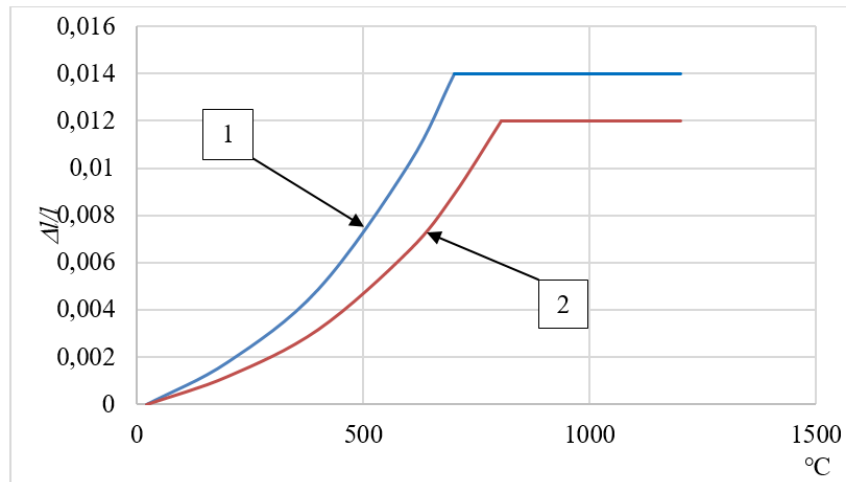


Fig. 11. Graph showing the dependence of thermal expansion on temperature: 1) silicate aggregate; 2) carbonate aggregate

The dynamic behaviour of reinforced concrete structures under the influence of high temperatures and explosive loads can be described by the dynamic equilibrium equation in the finite element method

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u} + K(T)u = F_{explosion}(t) + F_{therm}(T), \quad (20)$$

where u – vector of nodal displacements, m; $\ddot{u}$ – vector of accelerations, m/s²; $\dot{u}$ – vector of velocities, m/s; M – mass matrix, kg; C – damping matrix (Rayleigh model), N·s/m; $K(T)$ – stiffness matrix taking into account temperature, N/m; $F_{explosion}(t)$ – impulse load from explosion, H; $F_{therm}(T)$ – vector of thermal forces from thermal expansion, N.

Temperature-dependent stiffness matrix.

The temperature-dependent stiffness matrix of an element is determined by integration over its volume, $K_e(T)$

$$K_e(T) = \int_{\Omega_e} B(T) D_{3/6}(T) B^T(T) d\Omega, \quad (21)$$

where $D_{3/6}(T)$ – effective elasticity matrix of reinforced concrete at the corresponding temperature; B – deformation geometry matrix; Ω_e – integration area

The effective elasticity matrix is defined as the sum of the contributions of concrete and reinforcement, $D_{3/6}(T)$.

$$D_{3/6}(T) = V_{concrete} D_{concrete}^{compression}(T) + V_{reinforcement} D_{reinforcement}^{stretch}(T) + V_{reinforcement} D_{reinforcement}^{compression}(T), \quad (22)$$

where: $V_{concrete}, V_{reinforcement}$ – modulus of elasticity of concrete depending on temperature;
 $D_{concrete}^{compression}(T)$ – concrete matrix under compression at the corresponding temperature;
 $D_{reinforcement}^{stretch}(T)$ – reinforcement matrix under tension at the corresponding temperature;
 $D_{reinforcement}^{compression}(T)$ – reinforcement matrix under compression at the corresponding temperature.

Concrete stiffness matrix.

Concrete works effectively in compression, so its matrix is determined only for the region where $\varepsilon < 0$ (i.e., negative deformations) and has the form

$$D_{concrete}^{compression}(T) = \begin{cases} \frac{E_{concrete}(T)}{1 - \mu_{concrete}^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu_{concrete} & 0 \\ \mu_{concrete} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu_{concrete}}{2} \end{bmatrix} & , at \varepsilon < 0 \\ 0, & at \varepsilon \geq 0 \end{cases} \quad (23)$$

where $E_{concrete}(T)$ – modulus of elasticity of concrete depending on temperature; $\mu_{concrete}$ – Poisson's ratio for concrete.

Reinforcement stiffness matrix.

Reinforcement in reinforced concrete structures works effectively in both tension and compression. To describe its contribution to stiffness characteristics, it is advisable to distinguish between two cases:

- tensile deformations $\varepsilon > 0$;
- compressive deformations $\varepsilon < 0$.

In the finite element method, these cases are taken into account by introducing separate reinforcement stiffness matrices: tensile matrices and compressive matrices:

$$D_{reinforcement}^{stretch}(T) = \begin{cases} \frac{E_{reinforcement}(T)}{1 - \mu_{reinforcement}^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu_{reinforcement} & 0 \\ \mu_{reinforcement} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu_{reinforcement}}{2} \end{bmatrix} & , at \varepsilon > 0 \\ 0, & at \varepsilon \leq 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$D_{reinforcement}^{compression}(T) = \begin{cases} \frac{E_{reinforcement}(T)}{1 - \mu_{reinforcement}^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu_{reinforcement} & 0 \\ \mu_{reinforcement} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu_{reinforcement}}{2} \end{bmatrix} & , at \varepsilon < 0 \\ 0, & at \varepsilon \geq 0 \end{cases} \quad (25)$$

where $E_{reinforcement}(T)$ – modulus of reinforcement resistance depending on temperature;
 $\mu_{concrete}$ – Poisson's ratio for reinforcement; ε – deformation (the sign determines the mode: tension or compression).

Damping matrix.

The damping matrix $C(T)$, is defined as a linear combination of mass and stiffness matrices according to Rayleigh's model

$$C(T) = \alpha_M M + \beta_K K(T), \quad (26)$$

where α_M – mass damping coefficient; β_K – stiffness damping coefficient; M – mass matrix, kg; $K(T)$ – temperature-dependent stiffness matrix of reinforced concrete.

Mass matrix.

The volumetric mass matrix M , which is used in dynamic finite element method problems, has the general form

$$M = \int \Omega \rho N^T N d\Omega, \quad (27)$$

where ρ – material density (constant for each element type), kg/m³; Ω – element volume; N – matrix of shape functions (interpolation functions).

Impulse load from an explosion.

In the finite element method, an impulse load $F_{\text{explosion}}(t)$, is modelled as a temporary concentrated force or pressure applied to the surface of a structure (nodes) for a very short time.

The general expression for the force from an explosion is as follows

$$F_{\text{explosion}}(t) = P(t)S, \quad (28)$$

where: $P(t)$ – time-varying explosion pressure, Pa; S – area vector subjected to pressure, m².

The explosion pressure function $P(t)$ can be described using simplified and more realistic models. A triangular impulse is used for approximate calculations, while an exponential model is used for more accurate reproduction of the time variation of the load.

The triangular impulse (the simplest option) looks as follows:

$$P(t) = P_{\text{max.}} \left(1 - \frac{t}{t_d} \right), 0 \leq t \leq t_d, \quad (29)$$

where $P_{\text{max.}}$ – maximum explosion pressure, Pa; t, t_d – duration of shock wave action, attenuation, ms.

A more realistic representation of the temporal change in pressure is provided by the exponential model

$$P(t) = P_{\text{max.}} e^{-t/\tau}, \quad (30)$$

where τ – explosion pressure decay time, ms.

Temperature deformations.

Under high temperatures that occur during a fire, structural materials undergo thermal expansion, which is accompanied by an increase in internal deformations and stresses. This additional load is reflected in the form of a vector of thermal forces $F_T(T)$.

In the finite element method, it is formed by integrating temperature deformations within the volume of the element:

$$F_{\text{temp.}}(T) = \int \Omega_{\text{concrete}} B^T D_{\text{concrete}}(T) \varepsilon_{\text{temp.}}^{\text{concrete}} d\Omega + \int \Omega_{\text{reinf.}} B^T D_{\text{reinf.}}(T) \varepsilon_{\text{temp.}}^{\text{reinf.}} d\Omega, \quad (31)$$

where: B^T – matrix of geometric relationships; $D_{\text{concrete}}(T)$, $D_{\text{reinf.}}(T)$ – stiffness matrices for concrete and reinforcement at respective temperatures; Ω_{concrete} , $\Omega_{\text{reinf.}}$ – areas of concrete and reinforcement, respectively; $\varepsilon_{\text{temp.}}^{\text{concrete}}$, $\varepsilon_{\text{temp.}}^{\text{reinf.}}$ – temperature deformation of concrete and reinforcement.

The temperature deformation of the material $\varepsilon_{\text{temp.}}^m$ determined by the dependence

$$\varepsilon_{temp.}^{concrete} = \alpha_m(T) \Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

where $\alpha_m(T)$ – coefficient of linear thermal expansion of material, m ; $\Delta T = T - T_0$ – temperature change, K.

A comparison of the code-specified relationships given in EN 1992-1-2 with the results of full-scale experimental studies revealed significant discrepancies, particularly in the reduction of the strength of heavy concrete and lightweight expanded clay aggregate concrete, as well as in the variation of the initial modulus of elasticity with temperature. This highlights the need to refine analytical models to ensure that calculations more accurately reflect actual operating conditions.

The analytical relationships obtained for the strength, modulus of elasticity, and thermal deformation of concrete, as well as reduction factors for reinforcement strength at elevated temperatures, provide a comprehensive basis for predicting the behaviour of structures in fire conditions.

The use of the proposed refined mathematical relationships improves the accuracy of calculations when assessing the robustness of monolithic reinforced concrete buildings against progressive collapse caused by fire and deflagration explosions.

The mathematical model, implemented within the finite element method framework, accounts for temperature effects, impulsive explosive loads, and the behaviour of concrete and reinforcement at elevated temperatures. This enables an adequate representation of the dynamic behaviour of reinforced concrete structures under fire and explosion conditions. At the same time, the model remains simplified and does not account for several important physical factors, in particular crack formation in concrete, creep of materials at high temperatures, and the spatial effects of blast wave propagation.

5 DISCUSSION OF THE RESULTS OF THE STUDY

The results of the study demonstrate that the improved mathematical model offers significant advancements in predicting the fire resistance of reinforced concrete structures. By incorporating transient heat transfer, thermal expansion, and the effects of impulsive explosive loads, the model ensures a more realistic assessment of the dynamic behaviour of structures compared to conventional approaches. This holistic integration of physical processes contributes to the reliability of performance predictions under extreme conditions.

A key finding is the discrepancy identified between experimental data and the simplified code-specified curves for both concrete and reinforcement at elevated temperatures. Such inconsistencies highlight the limitations of existing standards and confirm the necessity of revising current design practices. The developed polynomial relationships and analytical expressions for the reduction factors of strength and elasticity provide more precise tools for engineers, allowing for improved prediction accuracy when assessing structural performance under fire exposure.

The successful implementation of the refined thermomechanical model within the finite element method framework further emphasizes its practical relevance. The model not only enhances the accuracy of evaluating load-bearing capacity and deformability but also creates opportunities for its application in methodologies aimed at assessing structural robustness and

preventing progressive collapse. In particular, its capacity to capture the combined effects of fire and explosion represents a novel contribution to safety analysis, broadening the scope of available engineering tools.

Overall, the findings underline the importance of moving towards analytical models that better reflect real material behaviour under high-temperature and dynamic loading scenarios. The study thus provides both theoretical contributions to the development of advanced models and practical implications for improving the fire and explosion resilience of monolithic reinforced concrete structures.

6 CONCLUSIONS

1. The components of an improved mathematical model for the fire resistance of reinforced concrete structures have been defined. The model takes into account transient heat transfer, thermal expansion of materials, and the effect of impulsive explosive loads, which enables an adequate reproduction of the dynamic behaviour of structures. A comparison of the characteristics of concrete and reinforcement at elevated temperatures with code-specified curves and the results of full-scale tests confirmed the existence of significant discrepancies that reduce the accuracy of calculations.

2. Based on the analysis of experimental data, polynomial relationships were developed to describe the reduction in strength and initial modulus of elasticity of heavy concrete and lightweight expanded clay aggregate concrete, and analytical expressions were obtained for reduction factors for the strength of reinforcement of different grades at elevated temperatures. This allows simplified code-specified curves to be replaced with more accurate analytical relationships, thereby improving the accuracy of predicting the behaviour of materials when exposed to high fire temperatures.

An improved thermomechanical model has been implemented within the finite element method framework for assessing the load-bearing capacity and deformability of structures under the combined effects of fire and explosion. The model can be used as a tool in methodologies for evaluating the robustness of monolithic reinforced concrete buildings against progressive collapse caused by fire and explosion.

7 ETHICAL DECLARATIONS

The authors of the article have no relevant financial or non-financial interests to disclose.

References

1. Khoury, G. A. (2000). Effect of fire on concrete and concrete structures. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 2(4), 429–447. <https://doi.org/10.1002/pse.51>
2. Lie, T. T. (1992). *Structural fire protection* (ASCE Manuals and Reports on Engineering Practice No. 78). American Society of Civil Engineers.
3. Milovanov, A. F. (2002). *Vohnestiikist budivelnykh konstruksii* [Fire resistance of building structures]. NDIBK.
4. Otrosh, Yu. A., Maiboroda, R. I., & Romin, A. V. (2023). Doslidzhennia metodyk rozrakhunku prohresuiuchoho obvalennia [Research of methods for calculating progressive collapse]. *Mekhanika ta matematychni metody*, 5(2), 25–40. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2023-5-2-25-40>
5. Skob, Y., Dreval, Y., Vasilchenko, A., & Maiboroda, R. (2023). Selection of material and thickness of the protective wall in the conditions of a hydrogen explosion of various power. *Key Engineering Materials*, 952, 121–129. <https://doi.org/10.4028/p-ST1VeT>
6. Maiboroda, R., Zhuravskij, M., Otrosh, Y., & Karpuntsov, V. (2024). Determination of the required area of easily removable structures to protect against progressive collapse. *Key Engineering Materials*, 1004, 73–83. <https://doi.org/10.4028/p-V0xA6H>

7. Otrosh, Yu. A. (2019). *Tekhnichniy stan zalizobetonnykh konstrukttsii pry sylovykh i vysokotemperaturnykh vplyvakh* [Technical condition of reinforced concrete structures under force and high-temperature effects] (Doctoral dissertation, Odesa).
8. Holodnov, O. I., Hordiuk, M. P., Tkachuk, I. A., & Semynoh, M. M. (2011). Zmina kharakterystyk mitsnosti armatury ta betonu pry vysokotemperaturnykh vplyvakh [Change of strength characteristics of reinforcement and concrete under high-temperature effects]. *Zbirnyk naukovykh prats Ukrainskoho instytutu stalevykh konstrukttsii imeni V. M. Shymanovskoho*, 8, 121–131.
9. Tkachuk, I. A. (2011). Vyznachennia kharakterystyk mitsnosti armatury pry vysokotemperaturnykh vplyvakh [Determination of reinforcement strength characteristics under high-temperature effects]. *Promyslove budivnytstvo ta inzhenerni sporudy*, (4), 21–24.
10. Semynoh, M. M. (2009). Do rozrakhunku elementiv budivel pry vysokotemperaturnykh vplyvakh [On the calculation of building elements under high-temperature effects]. *Visnyk Donbaskoi derzhavnoi akademii budivnytstva i arkhitektury: Budivelni konstrukttsii, budivli ta sporudy*, 2009-4(78), 193–198.
11. Travis, Q., & Mobasher, B. (2010). Correlation of elastic modulus and permeability in concrete subjected to elevated temperatures. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 22(7). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)MT.1943-5533.0000074](https://doi.org/10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0000074)

Література

1. Khoury G. A. Effect of fire on concrete and concrete structures. *Progress in Structural Engineering and Materials*. 2000. Vol. 2. P. 429–447. doi: 10.1002/pse.51.
2. Lie T. T. Structural fire protection. *ASCE Manuals and Reports on Engineering Practice No. 78*. New York: American Society of Civil Engineers, 1992. 251 p.
3. Мілованов А. Ф. Вогнестійкість будівельних конструкцій. Київ: НДІБК, 2002. 320 с.
4. Otrosh Yu. A., Maiboroda R. I., Romin A. B. Дослідження методик розрахунку прогресуючого обвалення. *Механіка та математичні методи*. 2023. Вип. 2. С. 25–40. doi:10.31650/2618-0650-2023-5-2-25-40.
5. Skob Y., Dreval Y., Vasilchenko A., Maiboroda R. Selection of material and thickness of the protective wall in the conditions of a hydrogen explosion of various power. *Key Engineering Materials*. 2023. Vol. 952. P. 121–129. doi: 10.4028/p-ST1VeT.
6. Maiboroda R., Zhuravskij M., Otrosh Y., Karpuntsov V. Determination of the required area of easily removable structures to protect against progressive collapse. *Key Engineering Materials*. 2024. Vol. 1004. P. 73–83. doi: 10.4028/p-V0xA6H.
7. Otrosh Yu. A. Технічний стан залізобетонних конструкцій при силових і високотемпературних впливах : дис. д-ра тех. наук : 05.23.01. Одеса, 2019. 365 с.
8. Голоднов О.І., Гордіук М.П., Ткачук І.А., Семиног М.М. Зміна характеристик міцності арматури та бетону при високотемпературних впливах. *Збірник наукових праць Українського інституту сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського*. Київ, 2011. Вип. 8. С. 121-131.
9. Ткачук І.А. Визначення характеристик міцності арматури при високотемпературних впливах. *Промислове будівництво та інженерні споруди*. Київ, 2011. №4. С. 21-24.
10. Семиног М.М. До розрахунку елементів будівель при високотемпературних впливах. *Вісник Донбаської державної академії будівництва і архітектури: Збірник наукових праць: Будівельні конструкції, будівлі та споруди*. Макіївка, 2009. Вип. 2009-4 (78). С. 193-198.
11. Travis Quentin, Asce M, Mobasher Barzin. Correlation of Elastic Modulus and Permeability in Concrete Subjected to Elevated Temperatures. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 2010, №22(7). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)MT.1943-5533.0000074](https://doi.org/10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0000074).

Maiboroda Roman

National University of Civil Defense of Ukraine
Senior Lecturer
Onopriyenko St., 8, Cherkasy, Ukraine, 18000
maiboroda_roman@nuczu.edu.ua
ORCID: 0000-0002-3461-2959

Otrosh Yuriy

National University of Civil Defense of Ukraine
Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department
8 Onopriyenko St., Cherkasy, Ukraine, 18000
otrosh_yurii@nuczu.edu.ua
ORCID: 0000-0003-0698-2888

For references:

R. Maiboroda, Y. Otrosh. (2025). Improved thermomechanical model for predicting the behaviour of reinforced concrete structures under fire and explosion conditions. Mechanics and Mathematical Methods. VII (2). 66–85.

Для посилань:

Майборода Р. І., Отрош Ю. А. Удосконалена термомеханічна модель для прогнозування поведінки залізобетонних конструкцій в умовах пожежі та вибуху. Механіка та математичні методи, 2025. Т. VII. №2. С. 66–85.

Improved thermomechanical model for predicting the behaviour of reinforced concrete structures under fire and explosion conditions. © 2025 by R. Maiboroda, Y. Otrosh. is licensed under CC BY 4.0

УДК 536.75+681.324+539.3+621.3

БІОМЕХАНІЧНИЙ ІНЖИНІРИНГ У СПОРТІ ВИЩИХ ДОСЯГНЕНЬ: ІНФОРМАЦІЙНО-ЕНТРОПІЙНИЙ ПІДХІД В АНАЛІЗІ ФІЗІОЛОГІЧНИХ СИГНАЛІВ ЗАСОБАМИ МЕХАТРОНІКИ

Шамич О. М.¹, Холодова О. С.², Човнюк Ю. В.¹, Остапущенко О. П.¹,
Чередніченко П. П.¹

¹Київський Національний університет будівництва і архітектури

²Інститут соціальних технологій, Відкритий міжнародний університет розвитку людини
«Україна»

Анотація. Більшість фізіологічних сигналів, які фіксують і аналізують у біомеханічному інжинірингу спорту вищих досягнень при моніторингу фізичного, функціонального, психологічного стану спортсменів засобами мехатронних систем управління, містять детерміновану, стохастичну та хаотичну складові. Традиційні спектрально-кореляційні методи аналізу фізіологічних сигналів дозволяють оцінити тільки детерміновані та стохастичні процеси. У роботі зроблений акцент на використанні у подібних видах аналізу математичного апарату оцінки нелінійної динаміки фізіологічних сигналів, заснованому на інформаційно-ентропійному підході. Використання саме термодинамічних аналогій у інформаційно-енергетичній теорії вимірювань, кількісної оцінки ентропії часових рядів як міри невизначеності, як міри хаосу у динамічній системі дозволяє встановити основні характеристики фізіологічних сигналів про стан спортсменів високої кваліфікації, його еволюцію у часі, а також надає тренерам можливість передбачувати (з високою ймовірністю) зміни фізичних, функціональних та психологічних компонентів вказаного стану (особливо у період передзмагальної підготовки та під час виступів на відповідальних змаганнях високого рівня). У дослідженнях подібного типу найпоширенішими видами ентропій, які розраховуються для фізіологічних сигналів, є т.з. ентропії вкладення/внеску та спектральні ентропії. Спектральні ентропії ($S_p E$) оцінюють зміни амплітудної складової енергетичного спектру фізіологічного сигналу, використовуючи амплітудні компоненти на кожній частоті спектру потужності як ймовірності у розрахунках ентропії. Ентропії внеску/вкладення надають інформацію про те, як фізіологічний сигнал коливається з плином часу, порівнюючи часові ряди з самими собою через певні інтервали часової затримки, що й дозволяє вивчати конкретний фізіологічний сигнал з позицій теорії нелінійної динаміки (детермінованого хаосу). Математичне забезпечення програм ПЕОМ, котрі входять до комп'ютерної підсистеми системи контролю, керування обчисленнями засобами мехатроніки, віднесені найпоширеніші види ентропії внеску, що розраховуються для конкретного фізіологічного сигналу (ентропія Колмогорова-Синяя, апроксимована ентропія, вибіркова ентропія та багатомасштабна ентропія).

У роботі доведено, що саме інформаційно-ентропійний підхід надає біомеханічному інжинірингу широкий спектр інструментів задля вивчення динамічних (нелінійних за характером своєї поведінки) систем організму спортсменів високої кваліфікації, однак вимагає подальшого вдосконалення та уточнення фізіологічної інтерпретації отримуваних результатів, а власне проблема моделювання інформаційних процесів стає все більш актуальною у зв'язку з ускладненням та розвитком сучасних вимірювальних систем. Для широкого класу інформаційно-вимірювальних систем, що містять цифрові підсистеми передачі, обробки та зберігання інформації, класичний інформаційно-енергетичний підхід важко застосувати, оскільки дослідження таким способом пов'язане з надто великою кількістю обчислень і необхідністю детального аналізу статистичних даних шляхом використання спеціального програмного забезпечення.

У роботі запропоноване вирішення проблеми моделювання інформаційних процесів у інформаційно-вимірювальних системах (фізіологічних сигналів) на основі термодинамічної аналогії, а не тільки на основі негентропійного принципу Бріллюена. Існує глибока аналогія

між інформаційними та енергетичними процесами. Зокрема, поняття потоку однаково відповідає як інформаційному потоку, так і потоку теплової енергії. Існуючий зв'язок між термодинамічними й інформаційними характеристиками для вирішення задач інформаційної теорії вимірювань фізіологічних сигналів на основі термодинамічної аналогії у даній роботі використаний вперше. Побудований інформаційний аналог рівняння теплового балансу для вимірювальної системи фізіологічних сигналів з класичною базовою структурою (спрямованості передачі інформації) дозволяє використовувати саме термодинамічну аналогію для дослідження вказаних вище сигналів та процесів у інформаційно-вимірювальних системах. Такий підхід передбачає отримання важливих результатів у дослідженні критичних режимів розповсюдження інформації у великих інформаційних системах із завадами, призначених для біомеханічного інжинірингу, шляхом аналогії таких систем з нелінійними дисипативними середовищами та для низки інших напрямків, що використовуються у різноманітних наукових дослідженнях спорту вищих досягнень, де задіяний штучний інтелект.

Ключові слова: інформаційно-ентропійний підхід, фізіологічні сигнали, біомеханічний інжиніринг, спорт вищих досягнень, нелінійна динаміка, детермінований хаос, часова еволюція, прогнозування, інформаційно-вимірювальна система, термодинамічна аналогія, нелінійне дисипативне середовище.

BIOMECHANICAL ENGINEERING IN HIGH-PERFORMANCE SPORTS: THE INFORMATION-ENTROPY APPROACH TO THE ANALYSIS OF PHYSIOLOGICAL SIGNALS THROUGH MECHATRONIC SYSTEMS

O. Shamykh¹, O. Kholodova², Yu. Chovnyuk¹, O. Ostapushchenko¹,
P. Cherednichenko¹

¹Kyiv National University of Construction and Architecture

²Institute of Social Technologies, Open International University of Human Development "Ukraine"

Abstract Most physiological signals that are monitored and analyzed in the biomechanical engineering of high-performance sports—particularly when assessing the physical, functional, and psychological states of athletes via mechatronic control systems often exhibit a complex mix of deterministic, stochastic, and chaotic components. Conventional spectral-correlation methods can capture only the deterministic and stochastic aspects, leaving the nonlinear and chaotic dynamics largely unexplored.

This paper advocates for the use of mathematical tools grounded in the information-entropy framework to evaluate these nonlinear dynamics. By drawing analogies from thermodynamics within the realms of information and energy measurement theory, it becomes possible to quantify entropy in physiological time series. Entropy, viewed as a measure of uncertainty or systemic chaos, offers insights into the evolving states of elite athletes. Such analysis enhances the ability of coaches and sports scientists to forecast (with high probability) variations in an athlete's physical, functional, and psychological condition—particularly in the critical periods leading up to and during major competitions.

Among the most commonly applied entropy metrics in these studies are spectral entropy and embedding (or contribution) entropy. Spectral entropy (SpE) quantifies fluctuations in the amplitude components of the energy spectrum, treating power spectrum amplitudes at each frequency as probabilistic variables in entropy calculations. Embedding entropy, on the other hand, captures temporal signal variability by comparing time series against themselves at various lag intervals this approach rooted in the theory of deterministic chaos and nonlinear dynamics.

The software that supports the computer subsystems of these mechatronic control systems often incorporates widely used entropy measures such as Kolmogorov-Sinai entropy, approximate entropy, sample entropy, and multiscale entropy. The results affirm that the information-entropy approach significantly expands the analytical capabilities available to biomechanical engineers studying complex, dynamic physiological systems in elite athletes. However, further refinement is necessary

particularly in the physiological interpretation of entropy-based metrics. As modern measurement systems grow more sophisticated, modeling information processes within them becomes increasingly relevant and complex.

Applying classical information and energy approaches to digital information-measuring systems-which include subsystems for data transmission, processing, and storage is often computationally prohibitive. To address this problem, the paper introduces the novel solution: to model information processes based on thermodynamic analogies, rather than relying solely on the non-entropic Brillouin principle.

There is a profound analogy between informational and thermodynamic processes. For instance, the concept of “flow” applies equally to the flow of information and thermal energy. This study is among the first to explore the connection between thermodynamic and informational characteristics in the context of measuring physiological signals. The development of an information-theoretic analogue to the heat balance equation that is applied to a classical measurement system-enables the study of physiological signal behavior via thermodynamic principles.

This thermodynamic perspective reveals critical insights into how information propagates through large, interference-prone systems that is used in biomechanical engineering. These systems bear striking resemblance to nonlinear dissipative media, a comparison that opens new avenues for research not only in high-performance sports science but also in interdisciplinary fields where artificial intelligence is integrated into human physiological monitoring.

Keywords: information-entropy approach, physiological signals, biomechanical engineering, high-performance sports, nonlinear dynamics, deterministic chaos, temporal evolution, forecasting, information-measuring systems, thermodynamic analogy, nonlinear dissipative systems.

1 ВСТУП

Відомо, що більшість фізіологічних сигналів містять детерміновану, стохастичну та хаотичні складові. У той же час традиційні спектрально-кореляційні методи аналізу таких сигналів дозволяють оцінити лише детерміновані та стохастичні процеси. У зв'язку з цим в останнє десятиліття дослідження фізіологічних сигналів, які надходять з організму спортсменів високої кваліфікації (зокрема, у спорті вищих досягнень) все частіше звертаються до математичного апарату оцінки нелінійної динаміки, використовуючи при цьому ентропію задля оцінки динамічних систем у нормі та патології [1-3].

У першу чергу ентропійний підхід реалізують до аналізу ЕЕГ-сигналів мозку людини, у нейрокогнітивних дослідженнях [4], зокрема, засобами сучасних мехатронних систем управління (сенсорів, датчиків, регуляторів, контролерів тощо), які контролюють поведінку, стан та часову еволюцію нейродинамічних систем.

Єдиного визначення поняття «ентропія» не існує, але найчастіше її розглядають як міру невизначеності, міру хаосу у динамічній системі. Існує низка різних, введених нещодавно, кількісних оцінок ентропії часових рядів. Зазвичай ці підходи класифікують (і умовно розділяють) на дві великі групи: спектральні ентропії та ентропії вкладення/внеску. Якщо спектральні ентропії (SpE) оцінюють зміни амплітудної складової енергетичного спектру сигналу (фізіологічної природи), використовуючи при цьому амплітудні компоненти на кожній частоті спектру потужності як імовірності у розрахунках ентропії, тоді як ентропії внеску надають інформацію про те, як фізіологічний сигнал коливається з плином часу, порівнюючи при цьому часові ряди з самими собою через певні інтервали часової затримки [3], що й дозволяє вивчати конкретний фізіологічний сигнал (наприклад, ЕЕГ-сигнал мозку) з позицій теорії нелінійної динаміки (зокрема, теорії детермінованого хаосу). У сучасних дослідженнях фізіологічних сигналів все частіше найпоширенішими видами ентропій внеску стають: 1) ентропія Колмогорова-Синая; 2) апроксимована ентропія; 3) вибіркова ентропія; 4) багатомасштабна ентропія.

Кожна із зазначених вище ентропій має свої переваги та недоліки щодо застосування їх у практиці досліджень фізіологічних сигналів.

Спектральна ентропія (Spectral Entropy, SpE) розраховується для спектру фізіологічного сигналу, отриманого з використанням дискретного перетворення Фур'є. Далі за допомогою функції Шеннона визначається набір величин, які відповідають отриманим частотним компонентам спектру потужності фізіологічного сигналу. Чим більшою є ентропія Шеннона, тим далі динамічна система знаходиться від впорядкованого стану, причому максимальне значення ентропії Шеннона досягається тоді, коли вирогідність появи всіх частотних компонентів стає однаковою за величиною, тобто стани динамічної системи (як і характер її поведінки у конкретному стані) стають рівновірогідними [1]. SpE використовується саме для оцінки функціонального стану (спортсмена), виходячи з припущення про те, що, наприклад, у стані спокійного неспання або сну спектр потужності фізіологічного сигналу звужується порівняно з його розкидом під час активного неспання (активної рухової діяльності). Як наслідок, припускають, що структури з високим рівнем активності характеризуються й високим рівнем ентропії Шеннона. На сьогодні спектральна ентропія знаходить найбільше поширення у автоматизованих моніторах фізіологічних сигналів для визначення різних стадій заспокоєння (або занепокоєння) організму спортсмена (особливо перед початком змагань високого рівня). Вказані автоматизовані монітори фізіологічних сигналів входять до складу сучасних мехатронних систем управління, а у комп'ютерному блоці закладають відповідне математичне забезпечення для виконання стандартних програм ПЕОМ, що враховують конкретний вид ентропії

зادля дослідження (моніторингу) еволюції у часі цих сигналів (із наступною, можливою у реальному часі, корекцією їх основних параметрів).

Статичну ентропію Шеннона поширено на динамічну систему у вигляді ентропії Колмогорова-Синая (KSE), яка визначається як швидкість втрати інформації про стан динамічної системи з плином часу та вважається однією з найважливіших характеристик детермінованого хаосу. Значення KSE задає оцінку швидкості втрати інформації, що дозволяє інтерпретувати її як міру «пам'яті» системи, або як міру швидкості «забування» початкових умов. Чим меншими є значення KSE, тим більш детермінованою є система, і навпаки, чим більшими є значення KSE, тим більшою є стохастичність системи і, як наслідок, погане прогнозування її майбутніх станів. Роль KSE для нелінійних систем схожа на ту роль, яку відіграє автокореляційна функція для лінійних систем. Зокрема, KSE пов'язана з показниками Ляпунова, що характеризують стійкість динамічної системи. У основі формули для розрахунку KSE лежить формула ентропії Шеннона, тобто ентропія Колмогорова-Синая задається як асимптотичний приріст невизначеності для розбиття нескінченно малого розміру. Однак на практиці KSE зазвичай оцінюється за допомогою показників Ляпунова, або розраховується як апроксимуюча її величина K_2 через кореляційний інтеграл [5]. Алгоритм розрахунку KSE передбачає наявність стаціонарних довгих часових рядів (35-45 секунд безартефактних фрагментів фізіологічних сигналів з частотою дискретизації не менше 400 Гц), тому KSE має обмежене застосування для аналізу фізіологічних сигналів в режимі їх моніторування.

Саме тому у багатьох сучасних дослідженнях [4] був запропонований модифікований алгоритм розрахунку KSE, відомий як апроксимована (наближена) ентропія (Approximate Entropy, ApEn), яка може бути розрахована на коротких фрагментах фізіологічних сигналів (1000) відліків) та є стійкою до шумових сигналів. ApEn є мірою нерегулярності/непередбачуваності часових рядів кінцевої довжини [6]. Однак, значення ApEn різко зменшуються при збільшенні довжини фрагменту фізіологічного сигналу.

Для подолання цього недоліку дослідниками була розроблена вибіркова ентропія (ентропія шаблонів – Sample Entropy, SampEn), яка також являє собою KSE, але позначається на підставі ентропії кореляції, а не ентропії Шеннона [7]. Зазначені вище види ентропії кількісно визначають лише регулярність (передбачуваність) часових рядів за єдиною шкалою. Однак немає прямого зв'язку між регулярністю та складністю. Так, не повністю передбачувані (наприклад, періодичні) сигнали, що мають мінімальну ентропію, або абсолютно непередбачувані (наприклад, некорельовані випадкові) сигнали, що мають максимальну ентропію, справді складні, оскільки їх можна описати дуже компактно. Не існує єдиного визначення складності динамічної системи. Інтуїтивно, складність пов'язана зі значущим структурним багатством, що включає кореляції у деяких просторово-часових масштабах. Кількісно визначити таку складність системи дозволяє багатомасштабна ентропія (Multiscale Entropy, MSE), яка розраховується на підставі SampEn та враховує кореляції, притаманні фізіологічним сигналам на декількох часових масштабах. MSE дозволяє диференціювати шум та значущу складність сигналу, а також здатна виявляти часові кореляції на великих відстанях, дозволяючи визначити присутність ефектів «пам'яті» у динаміці основного сигналу та складність просторово-часових систем фізіологічних процесів (у тілі спортсмена) [8].

Ентропійний підхід надає спортивній науці (біомеханіці спорту) широкий спектр інструментів задля вивчення динамічних фізіологічних систем організму людини (спортсмена високої кваліфікації), однак вимагає, на наш погляд, подальшого поглибленого й різнобічного дослідження, розробки фізіологічної інтерпретації отримуваних засобами сучасних мехатронних систем управління результатів.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Проблема моделювання інформаційних процесів зараз стає все більш актуальною у зв'язку із ускладненням та розвитком вимірювальних систем, які використовуються у сучасних наукових дослідженнях, і, зокрема, у біомеханіці спорту. Для широкого класу сучасних інформаційно-вимірювальних систем у спорті вищих досягнень, які містять цифрові підсистеми передачі, обробки та зберігання інформації (шляхом використання, наприклад, мехатронних комплексів управління) класичний інформаційно-енергетичний підхід важко застосувати, оскільки дослідження таким способом пов'язане з надто великою кількістю обчислень та необхідністю детального (прискіпливого!) аналізу статистичних даних (Big Data Analysis).

На думку авторів даного дослідження, перспективним шляхом вирішення зазначених вище проблем є моделювання інформаційних процесів у інформаційно-вимірювальних системах на основі термодинамічної аналогії, а не тільки на основі прямої відповідності між енергією сигналу (фізіологічної природи/походження) й інформацією, яка переноситься саме цим сигналом (т.з. негентропійний принцип Бріллюена [9]). Хоча зв'язок між термодинамічними й інформаційними характеристиками і відзначався, проте для вирішення задач інформаційної теорії вимірювань у біомеханіці спорту вищих досягнень термодинамічна аналогія не використовувалась. У результаті теорія вимірювань (у спорті вищих досягнень, у спортивній метрології, у біомеханіці та фізіології спорту) була позбавлена можливості користуватись значними результатами, які досягнуті під час дослідження термодинамічних систем.

У даній роботі висвітлена спроба використати термодинамічну аналогію саме у інформаційно-енергетичній теорії вимірювань у біомеханіці спорту вищих досягнень та у інших галузях спортивної науки.

Ентропійний підхід до аналізу фізіологічних сигналів (зокрема, ЕЕГ-сигналів мізку) використаний у роботах, зазначених вище [1-8], де вказані переваги й недоліки цього підходу. Стосовно найпоширенішого методу моделювання вимірювальних систем (будь-якого функціонального призначення) слід зазначити, що ним є інформаційно-енергетична теорія вимірювань [10, 11], основи якої закладені у [12]. З первісного методу оцінки якості вимірювальних приладів [12] шляхом використання імовірнісних та спектральних операторів [13] ця теорія перетворилась на метод дослідження інформаційних процесів у вимірювальних каналах [14]. Проте для більш широкого класу інформаційно-вимірювальних систем (IBC), як зазначено вище, використання інформаційно-енергетичного підходу є сумнівним, оскільки це вимагає застосування складних програм по обробці великої кількості даних (Big Data Analysis).

Аналогія між інформаційними та енергетичними процесами визначалась не тільки Бріллюеном [9], але й багатьма іншими авторами [15, 16]. Найнаочніше вона виявляється у визначенні поняття потоку, яке однаково відповідає як інформаційному потоку [16], так і потоку теплової енергії [17]. Відповідно й інші поняття, що пов'язані з поняттям потоку, мають спільну природу [18].

Автори даного дослідження використали підходи робіт [4, 18] та методи математичної фізики задля досягнення мети роботи, викладеної нижче.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Мета дослідження полягає у обґрунтуванні термодинамічної аналогії та ентропійного підходу для інформаційно-енергетичної теорії вимірювань у спортивній метрології та біомеханічному аналізі проблем спорту вищих досягнень.

На думку авторів дослідження, саме такий комплексний підхід (на основі використання ентропії, різних методів оцінки її у кількісному відношенні при аналізі часових рядів), що базується й на термодинамічній аналогії в інформаційно-енергетичній теорії вимірювань, дозволяє якісно інтерпретувати у фізіологічному сенсі отримувані результати досліджень організму спортсмена високої кваліфікації засобами сучасних мехатронних систем керування, а також прогнозувати його фізичний та функціональний стани, рівень психологічної підготовки на різних етапах тренувального процесу й у передзмагальний/змагальний період, де необхідним є високий рівень (чи не найвищий!) рухової активності (особливо, у основних змаганнях року).

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Відомо [17], що термодинамічна система описується рівнянням теплового балансу вигляду

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = K \Delta T + Q(x, y, z, t), \quad (1)$$

де: C – теплоємність; Δ – оператор Лапласа; $Q(x, y, z, t)$ – функція потужності джерел тепла; (x, y, z) – просторові, t – часова координати; T – температура, $T = T(x, y, z, t)$.

Можна побудувати інформаційний аналог рівняння теплового балансу (1) для конкретної вимірювальної системи, яка має наступну базову структуру: 1) I_0 – джерело інформації (фізіологічний сигнал, який знімається з тіла спортсмена спеціальними датчиками/сенсорами); 2) I_1 – перетворювач інформації; 3) I_2 – приймач інформації. Слід зазначити, що I_0, I_1, I_2 входять до складу мехатронного комплексу управління, моніторингу та аналізу біомеханічних рухів спортсмена.

Для k -ої підсистеми вимірювання фізіологічних сигналів, по аналогії з (1), маємо

$$\frac{\partial I}{\partial t} = Y \Delta I + I(k, t), \quad (2)$$

де: k – номер підсистеми; $I(k, t)$ – функція потужності джерела інформації k -ої підсистеми вимірювання; I – інформація, яка є функцією (x, y, z) – просторових координат по часу t , тобто $I = I(x, y, z, t)$; Y – сигнальна провідність k -ої підсистеми вимірювань фізіологічних сигналів. (У подальшому вважаємо цю величину постійною і не залежною від просторово-частотних координат).

У процесі побудови інформаційного аналога будемо керуватися низкою наступних припущень.

1. Припущення відносно спрямованості передачі інформації у ІВС фізіологічних сигналів.

У побудованій інформаційній моделі приймається наступна схема спрямованої передачі інформації: від джерела I_0 до перетворювача інформації I_1 , а далі від I_1 до приймача інформації I_2 . У простих лінійних системах передачі інформації цілком можливий вплив приймача I_1 на джерело інформації I_0 . Але внаслідок бурхливого розвитку суттєво нелінійних цифрових систем та гальванічно розв'язаних інтерфейсів припущення про спрямованість передачі інформації отримує переважне застосування [18]. Саме використання цього припущення дозволяє знехтувати зворотнім впливом споживача інформації на її джерело.

2. Припущення про відносність оцінки кількості інформації у статистичній мірі.

За визначенням кількості інформації (у найбільш узагальненому сенсі) приймаємо наступне співвідношення

$$I = H_{\text{апр.}} - H_{\text{апс.}}, \quad (3)$$

де: $H_{\text{апр.}}$ – апіорна ентропія стану системи, яка досліджується; $H_{\text{апс.}}$ – апостеріорна ентропія.

У структурній матриці кількість інформації не залежить від спостерігача і є абсолютною характеристикою інформативного (фізіологічного за природою/походженням) сигналу, що несе цю інформацію. У статистичній матриці кількість інформації (I) залежить від ентропії знань спостерігача про процес, який досліджується.

Система відліку містить наступну інформаційну матрицю

$$\|I_0\| = \begin{bmatrix} I_{011}^z & I_{012}^z & \dots & I_{01n}^z \\ I_{021}^z & I_{022}^z & \dots & I_{02n}^z \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{0m1}^z & I_{0m2}^z & \dots & I_{0mn}^z \end{bmatrix}, \quad (4)$$

де: $I_{0ij}^z = H_{x_i} - H_{x_i/z_j}$; H_{x_i} – апіорна ентропія стану X_i у ІВС; H_{x_i/z_j} – ентропія стану X_i з умовою, що він може бути оцінений за допомогою значення параметра Z_j спостерігача.

Під час переходу до іншої системи відліку статистичні міри інформаційних потоків перетворюються

$$i_{\text{вих.}}^I = \psi_s^I(i_{\text{вих.}}), \quad (5)$$

де: ψ_s^I – оператор перетворення статистичної міри вихідного інформаційного потоку.

Звідси маємо:

Оскільки умовні імовірність значень інформативних параметрів (фізіологічних сигналів) зв'язані співвідношенням:

$$P_{x/z} = \frac{P_z \cdot P_{x/z}}{P_z} = \frac{(P_z \cdot P_{z/\xi}) \cdot P_{x/z}}{P_z} = P_{z/\xi} \cdot P_{x/z}. \quad (6)$$

Тоді умовні ентропії стану набувають вигляду:

$$H_{x_i/\xi_j} = H_{x_i/z_j} + H_{z_i/\xi_j}, \quad (7)$$

$$I_{0ij}^\xi = H_{x_i} - H_{x_i/z_j} - H_{z_i/\xi_j} = I_{0ij}^z - H_{z_i/\xi_j}, \quad (8)$$

де: $\|H_{z/\xi}\|$ – ентропія стану системи відліку z

$$\|H_{z/\xi}\| = \|H_z\| - \|I_{z/\xi}\|. \quad (9)$$

За систему відліку приймаємо базу даних зовнішнього спостерігача, у якості котрої візьмемо базу знань про фізіологічні сигнали, що закладена у комплекс комп'ютерних програм мехатронної системи управління, спостереження/моніторингу та коригування

досліджуваного процесу даною ІВС. Подамо усі дані реляційною моделлю. У цьому випадку сукупність даних про об'єкт спостереження складає кортеж, а кожне окреме дане – атрибут кортежу. Одним з атрибутів кортежу є також і час (t), оскільки у ІВС більшість даних є функціями часу. Послідовність кортежів одного об'єкту відбиває зміну його стану у часі.

Структурні властивості даних у системі відліку відбиваються/відображаються двома додатковими об'єктами: 1) об'єктом «перелік об'єктів та атрибутів»; 2) об'єктом «логічні зв'язки між даними», а також програмою обслуговування реляційної структури.

Проте спостерігач може використовувати й іншу модель даних. У будь-якій моделі дані описуються на певній формальній мові даної моделі. Задача перетворення моделі даних аналогічна задачі побудови транслятора мови представлення даних. Оскільки для реально неявних систем така задача може бути вирішена завжди, тоді для виконання досліджень (щодо аналізу фізіологічних сигналів організму спортсмена високої кваліфікації, біомеханічного аналізу його активних рухових дій) можна користуватись саме реляційною моделлю без втрати загальності.

База даних спостерігача не обов'язково повинна містити повний набір структур, що відповідають всім об'єктам системи, яка досліджується, аби цей спостерігач сам міг бути прийнятий за систему відліку. Поява даних, що не враховані у системі відліку, призводить до збільшення числа кортежів об'єктів, які характеризують структуру досліджуваної системи (фізіологічних сигналів організму спортсмена високої кваліфікації).

Нехай інформація про параметр X передається досліджуваній системі фізіологічних сигналів (організму спортсмена високої кваліфікації) з використанням мови представлення даних L_X , а у системі відліку Z використовується мова представлення даних L_Z . Тоді у структурній мірі інформаційний потік, що характеризує параметр X , визначається наступним співвідношенням

$$q_X = \tilde{I}_X i_X, \quad (10)$$

де $\tilde{I}_X$ – середня довжина речення мовою L_X .

У системі відліку Z транслятор $L_{X/Z}$ перетворює речення $\tilde{I}_X$ у речення $\tilde{I}_Z = L_{X/Z}(\tilde{I}_X)$. Тому

$$q_X^Z = L_{X/Z}(\tilde{I}_X) i_X \quad (11)$$

Вимірювання інформаційних потоків у фіксованій системі відліку дозволяє оцінити збитковість статистично залежних даних.

3. Припущення про збереження кількості статистичної інформації у замкненій системі фізіологічних сигналів організму спортсмена високої кваліфікації.

Це припущення цілком логічно впливає з визначення статистичної інформації (3) і припущення про відносність. Дійсно, якщо вказана вище система є замкненою, тоді кількість її параметрів стану стала, а ентропія зовнішнього спостерігача не змінюється, й тому $I = const$.

Можливість використання припущення про збереження кількості статистичної інформації аналогічно закону збереження енергії й дає додаткові переваги статистичній інформаційній мірі, оскільки у структурній мірі кількість інформації зростає під час виконання операції копіювання всередині системи.

Розглянемо далі процес надходження інформації у ІВС від джерела «0» до спостерігача «2». Оскільки канал 0-2 є лінією зв'язку, тоді у відповідності до формули Шеннона у диференціальній формі

$$i_{02} = F_0 \ln \left\{ 1 + \frac{P_c}{P_n} \right\}, \quad (12)$$

де: P_c – потужність сигналу; F_0 – ширина спектру Фур'є сигналу; P_n – потужність завад.

З [19] відомо, що

$$P_c = (E_0 - E_2)^2 y_{02}, \quad (13)$$

де: E_0 , E_2 – енергетичні потенціали джерела інформації та приймача сигналу; y_{02} – узагальнена сигнальна провідність каналу, тобто

$$i_{02} = F_0 \ln \left\{ 1 + \frac{(E_0 - E_2)^2 y_{02}}{P_n} \right\}. \quad (14)$$

Визначимо далі інформаційні потенціали як граничну величину інформації про стан досліджуваної системи:

$$I_0 = N \ln \left\{ 1 + \frac{E_0}{E_g} \right\}, \quad (15)$$

$$I_2 = N \ln \left\{ 1 + \frac{E_2}{E_g} \right\}, \quad (16)$$

де: N – розрядність даних у паралельному представленні; E_g – енергетичний поріг чутливості, звідки знаходимо:

$$E_0 = E_g \exp\{I_0/N\} - E_g, \quad (17)$$

$$E_2 = E_g \exp\{I_2/N\} - E_g. \quad (18)$$

Підставляючи (18), (17) у (14), матимемо

$$i_{02} = F_0 \ln \left\{ 1 + \frac{E_g y_{02}}{P_n} \cdot (\exp[I_0/N] - \exp[I_2/N]) \right\}. \quad (19)$$

Розкладаючи $i_{02}(I_0, I_2)$ у ряд в точці (0; 0) та обмежуючись лінійною частиною, отримаємо

$$i_{02} = \frac{F_0 E_g^2 y_{02}}{P_n N} (I_0 - I_2), \quad (20)$$

звідки

$$Y = \frac{F_0 E_g^2 y_{02}}{P_n N}. \quad (21)$$

(Саме такий вираз для інформаційної провідності введений у формулі (2)).

Якщо канал 1-2 поряд з передачею інформації виконує перетворення інформаційного потоку з оператором

$$i_{12} = \psi(i_{01}), \quad (22)$$

тоді отримуємо загальний вираз інформаційної провідності

$$Y = \psi \left(\frac{F_0 E_g^2 y_{12}}{P_n N} \right). \quad (23)$$

Грунтуючись на вказаних вище принципах, припущеннях та отриманих співвідношеннях, можна записати інформаційний аналог рівняння теплового балансу для системи отримання, переробки та доставки інформації «0-1-2» (з типовою базовою структурою)

$$\frac{\partial I_2}{\partial t} = Y_{02} (I_2 - I_0) + \frac{dI_1}{dt}, \quad (24)$$

де $\frac{dI_1}{dt}$ – інформаційна продуктивність підсистеми 1.

Розглянемо далі рівняння (24) у більш спрощеному вигляді, якщо відсутнє джерело інформації I_1 у каналі зв'язку

$$i_{02}^Z = Y_{02}^Z (I_0^Z - I_0^Z), \quad (25)$$

де Z – система відліку. Порівнюючи рівняння (1), (20), (25), зведемо аналогічні поняття термодинаміки та теорії інформації у таблицю, наведену нижче.

Для використання ізоморфізму інформаційних та енергетичних процесів у інформаційній теорії вимірювань у згаданій таблиці введені поняття інформаційного потенціалу I , розмірність якого $[I] = \text{біт}$, а також узагальненої інформаційної провідності Y , розмірність якої $[Y] = \text{с}^{-1}$.

Таблиця 1

Ізоморфізм понять термодинаміки та теорії інформації (лінійне наближення)

Теорія інформації			Термодинаміка			
Позначення	Назва	Одиниця вимірювання	Позначення	Назва	Одиниця вимірювання	
					Безперервна модель	Дискретна модель
I	Інформаційний потенціал	Біт	T	Температура	$^{\circ}\text{K}$	$^{\circ}\text{K}$
i	Інформаційний потік	Біт/с	q	Тепловий потік	$\text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$	$\text{Дж}/\text{с}$
I	Кількість інформації	Біт	Q	Кількість теплової енергії	Дж	Дж
Y	Узагальнена інформаційна провідність	с^{-1}	K	Коефіцієнт теплопровідності	$\text{Дж}/(^{\circ}\text{K} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с})$	$\text{Дж}/(^{\circ}\text{K} \cdot \text{с})$

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо задачу проектування вимірювальної системи для обліку кількості тепла, яка постачається (й марно витрачається!) тілу спортсмена, його конкретній точці поверхні при здійсненні ним конкретної рухової дії, яка є типовою для даного виду спорту й всебічно вдосконалюється й коригується при її (прискіпливому) біомеханічному аналізі, з метою визначення коефіцієнта корисної дії вказаного руху. З точки зору обліку у ІВС витрат тепла з поверхні тіла спортсмена здебільшого слід використати до 200 біологічно активних точок (БФЕ) тіла спортсмена. У такій ІВС витрати тепла вимірюються у кожній БАТ дистанційно та окремо, тобто інформація надходить різного роду (про інтенсивність температурного потоку, про коливання $\max$ та $\min$ температури, про періодичність температурних змін, про кореляцію температурних змін у БАТ і т.д.) приблизно з 700 джерел (використовуються різного роду датчики та сенсори). Структура такої ІВС зводиться до наступної: 1) кожний давач (датчик, сенсор) постачає «свою» інформацію до відповідного концентратора (їх, відповідно, 700 одиниць), а потім вся ця інформація надходить у обчислювальний блок мехатронної системи керування ІВС. Регулювання потоків інформації до обчислювального блоку здійснює система контролерів, які до того ж коригують, обробляють (частково) цю інформацію і представляють у зручній для комп'ютерного блоку формі. Контролери здатні у автоматичному режимі розраховувати й пропускну здатність ліній зв'язку, за якими здійснюють постійний моніторинг.

У процесі цієї задачі засобами інформаційної теорії вимірювань необхідно виконати велику кількість розрахунків, пов'язаних з оцінкою статистичних характеристик вже тепер 1400 інформативних сигналів. При використанні термодинамічної аналогії достатньо оцінити лише параметри I та Y , які внаслідок уніфікації схеми будуть однаковими для всіх джерел і каналів, що інформують про температурне поле БАТ тіла (шкіри) поверхні кінцівок спортсмена, і скористатися вже отриманим у термодинаміці результатом [20] – розв'язком задачі Коші про нагрівання стрижня точковими джерелами тепла

$$i_0 = \frac{Y_0}{2\sqrt{\pi Y t}} \int_0^{700} I(k) \exp\left\{-\frac{(700-k)}{4Yt}\right\} dk, \quad (26)$$

де k – номер концентратора від кінця ланцюга, що передає інформацію у обчислювальний блок ІВС з мехатронною системою управління.

6 ВИСНОВКИ

1. Опис інформаційних процесів у біомеханічному інжинірингу спорту вищих досягнень за допомогою рівняння (2), аналогічного рівнянню теплового балансу (1), дозволяє використовувати термодинамічну аналогію (та ентропійний підхід) для дослідження процесів у відповідних ІВС.

2. Можна передбачити отримання нових (доволі цікавих) наукових результатів у дослідженні критичних режимів розповсюдження інформації у великих ІВС, призначених для біомеханічного аналізу рухової діяльності спортсменів високої кваліфікації, причому вказані інформаційні системи можуть мати завади [21], а аналогія функціонування таких ІВС близька до систем з нелінійними дисипативними середовищами [20].

3. Отримані у роботі результати можуть у подальшому слугувати для уточнення й вдосконалення ІВС, які використовуються у біомеханічному інжинірингу спорту вищих досягнень при інформаційно-ентропійному підході в аналізі фізіологічних сигналів

засобами сучасних мехатронних систем керування, як на стадіях їх проєктування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

Література

1. Кузнецов А.А. Методы анализа обработки ЭЭГ сигналов: новые подходы к сбору информации. Монография. Владимир: Изд-во гос. ун-та, 2008. 140 с.
2. Mayorov O.Yu., Fritzsche M., Glukhov A.B., and oth. New neurodiagnostics technology for brain research on the basis of multivariate and nonlinear (deterministic chaos) analysis of EEG. Proc. of the European Congr. "Achievements in space medicine into health care practice and industry". Pabst. Science Publ., Berlin, 2003. P. 157-166.
3. Майоров О.Ю., Глухов А.Б., Фенченко В.Н., Прогнимак А.Б. Реализация метода смещения с помощью оценки размеров осей аттрактора по одномерной реализации динамической системы мозга. Труды Ин-та кибернетики НАНУ. Вып. 153. 2007. С. 3-11.
4. Редька І.В. Ентропійний підхід до аналізу ЕЕГ-сигналів. Міжнародна наукова конференція «Інформаційні системи та технології в медицині» (ISM-2018)», 28-30 листопада 2018 р., м.Харків. – Харків: ХНУРЕ, 2018. С. 234-236.
5. Лоскутов А.Ю., Козлов А.А., Хаханов И.М. Энтропия и прогноз временных рядов в теории динамических систем. Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т.17, №4. С. 98-113.
6. Pincus S.M., Gladstone S.V., Ehrenkranz R.A. A regularity statistic for medical data analysis. J. Clin. Monit. 1991. #7. P. 335-345.
7. Rinchman J.S., Moorman J.R. Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy. American J. Physiol. Heart Circ. Physiol. 2000. Vol. 278. P. H2039-2049.
8. Costa M., Costa M., Goldberger A.L., Peng C.K. Multiscale Entropy analysis of complex physiologic time series. Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89: 068102.
9. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. М.: Физматгиз, 1960. 210 с.
10. Островский Л.А. Основы общей теории электроизмерительных устройств. Л.: Энергия, 1971. 544.
11. Кавалеров Г.И., Манделштам С.М. Введение в информационную теорию измерений. М.: Энергия, 1974. 376 с.
12. Новицкий П.В. Основы информационной теории измерительных устройств. Л.: Энергия, 1968. 354 с.
13. Маликов В.Т., Дубовой В.М., Кветный Р.Н., Исматуллаев П.Р. Анализ измерительных информационных систем. Ташкент: 1984, 176 с.
14. Дубовий В.М. Програмування систем моделювання інформаційних процесів. К.: ІСДО України, 1994. 68 с.
15. Волькенштейн М.В. Энтропия и информация. М.: Наука, 1968. 418 с.
16. Мартин Н., Инглэнд Дж. Математическая теория энтропии. М.: Мир, 1988. 350 с.
17. Несис Е.И. Методы математической физики. М.: Просвещение, 1977. 199 с.
18. Дубовой В.М. Використання термодинамічної аналогії в інформаційно-енергетичній теорії вимірювань. Вісник ВПІ. 1997. №4. С. 14-18.
19. Харкевич А. А. Теория преобразователей. М.: Госэнергоиздат, 1948. 146 с.
20. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980. 458 с.
21. Дубовий В.М. Дослідження і оптимізація мереж ІВС методом моделювання динаміки інформаційних потоків. Вісник Вінницького політехнічного інституту. 1994. №1 С. 22-26.

References

1. Kuznetsov A.A. Metody analiza obrabotky ЭЭН syhnalov: новые podkhody k sboru ynformatsyy. Monohrafiya. Vladymyr: Yzd-vo hos. un-ta, 2008. 140 с.

2. Mayorov O.Yu., Fritzsche M., Glukhov A.B., and oth. New neurodiagnostics technology for brain research on the basis of multivariate and nonlinear (deterministic chaos) analysis of EEG. Proc. of the European Congr. "Achievements in space medicine into health care practice and industry". Pabst. Science Publ., Berlin, 2003. P. 157-166.
3. Maiorov O.Iu., Hlukhov A.B., Fenchenko V.N., Prohnymak A.B. Realyzatsiya metoda smeshcheniya s pomoshchiu otsenky razmerov osei attraktora po odnomernoi realyzatsyy dynamicheskoi systemy mozgha. Trudy Yn-ta kybernetyky NANU. Выр. 153. 2007. S. 3-11.
4. Redka I.V. Entropiyni pidkhyd do analizu EEH-syhnaliv. Mizhnarodna naukova konferentsiia «Informatsiini systemy ta tekhnologii v medytsyni» (ISM-2018)», 28-30 lystopada 2018 r., m.Kharkiv. – Kharkiv: KhNURE, 2018. S. 234-236.
5. Loskutov A.Iu., Kozlov A.A., Khakhanov Y.M. Entropiya y prohnoz vremennykh riadov v teoryi dynamicheskyykh system. Yzvestiya vuzov. Prykladnaia nelyneinaia dynamika. 2009. T.17, №4. S. 98-113.
6. Pincus S.M., Gladstone S.V., Ehrenkranz R.A. A regularity statistic for medical data analysis. J. Clin. Monit. 1991. #7. P. 335-345.
7. Rinchman J.S., Moorman J.R. Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy. American J. Physiol. Heart Circ. Physiol. 2000. Vol. 278. P. H2039-2049.
8. Costa M., Costa M., Goldberger A.L., Peng C.K. Multiscale Entropy analysis of complex physiologic time series. Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89: 068102.
9. Brylliuэн L. Nauka y teoryia ynformatsyy. M.: Fyzmathyz, 1960. 210 s.
10. Ostrovskiy L.A. Osnovy obshchei teoryi elektroyzmeritelnykh ustroystv. L.: Enerhiya, 1971. 544.
11. Kavalero H.Y., Mandelshtam S.M. Vvedenye v ynformatsyonnuu teoryiu yzmereniy. M.: Enerhiya, 1974. 376 s.
12. Novytskyi P.V. Osnovy ynformatsyonnoi teoryi yzmeritelnykh ustroystv. L.: Enerhiya, 1968. 354 s.
13. Malykov V.T., Dubovoi V.M., Kvetnyi R.N., Ysmatullaev P.R. Analiz yzmeritelnykh ynformatsyonnykh system. Tashkent: 1984, 176 s.
14. Dubovyi V.M. Prohramuvannia system modeliuvannia informatsiinykh protsesiv. K.: ISDO Ukrainy, 1994. 68 s.
15. Volkenshtein M.V. Entropiya y ynformatsiya. M.: Nauka, 1968. 418 s.
16. Martyn N., Ynhlend Dzh. Matematycheskaia teoryia entropyy. M.: Myr, 1988. 350 s.
17. Nesys E.Y. Metody matematycheskoi fizyky. M.: Prosveshchenye, 1977. 199 s.
18. Dubovoi V.M. Vykorystannia termodinamichnoi analohii v informatsiino-enerhetychnii teorii vymiriuvan. Visnyk VPI. 1997. №4. S. 14-18.
19. Kharkevych A. A. Teoryia preobrazovatelei. M.: Hosenerhoizdat, 1948. 146 s.
20. Khaken H. Synerhetyka. M.: Myr, 1980. 458 s.
21. Dubovyi V.M. Doslidzhennia i optymizatsiia merezh IVS metodom modeliuvannia dynamiky informatsiinykh potokiv. Visnyk Vinnytskoho politekhnichnoho instytutu. 1994. №1 S. 22-26.

Шамич Олександр Миколайович

Київський Національний університет будівництва та архітектури,

д.псих.н., професор

Повітрофлотський пр., 31, м. Київ, Україна 03037

sashamych@gmail.com

ORCID: 0000-0002-2188-2159,

Холодова Олеся Сергіївна

Інститут соціальних технологій Відкритого міжнародного університету розвитку людини «Україна»,

ст. викладач

вул. Львівська, 23, м. Київ, Україна

olesya.cholodova@gmail.com

ORCID: 0009-0008-5756-2780

Човнюк Юрій Васильович

Київський Національний університет будівництва та архітектури,
к.т.н., доцент

Повітрофлотський пр., 31, м. Київ, Україна 03037

ychovnyuk@ukr.net

ORCID: 0000-0002-0608-0203,

Остапущенко Ольга Павлівна

Київський Національний університет будівництва та архітектури,
к.т.н., доцент

Повітрофлотський пр., 31, м. Київ, Україна 03037

olga_ost_17@ukr.net

ORCID: 0000-0001-8114-349X

Чередніченко Петро Петрович

Київський Національний університет будівництва та архітектури,
доцент

Повітрофлотський пр., 31, м. Київ, Україна 03037

petro_che@ukr.net,

ORCID: 0000-0001-7161-661X

Для посилань:

Шамич О. М., Холодова О. С., Човнюк Ю. В., Остапущенко О. П., Чередніченко П. П. Біомеханічний інжиніринг у спорті вищих досягнень: інформаційно-ентропійний підхід в аналізі фізіологічних сигналів засобами мехатроніки. Механіка та математичні методи, 2025. Т. VII. №. 2. С. 86-100.

For references:

O. Shamykh., O. Kholodova, Yu. Chovnyuk, O. Ostapushchenko, P. Cherednichenko. (2025). Biomechanical engineering in high-performance sports: the information-entropy approach to the analysis of physiological signals through mechatronic systems. Mechanics and Mathematical Methods. VII (2). 86 –100.

Біомеханічний інжиніринг у спорті вищих досягнень: інформаційно-ентропійний підхід в аналізі фізіологічних сигналів засобами мехатроніки. © 2025 by Шамич О. М., Холодова О. С., Човнюк Ю. В., Остапущенко О. П., Чередніченко П. П. is licensed under CC BY 4.0

УДК 539.3

ВПЛИВ ЖОРСТКОГО ЕЛЕКТРОДА, РОЗТАШОВАНОГО НА МЕЖІ ПОДІЛУ ПРУЖНОГО БІМАТЕРІАЛУ, НА ЙОГО ДЕФОРМУВАННЯ

Лобода К. В.¹, Ходанен Т.В.¹

¹Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Анотація: У даній статті розглянуто задачу плоскої деформації двох різнорідних п'єзоелектричних півпросторів із жорстким електродом кінцевої довжини, розташованим на межі їх поділу. Вважається, що електрод може бути нерухомим, а п'єзоелектричний композит повертається на деякий кут, що еквівалентно випадку, коли віддалені переміщення відсутні, а задається кут повороту електроду. Крім того, на електроді може бути задане його внутрішнє електричне поле та сумарний заряд. Також враховано зміщення електроду в горизонтальному або вертикальному напрямку під дією віддаленого навантаження.

Для побудови розв'язку використано представлення механічних та електричних факторів через функцію, яка аналітична у всій комплексній площині за виключенням області електроду. За допомогою цих представлень проблема зведена до рівняння Рімана-Гільберта, для вказаної кусково-аналітичної функції зі стрибком по області електроду. Додаткові умови до цього рівняння витікають із умов на нескінченності і умов механічної та електричної рівноваги електроду. Виписано аналітичне представлення розв'язку з невідомими коефіцієнтами, що визначаються із вказаних вище умов. Визначення останніх проводиться шляхом розкладення розв'язку в ряд на нескінченності та знаходження перших коефіцієнтів розкладення.

На основі отриманого розв'язку виписано аналітичні вирази для переміщень поза електродом та стрибків напружень і електричних зміщень на його берегах. Встановлено, що вказані фактори мають осциляційну особливість у вершинах електроду. Додатковий аналіз дозволив отримати вирази для напружень і електричного зміщення на верхній грані електроду та вказати методику їх знаходження на нижній грані. Розглянуто частковий випадок деформації, спричиненої поворотом електроду навколо його середньої точки. Для цього випадку побудовано графіки переміщень поза електродом і напружень на його верхній і нижній гранях. Для підтвердження достовірності результатів за допомогою методу скінченних елементів розглянуто задачу, яка є близькою по суті до випадку дії на електрод сили у вертикальному напрямку. Встановлено хороше узгодження аналітичного розв'язку з результатами скінченно-елементного аналізу, що підтверджує адекватність методики і достовірність одержаних результатів.

Ключові слова: напруження, деформація, електрод, п'єзоелектричний біматеріал, задача лінійного спряження, метод скінченних елементів.

THE EFFECT OF A RIGID INTERFACE ELECTRODE ON THE DEFORMATION OF A BIMATERIAL PLATE

K. Loboda¹, T. Khodanenko¹

¹Oles Honchar Dnipro National University

Abstract: This article considers the problem of plane deformation of an absolutely rigid electrode located at the boundary of two dissimilar piezoelectric half-spaces. It is assumed that the electrode can be motionless, and the piezoelectric composite rotates by a certain angle, which is equivalent to the case when there are no remote displacements and the angle of rotation of the electrode is given. In addition, the internal electric field and total charge of the electrode can be given. The displacement of the electrode in the horizontal or vertical direction under the action of a remote load can also be taken into account.

To construct the solution, the representation of mechanical and electrical factors through a function that is analytic in the entire complex plane except for the electrode region was used. Applying these representations, the problem is reduced to the Riemann-Hilbert equation for the specified piecewise-

analytic function with a jump over the electrode region. Additional conditions to this equation follow from the conditions at infinity and the conditions of mechanical and electrical equilibrium of the electrode. An analytical representation of the solution with unknown coefficients determined from the above conditions is written. The latter is found by expanding the solution in a series at infinity and finding the first coefficients of the expansion.

Based on the obtained solution, analytical expressions were written for displacements outside the electrode and stress and electrical displacements jumps on its faces. It was found that the specified factors have an oscillating singularities at the electrode tips. By means of additional analysis, expressions for stresses and electrical displacement on the upper face of the electrode were found and the way of their determination on the lower face was indicated. A partial case of deformation caused by rotation of the electrode around its midpoint was considered. For this case, the graphs of displacements outside the electrode and stresses on its upper and lower faces were presented. To confirm the reliability of the results a problem that is essentially close to the case of a force acting on the electrode in the vertical direction was considered using the finite element method. Good agreement of the analytical solution with the results of finite element analysis was established, which confirms the correctness of the methodology and the obtained results.

Keywords: stress, deformation, electrode, piezoelectric bimaterial, problem of linear relationship, finite element method.

1 ВСТУП

Електродні шари, що розташовані на поверхні або на межі поділу компонент п'єзоелектричного біматеріалу, широко використовуються в різних електромеханічних пристроях. Міжфазне руйнування між електродним шаром і вбудованим матеріалом було визначено Нао et al [1] як основну причину несправності таких пристроїв, і тому дослідження внутрішніх і міжфазних електродів є дуже важливим для різних застосувань. У найпростіших випадках електроди можуть бути змодельовані або механічно жорсткими, або механічно м'якими включеннями. Отже, жорсткий можна розглядати як жорстке включення, тобто таке, що не зазнає деформацій під дією зовнішніх сил. Це є ідеалізацією, але в інженерній практиці розрахунку композитних матеріалів включення (наприклад, борні волокна), які є набагато жорсткішими від матриці, без втрати точності вважають абсолютно жорсткими. Таке припущення суттєво спрощує задачі, і в ряді випадків дозволяє отримати навіть їх точні аналітичні розв'язки.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Кількість наукових робіт, присвячених проблемі міжфазних електродів, є досить обмеженою. Зокрема, в роботі [2] розглянуто жорстке електрично провідне включення на межі поділу двох п'єзоелектричних матеріалів. В роботі [3] отримано аналітичні розв'язки для механічно м'якого електрода, розташованого на межі двох зв'язаних п'єзоелектричних півплощин, індукованих електричним зарядом. Крім того, точний аналітичний розв'язок для однієї тріщини на межі поділу, розташованої з одного боку електродного шару, було отримано в [4]. М'який електрод, вбудований на межі поділу двох п'єзоелектричних керамік під дією механічного навантаження та електричного поля, розглянуто в [5, 6]. Модель електричного пробою на кінцях м'якого електрода досліджено в [7], а взаємодія міжфазних тріщини і м'якого електрода вивчено в роботі [8].

Наскільки відомо авторам, жорсткий електрод на межі поділу двох п'єзокерамік під дією електромеханічного навантаження досліджений недостатньо. Дана робота якраз і присвячена цьому питанню.

Розглянемо абсолютно жорсткий електрод $a \leq x_1 \leq b$, $x_3 = 0$ між двома напівнескінченими керамічними просторами $x_3 > 0$ і $x_3 < 0$. Фізичні властивості півпросторів визначаються тензорами $c_{ijkl}^{(1)}$, $e_{ijk}^{(1)}$, $\chi_{ij}^{(1)}$ та $c_{ijkl}^{(2)}$, $e_{ijk}^{(2)}$, $\chi_{ij}^{(2)}$, де $c_{ijkl}^{(m)}$, $e_{ijk}^{(m)}$, $\chi_{ij}^{(m)}$ – компоненти пружної, п'єзоелектричної та діелектричної матриць відповідно. Обидва напівпростори мають клас симетрії $6mm$, поляризовані у напрямку осі x_3 [9].

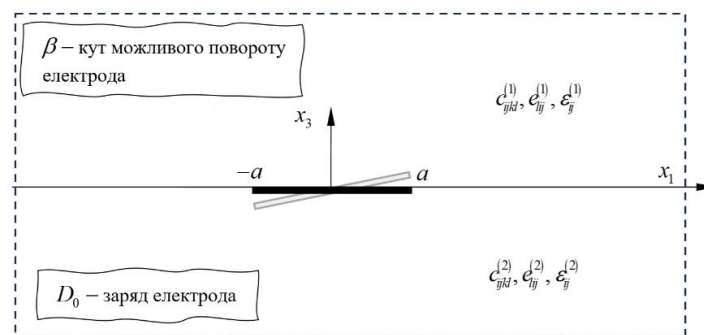


Рис. 1. Біматеріальна п'єзоелектрична площина з абсолютно жорстким електродом на межі поділу матеріалів

Вважаємо, що всі зовнішні впливи не залежить від координати x_2 , тому можна розглядати задачу плоскої деформації в площині (x_1, x_3) (рис. 1).

Позначаємо через $L' = [-a, a]$ область електрода, а через $L'' = (-\infty, \infty) \setminus L'$. Припускаємо, що електрод може бути електрично зарядженим, і повний електричний заряд поперечного перерізу електрода в площині (x_1, x_3) дорівнює D_0 .

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ціллю даної роботи є побудова аналітичного розв'язку задачі плоскої деформації двох різнорідних п'єзоелектричних півпросторів із жорстким зарядженим електродом кінцевої довжини, розташованого на межі їх поділу, який може повертатися в площині та/або зміщуватися в горизонтальному або вертикальному напрямку під дією віддаленого навантаження.

Досягнення цієї цілі потребувало вирішення таких задач:

- знаходження зручних представлень компонент електромеханічного стану через кусково-аналітичні функції;
- формулювання на основі цих представлень задачі лінійного спряження Гільберта-Рімана і отримання її точного розв'язку;
- отримання аналітичних формул для механічних переміщень, електричного потенціалу, напружень і електричних зміщень у будь-якій точці біматеріального простору;
- аналіз цих величин в околі електрода та його вершин;
- побудова графіків зміни механічних та електричних факторів вздовж електрода та на його продовженні;
- підтвердження достовірності результатів шляхом розгляду близької по суті задачі методом скінченних елементів і порівняння аналітичних і чисельних результатів.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Загальний розв'язок основних рівнянь. Замкнена система рівнянь п'єзостатики за відсутності масових сил і вільних зарядів у загальному випадку описується рівняннями [9]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k; \quad D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \chi_{ik} E_k; \quad (1)$$

$$\sigma_{ij,i} = 0; \quad D_{i,i} = 0; \quad \varepsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad E_i = -\varphi_{,i}, \quad i, j, k, l = 1, 3, \quad (2)$$

де u_i – компоненти вектора переміщень; $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – компоненти тензорів напружень та деформацій; E_i – компоненти вектора електричного поля; D_i – компоненти вектора електричної індукції; φ – електричний потенціал; кома означає похідні по відповідним координатним змінним. В умовах плоскої деформації $u_2 = 0$, $\sigma_{12} = 0$, $\sigma_{23} = 0$, $\varepsilon_{12} = 0$, $\varepsilon_{23} = 0$, $E_2 = 0$, $D_2 = 0$, а всі інші компоненти є функціями лише змінних x_1 та x_3 .

Із виключенням напружень і деформацій система (1), (2) зводиться до системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} (c_{ijkl} u_{k,j} + e_{ijl} \varphi_{,j})_{,li} &= 0; \\ (e_{ikl} u_k - \chi_{il} \varphi)_{,li} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Припускаючи, що всі поля не залежать від координати x_2 , розв'язок рівнянь (3) можна представити у вигляді [10]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{a}f(z), \quad (4)$$

де $z = x_1 + px_3$, $\mathbf{V} = [u_1, u_2, u_3, \varphi]^T$, а f є довільною функцією, яку необхідно визначити; $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$ і p є власним вектором і власним значенням рівняння:

$$[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2\mathbf{T}]\mathbf{a} = 0, \quad (5)$$

де $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ і $\mathbf{T}$ визначаються з коефіцієнтів рівнянь (3). Тут і далі верхній індекс T означає транспоновану матрицю.

Оскільки відповідно до [10] рівняння (5) не має дійсних власних значень, власне значення (5) з додатними уявними частинами позначено як p_s , а відповідні власні вектори (5) як $\mathbf{a}_s$ (нижній індекс s тут і далі приймає значення 1, 2, 3, 4). Загальний дійсний розв'язок рівнянь (1), (2) можна подати згідно з [10] у вигляді:

$$\mathbf{V} = \sum_{s=1}^4 [\mathbf{a}_s f_s(z_s) + \bar{\mathbf{a}}_s \bar{f}_s(\bar{z}_s)], \quad (6)$$

де $z_s = x_1 + p_s x_3$, а $f_s(*)$ є довільними аналітичними функціями.

Введемо вектор

$$\mathbf{t} = [\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, D_3]^T. \quad (7)$$

За допомогою рівнянь (1), (2) цей вектор можна подати у вигляді:

$$\mathbf{t} = \sum_{s=1}^4 [\mathbf{b}_s f'_s(z_s) + \bar{\mathbf{b}}_s \bar{f}'_s(\bar{z}_s)], \quad (8)$$

де компоненти векторів $\mathbf{b}_s$ визначені через коефіцієнти рівнянь (1) і (2), а штрих означає похідну по аргументу.

Використовуючи для зручності такі позначення [11]:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4], \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4], \mathbf{f}(z) = [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3), f_4(z_4)]^T,$$

вирази (8) і (10) можна подати у такому вигляді:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{f}(z) + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{f}}(\bar{z}), \mathbf{t} = \mathbf{B}\mathbf{f}'(z) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{f}}'(\bar{z}), \quad (9)$$

$$\text{де } \mathbf{f}'(z) = \left[\frac{df_1(z_1)}{dz_1}, \frac{df_2(z_2)}{dz_2}, \frac{df_3(z_3)}{dz_3}, \frac{df_4(z_4)}{dz_4} \right]^T.$$

Аналітичні формули для дослідження електродів на межі поділу матеріалів.
Застосуємо тепер отримані вище формули для дослідження біматеріальної області з міжфазним електродом. Граничні умови на межі поділу матеріалів можна подати у вигляді:

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{t}^{(2)}(x_1, 0) \text{ для } x_1 \in L'', \quad (10)$$

$$\mathbf{V}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{V}^{(2)}(x_1, 0) \text{ для } x_1 \in (-\infty, \infty), \quad (11)$$

де верхні індекси означають вектори (9), записані для верхньої і нижньої областей. Інші граничні умови будуть сформульовані пізніше.

У цьому випадку згідно з (6), (8) розв'язок рівнянь (1), (2) для кожної області після диференціювання можна записати так:

$$\mathbf{V}^{(m)}(x_1, x_3) = \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{f}^{(m)}(z) + \bar{\mathbf{A}}^{(m)} \bar{\mathbf{f}}^{(m)}(\bar{z}), \quad (12)$$

$$\mathbf{t}^{(m)}(x_1, x_3) = \mathbf{B}^{(m)} \mathbf{f}^{(m)}(z) + \bar{\mathbf{B}}^{(m)} \bar{\mathbf{f}}^{(m)}(\bar{z}). \quad (13)$$

Формули (12) та умови на межі поділу матеріалів

$$\mathbf{V}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{V}^{(2)}(x_1, 0) \text{ для } -\infty < x_1 < \infty$$

дають

$$\mathbf{A}^{(1)} \mathbf{f}^{(1)}(x_1) - \bar{\mathbf{A}}^{(2)} \bar{\mathbf{f}}^{(2)}(x_1) = \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{f}^{(2)}(x_1) - \bar{\mathbf{A}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}^{(1)}(x_1) \text{ для } -\infty < x_1 < \infty. \quad (14)$$

Отримане рівняння забезпечує неперервність похідних переміщень v'_1, v'_2, v'_3 і електричного поля по всій межі поділу. Ліва частина рівняння (14) є граничним значенням аналітичної функції в області $x_3 > 0$, а права частина цього рівняння є граничним значенням іншої аналітичної функції в області $x_3 < 0$. Рівняння (14) означає, що обидві функції можна аналітично продовжити на всю площину, тобто вони дорівнюють при $x_3 > 0$ і $x_3 < 0$ відповідно, вектор-функції $\mathbf{C}(z)$ аналітичній на всій площині.

Враховуючи, що всі електромеханічні характеристики обмежені на нескінченності, отримуємо, що

$$\mathbf{C}(z)|_{z \rightarrow \infty} = \mathbf{C}^{(0)} = \text{const.}$$

Однак, згідно з теоремою Ліувіля це означає, що $\mathbf{C}(z) = \mathbf{C}^{(0)}$ виконується на всій площині.

Отже, з рівнянь (14) маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{f}^{(1)}(z) - \bar{\mathbf{A}}^{(2)} \bar{\mathbf{f}}^{(2)}(z) &= \mathbf{C}^{(0)} \text{ для } x_3 > 0, \\ \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{f}^{(2)}(z) - \bar{\mathbf{A}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}^{(1)}(z) &= \mathbf{C}^{(0)} \text{ для } x_3 < 0, \end{aligned} \quad (15)$$

де $\mathbf{C}^{(0)}$ — довільний постійний вектор.

Оскільки $\mathbf{f}^{(m)}(z)$ є довільними вектор-функціями, можна вибрати $\mathbf{C}^{(0)} = \mathbf{0}$.

Припускаючи, що власні значення є різними, та беручи до уваги, що матриці в рівняннях (15) є неособливими [10], отримуємо:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}^{(2)}(z) &= (\bar{\mathbf{A}}^{(2)})^{-1} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{f}^{(1)}(z) \text{ для } x_3 > 0, \\ \bar{\mathbf{f}}^{(1)}(z) &= (\bar{\mathbf{A}}^{(1)})^{-1} \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{f}^{(2)}(z) \text{ для } x_3 < 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Далі введемо вектор

$$\langle \mathbf{t}(x_1) \rangle = \mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) - \mathbf{t}^{(2)}(x_1, 0). \quad (17)$$

Перші три компоненти цього вектора – це стрибки напружень, а четверта – стрибки електричного зміщення уздовж межі поділу матеріалів. Тут і далі кутові дужки $\langle f(x_1) \rangle$ деякої функції f означають стрибки цієї функції на межі поділу матеріалів. Використовуючи рівняння (13) і (16), рівняння (17) можна записати у вигляді:

$$\langle \mathbf{t}(x_1) \rangle = \mathbf{D} \mathbf{f}^{(1)}(x_1) + \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{f}}^{(1)}(x_1), \quad (18)$$

де $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{(2)} (\bar{\mathbf{A}}^{(2)})^{-1} \mathbf{A}^{(1)}$.

Приймаючи до уваги рівняння (12), вектор $\mathbf{V}^{(1)}$ на межі поділу матеріалів можна записати як

$$\mathbf{V}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{f}'^{(1)}(x_1) + \bar{\mathbf{A}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1). \quad (19)$$

Вводячи вектор-функцію $\mathbf{W}(z)$ за допомогою формули

$$\mathbf{W}(z) = \begin{cases} \mathbf{D} \mathbf{f}'^{(1)}(z) & \text{для } x_3 > 0, \\ -\bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(z) & \text{для } x_3 < 0, \end{cases} \quad (20)$$

виражаючи $\mathbf{f}'^{(1)}(z)$ для $x_3 > 0$ і $\bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(z)$ для $x_3 < 0$ через $\mathbf{W}(z)$, і підставляючи результати в (18), (19), отримуємо наступні вирази:

$$\langle \mathbf{t}(x_1) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (21)$$

$$\mathbf{V}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G} \mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{G}} \mathbf{W}^-(x_1), \quad (22)$$

де $\mathbf{G} = \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{D}^{-1}$ і $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}(x_1 + i0)$, $\mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1 - i0)$ – значення вектор-функції $\mathbf{W}(z)$ у верхній і нижній околах поверхні поділу матеріалів, відповідно.

Із рівнянь (21), (22) та умов неперервності (14) витікає, що вектор-функція $\mathbf{W}(z)$ є аналітичною у всій площині з розрізом по відрітку L' . Слід зазначити, що завдяки рівнянню (14), співвідношення (22) задовольняють умовам $\mathbf{V}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{V}^{(2)}(x_1, 0)$ для всього інтерфейсу $x_1 \in (-\infty, \infty)$.

Співвідношення (21), (22) можна використовувати для аналітичного розв'язання різних задач для одного або кількох жорстких електродів на межі поділу двох п'єзоелектричних матеріалів.

У подальшому основна увага буде приділена випадку плоскої деформації. Матриця $\mathbf{G}$ без других рядка і стовпця, що відповідають антиплоскій компоненті деформації, має таку структуру:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{13} & G_{14} \\ G_{31} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ig_{11} & g_{13} & g_{14} \\ g_{31} & ig_{33} & ig_{34} \\ g_{41} & ig_{43} & ig_{44} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

де всі g_{ij} дійсні.

Використовуючи методику, викладену в роботі [12], з рівняння (23) отримуємо наступні представлення:

$$u'_3(x_1, 0) - m_{j4} E_1(x_1, 0) + i m_{j1} u'_1(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \quad (24)$$

$$n_{j1} \langle \sigma_{13}(x_1, 0) \rangle + i [n_{j3} \langle \sigma_{33}(x_1, 0) \rangle + n_{j4} \langle D_3(x_1, 0) \rangle] = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1) \quad (25)$$

$$\text{де } F_j(z) = n_{j1} W_1(z) + i [n_{j3} W_3(z) + n_{j4} W_4(z)], \quad (26)$$

$m_{j4} = S_{j4}$, $m_{j1} = -i S_{j1}$, $n_{j1} = Y_{j1}$, $n_{j3} = -i Y_{j3}$, $n_{j4} = -i Y_{j4}$, причому m_{jl}, n_{jl} ($j, l = 1, 3, 4$) є дійсними; власні вектори $\mathbf{S}_j^T = [S_{j1}, S_{j3}, S_{j4}]^T$, що відповідають власним значенням γ_j ($j = 1, 3, 4$), знаходяться з системи:

$$(\gamma \mathbf{G}^T + \bar{\mathbf{G}}^T) \mathbf{S}^T = 0, \quad (27)$$

а вектор $\mathbf{Y}_j$ визначається так:

$$\mathbf{Y}_j = [Y_{j1}, Y_{j3}, Y_{j4}] = \mathbf{S}_j \mathbf{G} \quad (j=1,3,4).$$

При цьому власні значення мають вигляд:

$$\gamma_1 = \frac{1+\delta}{1-\delta}, \quad \gamma_3 = \gamma_1^{-1}, \quad \gamma_4 = 1,$$

$$\text{де } \delta^2 = \frac{g_{14}^2 g_{33} + g_{13}^2 g_{44} - 2g_{14} g_{13} g_{34}}{g_{11}(g_{33} g_{44} - g_{34}^2)} > 0, \text{ тобто воно дійсне.}$$

Формулювання та розв'язок задачі лінійного спряження. Припустимо, що на включені $u'_3(x_1, 0) = u'_{30}$, $E_1^{(1)}(x_1, 0) = E_{10}$, $u'_1(x_1, 0) = u'_{10}$. Це можна пояснити так, що включення повертається на деякий кут β відносно своєї середньої точки, і на ньому задано внутрішнє електричне поле E_{10} . Тоді $u'_{10} = \sin \beta$, а $u'_{10} = 1 - \cos \beta$. Тоді з рівняння (24) отримуємо:

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = u'_{30} - m_{j4} E_{10} + i m_{j1} u'_{10} \quad (j=1,3,4) \text{ для } x_1 \in L' \quad (28)$$

Вводячи нову функцію

$$\Phi_j(z) = F_j(z) + \eta_j - i\theta_j, \quad (29)$$

$$\text{де } \eta_j = \frac{-u'_{30} + m_{j4} E_{10}}{1 + \gamma_j}, \quad \theta_j = \frac{m_{j1} u'_{10}}{1 + \gamma_j}, \quad (j=1,3,4),$$

яка має ті ж властивості, що і $F_j(z)$, рівняння (28) набуває вигляду:

$$\Phi_j^+(x_1) + \gamma_j \Phi_j^-(x_1) = 0 \quad (j=1,3,4) \text{ для } x_1 \in L'. \quad (30)$$

Якщо вважати, що $F_j(z)|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, то

$$\Phi_j(z)|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow \eta_j - i\theta_j. \quad (31)$$

Враховуючи заміну (29), рівняння (24) і (25) можна переписати у вигляді:

$$u'_3(x_1, 0) - m_{j4} E_1(x_1, 0) + i m_{j1} u'_1(x_1, 0) = \Phi_j^+(x_1) + \gamma_j \Phi_j^-(x_1) - r_j(\eta_j - i\theta_j), \quad (32)$$

$$n_{j1} \langle \sigma_{13}(x_1, 0) \rangle + i [n_{j3} \langle \sigma_{33}(x_1, 0) \rangle + n_{j4} \langle D_3(x_1, 0) \rangle] = \Phi_j^+(x_1) - \Phi_j^-(x_1). \quad (33)$$

Інтегруючи (33) по електроду, отримуємо

$$\int_{-a}^a \{\Phi_j^+(x_1) - \Phi_j^-(x_1)\} dx_1 = n_{j1} Q_1 + i [n_{j3} Q_3 + n_{j4} D_0], \quad (34)$$

де $Q_1 = \int_{-a}^a \langle \sigma_{13}(x_1) \rangle dx_1$, $Q_3 = \int_{-a}^a \langle \sigma_{33}(x_1) \rangle dx_1$ – сумарні сили, що діють на електрод по напрямку осей x_1 і x_3 , відповідно. Ці сили можуть бути спричинені, наприклад, магнітними полями, які діють на електрод, що має магнітні властивості.

$$D_0 = \int_{-a}^a \langle D_3(x_1) \rangle dx_1 \text{ – сумарний заряд електрода.}$$

Беремо до уваги, що рівняння (34) може бути переписане у вигляді

$$\frac{\gamma_j + 1}{\gamma_j} \int_{-a}^a \Phi_j^+(x_1) dx_1 = n_{j1} Q_1 + i [n_{j3} Q_3 + n_{j4} D_0] \quad (j = 1, 3, 4). \quad (35)$$

Розв'язок задачі (30), (31) та (35) будемо розшукувати у формі [13]

$$\Phi_j(z) = \frac{c_{0j} + c_{1j} z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left(\frac{z + a}{z - a} \right)^{i\varepsilon_j} \quad (j = 1, 3, 4), \quad (36)$$

де c_0, c_1 – довільні константи, $\varepsilon_j = \frac{\ln \gamma_j}{2\pi}$.

При розкладенні на нескінченості функції $\Phi_j(z)$, представленої формулою (36), маємо:

$$\Phi_j(z) = c_{1j} + \{c_{0j} + 2ia\varepsilon_j c_{1j}\} \frac{1}{z} + O(z^{-2}). \quad (37)$$

Із представлень (31) і (34) отримаємо наступні рівняння:

$$c_{1j} = \eta_j - i\theta_j, \quad c_{0j} + 2ia\varepsilon_j c_{1j} = \{in_{j1} Q_1 - [n_{j3} Q_3 + n_{j4} D_0]\} / (2\pi). \quad (38)$$

Звідси отримуємо вирази для констант

$$c_{0j} = \frac{in_{j1} Q_1 - [n_{j3} Q_3 + n_{j4} D_0]}{2\pi} - 2ia\varepsilon_j (\eta_j - i\theta_j). \quad (39)$$

Підставляючи одержані вирази (38), (39) в (37), одержуємо розв'язок у вигляді:

$$\Phi_j(z) = \frac{\{in_{j1} Q_1 - [n_{j3} Q_3 + n_{j4} D_0]\} / (2\pi) + (\eta_j - i\theta_j)(z - 2ia\varepsilon_j a)}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left(\frac{z + a}{z - a} \right)^{i\varepsilon_j}. \quad (40)$$

Слід відзначити, що у формулі (40) має місце осциляційна сингулярність біля вершин електрода.

Враховуючи рівності (30) на L' і $\Phi_j^+(x_1) = \Phi_j^-(x_1) = \Phi_j(x_1)$ на L'' , із формул (32) отримуємо:

$$u'_3(x_1, 0) - m_{j4} E_1(x_1, 0) + im_{j1} u'_1(x_1, 0) = -r_j (\tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j) \quad \text{на } L', \quad (41)$$

$$u'_3(x_1, 0) - m_{j4} E_1(x_1, 0) + im_{j1} u'_1(x_1, 0) = r_j [\Phi_j(x_1) - (\tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j)] \quad \text{на } L''. \quad (42)$$

Розв'язок рівнянь (41) дає задані значення $u'_3(x_1, 0)$, $E_1^{(1)}(x_1, 0)$, $u'_1(x_1, 0)$ на електроді, а з (42) отримуємо:

$$u'_1(x_1, 0) = r_1 \operatorname{Im} [\Phi_1(x_1) - (\tilde{\sigma}_1 - i\tilde{\tau}_1)] / m_{11}, \quad (43)$$

а також наступну СЛАР:

$$u'_3(x_1, 0) - m_{14} E_1(x_1, 0) = r_1 \Psi_1(x_1),$$

$$u'_3(x_1, 0) - m_{44} E_1(x_1, 0) = r_4 \Psi_4(x_1),$$

де $\Psi_j(x_1) = \operatorname{Re} [\Phi_j(x_1) - (\tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j)]$,

із якої отримуємо:

$$\begin{aligned} u'_3(x_1, 0) &= [m_{14}r_4\Psi_4(x_1) - m_{44}r_1\Psi_1(x_1)] / (m_{14} - m_{44}), \\ E_1(x_1, 0) &= [r_4\Psi_4(x_1) - r_1\Psi_1(x_1)] / (m_{14} - m_{44}). \end{aligned} \quad (44)$$

Знайдемо стрибки напружень і електричного зміщення. На основі (30) рівняння (33) може бути записане у вигляді:

$$n_{j1} \langle \sigma_{13}(x_1, 0) \rangle + i [n_{j3} \langle \sigma_{33}(x_1, 0) \rangle + n_{j4} \langle D_3(x_1, 0) \rangle] = \frac{\gamma_j + 1}{\gamma_j} \Phi_j^+(x_1). \quad (45)$$

$$\text{Звідси } \langle \sigma_{13}(x_1, 0) \rangle = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 n_{11}} \text{Im} [\Phi_1^+(x_1)]. \quad (46)$$

Крім того, із (45) отримуємо:

$$n_{13} \langle \sigma_{33}(x_1, 0) \rangle + n_{14} \langle D_3(x_1, 0) \rangle = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} \text{Im} [\Phi_1^+(x_1)],$$

$$n_{43} \langle \sigma_{33}(x_1, 0) \rangle + n_{44} \langle D_3(x_1, 0) \rangle = 2 \text{Im} [\Phi_4^+(x_1)].$$

Із останньої системи знаходимо:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{33}(x_1, 0) \rangle &= \left\{ n_{44} \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} \text{Im} [\Phi_1^+(x_1)] - n_{14} 2 \text{Im} [\Phi_4^+(x_1)] \right\} / \Delta_0, \\ \langle D_3(x_1, 0) \rangle &= \left\{ -n_{43} \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} \text{Im} [\Phi_1^+(x_1)] + n_{13} 2 \text{Im} [\Phi_4^+(x_1)] \right\} / \Delta_0, \end{aligned} \quad (47)$$

де $\Delta_0 = n_{13}n_{44} - n_{43}n_{14}$.

Напруження та електричні зміщення на верхній і нижній гранях електроду.
Визначимо спочатку напруження та електричні зміщення на верхній грані електроду.
На основі (9) можемо записати:

$$\mathbf{t}^{(1)} = \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}'(z) + \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}'(\bar{z}) = 2 \text{Re} \{ \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}'^{(1)}(z) \},$$

а із (20) маємо:

$$\mathbf{f}'^{(1)}(z) = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W}(z), \quad \mathbf{D}^{-1} = (\mathbf{A}^{(1)})^{-1} \mathbf{G},$$

отже,

$$\mathbf{t}^{(1)} = 2 \text{Re} \{ \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W}(z) \}. \quad (48)$$

Рівняння (26) можна записати у векторно-матричній формі так:

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{N} \mathbf{W}(z),$$

$$\text{де } \mathbf{F}(z) = \begin{Bmatrix} F_1(z) \\ F_3(z) \\ F_4(z) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_{11} & in_{13} & in_{14} \\ n_{31} & in_{33} & in_{34} \\ n_{41} & in_{43} & in_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}(z) = \begin{Bmatrix} W_1(z) \\ W_3(z) \\ W_4(z) \end{Bmatrix}.$$

Звідси

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{F}(z). \quad (49)$$

Тоді на основі (45), (49) можемо записати

$$\mathbf{t}^{(1)} = 2 \operatorname{Re} \{ \boldsymbol{\Omega} \mathbf{F}(z) \}, \quad (50)$$

$$\text{де } \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}^{-1} = \mathbf{B}^{(1)} \left(\mathbf{A}^{(1)} \right)^{-1} \mathbf{G} \mathbf{N}^{-1}.$$

Аналогічно можна отримати формули для напружень та електричних зміщень на нижній грані електроду. Але їх можна також знайти через значення на верхній грані електроду і стрибки цих факторів, що визначені формулами (46) та (47).

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Чисельна реалізація отриманих формул проводилась для біматеріалу, скомпанованого із матеріалів PZT4 (верхня півплощина) і PZT5 (нижня). Всі величини, якщо не вказано протилежне, задаються в системі одиниць *СИ*. Вважалося, що на відрізку $L' = [-0,01; 0,01]$ межі поділу матеріалів знаходиться абсолютно жорсткий нерухомий електрод. При цьому біматеріальна область повертається за годинниковою стрілкою на кут $\beta = \arctg(u'_{30})$. НДС в околі електрода не зміниться, якщо припустити, що біматеріальна область на віддаленні від електрода нерухома, а сам електрод повертається на той же кут β , але проти годинникової стрілки. Результати розрахунку в останньому випадку проілюстровані на рисунках 2-4.

На рис. 2 наведено розподіл переміщення $10^6 u_3(x_1, 0)$ в правій частині електрода та на його продовженні. Суцільна і пунктирна лінії побудовані при $\beta_1 = 10^{-4}$ і $\beta_2 = 5 \times 10^{-5}$, відповідно. Видно, що для $0 \leq x_1 \leq 0,01$ переміщення співпадають з переміщеннями електрода, а на його продовженні різко згасають.

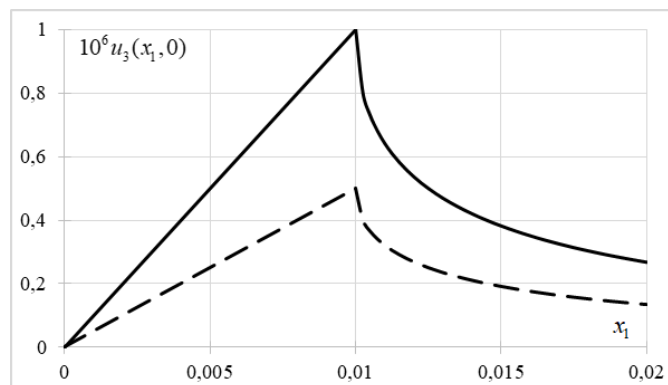


Рис. 2. Переміщення $10^6 u_3(x_1, 0)$ в правій частині електрода та на його продовженні

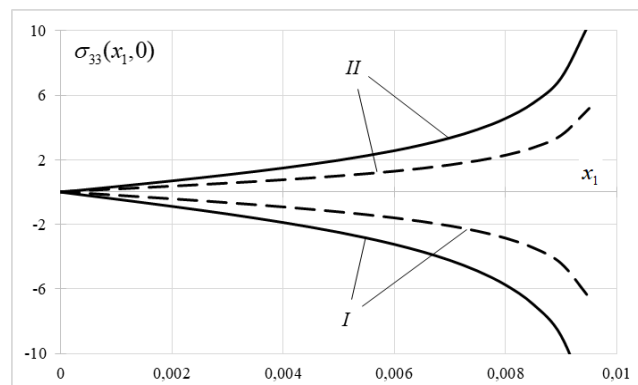


Рис. 3. Варіація напруження $10^{-6} \sigma_{33}(x_1, 0)$ на верхній (лінії I) і нижній (лінії II) гранях електрода при різних кутах його повороту

Зміна напруження $10^{-6} \sigma_{33}(x_1, 0)$ на верхній (лінії I) і нижній (лінії II) гранях правої частини електрода при $\beta_1 = 10^{-4}$ і $\beta_2 = 5 \times 10^{-5}$ показані на Рис. 3 суцільними і пунктирними лініями, відповідно. Видно, що оскільки електрод повертається проти годинникової стрілки, то напруження у його правій частині на верхній грані є стискальними, на нижній – розтягувальними.

Зміна електричного зміщення $D_3(x_1, 0)$ на верхній (лінії I) і нижній (лінії II) гранях правої частини електрода при $\beta_1 = 10^{-4}$ і $\beta_2 = 5 \times 10^{-5}$ показані на рис. 4 суцільними і пунктирними лініями, відповідно.

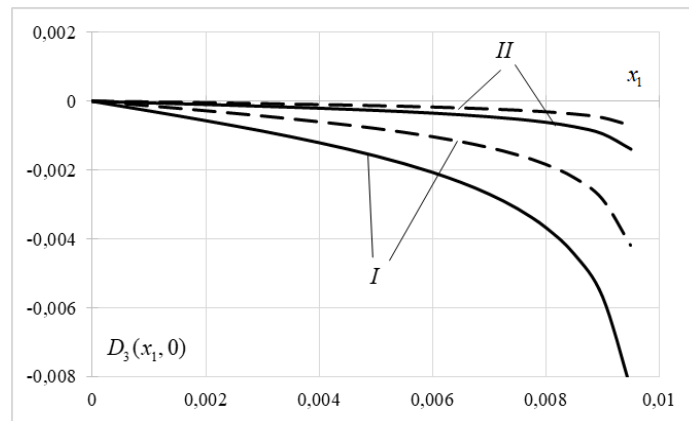


Рис. 4. Варіація електричного зміщення $D_3(x_1, 0)$ на верхній (лінії I) і нижній (лінії II) гранях електрода при різних кутах його повороту

Підтвердження достовірності результатів. Розглянемо задачу, яка близька по суті до випадку дії на електрод сили у вертикальному напрямку, а саме, розглянемо область, що скомпонована з двох жорстко зчеплених довгими торцями прямокутників розмірами 50мм*25мм. Вважаємо, що верхній прямокутник виготовлений із матеріалу PZT4, нижній – PZT5. В центральній частині межі поділу матеріалів знаходиться абсолютно жорсткий електрод довжиною 10мм. Верхній і нижній торці біматеріалу жорстко закріплені.

Припустимо, що під дією вертикальної сили електрод зміщується на 0,0001мм вгору. Для аналізу напружено-деформівного стану застосуємо метод скінченних елементів (МСЕ) в середовищі пакету Abaqus. Фрагмент сітки скінченних елементів в околі тріщини разом із полем вертикальних переміщень показаний на рис. 5.

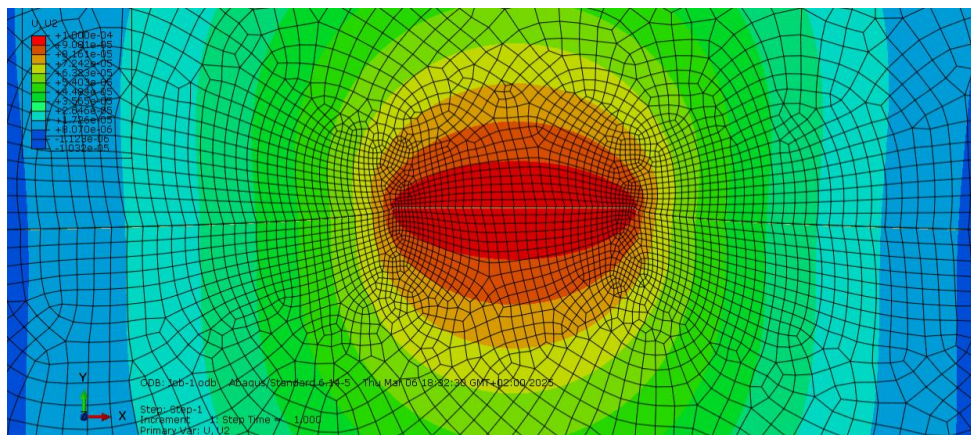


Рис. 5. Фрагмент сітки скінченних елементів в околі тріщини разом із полем вертикальних переміщень

Графіки напруження $10^{-6}\sigma_{33}(x_1)$ вздовж верхньої і нижньої сторін електрода показані суцільними лініями (I) на рисунках 6 і 7, відповідно. На основі цих результатів наближено знайдено, що головні вектори вказаних напружень дорівнюють $-1,2256 \times 10^4 \frac{H}{м}$ – для верхнього торця і $8,3569 \times 10^4 \frac{H}{м}$ – для нижнього. Враховуючи, що головний вектор напружень для нижнього торця, як і для верхнього, направлений вертикально вниз, одержуємо, що сумарна сила, яка тримає включення в рівновазі, дорівнює $2,0612 \times 10^4 \frac{H}{м}$.

Далі проведено розрахунок відповідно до результатів аналітичного аналізу при $Q_3 = 2,0612 \times 10^4 \frac{H}{м}$. Результати обчислення напружень $10^{-6}\sigma_{33}(x_1)$ вздовж верхньої і нижньої сторін електрода показані на рисунках 6 і 7 пунктирними лініями (II).

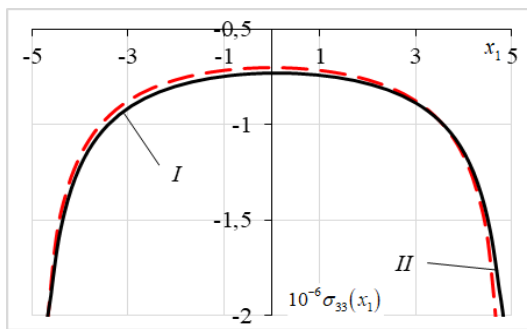


Рис. 6. Розподіл напружень вздовж верхнього торця

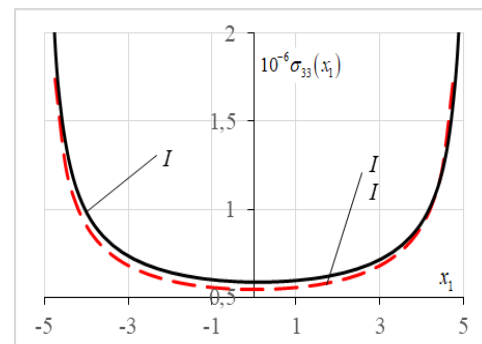


Рис. 7. Розподіл напружень вздовж нижнього торця

Із рисунків 6 і 7 видно дуже хороше узгодження аналітичного розв'язку з результатами скінченно-елементного аналізу: максимальне відхилення значень менше 1 %. Ця обставина підтверджує адекватність методики і достовірність одержаних результатів.

6 ВИСНОВОК

Розв'язана задача плоскої деформації двох різнорідних п'єзоелектричних півпросторів із жорстким зарядженим електродом кінцевої довжини, розташованого на межі їх поділу зміщення. Електронапружений стан може бути знайдений для випадків електрода в горизонтальному або вертикальному напрямку під дією віддаленого навантаження, його повороту відносно середньої точки, а також при наявності внутрішнього електричного поля та заряду електрода.

Для розв'язку задачі подано представлення (24), (25) механічних та електричних факторів через кусково-аналітичні функції, за допомогою яких проблема зведена до векторної задачі лінійного спряження, що розв'язана точно. На основі отриманого розв'язку виписані аналітичні вирази (43), (44) для переміщень електричного поля на поза електродом та стрибків напружень і електричних зміщень (46), (47) на його берегах. Встановлено, що вказані фактори мають осциляційну особливість у вершинах електрода. Знайдено також вираз (50) для вектора напружень і електричного зміщення на верхній грані електрода.

В результаті аналізу випадку повороту електрода навколо його середньої точки встановлено, що в правій його частині напруження є стискальними на верхній грані і розтягувальними на нижній, причому вони різко зростають при підході до вершин

електроду. З метою апробації результатів за допомогою методу скінченних елементів розв'язано близьку по суті задачу, але для області скінченних розмірів, і встановлено хороше узгодження аналітичного розв'язку з результатами скінченно-елементного аналізу.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають будь-яких фінансових чи нефінансових інтересів щодо матеріалів, представлених у цій статті, які слід розкривати.

Література

1. Hao T. H., Gong X., Suo Z. Fracture mechanics for the design of ceramic multilayer actuators. *J. Mech. Phys. Solids*. 1996. Volume 44. P. 23-48. doi: 10.1016/0022-5096(95)00068-2.
2. Deng W., Megui S. A. Analysis of conducting rigid inclusion at the interface of two dissimilar piezoelectric materials. *ASME J. Appl. Mech.* 1998. Volume 65. P. 76-84. doi: 10.1115/1.2789049.
3. Ru C. Q., Exact solution for finite electrode layers embedded at the interface of two piezoelectric half-planes. *J. Mech. Phys. Solids*. 2000. Volume 48. P. 693-708. doi: 10.1016/S0022-5096(99)00056-3.
4. Ru C. Q., Electrode-ceramic interfacial cracks in piezoelectric multilayer materials. *ASME J. Appl. Mech.* 2000. Volume 67. P. 255-261. doi: 10.1115/1.1303825.
5. Narita F., Yoshida M., Shindo Y. Electroelastic effect induced by electrode embedded at the interface of two piezoelectric half-planes. 2004. *Mechanics of Materials*. Volume 36. P. 999-1006. doi: 10.1016/j.mechmat.2003.04.003.
6. Loboda V., Mahnken R. On investigation of an electrode at the interface of a piezoelectric bimaterial space under remote electromechanical loading. *Acta Mech.* 2011. Volume 221(3). P. 327-339. doi: 10.1007/s00707-011-0519-6.
7. Loboda V., Sheveleva A., Chapelle F., Lapusta Y. A dielectric breakdown model for an electrode along an interface between two piezoelectric materials. *Engineering Fracture Mechanics*. 2020. Volume 224. 106809. doi: 10.1016/j.engfracmech.2019.106809.
8. Sheveleva A., Loboda V., Lapusta Y. A conductive crack and a remote electrode at the interface between two piezoelectric materials. *Applied Mathematical Modelling*. 2020. Volume 87. P. 287–299. doi: 10.1016/j.apm.2020.06.003.
9. Parton V. Z., Kudryavtsev B. A.: *Electromagnetoelasticity*. Gordon and Breach Science Publishers, New York. 1988. 526 p.
10. Suo Z., Kuo C.-M., Barnett D. M., Willis J. R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*. 1992. Volume 40. P. 739-765. doi: 10.1016/0022-5096(92)90002-J.
11. Soh A. K., Liu J. X., Fang D. N. Explicit expressions of generalized Barnett-Lothe tensors for anisotropic piezoelectric materials. *Int. J. Engng Sci.* 2001. Volume 39. P. 1803-1814. doi: 10.1016/S0020-7225(01)00018-0.
12. Herrmann K. P., Loboda V. V., Govorukha V. B. On contact zone models for an interface crack with electrically insulated crack surfaces in a piezoelectric biomaterial. *Int. J. Fract.* 2001. Volume 111. P. 203-227. doi: 10.1007/s10704-010-9465-x.
13. Muskhelishvili N. I. *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*. Springer Dordrecht. 1977. 732 p. doi: 10.1007/978-94-017-3034-1.

References

1. Hao, T. H., Gong, X., Suo, Z. (1996). Fracture mechanics for the design of ceramic multilayer actuators. *J. Mech. Phys. Solids*. Volume 44. P. 23-48.
2. Deng, W., Meguid, S. A. (1998). Analysis of conducting rigid inclusion at the interface of two dissimilar piezoelectric materials. *ASME J. Appl. Mech.* Volume 65. P. 76-84.
3. Ru, C. Q. (2000). Exact solution for finite electrode layers embedded at the interface of two piezoelectric half-planes. *J. Mech. Phys. Solids*. Volume 48. P. 693-708.
4. Ru, C. Q. (2000). Electrode-ceramic interfacial cracks in piezoelectric multilayer materials. *ASME J. Appl. Mech.* Volume 67. P. 255-261.

5. Narita, F., Yoshida, M., Shindo, Y. (2004). Electroelastic effect induced by electrode embedded at the interface of two piezoelectric half-planes. *Mechanics of Materials*. Volume 36. P. 999-1006.
6. Loboda, V., Mahnken, R. (2011). On investigation of an electrode at the interface of a piezoelectric bimaterial space under remote electromechanical loading. *Acta Mech.* Volume 221(3). P. 327-339.
7. Loboda V., Sheveleva A., Chapelle F., Lapusta Y. (2020). A dielectric breakdown model for an electrode along an interface between two piezoelectric materials. *Engineering Fracture Mechanics*. 2020. Volume 224. 106809.
8. Sheveleva A., Loboda V., Lapusta Y. (2020). A conductive crack and a remote electrode at the interface between two piezoelectric materials. *Applied Mathematical Modelling*. Volume 87. P. 287–299.
9. Parton, V. Z., Kudryavtsev, B. A. (1988). *Electromagnetoelasticity*. Gordon and Breach Science Publishers, New York. 526 p.
10. Suo, Z., Kuo, C.-M., Barnett, D. M., Willis, J. R. (1992). Fracture mechanics for piezoelectric ceramics. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*. Volume 40. P. 739-765.
11. Soh, A. K., Liu, J. X., Fang, D. N. (2001). Explicit expressions of generalized Barnett-Lothe tensors for anisotropic piezoelectric materials. *Int. J. Engng Sci.* Volume 39. P. 1803-1814.
12. Herrmann, K. P., Loboda, V. V., Govorukha, V. B. (2001). On contact zone models for an interface crack with electrically insulated crack surfaces in a piezoelectric biomaterial. *Int. J. Fract.* 2001. Volume 111. P. 203-227.
13. Muskhelishvili N. I. (1977) *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*. Springer Dordrecht. 732 p.

Лобода Кирило Володимирович

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
аспірант

пр. Науки, 72, Дніпро, Україна 49010

loboda.kirill@gmail.com

ORCID: 0009-0004-8241-7105

Ходанен Тетяна Володимирівна

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
к. ф.-м. н., доцент

пр. Науки, 72, Дніпро, Україна 49010

thod7474@gmail.com

ORCID: 0000-0001-9194-3634

Для посилань:

Лобода К. В., Ходатен Т. В. Вплив жорсткого електрода розташованого на межі поділу пружного біоматеріалу, на його деформування. *Механіка та математичні методи*, 2025. Т. VII. № 2. С. 101–115.

For references:

K. Loboda, T. Khodanen (2025). The effect of a rigid interface electrode on the deformation of a bimaterial plate. *Mechanics and Mathematical Methods*. VII (2). 101–115.

Вплив жорсткого електрода розташованого на межі поділу пружного біоматеріалу, на його деформування. © 2025 by Лобода К. В., Ходатен Т. В. is licensed under CC BY 4.0

УДК 514

ТРИВИМІРНІ ЗВІДНІ ПСЕВДОРИМАНОВІ ПРОСТОРИ

Лесечко О. В.¹, Соловйов А. А.²

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

²Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Анотація: У роботі досліджено спеціальні класи псевдоріманових просторів та взаємозв'язки між ними.

Розглянуто клас звідних псевдоріманових просторів. Встановлено характерні тотожності для цих просторів і доведено, що тензор другої валентності, який отримано з тензорної ознаки звідних просторів, комує з тензором Річчі цього простору. У випадку, якщо звідний простір є тривимірним показано, що цей тензор можна виразити як лінійну комбінацію метричного тензора та тензора Річчі, а його згортка з тензором Річчі може бути подана через сам цей тензор із певним коефіцієнтом. Крім того, для тривимірних звідних псевдоріманових просторів отримано явне представлення тензора Річчі через його згортку із самим собою та метричним тензором, з коефіцієнтом, який містить скалярну кривину.

Досліджено внутрішню геометрію двох можливих типів тривимірних звідних просторів. Перший тип це псевдоріманів простір, у якому матриця метричного тензора має блочно-діагональну структуру, у якій перша компонента залежить лише від першої координати, а інші компоненти з блоку рангу два залежать від другої та третьої координат. Аналогічно досліджено другий тип, також з блочно-діагональною структурою матриці метричного тензора, проте тут кожна компонента першого блоку рангу два залежать від першої та другої координат, тоді як остання компонента матриці метричного тензора залежить лише від третьої координати. Для загальної матриці метричного тензора для цих двох типів, а також для кожного з цих типів окремо отримано явні значення тензора другої валентності, який отримано з тензорної ознаки звідних просторів.

Центральним результатом дослідження є теорема, яка стверджує, що тривимірні звідні псевдоріманові простори за необхідністю є рекурентними і, як наслідок, Річчі-рекурентними.

Отримані результати можуть бути корисними для подальших досліджень у диференціальній геометрії, загальній теорії відносності та теоретичній механіці при моделюванні фізичних процесів.

Ключові слова: псевдоріманові простори; тривимірні простори; звідні простори; рекурентні простори; Річчі-рекурентні простори.

THREE-DIMENSIONAL REDUCIBLE PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES

Lesechko O. V.¹, Soloviov A. A.²

¹Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

²Odesa I. I. Mechnikov National University

Abstract: The paper investigates certain classes of pseudo-Riemannian spaces and the relationships between them.

The class of reducible pseudo-Riemannian spaces is considered. Characteristic identities for these spaces are established, and it is proven that the tensor of the second valence, derived from the tensor criterion of reducible spaces, commutes with the Ricci tensor of the space. In the case where the reducible space is three-dimensional, it is shown that this tensor can be expressed as a linear combination of the metric tensor and the Ricci tensor, and its contraction with the Ricci tensor can be represented in terms of itself with a certain coefficient. Furthermore, for three-dimensional reducible pseudo-Riemannian spaces, an explicit representation of the Ricci tensor is obtained through its contraction with itself and the metric tensor, with a coefficient that involves the scalar curvature.



The intrinsic geometry of two possible types of three-dimensional reducible spaces is examined. The first type is a pseudo-Riemannian space in which the metric tensor matrix has a block-diagonal structure, where the first component depends only on the first coordinate, while the remaining components in the rank-two block depend on the second and third coordinates. Similarly, the second type is studied, also featuring a block-diagonal structure of the metric tensor matrix; however, in this case, each component of the first rank-two block depends on the first and second coordinates, whereas the last component of the metric tensor matrix depends only on the third coordinate. Explicit values of the second-order tensor, derived from the tensor criterion of reducible spaces, are obtained for the general metric tensor matrix of these two types, as well as for each type separately.

The central result of the study is a theorem stating that three-dimensional reducible pseudo-Riemannian spaces are necessarily recurrent and, consequently, Ricci-recurrent.

The obtained results may be useful for further research in differential geometry, general relativity, and theoretical mechanics in the modeling of physical processes.

Keywords: pseudo-Riemannian spaces; three-dimensional spaces; reducible spaces; recurrent spaces; Ricci-recurrent spaces.

1 ВСТУП

Нехай V_n – псевдорімановий простір з метричним тензором g_{ij} , $n > 2$. Рімановий простір V_n називається (локально) звідним, якщо в деякому околі D кожної його точки M може бути вибрана така система координат $y^1, y^2, \dots, y^n$, відносно якої основна метрична форма має вигляд [1-3]:

$$I = g_{ab}(x^c) dx^a dx^b + g_{\alpha\beta}(x^\gamma) dx^\alpha dx^\beta, \quad a, b, c = 1, \dots, k, \quad \alpha, \beta, \gamma = k+1, \dots, n.$$

Тут g_{ab} передбачаються залежними тільки від $x^1, x^2, \dots, x^k$, а $g_{\alpha\beta}$ – тільки від $x^{k+1}, x^{k+2}, \dots, x^n$. Тим самим звідний рімановий простір V_n згідно означенню представляє собою добуток ріманового простору V_m (віднесеного до координат $x^1, x^2, \dots, x^k$) з основною метричною формою $g_{ab}(x^c) dx^a dx^b$ на рімановий простір V_{n-m} (віднесеного до координат $x^{k+1}, x^{k+2}, \dots, x^n$) з метричною формою $g_{\alpha\beta}(x^\gamma) dx^\alpha dx^\beta$. Таким чином матриця метричного тензора має вид [1, 4-6]

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11}(X) & \dots & g_{1k}(X) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{k1}(X) & \dots & g_{kk}(X) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & g_{k+1,k+1}(Y) & \dots & g_{k+1,n}(Y) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & g_{nk+1}(Y) & \dots & g_{nn}(Y) \end{pmatrix},$$

де $X = x^1, x^2, \dots, x^k$, $Y = x^{k+1}, x^{k+2}, \dots, x^n$.

Тензорною ознакою звідності псевдоріманового простору є існування в ньому двічі коваріантного симетричного коваріантно сталого ідемпотентного тензора a_{ij} , який не пропорційний метричному тензору [7, 8]:

$$\begin{cases} a_{ij,k} = 0 \\ a_{i\alpha} a_j^\alpha = a_{ij} \\ a_{ij} = a_{ji} \\ a_{ij} \neq c g_{ij} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Тут $_{,k}$ – знак коваріантної похідної у просторі V_n , обчисленою за формулою

$$a_{ij,k} = \partial_k a_{ij} - a_{\alpha j} \Gamma_{ik}^\alpha - a_{i\alpha} \Gamma_{jk}^\alpha,$$

$$\partial_k a_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k},$$

$$a_{\alpha j} \Gamma_{ik}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} \Gamma_{ik}^\alpha,$$

де за допомогою метричного тензора формулами

$$\Gamma_{ij}^h = g^{h\alpha} \Gamma_{ij,\alpha}$$

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \right)$$

визначаються символи Крістофеля другого роду, що є об'єктами афінної зв'язності Γ на V_n (її називають рімановою зв'язністю), а g^{ij} – елементи оберненої матриці метричного тензора g_{ij} . Ці формули також виконуються у дослідженнях [1, 6, 9 - 12] при відображеннях спеціальних типів просторів.

Умова інтегрування рівняння (1) з урахуванням тотожності Річчі має вигляд

$$a_{i\alpha} R_{jkl}^\alpha + a_{\alpha j} R_{ikl}^\alpha = 0, \quad (3)$$

де R_{ijk}^h – тензор Рімана, який визначається наступною формулою:

$$R_{\cdot ijk}^h = -\frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{k\alpha}^h + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^h$$

та задовольняє умовам:

$$\begin{aligned} R_{\cdot ijk}^h + R_{\cdot ikj}^h &= 0 \\ R_{\cdot (ijk)}^h &= 0 \\ R_{\cdot i(jk,l)}^h &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Тензор типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$R_{hijk} = g_{h\alpha} R_{\cdot ijk}^\alpha$$

називається тензором кривини V_n . Цей тензор було розглянуто у [4], окрім умов на тензор Рімана, він також задовольняє співвідношенням:

$$\begin{aligned} R_{hijk} + R_{ihjk} &= 0 \\ R_{hijk} + R_{hikj} &= 0 \\ R_{hijk} - R_{jkhi} &= 0 \end{aligned}$$

Тензор типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $R_{ij} = R_{\cdot ija}^\alpha$ називається тензором Річчі простору V_n . Він за необхідністю симетричний: $R_{ij} = R_{ji}$, а його слід: $R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ називається скалярною кривиною простору V_n . Дослідження з використанням цього об'єкту велись у [13-15].

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Спеціалізація псевдоріманових просторів, як засіб введення додаткових обмежень, має два основних джерела. Перше, це накладання геометричних умов на об'єкт, що вивчається, використання геометричних особливостей в дослідженні. Друге, це технологічні можливості, які виникають при використанні розроблених методів дослідження. Враховуючи обидві особливості, запропоновані методи спеціалізації псевдоріманових просторів по типу внутрішніх об'єктів. Зокрема, безпосередньо по виду метричного тензора.

Серед псевдоріманових просторів, що допускають спеціальний вид метрики в деякій системі координат, виділені звідні та напівзвідні простори. Вивчаються їх тензорні ознаки та, спираючись на це, деякі їх геометричні властивості.

Простори малої розмірності мають свої особливості як в методах дослідження, так і в отриманих результатах. Технічні труднощі, що виникають в процесі вивчення таких просторів, мають специфічний характер, а методи їх подолання лежать в основі досліджень просторів більшої розмірності.

В останні роки саме тривимірні простори стали об'єктом заснування нових методів. Тому вивчення тривимірних звідних просторів є актуальною темою дослідження. Робота ведеться локально, тензорними методами.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Спеціалізація псевдоріманових просторів є одним із ефективних методів дослідження в диференціальній геометрії. В нашому випадку, це можливість приведення метричного тензора псевдоріманового простору до спеціального виду в деякій системі координат. Такі псевдоріманові простори називаються майже звідними просторами. Майже звідними просторами є широкі класи псевдоріманових просторів із загальної теорії відносності, теорії геодезичних відображень, теорії квазі відображень та теорії конформних відображень, а також інших розділів диференціальної геометрії та топології.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

З урахуванням (4) проциклювавши рівняння (3) по індексах i, k, l отримаємо

$$a_{i\alpha} R^{\alpha}_{\cdot jkl} + a_{\alpha k} R^{\alpha}_{\cdot jli} + a_{\alpha l} R^{\alpha}_{\cdot jik} = 0. \quad (5)$$

Домножимо рівняння (5) на g^{jk} та згорнемо по індексах j, k

$$a_{i\alpha} R^{\alpha}_{\cdot l} - a_{\alpha l} R^{\alpha}_{\cdot i} = 0.$$

Двічі коваріантні тензори, які задовольняють співвідношенню

$$a_{i\alpha} A^{\alpha k_1 \dots k_n}_{j l_1 \dots l_m} = a_{j\alpha} A^{\alpha k_1 \dots k_n}_{i l_1 \dots l_m}.$$

називають комутуючими з тензором $A^{\alpha k_1 \dots k_n}_{i l_1 \dots l_m}$. Такого типу співвідношення було розглянуто у [16]. Таким чином, має місце

Теорема 1. В звідних псевдоріманових просторах тензор a_{ij} комутує з тензором Річчі R_{ij} .

У [17] було доведено, що у тривимірних псевдоріманових просторах тензор кривини записується у вигляді

$$R_{ijkl} = P_{il} g_{jk} - P_{ik} g_{jl} + P_{jk} g_{il} - P_{jl} g_{ik}. \quad (6)$$

Домножимо це рівняння на g^{jk} та згорнемо по індексах j, k :

$$R_{il} = P_{il} + P g_{il}, \quad (7)$$

тут $P = P_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$.

Далі, рівняння (7) домножимо на g^{il} та згорнемо по індексах i, l - $P = \frac{R}{4}$

і підставимо отримане значення P у співвідношення (7)

$$P_{il} = R_{il} - \frac{R}{4} g_{il}.$$

Отриманий вираз для P_{il} підставимо у (6)

$$R_{ijkl} = R_{il} g_{jk} - R_{ik} g_{jl} + R_{jk} g_{il} - R_{jl} g_{ik} - \frac{R}{2} (g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}) \quad (8)$$

а цей, далі, підставимо в умову інтегрування тензору a_{ij} , відображене у (3)

$$\begin{aligned} & a_{\alpha i} \left(R_{il}^{\alpha} g_{jk} - R_{ik}^{\alpha} g_{jl} + \delta_l^{\alpha} R_{jk} - \delta_k^{\alpha} R_{jl} - \frac{R}{2} (\delta_l^{\alpha} g_{jk} - \delta_k^{\alpha} g_{jl}) \right) + \\ & + a_{\alpha j} \left(R_{il}^{\alpha} g_{ik} - R_{ik}^{\alpha} g_{il} + \delta_l^{\alpha} R_{ik} - \delta_k^{\alpha} R_{il} - \frac{R}{2} (\delta_l^{\alpha} g_{ik} - \delta_k^{\alpha} g_{il}) \right) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Проальтернуємо отриману рівність по індексах j, l :

$$\begin{aligned} & a_{\alpha i} R_{il}^{\alpha} g_{jk} - a_{\alpha i} R_{jk}^{\alpha} g_{il} + a_{li} R_{jk} - a_{ji} R_{lk} - \frac{R}{2} a_{li} g_{jk} + \frac{R}{2} a_{ji} g_{lk} - \\ & - a_{\alpha j} R_{ik}^{\alpha} g_{il} + a_{li} R_{jk}^{\alpha} g_{ij} - a_{kj} R_{il} + a_{kl} R_{ij} + \frac{R}{2} a_{kj} g_{il} - \frac{R}{2} a_{kl} g_{ij} = 0 \end{aligned}$$

перепозначимо індекси i та l

$$\begin{aligned} & a_{\alpha i} R_{il}^{\alpha} g_{jk} - a_{\alpha l} R_{jk}^{\alpha} g_{il} + a_{il} R_{jk} - a_{jl} R_{ik} - \frac{R}{2} a_{il} g_{jk} + \frac{R}{2} a_{jl} g_{ik} - \\ & - a_{\alpha j} R_{ik}^{\alpha} g_{li} + a_{il} R_{jk}^{\alpha} g_{lj} - a_{kj} R_{li} + a_{ki} R_{lj} + \frac{R}{2} a_{kj} g_{li} - \frac{R}{2} a_{ki} g_{lj} = 0 \end{aligned}$$

та додамо до (9)

$$2a_{\alpha l} R_{il}^{\alpha} g_{jk} - 2a_{\alpha j} R_{jk}^{\alpha} g_{li} + 2a_{il} R_{jk} - 2a_{kj} R_{li} - R a_{il} g_{jk} + R a_{kj} g_{li} = 0.$$

Отриману рівність домножимо на g^{jk} та згорнемо по індексах j, k

$$2na_{\alpha l} R_{il}^{\alpha} - 2a_{\alpha \beta} R^{\alpha \beta} g_{il} + 2a_{il} R - 2a_{kj} R_{li} - 3R a_{il} + R a_{kj} g_{li} = 0 \quad (10)$$

і далі, домножимо на a_k^l з урахуванням ідемпотентності (2), згорнемо по індексу l та підставимо індекс k на l :

$$6a_{\alpha l} R_{il}^{\alpha} - 2a_{\alpha \beta} R^{\alpha \beta} a_{il} + 2R a_{il} - 2a a_l^{\alpha} R_{\alpha i} - 3R a_{il} + R a a_{il} = 0$$

або

$$a_{\alpha l} R_{il}^{\alpha} = a_{il} \frac{1}{2(3-a)} (2a_{\alpha \beta} R^{\alpha \beta} + R - R a).$$

Тобто згортка $a_{\alpha l} R_{il}^{\alpha}$ виражається через a_{il} з коефіцієнтом. Врахуємо це у (10):

$$a_{il} = g_{il} (3-a) \frac{2a_{\alpha \beta} R^{\alpha \beta} - R a}{2(3a_{\alpha \beta} R^{\alpha \beta} - R a)} + R_{il} \frac{a(3-a)}{3a_{\alpha \beta} R^{\alpha \beta} - R a}.$$

Таким чином, доведена

Теорема 2. Тензор a_{il} , отриманий із тензорної ознаки звідності тривимірних псевдоріманових просторів, має вигляд:

$$a_{il} = u g_{il} + v R_{il}, \quad (11)$$

де

$$u = (3-a) \frac{2a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - R a}{2(3a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - R a)},$$

$$v = (3-a) \frac{a}{3a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - R a}.$$

Зауважимо, що якщо $v=0$, то $a_{il} = u g_{il}$, що суперечить означенню a_{il} . Таким чином, $v \neq 0$.

У тотожність (3) підставимо (11)

$$v(R_{\alpha j} R^{\alpha}_{ikl} + R_{\alpha l} R^{\alpha}_{jkl}) = 0.$$

З огляду на те, що $v \neq 0$, отримуємо

$$R_{\alpha j} R^{\alpha}_{ikl} = -R_{\alpha i} R^{\alpha}_{jkl} \quad (12)$$

Вираз (8) домножимо на g^{im} , згорнемо по індексу i та підставимо замість індексу m індекс i

$$R^i_{jkl} = R^i_l g_{jk} - R^i_k g_{jl} + R_{jk} \delta^i_l - R_{jl} \delta^i_k - \frac{R}{2} (\delta^i_l g_{jk} - g \delta^i_k g_{jl}).$$

Отриманий вираз для тензора Рімана підставимо у (12)

$$\begin{aligned} R_{\alpha j} \left(R^{\alpha}_l g_{ik} - R^{\alpha}_k g_{il} + R_{ik} \delta^{\alpha}_l - R_{il} \delta^{\alpha}_k - \frac{R}{2} (\delta^{\alpha}_l g_{ik} - g \delta^{\alpha}_k g_{il}) \right) = \\ = -R_{\alpha i} \left(R^{\alpha}_l g_{jk} - R^{\alpha}_k g_{jl} + R_{jk} \delta^{\alpha}_l - R_{jl} \delta^{\alpha}_k - \frac{R}{2} (\delta^{\alpha}_l g_{jk} - g \delta^{\alpha}_k g_{jl}) \right) \end{aligned}$$

або

$$R_{\alpha j} R^{\alpha}_l g_{ik} - R_{\alpha j} R^{\alpha}_k g_{il} + R_{\alpha i} R^{\alpha}_l g_{jk} - R_{\alpha i} R^{\alpha}_k g_{jl} = \frac{R}{2} (R_{il} g_{jk} - R_{ik} g_{jl} + R_{jl} g_{ik} - R_{jk} g_{il}).$$

Цю рівність домножимо на g^{ik} , згорнемо по індексах i, k

$$3R_{\alpha j} R^{\alpha}_l - R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} g_{jl} = \frac{R}{2} (-R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{jl} + 3R_{jl}),$$

або

$$R_{\alpha j} R^{\alpha}_l = \frac{1}{6} (3R_{jl} R + g_{jl} (2R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - R^2)). \quad (13)$$

Таким чином, доведено

Наслідок 1. Тензор Річчі у звідних тривимірних псевдоріманових просторах задовольняє умовам (13).

При розгляданні (11) врахуємо ідемпотентність a_{il}

$$(u g_{i\alpha} + v R_{i\alpha})(u \delta_l^\alpha + v R_l^\alpha) = u g_{il} + v R_{il},$$

тобто

$$g_{il}(u^2 - u) = R_{il}v(1 - 2u) - v^2 R_{i\alpha} R_l^\alpha.$$

У отриману рівність підставимо вираз (13)

$$g_{il}u(u-1) = R_{il}v(1-2u) - v^2 \left(\frac{1}{6} (3R_{il}R + g_{il}(2R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - R^2)) \right),$$

або, зводячи подібні,

$$R_{il}v \left(1 - 2u - \frac{vR}{2} \right) = g_{il} \left(u^2 - u + \frac{v^2}{6} (2R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - R^2) \right).$$

Отримуємо, що тензор Річчі виражається через метричний тензор із деяким коефіцієнтом, що є характерним для просторів Ейнштейна, у яких кривина є сталою. Однак у просторах, розглянутих у цій роботі, це загалом не виконується. Таким чином, отримана тотожність справедлива лише у випадку, коли коефіцієнт при метричному тензорі та коефіцієнт при тензорі Річчі одночасно дорівнюють нулю. Враховуючи, що $v \neq 0$, отримуємо

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - 2u - \frac{vR}{2} = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u^2 - u + \frac{v^2}{6} (2R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - R^2) = 0 \end{array} \right. \quad (15)$$

Рівність (11) продиференціюємо коваріантно за напрямком x^m з урахуванням коваріантної сталості тензору a_{il}

$$u_{,m} g_{il} + v_{,m} R_{il} + v R_{il,m} = 0 \quad (16)$$

та домножимо на g^{il} , згорнемо по індексах i, l

$$-3u_{,m} = v_{,m} R + v R_{,m} \quad (17)$$

З іншого боку, продиференціюємо коваріантно за напрямком x^m рівність (15)

$$-4u_{,m} = v_{,m} R + v R_{,m} \quad (18)$$

Віднімемо (18) від (17) і отримаємо

$$u_{,m} = 0. \quad (19)$$

Рівність (17) у зв'язку з (19) набуває вигляду

$$v_{,m} R + v R_{,m} = 0. \quad (20)$$

З огляду на те, що v та R – інваріанти, їх коваріантна похідна є звичайною похідною, і тому ми отримали звичайне диференціальне рівняння першого порядку зі змінними, що відокремлюються. Інтегруючи частини рівності (20) отримуємо

$$\int \frac{\partial v}{v} = -\int \frac{\partial R}{R}, \quad \ln |v| = -\ln |R| + \ln C_0,$$

або

$$v = \frac{C_0}{R}. \quad (21)$$

Врахуємо (19) у (16)

$$R_{il,m} = -\frac{v_{,m}}{v} R_{il} \quad (22)$$

та у (17)

$$R_{,m} = -\frac{v_{,m}}{v} R. \quad (23)$$

Підставляючи (23) у (22), отримуємо, що

$$R_{il,m} = \frac{R_{,m}}{R} R_{il}. \quad (24)$$

У [18] було визначено Річчі-рекурентні простори. Псевдорімановий простір V_n називається Річчі-рекурентним, якщо в ньому існує ненульовий вектор ρ_i , для якого виконується умова $R_{ij,k} = \rho_k R_{ij}$.

Таким чином, доведена

Теорема 3. Тривимірні звідні псевдоріманові простори за необхідністю Річчі-рекурентні.

Псевдорімановий простір V_n називається рекурентним, якщо в ньому існує ненульовий вектор ρ_i , для якого виконується умова $R_{hijk,m} = \rho_m R_{hijk}$.

Рівність (8) продиференціюємо коваріантно за напрямком x^m

$$R_{ijkl,m} = R_{il,m} g_{jk} - R_{ik,m} g_{jl} + R_{jk,m} g_{il} - R_{jl,m} g_{ik} - \frac{R_{,m}}{2} (g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}).$$

Враховуючи (23) та (24) послідовно отримуємо

$$\begin{aligned} R_{ijkl,m} &= \frac{R_{,m}}{R} R_{il} g_{jk} - \frac{R_{,m}}{R} R_{ik} g_{jl} + \frac{R_{,m}}{R} R_{jk} g_{il} - \frac{R_{,m}}{R} R_{jl} g_{ik} - \frac{R_{,m}}{R} \frac{R}{2} (g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}). \\ R_{ijkl,m} &= \frac{R_{,m}}{R} \left(R_{il} g_{jk} - R_{ik} g_{jl} + R_{jk} g_{il} - R_{jl} g_{ik} - \frac{R}{2} (g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}) \right) \\ R_{ijkl,m} &= \frac{R_{,m}}{R} R_{ijkl}. \end{aligned}$$

Таким чином, доведено

Наслідок 2. Тривимірні звідні псевдоріманові простори за необхідністю рекурентні.

Рівність (19) говорить про те, що інваріант u – це деяка константа, враховуючи (21) у (14) отримуємо явний вираз цієї константи

$$u = \frac{2 - C_0}{4}. \quad (25)$$

Підставляючи (25) та (21) у (15) отримуємо, що друга згортка тензору Річчі з самим собою $R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}$ виражається через квадрат скалярної кривини з деяким коефіцієнтом

$$R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} = R^2 \frac{C_1}{2}, \quad C_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2C_0^2 + 3(1 - C_0^2)}{2C_0^2}.$$

Таким чином, рівність (13) набуває вигляду

$$R_{\alpha j} R_l^\alpha = \frac{R}{6} (3R_{jl} + g_{jl} R(C_1 - 1)).$$

4 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Тривимірні звідні псевдоріманові простори існують двох типів в залежності від структури метричного тензора. Назвемо V_3 тривимірним звідним псевдорімановим простором I типу, якщо його метричний тензор має наступний вид:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11}(x^1) & 0 & 0 \\ 0 & g_{22}(x^2, x^3) & g_{23}(x^2, x^3) \\ 0 & g_{32}(x^2, x^3) & g_{33}(x^2, x^3) \end{pmatrix}$$

і II типу, якщо метричний тензор V_3 наступного виду

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11}(x^1, x^2) & g_{12}(x^1, x^2) & 0 \\ g_{21}(x^1, x^2) & g_{22}(x^1, x^2) & 0 \\ 0 & 0 & g_{33}(x^3) \end{pmatrix}$$

відповідно.

Розглянемо вираз (6) як систему лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими P_{ij} одразу для двох вказаних типів, тобто враховуючи, що лише компоненти g_{13}, g_{31} матриці метричного тензора дорівнюють нулю:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11}(x^1, x^2, x^3) & g_{12}(x^1, x^2) & 0 \\ g_{21}(x^1, x^2) & g_{22}(x^1, x^2, x^3) & g_{23}(x^2, x^3) \\ 0 & g_{32}(x^2, x^3) & g_{33}(x^1, x^2, x^3) \end{pmatrix}$$

З урахуванням властивостей тензора Рімана, отримуємо систему з 6 рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{1212} - 2P_{12}g_{12} + P_{11}g_{22} + P_{22}g_{11} = 0 \\ R_{1213} - P_{13}g_{12} + P_{11}g_{23} + P_{23}g_{11} = 0 \\ R_{1223} - P_{13}g_{22} + P_{12}g_{23} + P_{23}g_{12} = 0 \\ R_{1313} + P_{11}g_{33} + P_{33}g_{11} = 0 \\ R_{2323} - 2P_{23}g_{23} + P_{22}g_{33} + P_{33}g_{22} = 0 \\ R_{1323} - P_{13}g_{23} + P_{12}g_{33} = 0 \end{array} \right.$$

Розв'язком цієї системи будуть наступні значення P_{ij}

$$\begin{aligned} P_{11} &= M \left(-(\Delta g - g_{11}g_{23}^2)R_{1323}g_{12} + (2\Delta g + g_{12}^2g_{33})R_{1213}g_{23} - R_{1212}\Delta g g_{33} - \right. \\ &\quad \left. - R_{1223}g_{11}g_{12}g_{23}g_{33} - R_{1313}\Delta g g_{22} + R_{2323}\Delta g g_{11} \right); \\ P_{12} &= M \left(((\Delta g + g_{11}g_{23}^2)g_{12} - 2\Delta g g_{22})R_{1323} + (g_{12} - 2g_{22})R_{1213}g_{12}g_{23}g_{33} - \right. \\ &\quad \left. - (g_{12}g_{33} - 2g_{22}g_{33} + 2g_{23}^2)R_{1223}g_{11}g_{23} + R_{1212}g_{12}g_{23}^2g_{33} + R_{1313}g_{12}g_{22}g_{23}^2 - R_{2323}g_{11}g_{12}g_{23}^2 \right); \\ P_{13} &= M \left((g_{12} - 2g_{22})R_{1213}g_{12}g_{33} - (g_{12}g_{33} - 2g_{22}g_{33} + 2g_{23}^2)R_{1223}g_{11}g_{33} - \right. \\ &\quad \left. - (2\Delta g - g_{11}g_{12}g_{33} + g_{12}^2g_{33})R_{1323}g_{23} + R_{1212}g_{12}g_{23}g_{33}^2 + \right. \\ &\quad \left. + R_{1313}g_{12}g_{22}g_{23}g_{33} - R_{2323}g_{11}g_{12}g_{23}g_{33} \right); \\ P_{22} &= \frac{M}{g_{11}} \left(-(2g_{12}g_{33} - 3g_{22}g_{33} + 2g_{23}^2)R_{1223}g_{11}g_{12}g_{23} + (2g_{11}g_{12}g_{23}^2 - g_{11}g_{22}g_{33}^2 + \right. \\ &\quad \left. + g_{12}^2g_{22}g_{33})R_{1323}g_{12} - (g_{11}g_{22}g_{33}^2 - 3g_{11}g_{22}g_{23}^2g_{33} + 2g_{11}g_{23}^4 - g_{12}^2g_{22}g_{33}^2)R_{1212} - \right. \\ &\quad \left. - (-2g_{11}g_{12}g_{22}g_{33} + 2g_{11}g_{12}g_{23}^2 + 2g_{11}g_{22}g_{33}^2 - 2g_{11}g_{22}g_{23}^2 + g_{12}^2g_{22}g_{33})R_{1213}g_{23} - \right. \\ &\quad \left. - ((\Delta g + g_{11}g_{23}^2)g_{12} - g_{11}g_{12}g_{23}^2 - g_{11}g_{22}g_{33}^2 + g_{11}g_{22}g_{23}^2 + g_{12}^2g_{22}g_{33} - g_{12}^2g_{23}^2)R_{1313}g_{22} + \right. \\ &\quad \left. + ((\Delta g + g_{11}g_{23}^2)g_{12} - g_{11}g_{12}g_{23}^2 - g_{11}g_{22}g_{33}^2 + g_{11}g_{22}g_{23}^2 + g_{12}^2g_{22}g_{33} - g_{12}^2g_{23}^2)R_{2323}g_{11} \right); \\ P_{23} &= M \left((g_{22}g_{33} - 2g_{23}^2)R_{1212}g_{23}g_{33} + (g_{22}g_{33} - g_{23}^2)R_{1313}g_{22}g_{23} - (g_{22}g_{33} - g_{23}^2)R_{2323}g_{11}g_{23} + \right. \\ &\quad \left. + (g_{12} - g_{22})R_{1323}g_{12}g_{23}g_{33} - (g_{12}g_{33} - 2g_{22}g_{33} + g_{23}^2)R_{1223}g_{12}g_{33} + \right. \\ &\quad \left. + (g_{12}g_{22}g_{33} - g_{12}g_{23}^2 - 2g_{22}^2g_{33} + 2g_{22}g_{23}^2)R_{1213}g_{33} \right); \\ P_{33} &= \frac{M}{g_{11}} \left(((\Delta g - g_{11}g_{23}^2)R_{1323}g_{12}g_{33} - (2\Delta g + g_{12}^2g_{33})R_{1213}g_{23}g_{33} - (\Delta g g_{12}g_{33} + g_{11}g_{22}g_{33}^2 - \right. \\ &\quad \left. - 3g_{11}g_{22}g_{23}^2g_{33} + 2g_{11}g_{23}^4 - g_{12}^2g_{22}g_{33}^2 + g_{12}^2g_{23}^2g_{33})R_{1313} + \right. \\ &\quad \left. + R_{1212}\Delta g g_{33}^2 + R_{1223}g_{11}g_{12}g_{23}g_{33}^2 - R_{2323}\Delta g g_{11}g_{33} \right); \end{aligned}$$

де Δg – це визначник відповідної матриці метричного тензору;

$$M = \frac{1}{\Delta g g_{12} g_{33} + 2\Delta g g_{22} g_{33} - 2\Delta g g_{23}^2 - g_{12}^2 g_{23} g_{33}}.$$

Підставимо отримані значення у (7) з урахуванням $P = \frac{R}{4}$ і отримаємо відповідні значення для тензору Річчі:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{Rg_{11}}{4} + M \left(-(\Delta g - g_{11} g_{23}^2) R_{1323} g_{12} + (2\Delta g + g_{12}^2 g_{33}) R_{1213} g_{23} - R_{1212} \Delta g g_{33} - \right. \\ &\quad \left. - R_{1223} g_{11} g_{12} g_{23} g_{33} - R_{1313} \Delta g g_{22} + R_{2323} \Delta g g_{11} \right); \\ R_{12} &= \frac{Rg_{12}}{4} + M \left(((\Delta g + g_{11} g_{23}^2) g_{12} - 2\Delta g g_{22}) R_{1323} + (g_{12} - 2g_{22}) R_{1213} g_{12} g_{23} g_{33} - \right. \\ &\quad \left. - (g_{12} g_{33} - 2g_{22} g_{33} + 2g_{23}^2) R_{1223} g_{11} g_{23} + R_{1212} g_{12} g_{23}^2 g_{33} + R_{1313} g_{12} g_{22} g_{23}^2 - R_{2323} g_{11} g_{12} g_{23}^2 \right); \\ R_{13} &= M \left((g_{12} - 2g_{22}) R_{1213} g_{12} g_{33} - (g_{12} g_{33} - 2g_{22} g_{33} + 2g_{23}^2) R_{1223} g_{11} g_{33} - \right. \\ &\quad \left. - (2\Delta g - g_{11} g_{12} g_{33} + g_{12}^2 g_{33}) R_{1323} g_{23} + R_{1212} g_{12} g_{23} g_{33}^2 + \right. \\ &\quad \left. + R_{1313} g_{12} g_{22} g_{23} g_{33} - R_{2323} g_{11} g_{12} g_{23} g_{33} \right); \\ R_{22} &= \frac{Rg_{22}}{4} + \frac{M}{g_{11}} \left(-(2g_{12} g_{33} - 3g_{22} g_{33} + 2g_{23}^2) R_{1223} g_{11} g_{12} g_{23} + (2g_{11} g_{12} g_{23}^2 - g_{11} g_{22}^2 g_{33} + \right. \\ &\quad \left. + g_{12}^2 g_{22} g_{33}) R_{1323} g_{12} - (g_{11} g_{22}^2 g_{33}^2 - 3g_{11} g_{22} g_{23}^2 g_{33} + 2g_{11} g_{23}^4 - g_{12}^2 g_{22} g_{33}^2) R_{1212} - \right. \\ &\quad \left. - (-2g_{11} g_{12} g_{22} g_{33} + 2g_{11} g_{12} g_{23}^2 + 2g_{11} g_{22}^2 g_{33} - 2g_{11} g_{22} g_{23}^2 + g_{12}^2 g_{22} g_{33}) R_{1213} g_{23} - \right. \\ &\quad \left. - ((\Delta g + g_{11} g_{23}^2) g_{12} - g_{11} g_{12} g_{23}^2 - g_{11} g_{22}^2 g_{33} + g_{11} g_{22} g_{23}^2 + g_{12}^2 g_{22} g_{33} - g_{12}^2 g_{23}^2) R_{1313} g_{22} + \right. \\ &\quad \left. + ((\Delta g + g_{11} g_{23}^2) g_{12} - g_{11} g_{12} g_{23}^2 - g_{11} g_{22}^2 g_{33} + g_{11} g_{22} g_{23}^2 + g_{12}^2 g_{22} g_{33} - g_{12}^2 g_{23}^2) R_{2323} g_{11} \right); \\ R_{23} &= \frac{Rg_{23}}{4} + M \left((g_{22} g_{33} - 2g_{23}^2) R_{1212} g_{23} g_{33} + (g_{22} g_{33} - g_{23}^2) R_{1313} g_{22} g_{23} - \right. \\ &\quad \left. - (g_{22} g_{33} - g_{23}^2) R_{2323} g_{11} g_{23} + (g_{12} - g_{22}) R_{1323} g_{12} g_{23} g_{33} - \right. \\ &\quad \left. - (g_{12} g_{33} - 2g_{22} g_{33} + g_{23}^2) R_{1223} g_{12} g_{33} + (g_{12} g_{22} g_{33} - g_{12} g_{23}^2 - 2g_{22}^2 g_{33} + 2g_{22} g_{23}^2) R_{1213} g_{33} \right); \\ R_{33} &= \frac{Rg_{33}}{4} + \frac{M}{g_{11}} \left((\Delta g - g_{11} g_{23}^2) R_{1323} g_{12} g_{33} - (2\Delta g + g_{12}^2 g_{33}) R_{1213} g_{23} g_{33} - \right. \\ &\quad \left. - (\Delta g g_{12} g_{33} + g_{11} g_{22}^2 g_{33}^2 - 3g_{11} g_{22} g_{23}^2 g_{33} + 2g_{11} g_{23}^4 - g_{12}^2 g_{22} g_{33}^2 + g_{12}^2 g_{23}^2 g_{33}) R_{1313} + \right. \\ &\quad \left. + R_{1212} \Delta g g_{33}^2 + R_{1223} g_{11} g_{12} g_{23} g_{33}^2 - R_{2323} \Delta g g_{11} g_{33} \right). \end{aligned}$$

Далі, отримані значення для тензору Річчі підставимо у (11) і отримаємо відповідні значення для тензора a_{ij} :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{2} g_{11} + \frac{C_0 M}{R} \left(-(\Delta g - g_{11} g_{23}^2) R_{1323} g_{12} + (2\Delta g + g_{12}^2 g_{33}) R_{1213} g_{23} - R_{1212} \Delta g g_{33} - \right. \\
 &\quad \left. - R_{1223} g_{11} g_{12} g_{23} g_{33} - R_{1313} \Delta g g_{22} + R_{2323} \Delta g g_{11} \right); \\
 a_{12} &= \frac{1}{2} g_{12} + \frac{C_0 M}{R} \left(((\Delta g + g_{11} g_{23}^2) g_{12} - 2\Delta g g_{22}) R_{1323} + (g_{12} - 2g_{22}) R_{1213} g_{12} g_{23} g_{33} - \right. \\
 &\quad \left. - (g_{12} g_{33} - 2g_{22} g_{33} + 2g_{23}^2) R_{1223} g_{11} g_{23} + R_{1212} g_{12} g_{23}^2 g_{33} + R_{1313} g_{12} g_{22} g_{23}^2 - R_{2323} g_{11} g_{12} g_{23}^2 \right); \\
 a_{13} &= \frac{C_0 M}{R} \left((g_{12} - 2g_{22}) R_{1213} g_{12} g_{23}^2 - (g_{12} g_{33} - 2g_{22} g_{33} + 2g_{23}^2) R_{1223} g_{11} g_{33} - \right. \\
 &\quad \left. - (2\Delta g - g_{11} g_{12} g_{33} + g_{12}^2 g_{33}) R_{1323} g_{23} + R_{1212} g_{12} g_{23} g_{33}^2 + \right. \\
 &\quad \left. + R_{1313} g_{12} g_{22} g_{23} g_{33} - R_{2323} g_{11} g_{12} g_{23} g_{33} \right); \\
 a_{22} &= \frac{1}{2} g_{22} + \frac{C_0 M}{R g_{11}} \left(-(2g_{12} g_{33} - 3g_{22} g_{33} + 2g_{23}^2) R_{1223} g_{11} g_{12} g_{23} + (2g_{11} g_{12} g_{23}^2 - g_{11} g_{22} g_{33} + \right. \\
 &\quad \left. + g_{12}^2 g_{22} g_{33}) R_{1323} g_{12} - (g_{11} g_{22} g_{33}^2 - 3g_{11} g_{22} g_{23}^2 g_{33} + 2g_{11} g_{23}^4 - g_{12}^2 g_{22} g_{33}^2) R_{1212} - \right. \\
 &\quad \left. - (-2g_{11} g_{12} g_{22} g_{33} + 2g_{11} g_{12} g_{23}^2 + 2g_{11} g_{22}^2 g_{33} - 2g_{11} g_{22} g_{23}^2 + g_{12}^2 g_{22} g_{33}) R_{1213} g_{23} - \right. \\
 &\quad \left. - ((\Delta g + g_{11} g_{23}^2) g_{12} - g_{11} g_{12} g_{23}^2 - g_{11} g_{22}^2 g_{33} + g_{11} g_{22} g_{23}^2 + g_{12}^2 g_{22} g_{33} - g_{12}^2 g_{23}^2) R_{1313} g_{22} + \right. \\
 &\quad \left. + ((\Delta g + g_{11} g_{23}^2) g_{12} - g_{11} g_{12} g_{23}^2 - g_{11} g_{22}^2 g_{33} + g_{11} g_{22} g_{23}^2 + g_{12}^2 g_{22} g_{33} - g_{12}^2 g_{23}^2) R_{2323} g_{11} \right); \\
 a_{23} &= \frac{1}{2} g_{23} + \frac{C_0 M}{R} \left((g_{22} g_{33} - 2g_{23}^2) R_{1212} g_{23} g_{33} + (g_{22} g_{33} - g_{23}^2) R_{1313} g_{22} g_{23} - \right. \\
 &\quad \left. - (g_{22} g_{33} - g_{23}^2) R_{2323} g_{11} g_{23} + (g_{12} - g_{22}) R_{1323} g_{12} g_{23} g_{33} - \right. \\
 &\quad \left. - (g_{12} g_{33} - 2g_{22} g_{33} + g_{23}^2) R_{1223} g_{12} g_{33} + (g_{12} g_{22} g_{33} - g_{12} g_{23}^2 - 2g_{22}^2 g_{33} + 2g_{22} g_{23}^2) R_{1213} g_{33} \right); \\
 a_{33} &= \frac{1}{2} g_{33} + \frac{C_0 M}{R g_{11}} \left(((\Delta g - g_{11} g_{23}^2) R_{1323} g_{12} g_{33} - (2\Delta g + g_{12}^2 g_{33}) R_{1213} g_{23} g_{33} - \right. \\
 &\quad \left. - (\Delta g g_{12} g_{33} + g_{11} g_{22} g_{33}^2 - 3g_{11} g_{22} g_{23}^2 g_{33} + 2g_{11} g_{23}^4 - g_{12}^2 g_{22} g_{33}^2 + g_{12}^2 g_{23}^2 g_{33}) R_{1313} + \right. \\
 &\quad \left. + R_{1212} \Delta g g_{33}^2 + R_{1223} g_{11} g_{12} g_{23} g_{33}^2 - R_{2323} \Delta g g_{11} g_{33} \right).
 \end{aligned}$$

Таким чином, доведена

Теорема 4. У тривимірних звідних псевдоріманових просторах тензор a_{ij} виражається через компоненти тензора Рімана, компоненти метричного тензора, скалярну кривину та параметрично залежить від однієї константи C_0 .

Розглянемо тривимірний звідний псевдорімановий простір I типу. Аналогічно отримуємо

Наслідок 3. У тривимірних звідних псевдоріманових просторах I типу тензор a_{ij} виражається через компоненти тензора Рімана, компоненти метричного тензора,

скалярну кривину та параметрично залежить від однієї константи C_0 , а самі компоненти мають вигляд:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2} g_{11} + \frac{C_0}{R} \frac{2R_{1213}g_{23} - R_{1212}g_{33} - R_{1313}g_{22} + R_{2323}g_{11}}{2(g_{22}g_{33} - g_{23}^2)}; \\ a_{12} &= \frac{C_0}{R} \frac{R_{1223}g_{23} - R_{1323}g_{22}}{g_{22}g_{33} - g_{23}^2}; \\ a_{13} &= \frac{C_0}{R} \frac{R_{1223}g_{33} - R_{1323}g_{23}}{g_{22}g_{33} - g_{23}^2}; \\ a_{22} &= \frac{1}{2} g_{22} + \frac{C_0}{R} \frac{(2g_{23}^2 - g_{22}g_{33})R_{1212} - 2R_{1213}g_{22}g_{23} + R_{1313}g_{22}^2 - R_{2323}g_{11}g_{22}}{2(g_{22}g_{33} - g_{23}^2)g_{11}}; \\ a_{23} &= \frac{1}{2} g_{23} + \frac{C_0}{R} \frac{R_{1212}g_{23}g_{33} - 2R_{1213}g_{22}g_{33} + R_{1313}g_{22}g_{23} - R_{2323}g_{11}g_{23}}{2(g_{22}g_{33} - g_{23}^2)g_{11}}; \\ a_{33} &= \frac{1}{2} g_{33} + \frac{C_0}{R} \frac{(2g_{23}^2 - g_{22}g_{33})R_{1313} + R_{1212}g_{33}^2 - 2R_{1213}g_{23}g_{33} - R_{2323}g_{11}g_{33}}{2(g_{22}g_{33} - g_{23}^2)g_{11}}. \end{aligned}$$

Розглянемо тривимірний звідний псевдорімановий простір II типу. Аналогічно отримуємо

Наслідок 4. У тривимірних звідних псевдоріманових просторах II типу тензор a_{ij} виражається через компоненти тензора Рімана, компоненти метричного тензора, скалярну кривину та параметрично залежить від однієї константи C_0 , а самі компоненти мають вигляд:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2} g_{11} + \frac{C_0}{R} \frac{R_{1212}g_{33} + R_{1313}g_{22} + R_{1323}g_{12} - R_{2323}g_{11}}{(g_{12} - 2g_{22})g_{33}}; \\ a_{12} &= \frac{1}{2} g_{12} + \frac{C_0}{R} \frac{R_{1323}}{g_{33}}; \\ a_{13} &= \frac{C_0}{R} \frac{R_{1223}g_{11} - R_{1213}g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}; \\ a_{22} &= \frac{1}{2} g_{22} + \frac{C_0}{R} \frac{(g_{12} - g_{22})R_{1313}g_{22} - (g_{12} - g_{22})R_{2323}g_{11} + R_{1212}g_{22}g_{33} + R_{1323}g_{12}g_{22}}{(g_{12} - 2g_{22})g_{11}g_{33}}; \\ a_{23} &= \frac{C_0}{R} \frac{R_{1223}g_{12} - R_{1213}g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}; \\ a_{33} &= \frac{1}{2} g_{33} + \frac{C_0}{R} \frac{(g_{22} - g_{12})R_{1313} - R_{1212}g_{33} - R_{1323}g_{12} + R_{2323}g_{11}}{(g_{12} - 2g_{22})g_{11}}. \end{aligned}$$

5 ВИСНОВКИ

У роботі вдалося дослідити певні типи псевдоріманових просторів. Для звідних псевдоріманових просторів були отримані тотожності, які описують внутрішню геометрію цих просторів, а також доведено, що тензор Річчі та тензор типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, який отримано з тензорної ознаки звідних просторів, комутують.

Також доведено, що для тривимірних звідних псевдоріманових просторів цей тензор типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ виражається як лінійна комбінація метричного тензора та тензора Річчі і, як наслідок, згортка цього тензора з тензором Річчі виражається через цей тензор включаючи скалярну кривину. Розглянуто два типи цих просторів – обидва характеризуються блочно-діагональною структурою матриці метричного тензора, проте перший елемент матриці метричного тензора тривимірного звідного псевдоріманового простору першого типу є функцією лише від першої координати, а інші елементи з блоку рангу два цієї матриці залежать від другої та третьої координат. У другому типі останній елемент матриці метричного тензора залежить лише від третьої координати, а інші елементи з блоку рангу два цієї матриці залежать від першої та другої координат. Для цих типів у загальному випадку та для кожного типу окремо отримано значення для тензора типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Також було доведено, що у загальному випадку тривимірні звідні псевдоріманові простори за необхідністю є рекурентними, що автоматично означає їхню Річчі-рекурентність.

Здобуті результати можуть мати застосування у подальших дослідженнях у сфері диференціальної геометрії, загальної теорії відносності та математичного моделювання фізичних явищ.

Література

1. Kiosak, V.A., Kovalova, G.V. Geodesic mappings of quasi-Einstein spaces with a constant scalar curvature, *Mat. Stud.* 2020. 53(2), 212-217. <https://doi.org/10.30970/ms.53.2.212-217>
2. Kiosak, V., Savchenko, A., Kovalova, G. Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I. *Proceedings of the International Geometry Center.* 2020. 13(1), 35-48. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v13i1.1711>
3. D. Doikov and V. Kiosak, On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe, AIP Conference Proceedings 2302, 040001 (2020); <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
4. V. Kiosak, A. Savchenko and L. Makarenko, Invariant transformations that preserve mappings, AIP Conference Proceedings 2522, 120003 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0100787>
5. V. Kiosak, A. Savchenko and L. Kusik. On the properties of Ricci solitons, AIP Conference Proceedings 2522, 120006 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0100792>
6. Kiosak, V., Lesechko, O., Latysh, O. On geodesic mappings of symmetric pairs. *Proceedings of the International Geometry Center*, 2022, 15, 230-238; <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i3-4.2430>
7. Kiosak, V., Latysh, O., Kuzmich, V. (2024). Split curvature. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(3), 232-243; <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i3.2817>
8. O. Lesechko, O. Latysh, A. Kamienieva, Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor, AIP Conference Proceedings 2164, 040002 (2019); <https://doi.org/10.1063/1.5130794>
9. Kiosak V., Lesechko O., Savchenko O. Mappings of Spaces with Affine Connection, 17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT, 2018. Proceedings, Bratislava. 2018. p.563-569.
10. V. Kiosak, A. Savchenko, O. Gudyreva, On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces, AIP Conference Proceedings, 2164, 040001 (2019); <https://doi.org/10.1063/1.5130793>
11. Kiosak, V., Prishlyak, O., Gudyreva, O. (2024). On geodesic mappings of threesymmetric spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(1), 56-64; <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i1.2647>
12. О. Лесечко, А. Соловійов. Конформно-пласкі келерові простори. Дослідження в математиці і механіці. – 2023. – Т. 28, вип. 1–2 (41–42). – С. 47–63; [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305257](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305257)
13. Kiosak, V., Savchenko, A., Latysh, O. Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II, *Proceedings of the International Geometry Center.* 2021, 14(1), 80–91; <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i1.1936>

14. Kiosak, V., Prishlyak, O., Lesechko, O. On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2021. 14(4), 13-26. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i4.2140>
15. Kiosak, V., Kusik, L., Isaiev, V. Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2022. 15(2), 110-120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
16. Fedchenko Yu., Lesechko O. (2021). Special semi-reducible pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*. 14(1), 49-60. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i1.1940>
17. Yu. Fedchenko, I. Ogorodnichuk and A. Ugol'nikov, Pseudo-Riemannian spaces with semireducible metrics, *AIP Conference Proceedings* 2522, 120001 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0100795>.
18. Lesechko O, Shevchenko T. (2021). Pseudo-riemannian spaces with a special Riemann tensor. *Mechanics and Mathematical Methods*. 3 (1). 106–114. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2021-3-1-106-114>

References

1. Kiosak, V.A., Kovalova, G.V. Geodesic mappings of quasi-Einstein spaces with a constant scalar curvature, *Mat. Stud.* 2020. 53(2), 212-217. <https://doi.org/10.30970/ms.53.2.212-217>
2. Kiosak, V., Savchenko, A., Kovalova, G. Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2020. 13(1), 35-48. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v13i1.1711>
3. D. Doikov and V. Kiosak, On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe, *AIP Conference Proceedings* 2302, 040001 (2020); <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
4. V. Kiosak, A. Savchenko and L. Makarenko, Invariant transformations that preserve mappings, *AIP Conference Proceedings* 2522, 120003 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0100787>
5. V. Kiosak, A. Savchenko and L. Kusik. On the properties of Ricci solitons, *AIP Conference Proceedings* 2522, 120006 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0100792>
6. Kiosak, V., Lesechko, O., Latysh, O. On geodesic mappings of symmetric pairs. *Proceedings of the International Geometry Center*, 2022, 15, 230-238; <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i3-4.2430>
7. Kiosak, V., Latysh, O., Kuzmich, V. (2024). Split curvature. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(3), 232-243; <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i3.2817>
8. O. Lesechko, O. Latysh, A. Kamienieva, Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor, *AIP Conference Proceedings* 2164, 040002 (2019); <https://doi.org/10.1063/1.5130794>
9. Kiosak V., Lesechko O., Savchenko O. Mappings of Spaces with Affine Connection, *17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT*, 2018. Proceedings, Bratislava. 2018. p.563-569.
10. V. Kiosak, A. Savchenko, O. Gudyreva, On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces, *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040001 (2019); <https://doi.org/10.1063/1.5130793>
11. Kiosak, V., Prishlyak, O., Gudyreva, O. (2024). On geodesic mappings of threesymmetric spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(1), 56-64; <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i1.2647>
12. Lesechko O., Soloviov A. Conformally flat Kählerian spaces. *Researches in Mathematics and Mechanics*. 2023, 28, 1–2 (41–42), 47–63; [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305257](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305257)
13. Kiosak, V., Savchenko, A., Latysh, O. Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II, *Proceedings of the International Geometry Center*. 2021, 14(1), 80–91; <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i1.1936>
14. Kiosak, V., Prishlyak, O., Lesechko, O. On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2021. 14(4), 13-26. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i4.2140>

15. Kiosak, V., Kusik, L., Isaiev, V. Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2022. 15(2), 110-120.
<https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
16. Fedchenko Yu., Lesechko O. (2021). Special semi-reducible pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*. 14(1), 49-60.
<https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i1.1940>
17. Yu. Fedchenko, I. Ogorodnichuk and A. Ugol'nikov, Pseudo-Riemannian spaces with semireducible metrics, *AIP Conference Proceedings* 2522, 120001 (2022);
<https://doi.org/10.1063/5.0100795>
18. Lesechko O, Shevchenko T. (2021). Pseudo-riemannian spaces with a special Riemann tensor. *Mechanics and Mathematical Methods*. 3 (1). 106–114.
<https://doi.org/10.31650/2618-0650-2021-3-1-106-114>

Лесечко Олександр Васильович

Одеська державна академія будівництва та архітектури,
к.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона 4 Одеса, Україна 65029
vm@odaba.edu.ua

ORCID: 0000-0002-2352-6174

Соловйов Андрій Анатолійович

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова,
аспірант
вул. Дворянська, 2 Одеса, Україна 65026
andrey-solovyov@stud.onu.edu.ua,
ORCID: 0009-0003-7923-6912

Для посилань:

Лесечко О. В., Соловйов А. А. Тривимірні звідні псевдорімановані простори. *Механіка та математичні методи*, 2025. Т. VII. №. 2. С. 116-132.

For references:

O. Lesechko, A. Soloviov (2025). Three-dimensional reducible pseudo-riemannian spaces. *Mechanics and Mathematical Methods*. VII (2). 116 –132.

Тривимірні звідні псевдорімановані простори © 2025 by Лесечко О. В., Соловйов А. А. is licensed under CC BY 4.0

УДК 004.85:519.876.5+681.3

НЕСТАЦІОНАРНІ ПРОЦЕСИ НА БАЗІ МЕТОДІВ СИНГУЛЯРНОГО РОЗКЛАДАННЯ І ШТУЧНИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

Губаль Г. М.¹, Гуда О. В.¹, Одновол Д. Г.²

¹Луцький національний технічний університет

²Таврійський державний агротехнологічний університеті імені Дмитра Моторного

Анотація: Стаття присвячена дослідженню нестационарних процесів із використанням методів сингулярного розкладання та штучних нейронних мереж як інструментів для аналізу складних динамічних систем із мінливою структурою та високим рівнем стохастичності. У ній розглядаються підходи до моделювання таких процесів через адаптивні інтелектуальні системи, здатні до автоматичного виявлення закономірностей і прогнозування поведінки в умовах невизначеності. Розвиток інтелектуальних технологій, зокрема поєднання сингулярного розкладання та нейронних мереж, відкриває нові можливості для автоматизації аналізу та управління такими процесами. Метою дослідження є розробка гнучкої моделі для ідентифікації, класифікації та прогнозування станів нестационарних систем шляхом інтеграції методів сингулярного спектрального розкладання та штучних нейронних мереж із двоетапним стохастичним програмуванням. У роботі використано методи сингулярного розкладання для декомпозиції часових рядів на структурно значущі компоненти, такі як тренди, коливання та шум, а також багатошарові штучні нейронні мережі, зокрема модель персептрона з адаптивними коефіцієнтами зв'язків і зворотним зв'язком, для навчання на декомпонованих даних і прогнозування поведінки системи. Отримані результати демонструють, що запропонована модель забезпечує високу точність розпізнавання динамічних змін і прогнозування розвитку нестационарних процесів завдяки комбінації декомпозиції даних і машинного навчання, перевершуючи традиційні підходи в умовах високої невизначеності. Розроблена схема двоетапного управління, яка включає стратегічні та тактичні рішення, дозволяє ефективно адаптувати систему до мінливих умов, формуючи оптимальні реакції на основі реальних даних. Перспективи подальших досліджень пов'язані з удосконаленням алгоритмів навчання нейронних мереж для роботи з великими обсягами багатовимірних даних, інтеграцією глибокого навчання для аналізу складніших нестационарних процесів, а також розширенням моделі на нелінійні системи з урахуванням додаткових стохастичних факторів, що сприятиме підвищенню її універсальності та практичної застосовності в реальних умовах.

Ключові слова: нестационарні процеси, сингулярний розклад, штучні нейронні мережі, стохастичне програмування, адаптивне управління, моделювання часових рядів.

NON-STATIONARY PROCESSES BASED ON SINGULAR DECOMPOSITION METHODS AND ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

G. Hubal¹, O. Huda¹, D. Odnovol²

¹Lutsk National Technical University

²Tavria State Agrotechnological University named after Dmitry Motorny

Abstract: The article is devoted to the study of non-stationary processes using singular decomposition methods and artificial neural networks as tools for the analysis of complex dynamic systems with a variable structure and a high level of stochasticity. It considers approaches to modeling such processes through adaptive intelligent systems capable of automatically detecting patterns and



predicting behavior under conditions of uncertainty. The development of intelligent technologies, in particular the combination of singular decomposition and neural networks, opens up new opportunities for automating the analysis and control of such processes. The aim of the research is to develop a flexible model for identifying, classifying and predicting the states of non-stationary systems by integrating singular spectral decomposition methods and artificial neural networks with two-stage stochastic programming. The work uses singular decomposition methods to decompose time series into structurally significant components, such as trends, fluctuations, and noise, as well as multilayer artificial neural networks, in particular a perceptron model with adaptive coupling coefficients and feedback, to train on decomposed data and predict system behavior. The results obtained demonstrate that the proposed model provides high accuracy in recognizing dynamic changes and predicting the development of non-stationary processes due to the combination of data decomposition and machine learning, outperforming traditional approaches in conditions of high uncertainty. The developed two-stage control scheme, which includes strategic and tactical decisions, allows the system to effectively adapt to changing conditions, forming optimal responses based on real data. Prospects for further research are related to the improvement of neural network training algorithms for working with large volumes of multidimensional data, the integration of deep learning for the analysis of more complex non-stationary processes, as well as the expansion of the model to nonlinear systems taking into account additional stochastic factors, which will contribute to increasing its versatility and practical applicability in real conditions.

Keywords: non-stationary processes, singular decomposition, artificial neural networks, stochastic programming, adaptive control, time series modeling.

1 ВСТУП

В координатах сучасності, де технологічний прогрес диктує нові вимоги до аналізу складних динамічних систем, актуальність дослідження нестационарних процесів набуває особливої значущості, оскільки такі процеси характеризуються змінними у часі параметрами, що ускладнює їх математичне моделювання та прогнозування, а отже, потребує застосування інноваційних підходів, які поєднують класичні математичні методи з сучасними обчислювальними технологіями, зокрема методами сингулярного розкладання та штучних нейронних мереж, які в сукупності забезпечують можливість ефективно виділяти ключові закономірності та кореляції в даних, навіть у випадках, коли ці дані є хаотичними, зашумленими або мають нелінійну природу.

Актуальність дослідження питань використання нестационарних процесів на основі сингулярного розкладання і впровадження штучних нейронних мереж полягає в тому, що сучасні науково-технічні завдання, пов'язані з аналізом великих обсягів даних, прогнозуванням складних систем та оптимізацією процесів у реальному часі, вимагають розробки нових методологічних підходів. Ці складові мають можливість прийняти динамічну природу таких процесів, оскільки традиційні статистичні методи часто виявляються недостатньо ефективними для аналізу нестационарних сигналів, що характеризуються змінними спектральними характеристиками, нелінійними залежностями та високою чутливістю до зовнішніх збурень. В той самий час, комбінація сингулярного розкладання, яке дозволяє виділяти домінуючі компоненти даних та знижувати їх розмірність, і штучних нейронних мереж, які здатні апроксимувати складні нелінійні залежності та адаптуватися до змін у вхідних даних, створює потужний інструментарій для дослідження та управління нестационарними процесами в галузевому розрізі.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

У наукових дослідженнях [1, 2] підкреслюється, що програмно-апаратні комплекси досягають максимальної ефективності лише за умови повної реалізації алгебраїчної структури, на якій базується їхня математична модель, що особливо актуально в контексті аналізу нестационарних процесів за допомогою методів сингулярного розкладання та штучних нейронних мереж. Алгебра багатовимірних матриць, як демонструють численні роботи, може слугувати універсальною моделлю даних для розв'язання задач із різних предметних областей, зокрема для обробки динамічних сигналів і часових рядів, що є ключовими в дослідженні нестационарних систем. Важливий внесок у розвиток цієї теорії здійснили автори [3, 4], які встановили гомоморфізм між алгеброю багатовимірних матриць і реляційною алгеброю, що відкрило нові можливості для паралельної обробки запитів у базах даних, що може бути адаптоване для аналізу великих обсягів нестационарних даних.

Значний прогрес у галузі алгоритмічної обробки даних був досягнутий завдяки роботам [5], де запропоновано поліноміальні алгоритми для виведення асоціативних правил та маршрутизації, які можуть бути інтегровані в методи аналізу нестационарних процесів. Крім того, у дослідженнях [6] продемонстровано успішне узагальнення матричних алгоритмів шифрування. У роботі [7] запропоновано математичну модель операцій згортки на основі алгебри багатовимірних матриць, що може стати в нагоді при розробці нових методів аналізу часових рядів. Додатково, у [8] алгебра багатовимірних матриць застосовується для дослідження гіперграфів, що розширює можливості моделювання складних систем із нелінійними взаємозв'язками.

Наведений огляд ілюструє, як узагальнення класичних алгоритмів у рамках алгебри багатовимірних матриць дозволяє покращити їхні характеристики або створити гнучкі інструменти для вирішення ширшого кола завдань, що особливо актуально для аналізу нестационарних процесів.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Мета статті – обґрунтувати впровадження моделі ідентифікації та корегування нестационарних процесів на засадах поєднання сингулярного розкладання та штучних нейронних мереж.

Задачі дослідження:

- дослідити характерні риси функціонування нестационарних процесів у складних динамічних системах та обґрунтувати актуальність застосування сучасних інтелектуальних методів для їх аналізу;
- розробити методологічну основу двоетапного стохастичного програмування, враховуючи стратегічні та тактичні аспекти прийняття рішень у контексті управління нестационарними процесами;
- створити когнітивно-нейронну модель адаптивного управління та формалізувати її математичний опис за допомогою відповідних операторів та обмежень.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

У контексті сучасних досліджень нестационарних процесів, що характеризуються складною динамікою, змінністю структури у часі та наявністю латентних компонент, все більшої актуальності набувають моделі, які дозволяють автоматизовано здійснювати ідентифікацію та класифікацію станів системи на основі інтелектуального аналізу даних з використанням методів сингулярного розкладання та штучних нейронних мереж. Замість традиційного підходу, що базується на фіксованому зіставленні нечітких ситуацій, визначених експертами, із реальними умовами функціонування об'єкта, і в кордонах парадигми пропонується гнучка адаптивна система, де аналіз часових рядів здійснюється через їх багатокomпонентну декомпозицію та автоматичне навчання моделей, здатних самостійно виявляти подібності між спостережуваними патернами та узагальненими репрезентаціями еталонних станів.

Зокрема, застосування сингулярного спектрального розкладання дозволяє виокремити структурно значущі компоненти з нестационарного часового ряду, включаючи тренди, коливальні елементи, сезонні впливи та шумові домішки, тоді як нейронні мережі, навчені на таких декомпонованих даних, забезпечують високоточне розпізнавання динамічних змін і прогнозування їх подальшого розвитку (рис. 1.) [9]. У підсумковій концепції рішення щодо ідентифікації поточного стану системи приймається не через порівняння з попередньо заданими нечіткими сценаріями, а на основі адаптивного навчання моделей на реальних даних, що дозволяє виявити найбільш подібну до поточної ситуацію у багатовимірному просторі ознак та сформулювати оптимальну реакцію системи у вигляді комбінації параметрів розвитку.

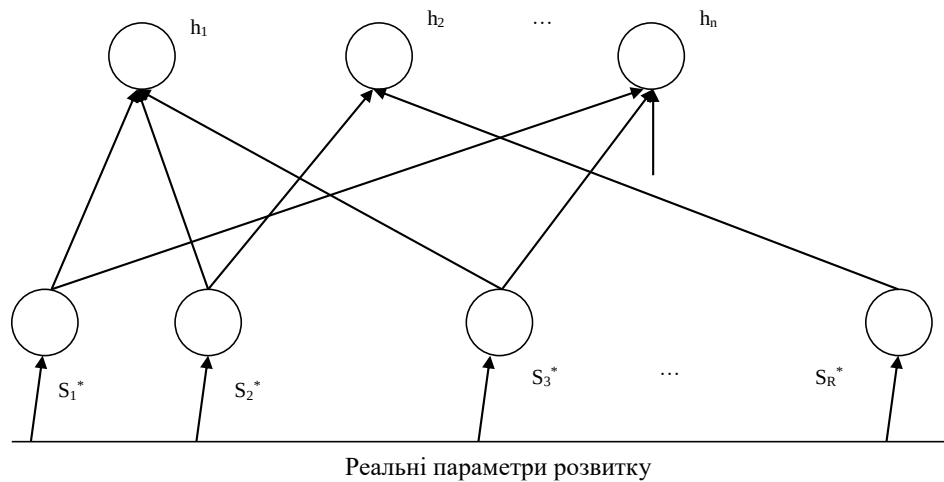


Рис 1. Структурна схема прийняття рішень на основі нейронної мережі для ідентифікації реальних параметрів розвитку у нестационарних процесах

Факт наявності зворотного зв'язку між результатами моделювання нестационарних процесів і діями системи управління створює передумови для побудови адаптивного контуру, в якому управлінські рішення постійно коригуються на основі актуальних значень вихідних параметрів, отриманих за допомогою методів сингулярного розкладання у поєднанні з нейронними мережами, що здатні до навчання та самооновлення на основі нових даних [10].

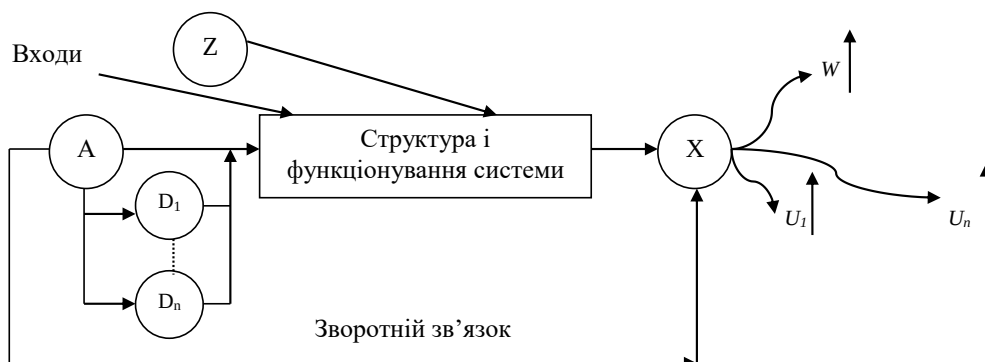


Рис 2. Узагальнена схема когнітивно-нейронної системи адаптивного управління нестационарними процесами з використанням сингулярного розкладання та штучного інтелекту (Z – випадкові (стохастичні) збурення, що впливають на динаміку нестационарних процесів; A – центральний модуль керування, що реалізує адаптивну стратегію управління; $D_1, \dots, D_n$ – децентралізовані підсистеми керування або локальні регулятори процесів; W – вагові коефіцієнти або шкала пріоритетів головного модуля керування; $U_1, \dots, U_n$ – шкали пріоритетів, що відображають локальні цілі або критерії оптимізації в межах окремих підсистем)

Запропонована модельна схема є універсальним інструментом для відображення принципів функціонування об'єкта моделювання, оскільки вона дозволяє чітко розмежувати систему на керуючу підсистему, що відповідає за прийняття стратегічних рішень, та операційну підсистему, яка реалізує безпосередні дії у відповідь на змінні зовнішні та внутрішні умови. Саме двоетапна структура управління, яка поєднує математичну обробку стохастичних сигналів і інтелектуальну обробку даних, закладена в основу формалізації задачі стохастичного програмування, де алгоритми штучного інтелекту забезпечують адаптацію до невизначеності, багатоваріантності та високої мінливості вхідних параметрів, що притаманні нестационарним процесам у складних системах [11].

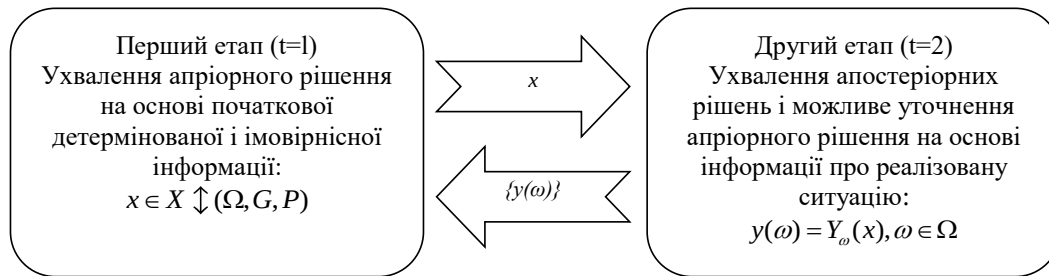


Рис. 3. Послідовна структура двоетапного прийняття рішень у моделі управління нестаціонарними процесами на основі апіорної та апостеріорної інформації

У загальному формалізованому вигляді задача стохастичного програмування, що реалізується у два послідовні етапи та базується на застосуванні алгоритмів штучного інтелекту, може бути представлена як математична модель оптимізації, яка враховує ймовірнісну природу вхідних параметрів, притаманну нестаціонарним процесам, і включає інтегровану обробку інформації на основі методів сингулярного розкладання та навчання штучних нейронних мереж.

$$\max_{x \in X} f_0(x) = \max_{x \in X} \left[\varphi(x) + M \max_{\omega} \max_{y(\omega) \in Y_\omega(x)} \varphi_0(x, y(\omega)) \right], \quad (1)$$

У контексті моделювання нестаціонарних процесів із використанням сингулярного розкладання та штучних нейронних мереж, математична постановка двоетапного стохастичного програмування набуває особливої гнучкості й адаптивності, що дозволяє ефективно враховувати часову варіативність даних і високий рівень невизначеності. У такій постановці змінна X інтерпретується як опукла, замкнута й обмежена множина, яка визначає простір стратегічних (апіорних) рішень, тобто таких, що формуються до моменту реалізації конкретної ситуації, і задає допустиму область вибору програмного вектору x , який визначає базову архітектуру або параметри системи управління [12].

У свою чергу, $x, y(\omega) = y_1(\omega), y_2(\omega) \dots y_n(\omega)$, як k – вимірний вектор апостеріорних рішень, тобто оперативних або тактичних керуючих дій, які приймаються на основі фактично реалізованого сценарію $\omega \in \Omega$; рішення формуються з урахуванням впливу стохастичних чинників, які особливо актуальні для нестаціонарних систем. Множини $Y_\omega(x)$ визначають опуклі, замкнуті й обмежені області у просторі R^k , в межах яких здійснюється вибір гнучких рішень $y(\omega)$ для конкретного значення x , і, таким чином, вони враховують як структуру апіорного рішення, так і ймовірнісну природу розвитку подій.

Функція $\varphi(x)$ виконує роль критерію ефективності стратегічного рішення, тоді як функція $\varphi_0(x, y(\omega))$ відображає оцінку якості прийнятого рішення x , що доповнюється тактичними діями $y(\omega)$ в умовах реалізованої ситуації ω . У цьому контексті, стратегічні рішення x мають довгостроковий вплив і визначають межі функціонування системи загалом, тоді як тактичні рішення $y(\omega)$ забезпечують гнучке реагування в умовах непередбачуваних змін, що характерні для нестаціонарних процесів [13].

З позиції ієрархічного управління, різниця між апіорними та апостеріорними рішеннями полягає, насамперед, у ступені їхньої гнучкості та часовому горизонті реалізації: перші задають обмеження на архітектуру управління, а другі – адаптуються до конкретних реалізацій динаміки системи. При цьому, в умовах багатокрокових моделей, особливо коли йдеться про машинне навчання та прогнозування на базі сингулярного спектрального аналізу, апостеріорні рішення можуть виконувати функції оперативного реагування на дані, які надходять у реальному часі, і при цьому не суперечити загальній стратегії, закладеній у x .

У такій структурі вводиться оператор $H(\omega)$, який формалізує відображення від множини допустимих тактичних рішень $Y\omega(x)$ до простору стратегічних параметрів X , тобто виконує функцію перетворення результатів тактичного рівня на мову стратегічної адаптації, що є надзвичайно важливим у задачах інтелектуального управління складними, змінними у часі процесами [14].

$$H(\omega)y(\omega) = x, y(\omega) \in Y_{\omega}(x), \omega \in \Omega. \quad (2)$$

Оператор $H(\omega)$ інтерпретується як матриця спеціалізованої рядково-діагональної структури, яка виконує трансформацію множини гнучких тактичних рішень у простір стратегічних варіантів, що визначають параметри функціонування системи в цілому. Формальне співвідношення, що описується формулою (2), вказує на існування жорсткого функціонального зв'язку між апостеріорним рішенням $y(\omega)$, прийнятим в умовах конкретної реалізації стохастичного середовища, та стратегічним вектором параметрів x , який задає допустимі межі для варіативності тактичної поведінки системи.

Введений варіант інтерпретує стратегічне рішення x як інерційну, малочутливу до короткострокових коливань компоненту управління, що не залежить від конкретних імовірнісних обмежень у момент початкової постановки задачі, але водночас визначає архітектуру системи реагування на динаміку змін середовища. З іншого боку, формалізація через оператор $H(\omega)$ відображає ключову особливість адаптивного управління: стратегічні параметри залишаються інваріантними відносно реалізацій ситуацій $y(\omega)$, тобто зберігають свою сталість у межах визначеної політики, тоді як тактичні рішення можуть гнучко змінюватися, реагуючи на коливання у зовнішньому середовищі або структурі вхідних даних [15]. У багатокрокових сценаріях управління, що характерні для нестационарних процесів, які моделюються за допомогою гібридних моделей сингулярного спектрального аналізу та штучних нейронних мереж, природно виникає розрізнення між апіорними та апостеріорними тактичними рішеннями: перші залежать від реалізованих ситуацій на попередніх етапах, тобто від $y(\omega^{t-1})$, тоді як другі – від поточної конфігурації стану системи $y(\omega^t)$, включаючи її негайні стохастичні характеристики.

$$\max_{x \in X} f_0(x) = \max_{x \in X} \left[\varphi(x) + M \max_{\omega} \max_{\substack{y(\omega) \in Y_{\omega}(x) \\ Hy(\omega) = x, \omega \in \Omega}} \varphi_0(x, y(\omega)) \right], \quad (3)$$

за виконання умов:

$$\begin{aligned} &1) A^0 x \leq b^0; \\ &2) A(\omega)x + B(\omega)y(\omega) \leq b(\omega); \\ &3) Hy(\omega) = x; \\ &4) x \geq 0; y(\omega) \geq 0; \omega \in \Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

У цьому контексті функція мети управління, позначена як f_0 , слугує основним орієнтиром для оптимізації, тоді як випадкова системна ситуація $\omega \in \Omega$, що розвивається у безперервному просторі станів, додає елемент невизначеності, з яким необхідно працювати. Для цього вводиться вектор стратегічних коефіцієнтів C^0 , який відображає довгострокові пріоритети, а також випадковий вектор тактичних коефіцієнтів $C(\omega)$, що адаптується до мінливих умов у реальному часі [16].

Обмеження першого етапу задаються через детерміновану матрицю A^0, b^0 та відповідний вектор b_0 , які разом устанавлюють базові рамки для стратегічного планування, тоді як на другому етапі з'являються випадкові матриці $A(\omega)$ і $B(\omega)$, що визначають нормативи витрат і оперативні технологічні підходи, а також випадковий вектор $b(\omega)$, який формує додаткові обмеження, залежні від конкретної реалізації випадкової ситуації. Важливу роль відіграє матриця H , яка встановлює стратегічні зв'язки між різними компонентами системи, забезпечуючи їхню узгодженість. Умови задачі включають детерміновані обмеження для стратегічного вектора, імовірнісні обмеження, що накладаються як на тактичні, так і на стратегічні вектори, а також вимогу врахування стратегічних зв'язків, що робить задачу багатошаровою та комплексною [17].

Сформована задача, яку називають завданням стохастичного програмування із стратегічними зв'язками, набуває вигляду лінійного двоетапного стохастичного завдання з кінцевою множиною можливих сценаріїв Ω . Для її розв'язання за допомогою методів сингулярного розкладання та нейронних мереж необхідно виконати низку умов: множини X та $Y_\omega(x)$ мають бути опуклими багатогранниками, визначеними системами лінійних нерівностей, функції $\varphi(x), \varphi_0(x, y(\omega))$, повинні зберігати лінійність, а множина випадкових ситуацій $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$ – має бути скінченною з заданими ймовірностями реалізації $p_1, p_2, \dots, P^n$. У такому разі повна інтерпретація задачі, що враховує всі перелічені обмеження, дозволяє ефективно застосовувати сучасні обчислювальні методи для аналізу нестационарних процесів, забезпечуючи точність і адаптивність до стохастичної природи досліджуваних систем

$$\max_x f_0(x) = \max_x \left[(C^0(x) + \sum_{v=1}^N p_v \max_{y_v} (C_v, y_v)) \right]; \quad (5)$$

при виконанні умов:

- 1) $A^0 x \leq b^0$;
 - 2) $A_v x + B_v y_v \leq b_v; v = 1 \dots N$;
 - 3) $H y_v = x; v = 1 \dots N$;
 - 4) $x \geq 0; y_v \geq 0; v = 1 \dots N$.
- (6)

У цьому підході штучна нейронна мережа постає як складна, детально візуалізована модель, побудована на основі численних однотипних елементів, відомих як кібернетичні нейрони або вузли, які разом утворюють багатошарову архітектуру, що відображає динамічні зв'язки та взаємодії в системі. Така мережа, призначена для аналізу нестационарних процесів, зазвичай включає один вхідний шар, який приймає початкові дані, один вихідний шар, що формує результати обробки, а також численні проміжні шари, які виконують функції трансформації та обчислення, забезпечуючи глибоке опрацювання вхідної інформації.

Особливу увагу приділено моделі персептрона, яка в даному випадку інтерпретується як нейронна мережа, спеціально адаптована для роботи з системами, що розвиваються, і включає так званий «блок управління змінами», здатний реагувати на нестационарність процесів. Представлена структура, яка може також мати і тришаровий вигляд, ефективно застосовується для моделювання складних динамічних систем, де методи сингулярного розкладання доповнюють можливості нейронних мереж, дозволяючи розкладати багатовимірні дані на компоненти та виявляти приховані закономірності [17].

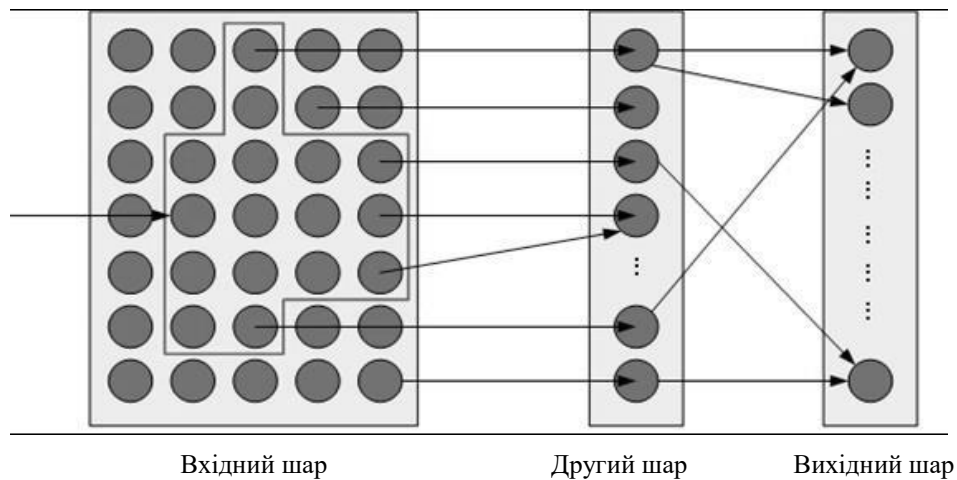


Рис. 4. Багатошарова структура штучної нейронної мережі для моделювання нестационарних процесів

Увагу приділимо моделі персептрона, яка вирізняється специфічним способом організації зв'язків між її шарами, де зв'язки між елементами першого та другого шарів формуються випадковим чином, тоді як коефіцієнти зв'язку між другим і третім шарами, позначені як « e », залишаються фіксованими, забезпечуючи стабільність структури на певних етапах обробки даних. Виходи кожного елемента цієї моделі набувають лише двох можливих значень – 1 або 0, що відображає бінарну природу реакцій, а гнучкість усієї системи досягається завдяки динамічній зміні згаданих коефіцієнтів « e », які регулюють взаємодію між другим і третім шарами, дозволяючи адаптувати модель до мінливих умов нестационарних процесів [3]. Для налаштування персептрона на розпізнавання певних закономірностей першому шару демонструються вихідні образи, після чого для кожного шару задається очікувана реакція, а система, керуючись установленими правилами, поступово модифікує коефіцієнти зв'язків, доки не буде досягнуто бажаного результату, що відповідає цілям аналізу.

Організація нейронів у мережу відбувається таким чином, що вихід одного нейрона, позначеного як i -й, з'єднується з одним із входів іншого, j -го нейрона, при цьому вихідна змінна першого ототожнюється з вхідною змінною другого, а ваговий коефіцієнт, який характеризує силу та напрямок цього зв'язку, відіграє ключову роль у формуванні поведінки системи. Нейрони організовуються в мережу за рахунок того, що вихід i -го нейрона (y_i) з'єднується з одним з входів (x_j) іншого j -го нейрона. При цьому вихідна змінна y_i ототожнюється з вхідною змінною x_j . Ваговий коефіцієнт c_{ij} характеризує знак і силу зв'язку між змінними x_i і x_j . Можливий і зворотний зв'язок, коли вихід i -го нейрона з'єднується з j -м входом j -го нейрона. Як правило, коефіцієнти $c_{ji} \neq c_{ij}$.

У деяких випадках можливе використання зворотного зв'язку, коли вихід i -го нейрона спрямовується назад до входу j -го нейрона, що додає додаткову складність і гнучкість моделі, причому коефіцієнти зв'язків зазвичай зберігають свої стандартні значення, але можуть адаптуватися залежно від потреб задачі. Важливою характеристикою нейронів у контексті нестационарних процесів є їхня пластичність, тобто здатність змінювати свої параметри в процесі роботи, яка поділяється на синаптичну пластичність, пов'язану зі зміною вагових коефіцієнтів, і нейронну пластичність, що стосується регулювання порогових значень нейронів [6].

Для спрощення роботи з пороговою пластичністю її зводять до синаптичної за допомогою спеціального прийому, коли до наявних входів нейрона додається

додатковий фіктивний вхід, на який подається постійний сигнал зі значенням +1, а ваговий коефіцієнт цього входу модифікується в процесі обробки даних, що еквівалентно зміні порогу активації нейрона (рис. 5.).

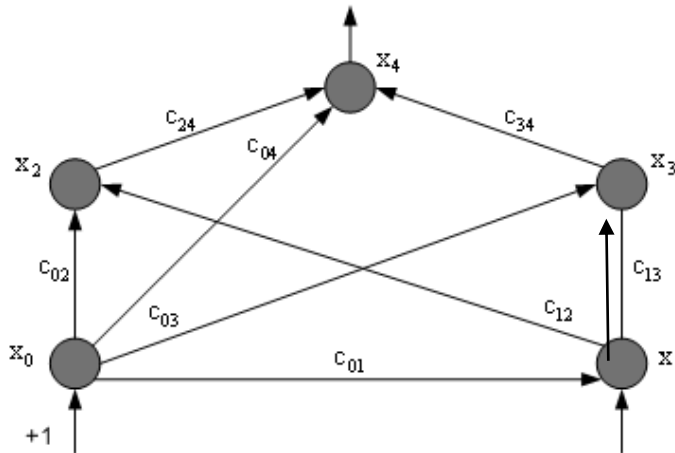


Рис. 5. Графова модель зв'язків між нейронами в структурі штучної нейронної мережі для аналізу нестационарних процесів

Фундаментальне значення має правило адаптації вагових коефіцієнтів у структурі нейромережі, яке вперше було сформульовано дослідником Д. Хеббом. Наведене правило забезпечує здатність нейромереж до навчання на основі накопиченого досвіду, що є критично важливим у ситуаціях, коли динаміка вхідних параметрів системи є змінною в часі, а отже нестационарною. Формально, якщо вважати, що управлінський процес на підприємстві, яке функціонує в умовах невизначеності, розділений на дискретні часові інтервали або такти, то в момент часу, що відповідає k -му такту, два нейрони мережі активуються значеннями x_i^k і x_j^k . У такому разі вага зв'язку між цими двома нейронами, що моделюють взаємозалежні параметри управлінського впливу або реакції системи на зовнішні збурення, підлягає модифікації шляхом її збільшення на величину, яка прямо пропорційна добутку активностей обох нейронів у відповідному такті. Це відображає ідею посилення синаптичного зв'язку між тими вузлами системи, які одночасно демонструють високий рівень активації, що в моделі підприємства відповідає підвищенню впливу взаємозалежних факторів у системі адаптивного управління нестационарними процесами.

$$\Delta c_{ij}^k = x_i^k x_j^k \quad (7)$$

У разі двійкових змінних приріст дорівнює або +1 (при збігу знаків x_i^k і x_j^k), або -1 (коли знаки різні). Якщо початкова вага зв'язку дорівнювала 0, то вага зв'язку до p -го такту тоді буде дорівнюватиме:

$$c_{ij} p_j = \sum_1^p x_i^k x_j^k, \quad (8)$$

де x_i^k і x_j^k – стани двох нейронів в k -му такті; p – число тактів формування нейронної мережі.

Отже, у результаті побудови відповідної архітектури штучної нейронної мережі, зокрема у формі персептрона, ми формуємо адаптивну математичну модель, що здатна описувати складні динамічні аспекти процесу управління на підприємстві, з урахуванням властивості цим процесам нестационарності, структурної мінливості вхідних параметрів, а також потреби у безперервному навчанні системи для досягнення стійкого й ефективного функціонування в умовах змінного середовища.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Сингулярне спектральне розкладання відіграє ключову роль у декомпозиції часових рядів, розділяючи їх на значущі складові: тренди, коливання та шум, що дає змогу виділити суттєві патерни навіть у умовах високої невизначеності, тоді як нейронні мережі, використовуючи ці розкладені дані, забезпечують точне розпізнавання змін і прогнозування подальшого розвитку процесів, створюючи основу для інтелектуального аналізу (рис. 1). Пропозиція замінює традиційні методи, засновані на фіксованих експертних оцінках, гнучкою системою, де рішення формуються через навчання моделей на багатовимірних просторах ознак, що відображають поточний стан системи та її можливі реакції.

Інтеграція зворотного зв'язку між результатами моделювання та управлінськими діями створює адаптивний контур, у якому параметри постійно коригуються залежно від актуальних даних, отриманих завдяки комбінації сингулярного розкладання та нейронних мереж, що здатні до самооновлення (рис. 2). Запропонована модель двоетапного стохастичного програмування, реалізована через штучний інтелект, враховує імовірнісну природу нестаціонарних процесів, дозволяючи оптимізувати стратегічні та тактичні рішення в умовах невизначеності (рис. 3) вся схема, яка поєднує математичну обробку сигналів із когнітивними можливостями нейронних мереж, стає універсальним інструментом для управління складними системами, де адаптивність і точність є критично важливими компонентами.

6 ВИСНОВКИ

Дослідження архітектури двоетапного стохастичного програмування виявило її ефективність у контексті нестаціонарних процесів, оскільки вона передбачає прийняття стратегічних рішень на основі початкових даних з подальшою адаптацією тактичних дій залежно від реалізованих сценаріїв, що дозволяє враховувати динамічні зміни в системі. Аналіз адаптаційних механізмів управління показав, що використання штучних нейронних мереж у поєднанні з сингулярним спектральним розкладанням дає змогу ефективно виділяти ключові компоненти часових рядів (тренди, коливання, шум), що є критично важливим для обробки нестаціонарних даних та подальшого навчання моделей. Вплив стохастичних факторів на процеси прийняття рішень було оцінено через призму відкритих адаптивних систем, які здатні модифікувати свою поведінку у відповідь на зовнішні збурення завдяки нейромережевим механізмам навчання та зворотного зв'язку, що особливо актуально для аналізу нестаціонарних динамічних систем.

Розроблено математичну модель стохастичного програмування, яка враховує ієрархічні зв'язки між стратегічними та тактичними рішеннями, а також інтегрує оператори перетворення між множинами рішень, що дозволяє формалізувати адаптивні властивості нейромережевих систем у контексті нестаціонарної динаміки. Запропоновано перцептронну архітектуру нейронної мережі, оптимізовану для моделювання динамічних процесів у умовах невизначеності, яка включає механізми адаптації, оновлення вагових коефіцієнтів і навчання на основі даних, попередньо оброблених методами сингулярного розкладання, що забезпечує стійкість системи до змін у часі.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

Література

1. Ahmadianfar I., Farooque A.A., Ali M., Jamei M., Jamei M., Yaseen Z.M. A hybrid framework: singular value decomposition and kernel ridge regression optimized using mathematical-based fine-tuning for enhancing river water level forecasting. *Scientific Reports*. 2025. Vol. 15. Article 7596. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-90628-6>.
2. Сухарський С. С. Алгоритм сингулярного розкладу на графічному процесорі. Методи та засоби комп'ютерного моделювання. 2023. № 1. С. 30–36. DOI: <http://doi.org/10.15407/pp2023.01.030>.
3. Hryshko V., Zinchenko I. Synergy of AI and business as a factor of management efficiency in the context of technology development. *Science Journal «Economics and Region»*. 2023. Vol. 4(91). pp. 223-229. doi: [https://doi.org/10.26906/EiR.2023.4\(91\).3216](https://doi.org/10.26906/EiR.2023.4(91).3216).
4. Пелешко Д., Ковальчук А., Пелех Ю., Киричук В. Виділення псевдоінваріантів та квазістаціонарних ділянок мовних сигналів на основі сингулярних розкладів. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Комп'ютерні науки та інформаційні технології*. 2012. № 732. С. 58–66.
5. Гардер С. Є., Корніль Т. Л., Решетнікова С. М., Сердюк І. В. Сингулярний спектральний аналіз температурного багатовимірного часового ряду. Методи та засоби комп'ютерного моделювання. 2024. № 1(6). С. 45–52. DOI: 10.20998/2222-0631.2024.01(6).05.
6. Ferré J., Rokem A., Buffalo E. A., Kutz J. N., Fairhall A. Non-Stationary Dynamic Mode Decomposition. *IEEE Access*. 2023. Vol. 11. P. 117159–117176. DOI: 10.1109/ACCESS.2023.3326412.
7. Wang T., Wang T., Ge M., Zhang Q., Ge Z., Yang Z. Time-Graph Frequency Representation with Singular Value Decomposition for Neural Speech Enhancement. *arXiv preprint arXiv:2412.16823*, 2024. <https://arxiv.org/abs/2412.16823>.
8. Назаревич О.Б., Шимчук Г.В. Опис чисельного методу сингулярно-спектрального аналізу для аналізу часових рядів. *Матеріали Міжнародної науково-технічної конференції «Фундаментальні та прикладні проблеми сучасних технологій», Тернопіль, Україна, 14–15 травня 2020 року*. С. 161-162.
9. Yashchenko V.A. Neural-like growing networks in the development of general intelligence. *Neural-like element (P. I) Mathematical machines and systems*. 2022. N4. P. 15-36.
10. Македон В. В., Холод О. Г., Ярмоленко Л. І. Модель оцінки конкурентоспроможності високотехнологічних підприємств на засадах формування ключових компетенцій. *Академічний огляд*. 2023. № 2 (59). С. 75-89. DOI: 10.32342/2074-5354-2023-2-59-5.
11. Azam S.E., Rageh A., Linzell D. Damage detection in structural systems utilizing artificial neural networks and proper orthogonal decomposition. *Structural Control and Health Monitoring*. 2018. <https://doi.org/10.1002/stc.2288>.
12. Kazemi M. A comparative study of singular spectrum analysis, neural network, ARIMA and exponential smoothing for monthly rainfall forecasting. *Journal of Mathematical Modeling*. 2023. No 11(4). P. 783–803. <https://doi.org/10.22124/jmm.2023.25412.2262>
13. Македон В. В., Байлова О. О. Планування і організація впровадження цифрових технологій в діяльність промислових підприємств. *Науковий вісник Херсонського державного університету. Серія «Економічні науки»*. 2023. Випуск 47. С. 16-26. DOI: 10.32999/ksu2307-8030/2023-47-3.
14. Kim T. Y., Oh K. J., Kim C., Do J.-D. Artificial neural networks for non-stationary time series. *Neurocomputing*. 2004. Vol. 61, no. 1. P. 439–447. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2004.04.002>.
15. Pajak K., Omelyanenko V., Makedon V., Shevchenko V., Ovcharenko I. Raising the level of financial security of the enterprise based on the basic risks differentiation. *Journal of Security and Sustainability Issues*. 2020. No 10(1). pp. 115-130. [https://doi.org/10.9770/jssi.2020.10.1\(9\)](https://doi.org/10.9770/jssi.2020.10.1(9)).
16. Poongadan S., Lineesh M.C. Non-linear Time Series Prediction using Improved CEEMDAN, SVD and LSTM. *Neural Processing Letters*. 2024. Vol. 56. Article 164. <https://doi.org/10.1007/s11063-024-11622-z>.
17. Wang Q., Wang L., Yu H., Wang D., Nandi A. K. Utilizing SVD and VMD for Denoising Non-Stationary Signals of Roller Bearings. *Sensors*. 2022. no 22(1). P. 195. <https://doi.org/10.3390/s22010195>.

References

1. Ahmadianfar, I., Farooque, A. A., Ali, M., Jamei, M., Jamei, M., & Yaseen, Z. M. (2025). A hybrid framework: Singular value decomposition and kernel ridge regression optimized using mathematical-based fine-tuning for enhancing river water level forecasting. *Scientific Reports*, 15, Article 7596. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-90628-6>
2. Sukharskyi, S. S. (2023). Alhorytm syngulyarnoho rozkladu na hrafichnomu protsesori [Singular decomposition algorithm on a graphics processor]. *Metody ta zasoby komp'yuternoho modeliuвання – Methods and Tools of Computer Modeling*, 1, 30–36. <https://doi.org/10.15407/pp2023.01.030>. [in Ukrainian].
3. Hryshko, V., Zinchenko, I. (2023). Synergy of ai and business as a factor of management efficiency in the context of technology development. *Science Journal «Economics and Region»*, 4(91), 223–229. doi:[https://doi.org/10.26906/EiR.2023.4\(91\).3216](https://doi.org/10.26906/EiR.2023.4(91).3216).
4. Peleshko, D., Kovalchuk, A., Pelekh, Yu., Kyrychuk, V. (2012). Vydilennia pseudoinvariantiv ta kvazistatsionarnykh dilyanok movnykh syhnaliv na osnovi syngulyarnykh rozkladiv [Extraction of pseudo-invariants and quasi-stationary segments of speech signals based on singular decompositions]. *Visnyk Natsional'noho universytetu «Lvivs'ka politekhnika». Komp'yuterni nauky ta informatsiyni tekhnolohii – Bulletin of the National University "Lviv Polytechnic". Computer Science and Information Technology*, 732, 58–66. [in Ukrainian].
5. Harder, S. Ye., Kornil, T. L., Reshetnikova, S. M., Serdyuk, I. V. (2024). Syngulyarnyy spektral'nyy analiz temperaturnoho bahatovymirnoho chasovoho ryadu [Singular spectral analysis of a multivariate temperature time series]. *Metody ta zasoby komp'yuternoho modeliuвання – Methods and Tools of Computer Modeling*, 1(6), 45–52. [in Ukrainian]. [https://doi.org/10.20998/2222-0631.2024.01\(6\).05](https://doi.org/10.20998/2222-0631.2024.01(6).05).
6. Ferré, J., Rokem, A., Buffalo, E. A., Kutz, J. N., & Fairhall, A. (2023). Non-stationary dynamic mode decomposition. *IEEE Access*, 11, 117159–117176. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3326412>
7. Wang, T., Wang, T., Ge, M., Zhang, Q., Ge, Z., & Yang, Z. (2024). Time-graph frequency representation with singular value decomposition for neural speech enhancement. *arXiv preprint arXiv:2412.16823*. <https://arxiv.org/abs/2412.16823>
8. Nazarevych, O. B., Shymchuk, H. V. (2020). Opys chysel'noho metodu syngulyarno-spektral'noho analizu dlia analizu chasovykh ryadiv [Description of the numerical method of singular spectral analysis for time series analysis]. In *Materialy Mizhnarodnoi naukovo-tekhnichnoi konferentsii «Fundamental'ni ta prykladni problemy suchasnykh tekhnolohii»*, Ternopil, Ukraine, May 14–15, 2020 (pp. 161–162). [in Ukrainian].
9. Yashchenko, V.A. (2022). Neural-like growing networks in the development of general intelligence. *Neural-like element (P. I) Mathematical machines and systems*, N4, 15–36.
10. Makedon, V. V., Kholod, O. H., Yarmolenko, L. I. (2023). Model' otsinky konkurentospromozhnosti vysokotekhnolohichnykh pidpryyemstv na zasadakh formuvannya klyuchovykh kompetentsiy [The model of assessing the competitiveness of high-tech enterprises based on the formation of key competencies]. *Akademichnyy ohlyad*, 2(59), 75–89. [in Ukrainian]. DOI: 10.32342/2074-5354-2023-2-59-5
11. Azam, S. E., Rageh, A., & Linzell, D. (2018). Damage detection in structural systems utilizing artificial neural networks and proper orthogonal decomposition. *Structural Control and Health Monitoring*. <https://doi.org/10.1002/stc.2288>
12. Kazemi, M. (2023). A comparative study of singular spectrum analysis, neural network, ARIMA and exponential smoothing for monthly rainfall forecasting. *Journal of Mathematical Modeling*, 11(4), 783–803. <https://doi.org/10.22124/jmm.2023.25412.2262>
13. Makedon, V. V., Bailova, O. O. (2023). Planuvannya i orhanizatsiya vprovadzhennya tsyfrovyykh tekhnolohiy v diyal'nist' promyslovykh pidpryyemstv [Planning and organizing the implementation of digital technologies in the activities of industrial enterprises]. *Naukovyy visnyk Khersons'koho derzhavnoho universytetu. Seriya «Ekonomichni nauky»*, Issue 47, 16–26. DOI: 10.32999/ksu2307-8030/2023-47-3. [in Ukrainian].
14. Kim, T. Y., Oh, K. J., Kim, C., & Do, J.-D. (2004). Artificial neural networks for non-stationary time series. *Neurocomputing*, 61(1), 439–447. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2004.04.002>

15. Pajak, K., Omelyanenko, V., Makedon, V., Shevchenko, V., Ovcharenko, I. (2020). Raising the level of financial security of the enterprise based on the basic risks differentiation. Journal of Security and Sustainability Issues, №10 (1), 115-130. [https://doi.org/10.9770/jssi.2020.10.1\(9\)](https://doi.org/10.9770/jssi.2020.10.1(9)).
16. Poongadan, S., & Lineesh, M. C. (2024). Non-linear time series prediction using improved CEEMDAN, SVD and LSTM. Neural Processing Letters, 56, Article 164. <https://doi.org/10.1007/s11063-024-11622-z>
17. Wang, Q., Wang, L., Yu, H., Wang, D., & Nandi, A. K. (2022). Utilizing SVD and VMD for denoising non-stationary signals of roller bearings. Sensors, 22(1), 195. <https://doi.org/10.3390/s22010195>

Губаль Галина Миколаївна

Луцький національний технічний університет,
к.ф.-м.н., доцент,
доцент кафедри фізики та вищої математики
вул. Львівська, 75, м. Луцьк, Україна, 43018,
halynahbl@gmail.com
ORCID: 0000-0002-8824-4565

Гуда Оксана Вікторівна

Луцький національний технічний університет
к.т.н., доцент,
доцент кафедри вищої математики
вул. Львівська, 75, м. Луцьк, Україна, 43018,
gudaoksana@lutsk-ntu.com.ua
ORCID: 0000-0002-3602-7892

Одновол Дмитро Геннадійович

Таврійський державний агротехнологічний університеті імені Дмитра Моторного
старший викладач кафедри «Вищої математики і фізики»
dmytro.odnovol@tsatu.edu.ua
ORCID: 0009-0004-7238-7424

Для посилань:

Губаль Г. М., Гуда О. В., Одновол Д. Г. Нестационарні процеси на базі методів сингулярного розкладання і штучних нейронних мереж. Механіка та математичні методи, 2025. Т. VII. № 2. С. 133–146.

For references:

G. Hubal, O. Huda, D. Odnovol. (2025). Non-stationary processes based on singular decomposition methods and artificial neural networks. Mechanics and Mathematical Methods. VII (2). 133–146.

Нестационарні процеси на базі методів сингулярного розкладання і штучних нейронних мереж. © 2025
by Губаль Г. М., Гуда О. В., Одновол Д. Г. is licensed under CC BY 4.0

UDC 536.24.021

SECOND ORDER GUIDED WAVE PROPAGATION IN LAYERED PLATES

A. Pysarenko¹

¹*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract: This paper presents a comprehensive theoretical study of the mechanism of generation of combined harmonics of the second and third orders, which arise as a result of collinear cross-interaction of two primary directional Lamb waves in thin layered plates. The developed and implemented procedure for measuring combined harmonics at certain mixing frequencies allowed us to verify and confirm previously formulated theoretical predictions. In particular, it was established that for effective generation of combined harmonics, simultaneous fulfillment of two key conditions is necessary: the synchronism condition, which ensures phase coincidence of the interacting waves, and the symmetry condition, which determines the nature of the spatial properties of the formed harmonics. The results of numerical analysis showed that the frequency mixing response in the sample is due exclusively to the collinear cross-interaction between two primary Lamb waves propagating in the same direction. A cumulative effect of the increase in the amplitude of combined harmonics with the propagation distance in the mixing zone was revealed, which indicates the strengthening of nonlinear effects with an increase in the length of wave interaction. This effect is fully consistent with theoretical predictions and confirms the physical nature of the process of generating combined harmonics. Particular attention is paid to a detailed analysis of the symmetrical properties of second-order harmonics. It was found that the combined harmonic mode of the second order, which is generated at the total frequency, should have an antisymmetric character. This is due to the specificity of the cross-interaction between the A₁ and S₀ modes, which have different symmetrical properties. The lack of the appearance of a symmetrical mode of the combined harmonic of the second order is explained by the impossibility of simultaneously fulfilling the conditions of synchronism and symmetry, which imposes strict restrictions on the possible generation modes. The proposed theoretical model allows us to describe the frequency response of mixing, the conditions of internal resonance, as well as the features of symmetry that determine the appearance of combined harmonics at certain mixing frequencies. The model takes into account the physical process of generation of combined second- and third-order harmonics caused by the collinear cross-interaction of two primary Lamb waves propagating in the sample. This approach allows us to gain an understanding of the mechanism of nonlinear wave interaction in layered plates and contributes to the development of nonlinear acoustics methods. The results obtained are of great importance for practical application in the field of materials diagnostics, as they allow us to more accurately determine the properties of materials and detect defects by analyzing nonlinear effects in Lamb waves.

Keywords: combined harmonics, Lamb waves, collinear cross-interaction, synchronism condition, internal resonance.

ПОШИРЕННЯ КЕРОВАНИХ ХВИЛЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ У ШАРУВАТИХ ПЛАСТИНАХ

Писаренко О. М.¹

¹*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація: У роботі представлено комплексне теоретичне дослідження механізму генерації комбінованих гармонік другого та третього порядків, що виникають у результаті колінеарної перекрестної взаємодії двох первинних керованих хвиль Лемба в тонких шаруватих пластинах. Розроблена та реалізована процедура вимірювання комбінованих



гармонік на визначених частотах змішування дозволила перевірити та підтвердити раніше сформульовані теоретичні передбачення. Зокрема, встановлено, що для ефективної генерації комбінованих гармонік необхідне одночасне виконання двох ключових умов: умови синхронізму, яка забезпечує фазове співпадіння взаємодіючих хвиль, та умови симетрії, що визначає характер просторових властивостей утворених гармонік. Результати чисельного аналізу показали, що відгук змішування частот у зразку обумовлений виключно колінеарним перекрестним взаємодією між двома первинними хвилями Лемба, які поширюються в одному напрямку. Виявлено кумулятивний ефект наростання амплітуди комбінованих гармонік із відстанню поширення у зоні змішування, що свідчить про посилення нелінійних ефектів при збільшенні довжини взаємодії хвиль. Цей ефект повністю узгоджується з теоретичними прогнозами і підтверджує фізичну природу процесу генерації комбінованих гармонік. Особливу увагу приділено детальному аналізу симетричних властивостей гармонік другого порядку. З'ясовано, що комбінована гармонічна мода другого порядку, яка генерується на сумарній частоті, повинна мати антисиметричний характер. Це обумовлено специфікою перекрестного взаємодії між модами A_1 та S_0 , які мають різні симетричні властивості. Відсутність появи симетричного режиму комбінованої гармоніки другого порядку пояснюється неможливістю одночасного виконання умов синхронізму та симетрії, що накладає суворі обмеження на можливі режими генерації. Запропонована теоретична модель дозволяє описати частотний відгук змішування, умови внутрішнього резонансу, а також особливості симетрії, які визначають появу комбінованих гармонік на визначених частотах змішування. Модель враховує фізичний процес генерації комбінованих гармонік другого і третього порядків, викликаних колінеарним перекрестним взаємодією двох первинних хвиль Лемба, що поширюються в зразку. Такий підхід дає змогу отримати розуміння механізму нелінійної взаємодії хвиль у шаруватих пластинах і сприяє розвитку методів нелінійної акустики. Отримані результати мають важливе значення для практичного застосування у сфері діагностики матеріалів, оскільки дозволяють більш точно визначати властивості матеріалів та виявляти дефекти шляхом аналізу нелінійних ефектів у хвилях Лемба.

Ключові слова: комбіновані гармоніки, хвилі Лемба, колінеарна перекрестна взаємодія, умова синхронізму, внутрішній резонанс.

1 INTRODUCTION

The linear feature of ultrasonic wave propagation, while widely utilized in nondestructive evaluation (NDE), is not sufficiently sensitive to detect microscopic degradation or micro-damage within materials. This limitation arises because linear ultrasonic techniques primarily respond to changes in bulk material properties, such as velocity and attenuation, which often do not exhibit significant variation until damage has progressed to a more advanced stage. In contrast, even very small imperfections or microstructural changes—such as dislocations, micro-cracks, or voids—can induce pronounced nonlinear elastic behavior in materials. These nonlinearities can manifest as higher-order harmonic generation or modulation effects, which are orders of magnitude larger than the intrinsic nonlinearity observed in intact, undamaged materials. Consequently, the nonlinear ultrasonic response has emerged as a highly promising and sensitive approach for the early detection and characterization of material degradation and micro-damage.

Over the past two decades, extensive research has demonstrated that nonlinear ultrasonic methods can reveal subtle changes in material microstructure that remain undetectable by conventional linear ultrasonic techniques. The sensitivity of nonlinear ultrasonic measurements to microstructural defects stems from their ability to probe the material's nonlinear elastic constants, which are directly influenced by damage mechanisms at the microscopic scale. This enhanced sensitivity enables the detection of incipient damage, fatigue, and other forms of degradation well before macroscopic failure occurs, thereby providing critical information for predictive maintenance and structural health monitoring.

Among the various nonlinear ultrasonic techniques, the use of Lamb waves has gained significant attention due to their unique propagation characteristics in plate-like structures. Lamb waves are guided elastic waves that travel along thin plates and exhibit multiple modes with dispersive behavior, making them highly versatile for interrogating complex geometries and layered materials. The nonlinear ultrasonic Lamb wave approach combines the inherent advantages of Lamb wave inspection—such as long-range propagation and mode selectivity—with the high sensitivity of nonlinear acoustic measurements. This synergy offers a powerful tool for evaluating material nonlinearity and detecting micro-damage in engineering components like aircraft skins, pipelines, and composite laminates.

To date, theoretical investigations into the nonlinear behavior of ultrasonic Lamb waves in isotropic plates have employed perturbation approximations and modal expansion analyses to model higher-harmonic generation phenomena. These studies provide fundamental insights into the mechanisms by which nonlinear Lamb waves interact with material imperfections and how higher harmonics evolve during wave propagation. Understanding these nonlinear interactions is essential for optimizing experimental setups, interpreting measurement data, and developing robust diagnostic criteria for damage assessment. As research progresses, the nonlinear ultrasonic Lamb wave approach is poised to become an integral part of advanced NDE methodologies, offering unprecedented sensitivity and reliability in the evaluation of material integrity.

2 ANALYSIS OF LITERARY DATA AND RESOLVING THE PROBLEM

The generation of higher harmonics and the possibility of symmetric or antisymmetric Lamb waves at higher harmonics have in layered structures been described in numerous studies [1, 2]. This problem was addressed using displacement gradient shaping in modal decomposition [3, 4]. As shown in these studies, the second harmonic of the propagation of the primary (fundamental) Lamb wave exhibits a cumulative effect under conditions of phase velocity matching and non-zero power transfer from the primary to the second

harmonic. Experimental studies were carried out to confirm the theoretical predictions, and the results showed that Lamb waves can grow with propagation distance [5, 6].

However, most of the previous studies focused on the generation of higher harmonics of primary Lamb waves with a single frequency. In contrast, there are few studies that discuss the frequency mixing response caused by the collinear interaction of two primary Lamb waves with different frequencies [7, 8]. The interaction of two primary waves with fixed frequencies in nonlinear materials can generate combined harmonics with different frequencies [9, 10]. The possibility of using collinear mixing of body waves to measure acoustic nonlinearity has been considered as a model approach to solving the problem [11, 12]. In addition, the identification of local plastic damage using the nonlinear response of scanning collinear mixing of body waves has been investigated [13, 14]. It has been shown that non collinear mixing of body waves can be used to assess ductility and fatigue, respectively [15, 16]. Nonlinear mixing of ultrasonic waves can be used to assess the physical aging of thermoplastics and the curing of epoxy resins [17, 18]. Necessary and sufficient conditions for the generation of resonant harmonic modes by mixing two propagating waves in solids with quadratic elastic nonlinearity were also discussed [19, 20]. The frequency response of mixing offers some unique advantages over nonlinear ultrasonic technology based on higher harmonic generation, such as frequency selectivity, which allows one to intentionally avoid receiving unexpected harmonic components induced by instrumentation systems. Furthermore, the spatial selectivity of scanning wave mixing can be easily exploited to locate the damage region in a material.

In this paper, a theoretical model is presented to describe the frequency mixing response caused by the collinear cross-talk of two primary Lamb waves, as well as the physical process of generating the second- and third-order combined harmonics. Based on this theoretical framework, the internal resonance conditions, including the synchronism and symmetry features for the generation of the second- and third-order combined harmonics by two primary Lamb waves, will be analyzed. In addition, the possibility of predicting the existence of the second- and third-order combined harmonics at certain mixing frequencies needs to be separately considered. The possibility of generating the second- and third-order combined harmonics caused by the collinear cross-talk of two primary Lamb waves also needs to be substantiated.

3 PURPOSE AND TASKS OF THE STUDY

The equation of motion for elastic wave propagation in an isotropic, homogeneous, nonlinear elastic material is given by

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mu \nabla (\nabla v) - (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla v) = Y(v),$$

where v is the mechanical displacement; λ and μ are the second-order elastic constants; ρ_0 is the initial mass density of material.

Functional dependency $Y = Y(v)$ nonlinear term with respect to v . The perturbation approximation can be used to solve nonlinear wave equations. The solution for v can be approximated as the sum of the primary (fundamental or first-order) wave $v^{(1)}$, the second-order wave $v^{(2)}$, and the third-order wave $v^{(3)}$, i.e.

$$v = v^1 + v^2 + v^3.$$

These equations can be decomposed into the following three second order guided wave equations:

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial t^2} + \mu \nabla^2 v^{(1)} - (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot v^{(1)}) &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial t^2} + \mu \nabla^2 v^{(2)} - (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot v^{(2)}) &= Y^{(2)}, \\ \rho_0 \frac{\partial^2 v^{(3)}}{\partial t^2} + \mu \nabla^2 v^{(3)} - (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot v^{(3)}) &= Y^{(3)},\end{aligned}$$

where $Y^{(2)} = Y[v^{(1)}]$ and $Y^{(3)} = Y[v^{(1)}, v^{(2)}]$ are the second and third-order nonlinear terms, respectively, which can be obtained from $Y = Y(v)$ just using $v^{(1)} = v^{(2)} + v^{(3)}$ instead of v .

In this paper, the calculation method has as a working object a reference configuration for the analysis of guided Lamb wave propagation in a single elastic plate, where the material is assumed to be homogeneous, without dispersion and attenuation of waves, with weak elastic nonlinearity. Before performing the calculations, it was assumed that in the plate material Lamb waves propagate along the axis of a fixed p-axis of symmetry oz , and the corresponding mechanical displacements are considered only in the perpendicular plane yz .

Based on this consideration, the formal solutions of two primary Lamb waves with different frequencies propagating along the oz axis are given by $v_a = v_a(y) \exp(j(k_a z - \omega_a t))$ and $v_b = v_b(y) \exp(j(k_b z - \omega_b t))$, respectively, which satisfy the stress-free boundary conditions. Here, $v_a(y)$ and $v_b(y)$ are the field functions of the two primary Lamb waves with angular frequencies ω_a and ω_b and wave numbers k_a and k_b , respectively.

Clearly, $v_a + v_b$ corresponds the primary wave $v^{(1)}$. The second order self- and cross-interactions of the two primary waves v_a and v_b can generate the second-order wave $v^{(2)}$, while the third-order self- and cross-interactions of v_a and v_b generate the third-order wave $v^{(3)}$. Considering that the two primary Lamb waves v_a and v_b propagate in the same direction, all the self- and cross-interactions associated with v_a and v_b are collinear.

Considering all possible self- and cross-interactions of the two primary Lamb waves v_a and v_b propagating in the plate, the nonlinear terms $Y^{(2)}$ and $Y^{(3)}$ can be formally decomposed as

$$\begin{aligned}Y^{(2)} &= y^{(2a)} \exp[2j(k_a z - \omega_a t)] + y^{(2b)} \exp[2j(k_b z - \omega_b t)] + \\ &+ y^{(a \pm b)} \exp\{j[(k_a \pm k_b)z - (\omega_a \pm \omega_b)t]\},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}Y^{(3)} &= y^{(3a)} \exp[3j(k_a z - \omega_a t)] + y^{(3b)} \exp[3j(k_b z - \omega_b t)] + \\ &+ y^{(2a \pm b)} \exp\{j[(2k_a \pm k_b)z - (2\omega_a \pm \omega_b)t]\} + \\ &+ y^{(a \pm 2b)} \exp\{j[(k_a \pm 2k_b)z - (\omega_a \pm 2\omega_b)t]\}.\end{aligned}$$

Here, $y^{(2a)}$, $y^{(2b)}$, $y^{(3a)}$, and $y^{(3b)}$ are the second- and third order driving forces induced by the self-interactions of primary waves v_a and v_b , respectively, while $y^{(a \pm b)}$, $y^{(2a \pm b)}$, and $y^{(a \pm 2b)}$ are induced by the second- and third-order cross-interactions of v_a and v_b .

For v_a and v_b propagating in the plate, in addition to the existence of $Y^{(2)} = Y[v^{(1)}]$ and $Y^{(2)} = Y[v^{(1)}, v^{(2)}]$ inside the solid plate, second- and third-order traction stress tensors $S^{(2)} \cdot n_y$ and $S^{(3)} \cdot n_y$ exist at the two surfaces of the plate ($\pm h$), which can be formally expressed as

$$S^{(2)} \cdot n_x = s^{(2a)} \cdot n_x \exp[2j(k_a z - \omega_a t)] + s^{(2b)} \cdot n_x \exp[2j(k_b z - \omega_b t)] + \\ + s^{(a \pm b)} \cdot n_x \exp\{j[(k_a \pm k_b)z - (\omega_a \pm \omega_b)t]\},$$

and

$$S^{(3)} \cdot n_x = s^{(3a)} \cdot n_x \exp[3j(k_a z - \omega_a t)] + s^{(3b)} \cdot n_x \exp[3j(k_b z - \omega_b t)] + \\ + s^{(2a \pm b)} \cdot n_x \exp\{j[(2k_a \pm k_b)z - (2\omega_a \pm \omega_b)t]\} + \\ + s^{(a \pm 2b)} \cdot n_x \exp\{j[(k_a \pm 2k_b)z - (\omega_a \pm 2\omega_b)t]\}.$$

In these equations n_x and n_y are the unit vector along the oy and oz axes, respectively, and $S^{(2)}$ and $S^{(3)}$ correspond to the quadric and cubic terms, respectively, in the expression of the first Piola–Kirchhoff stress tensor. Specifically, $s^{(2a)} \cdot n_x$, $s^{(2b)} \cdot n_x$, $s^{(3a)} \cdot n_x$, and $s^{(3b)} \cdot n_x$ are the second- and third order traction stress tensors at the surfaces induced by the self-interactions of primary wave v_a and v_b , respectively, while $s^{(a \pm b)} \cdot n_x$, $s^{(2a \pm b)} \cdot n_x$, and $s^{(a \pm 2b)} \cdot n_x$ are induced by the second- and third- order cross-interactions of v_a and v_b . The expressions for $s^{(a \pm b)}$, $s^{(2a \pm b)}$, and $s^{(a \pm 2b)}$ are extremely lengthy for any modes v_a and v_b .

According to the modal-expansion approach for wave guide excitation, the bulk driving forces $Y^{(2)}$, $Y^{(3)}$ and the surface stress tensors $S^{(2)} \cdot n_x$ and $S^{(3)} \cdot n_x$ can be thought of as a bulk source and a surface source, respectively, and their function is to generate a series of second and third-order Lamb waves propagating in the stress-free plate. In the present investigation, we focus on the combined harmonic modes generated at the mixing frequency. Thus, only the nonlinear terms $y^{(a \pm b)}$ and $s^{(a \pm b)} \cdot n_x$ are taken into account for generating second-order combined harmonics at the mixing frequency $\omega^{(2)} = \omega_a \pm \omega_b$, where as the self-interaction terms of the two primary waves are neglected for the analysis of the second-order nonlinear wave problem. Based on this consideration, we focus on analyzing the combined harmonic wave $v^{(2)}$ at $\omega^{(2)} = \omega_a \pm \omega_b$, which is generated by $y^{(a \pm b)}$ and $s^{(a \pm b)} \cdot n_x$.

We construct the solution of the second-order combined harmonic $v^2 = v^{(\omega_a \pm \omega_b)}$ via a modal-expansion analysis. The field caused by mixing the two primary Lamb waves (i.e., v_a and v_b) can be written as a linear combination of a series of Lamb waves at the mixing frequency $\omega^{(2)} = \omega_a \pm \omega_b$

$$v^{(2)} = \sum_m A_m(z) v_m^{(\omega_a \pm \omega_b)}(y) \exp[-j(\omega_a \pm \omega_b)t],$$

where $v_m^{(\omega_a \pm \omega_b)}$ is the field function of the m th Lamb wave at the mixing frequency $\omega^{(2)}$ with wave number $k_m^{(2)}$, and $A_m(z)$ is the corresponding expansion coefficient. Similar to

the analysis of second-harmonic generation by the primary Lamb wave, the equation governin $A_m(z)$ is given by

$$4Y_{mm} \left[\frac{d}{dz} - jk_m^{(2)} \right] A_m(z) = [y_{s,(m)}^{(2)} + y_{b,(m)}^{(2)}] \exp[j(k_a \pm k_b)z],$$

where

$$y_{b,(m)}^{(2)} = \int_{-h}^h j(\omega_a \pm \omega_b) [v_m^{(\omega_a \pm \omega_b)}(x)] \cdot y^{(a \pm b)} dy$$

$$y_{s,(m)}^{(2)} = j(\omega_a \pm \omega_b) [v_m^{(\omega_a \pm \omega_b)}(x)] \cdot y^{(a \pm b)} \cdot n_x \Big|_{(-h)}^h.$$

are the excitation functions due to the bulk driving force $y^{(a \pm b)}$.

The quantity Y_{mm} is the average power flow per unit width along the ox axis for the m^{th} Lamb wave at the mixing frequency $\omega^{(2)} = \omega_a \pm \omega_b$. The formal expression of Y_{mm} is

$$Y_{mm} = \text{Re} \frac{1}{2} \int_{-h}^h [-j(\omega_a \pm \omega_b)] \left[\begin{matrix} n_x v_m^{(\omega_a \pm \omega_b)}(x) T_{(m)xz}(x) \\ n_z v_m^{(\omega_a \pm \omega_b)}(x) T_{(m)zz}(x) \end{matrix} \right] dy,$$

where $T_{(m)xz}(x) = n_x T_m n_z$, $T_{(m)zz}(x) = n_z T_m n_z$, T_m is the stress tensor related to $v_m^{(\omega_a \pm \omega_b)}(x)$.

Fixed coefficient $A_m(z)$ can be formally expressed as

$$A_m(z) = \frac{[y_{s,(m)}^{(2)} + y_{b,(m)}^{(2)}]}{4Y_{mm}} \frac{\sin(\Delta_m z)}{\Delta_m} \exp[j(k_m^2 + \Delta_m)z],$$

where

$$\Delta_m = \frac{[(k_a \pm k_b) - k_m^{(2)}]}{2}.$$

Next, we analyzed the effect of synchronism (also called phase matching between the primary wave and the m^{th} combined harmonic mode at the frequency $\omega^{(2)} = \omega_a \pm \omega_b$. The magnitude of the m^{th} combined harmonic mode is closely related to Δ_m . Thus, the effect of synchronism on the generation of the m^{th} combined harmonic mode can be revealed directly by the dependence of $A_m(z)$ on the factor $\sin(\Delta_m z) / \Delta_m$. For the synchronism condition [i.e., $k_m^2 = k_a \pm k_b$] at $\omega^{(2)} = \omega_a \pm \omega_b$, the factor $\sin(\Delta_m z) / \Delta_m = z$, and the magnitude of the m^{th} combined harmonic mode increases linearly with z provided $y_{s,(m)}^{(2)} + y_{b,(m)}^{(2)} \neq 0$. For $k_m^2 \neq k_a \pm k_b$ and $y_{s,(m)}^{(2)} + y_{b,(m)}^{(2)} \neq 0$, the magnitude of $|A_m(z)| \cdot |\sin(\Delta_m z)|$ remains bounded and oscillates with a spatial periodicity Δ , where Δ is generally expressed as π / Δ_m .

We now focus on the analysis of third-order combined harmonics at the mixing frequencies $\omega^{(3)} = 2\omega_a \pm \omega_b$ and $\omega_a \pm 2\omega_b$. Thus, we neglect the third-order terms of the self interactions of two primary waves. To analyze the generation of the third-order combined harmonics, the expression for nonlinear terms can, respectively, be simplified as

$$Y^{(3)} = y^{(2a \pm b)} \exp \{ j[(2k_a \pm k_b)z - (2\omega_a \pm \omega_b)t] \} +$$

$$+ y^{(a \pm 2b)} \exp \{ j[(k_a \pm 2k_b)z - (\omega_a \pm 2\omega_b)t] \},$$

and

$$S^{(3)} \cdot n_x = s^{(2a \pm b)} \cdot n_x \exp[j(2k_a \pm k_b)z - (2\omega_a \pm \omega_b)t] + \\ + s^{(a \pm 2b)} \cdot n_x \exp\{j[(k_a \pm 2k_b)z - (\omega_a \pm 2\omega_b)t]\}.$$

Referring to the process of analyzing second-order combined harmonics, the total fields of third-order combined harmonics generated by $y^{(2a \pm b)}$, $s^{(2a \pm b)} \cdot n_x$, $y^{(a \pm 2b)}$ and $s^{(a \pm 2b)} \cdot n_x$ can also be written as a linear combination of a series of Lamb waves at the mixing frequencies $\omega^{(3)} = 2\omega_a \pm \omega_b$ and $\omega_a \pm 2\omega_b$

$$v^{(3)} = v^{(2\omega_a \pm \omega_b)} + v^{(\omega_a \pm 2\omega_b)}, \\ v^{(2\omega_a \pm \omega_b)} = \sum_p \alpha_p(z) v_p^{(2\omega_a \pm \omega_b)}(x) \exp[-j(2\omega_a \pm \omega_b)t], \\ v_p^{(2\omega_a \pm \omega_b)}(x) v^{(\omega_a \pm 2\omega_b)} = \sum_q \beta_q(z) v_q^{(\omega_a \pm 2\omega_b)}(x) \exp[-j(\omega_a \pm 2\omega_b)t],$$

where $v_p^{(2\omega_a \pm \omega_b)}(x)$ and $v_q^{(\omega_a \pm 2\omega_b)}$ are the field functions of the p^{th} and q^{th} Lamb wave at the mixing frequencies $2\omega_a \pm \omega_b$ and $\omega_a \pm 2\omega_b$, respectively, and $\alpha_p(z)$ and $\beta_q(z)$ the corresponding expansion coefficients.

The analysis of the second-order combined harmonics leads to the equations governing $\alpha_p(z)$ and $\beta_q(z)$ can be given by

$$4Y_{pp} \left[\frac{d}{dz} - jk_p^{(3)} \right] \alpha_p(z) = [y_{s,(p)}^{(3)} + y_{b,(p)}^{(3)}] \exp[j(2k_a \pm k_b)z],$$

and

$$4Y_{qq} \left[\frac{d}{dz} - jk_q^{(3)} \right] \alpha_p(z) = [y_{s,(p)}^{(3)} + y_{b,(p)}^{(3)}] \exp[j(k_a \pm 2k_b)z],$$

where $k_p^{(3)}$ and $k_q^{(3)}$ are, respectively, the wavenumbers of the Lamb waves at the mixing frequencies $2\omega_a \pm \omega_b$ and $\omega_a \pm 2\omega_b$ and $Y_{pp\alpha}$ and $Y_{qq\beta}$ are the corresponding average power flow per unit width along the ox axis, whose formal expressions are, respectively,

$$Y_{pp\alpha} = \text{Re} \frac{1}{2} \int_{-h}^h [-j(2\omega_a \pm \omega_b)] \left[\begin{matrix} n_x v_p^{(2\omega_a \pm \omega_b)}(x) T_{(p)xz}(x) \\ n_z v_p^{(2\omega_a \pm \omega_b)}(x) T_{(p)zz}(x) \end{matrix} \right] dy, \\ Y_{qq\beta} = \text{Re} \frac{1}{2} \int_{-h}^h [-j(\omega_a \pm 2\omega_b)] \left[\begin{matrix} n_x v_p^{(\omega_a \pm 2\omega_b)}(x) T_{(q)xz}(x) \\ n_z v_p^{(\omega_a \pm 2\omega_b)}(x) T_{(q)zz}(x) \end{matrix} \right] dy,$$

where $T_{(r)xz}(x) = n_x T_r n_z$, $T_{(r)zz}(x) = n_z T_r n_z$, ($r = p, q$); T_r is the stress tensor related to $v_p^{(2\omega_a \pm \omega_b)}(x)$ or $v_p^{(\omega_a \pm 2\omega_b)}(x)$.

It is important to note that the third-order combined harmonic modes at the mixing frequencies $2\omega_a \pm \omega_b$ and $\omega_a \pm 2\omega_b$ are induced by the third order cross-interaction between the two primary Lamb waves v_a and v_b . Only symmetric second harmonics can be generated by the self-interaction of primary Lamb waves with either asymmetry or antisymmetry feature.

Numerical analysis showed that, the third-order combined harmonic $v^{(2\omega_a \pm \omega_b)}$ at the frequency $2\omega_a \pm \omega_b$ has the same symmetry feature as the primary Lamb wave v_b , while the symmetry feature of $v^{(\omega_a \pm 2\omega_b)}$ at the frequency $\omega_a \pm 2\omega_b$ depends only on that of the primary Lamb wave v_a . Similarly, both the synchronism and symmetry feature should be simultaneously considered for predicting the existence of cumulative third-order combined harmonics generated by the collinear mixing of two primary Lamb waves. The discovered dependencies, both synchronism and symmetry, must be taken into account simultaneously to predict the existence of so-called cumulative combined harmonics of the third order. Such harmonics are generated by collinear mixing of two primary Lamb waves.

4 BASIC RESULTS

Verification of the theoretically discovered dependencies was performed using known experimental studies of the frequency mixing responses of two primary Lamb waves in an aluminum plate with a thickness of $h = 0,97 \text{ mm}$, a length of $L = 1200 \text{ mm}$ along the propagation direction and a width of $h_1 = 480 \text{ mm}$ perpendicular to the propagation direction.

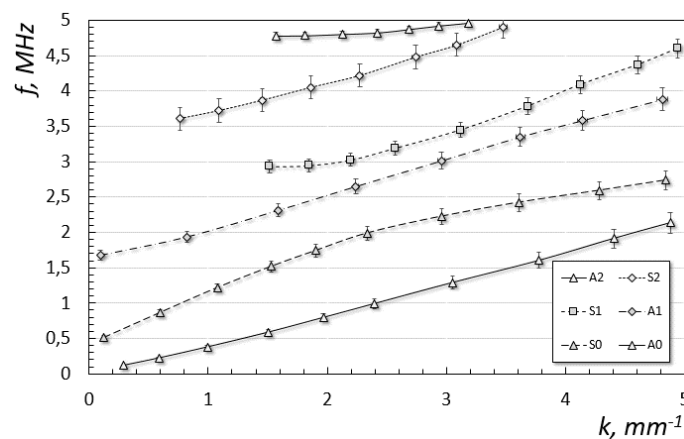


Fig.1. Lamb wave dispersion curves for second-order harmonic mode

At longitudinal and transverse velocities of the plate material (aluminum) set to 6.395 km/s and 3.240 km/s. The dispersion curves of Lamb wave propagation for determining the combined harmonic modes of the second and third order satisfying the synchronism condition are demonstrated in Fig. 1 and 2. In particular, two primary Lamb waves, including the A1 mode at a frequency of $f_a = 2.6 \text{ MHz}$ and the S0 mode at $f_b = 1.35 \text{ MHz}$, are determined for collinear mixing of wave propagation.

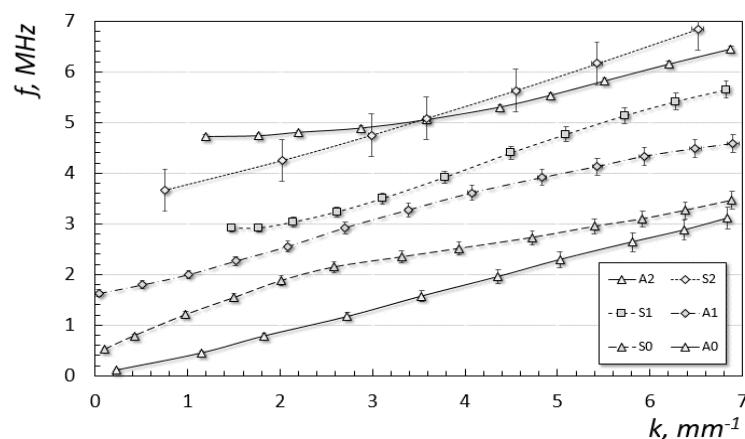


Fig.2. Lamb wave dispersion curves for third-order harmonic mode

The frequencies and phase velocities of the two selected primary Lamb waves, as well as the combined harmonic modes of the second and third orders that satisfy the synchronism condition, can be determined using the dispersion curves of Lamb wave propagation shown in Fig. 3.

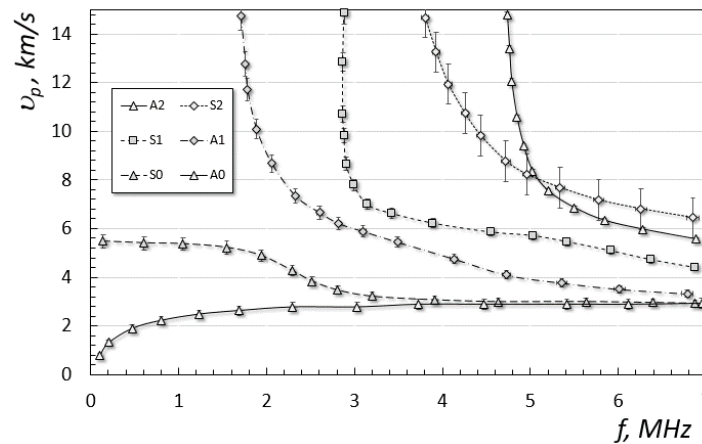


Fig.3. Phase velocity (v_p) dispersion curves of Lamb waves

5 DISCUSSION OF THE RESULTS OF THE STUDY

The dispersion curves shown in Fig. 1 indicate that the combined second-order harmonic mode (i.e., S1 mode) at the sum frequency of 4.0 MHz satisfies the phase-matching condition (i.e., $k^{(2)} = k_a + k_b$ at $v^{(2)} = v_a + v_b$). On the other hand, it can be argued that there is a clear difference between the wave number of the Lamb wave at $v^{(2)} = v_a - v_b$ and the value $(k_a - k_b)$, which means that the second-order difference frequency mode does not satisfy the phase-matching condition.

The third-order combined harmonic modes satisfying the synchronism condition are shown in Fig. 2. It should be noted that the wave numbers $k_a, k, k^{(2)}$ and $k^{(3)}$ at $v_a, v_b, v_a + v_b$ and $2v_a \pm v_b$ or $(v_a \pm 2v_b)$ depend on the values of the longitudinal and transverse velocities of the plate material.

The results of the calculation methods indicate that the relative error of the calculated values may depend on the longitudinal and transverse velocities of propagation of the Lamb wave modes in the plate material. The reaction of mixing the Lamb waves' frequencies at frequencies $2v_a \pm v_b$ and $v_a \pm 2v_b$ was detected. It can be considered that it approximately satisfies the synchronism criterion for generating third-order combined harmonic modes. Obviously, the third-order combined harmonic modes at the frequency $2v_a \pm v_b$ satisfy the synchronism condition better than at the frequency $v_a \pm 2v_b$.

It can be concluded that for the two selected primary Lamb waves, the synchronism of the generation of combined harmonic modes of the second and third order is considered simultaneously, which means that possible frequency mixing reactions of the second and third orders can be observed simultaneously. The frequency mixing reaction of Lamb waves is indeed manifested for the selected pair of modes.

However, it should be noted that although the combined second-order harmonic mode (i.e., the S1 mode) at the sum frequency satisfies the synchronism condition, the corresponding amplitude is not displayed on the amplitude-frequency curve. The analysis showed that in addition to the synchronism condition, the required symmetry condition must be simultaneously satisfied for the combined second-order harmonic mode to be generated. In particular, the combined second-order harmonic mode generated at the sum frequency

must be antisymmetric rather than symmetric due to the cross-talk between the A1 and S0 modes. Thus, the absence of the appearance of the combined second-order harmonic mode should be explained by the fact that the synchronism and symmetry conditions cannot be simultaneously achieved.

6 CONCLUSIONS

In this paper, the frequency mixing response caused by the collinear cross-talk of two primary Lamb waves with different frequencies is theoretically analyzed and compared with known experimental results. A theoretical basis for the frequency mixing response caused by the collinear mixing of two primary Lamb waves is established using the perturbation approximation and the normal mode decomposition method for waveguide excitation. Based on the theoretical basis, we discuss the internal resonance conditions for the generation of second- and third-order combined harmonics by two primary Lamb waves, and predict the existence of second- and third-order combined harmonics at different mixing frequencies.

To verify the theoretical prediction, the results of the combined harmonics measurements of two primary Lamb waves at certain mixing frequencies are used. The experimental results show that two conditions must be simultaneously satisfied for the combined harmonics to be generated. The first condition is synchronization, and the second condition is the symmetry property. In addition, it can be stated that the frequency mixing response is due only to the collinear cross-talk between the two primary Lamb waves.

In addition, the previously predicted cumulative effect of combined harmonics generated with the propagation distance in the mixing zone of two primary Lamb waves propagating in the sample was found. This effect is consistent with the effect of the appearance of combined harmonics at certain mixing frequencies. Thus, this work provides a physical understanding of the generation of combined harmonic modes by the collinear cross-talk of two primary Lamb waves.

7 ETHICAL DECLARATIONS

The author has no relevant financial or non-financial interests to report.

References

1. Deng, M. Modal analysis of second-harmonic generation of generalized Lamb waves in layered planar structures. *Ndt & E International*. 2005. 38(2). Pp. 85-95. <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2004.05.005>
2. Shan, S., & Cheng, L. Mixed third harmonic shear horizontal wave generation: interaction between primary shear horizontal wave and second harmonic Lamb wave. *Smart Materials and Structures*. 2019. 28(8). P. 085042. <https://doi.org/10.1088/1361-665X/ab1fce>
3. Yang, Y., Ng, C. T., & Kotousov, A. Second-order harmonic generation of Lamb wave in prestressed plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2019. 460. P. 114903. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.114903>
4. Matsuda, N., & Biwa, S. Frequency dependence of second-harmonic generation in Lamb waves. *Journal of Nondestructive Evaluation*. 2014. 33. Pp. 169-177. <https://doi.org/10.1007/s10921-014-0227-y>
5. Xu, C., Yang, Z., Qiao, B., & Chen, X. Sparse estimation of propagation distances in Lamb wave inspection. *Measurement Science and Technology*. 2019. 30(5). P. 055601. <https://doi.org/10.1088/1361-6501/ab04ec>
6. Pagneux, V., & Maurel, A. Lamb wave propagation in elastic waveguides with variable thickness. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2006. 462(2068). Pp. 1315-1339. <https://doi.org/10.1098/rspa.2005.1612>

7. Li, W., Deng, M., Hu, N., & Xiang, Y. Theoretical analysis and experimental observation of frequency mixing response of ultrasonic Lamb waves. *Journal of Applied Physics*. 2018. 124(4). <https://doi.org/10.1063/1.5028536>
8. Ishii, Y., Biwa, S., & Adachi, T. Non-collinear interaction of guided elastic waves in an isotropic plate. *Journal of Sound and Vibration*. 2018. 419. Pp. 390-404. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.01.031>
9. Novak, A., Bentahar, M., Tournat, V., El Guerjouma, R., & Simon, L. Nonlinear acoustic characterization of micro-damaged materials through higher harmonic resonance analysis. *Ndt & E International*. 2012. 45(1). Pp. 1-8. <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2011.09.006>
10. Patil, G. U., & Matlack, K. H. Review of exploiting nonlinearity in phononic materials to enable nonlinear wave responses. *Acta Mechanica*. 2022. 233(1). Pp. 1-46. <https://doi.org/10.1007/s00707-021-03089-z>
11. Liu, M., Tang, G., Jacobs, L. J., & Qu, J. Measuring acoustic nonlinearity parameter using collinear wave mixing. *Journal of applied physics*. 2012. 112(2). <https://doi.org/10.1063/1.4739746>
12. Sun, Z., Li, F., & Li, H. A numerical study of non-collinear wave mixing and generated resonant components. *Ultrasonics*. 2016. 71. Pp. 245-255. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2016.06.019>
13. Tang, G., Liu, M., Jacobs, L. J., & Qu, J. Detecting localized plastic strain by a scanning collinear wave mixing method. *Journal of Nondestructive Evaluation*. 2014. 33. Pp. 196-204. <https://doi.org/10.1007/s10921-014-0224-1>
14. Jiao, J., Lv, H., He, C., & Wu, B. Fatigue crack evaluation using the non-collinear wave mixing technique. *Smart Materials and Structures*. 2017. 26(6). P. 065005. <https://doi.org/10.1088/1361-665X/aa6c43>
15. Qiao, R., & Yan, X. The characterization of fatigue damage of 316L stainless steel parts formed by selective laser melting with harmonic generation technique. *Materials*. 2022. 15(3). P. 718. <https://doi.org/10.3390/ma15030718>
16. Cr  t  , J. P., Long  re, P., & Cadou, J. M. Numerical modelling of crack propagation in ductile materials combining the GTN model and X-FEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2014. 275. Pp. 204-233. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.03.007>
17. Zhang, Y., Wang, X., Yang, Q., Xue, R., Zhang, J., Sun, Y., & Krishnaswamy, S. Research on epoxy resin curing monitoring using laser ultrasonic. *Measurement*. 2020. 158. P. 107737. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2020.107737>
18. Chu, Q., Li, Y., Xiao, J., Huan, D., Zhang, X., & Chen, X. Processing and characterization of the thermoplastic composites manufactured by ultrasonic vibration-assisted automated fiber placement. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*. 2018. 31(3). Pp. 339-358. <https://doi.org/10.1177/0892705717697781>
19. Gao, X., & Qu, J. Necessary and sufficient conditions for resonant mixing of plane waves in elastic solids with quadratic nonlinearity. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2020. 148(4). Pp. 1934-1946. <https://doi.org/10.1121/10.0002009>
20. Zhao, Y., Chen, Z., Cao, P., & Qiu, Y. Experiment and FEM study of one-way mixing of elastic waves with quadratic nonlinearity. *NDT & E International*. 2015. 72. Pp. 33-40. <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2015.02.004>

Література

1. Deng, M. (2005) Modal analysis of second-harmonic generation of generalized Lamb waves in layered planar structures. *Ndt & E International*. 38(2). 85-95.
2. Shan, S., & Cheng, L. (2019) Mixed third harmonic shear horizontal wave generation: interaction between primary shear horizontal wave and second harmonic Lamb wave. *Smart Materials and Structures*. 28(8).
3. Yang, Y., Ng, C. T., & Kotousov, A. (2019) Second-order harmonic generation of Lamb wave in prestressed plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2019. 460. P. 114903.
4. Matsuda, N., & Biwa, S. (2014) Frequency dependence of second-harmonic generation in Lamb waves. *Journal of Nondestructive Evaluation*. 33. 169-177.
5. Xu, C., Yang, Z., Qiao, B., & Chen, X. (2019) Sparse estimation of propagation distances in Lamb wave inspection. *Measurement Science and Technology*. 30(5). 055601.

6. Pagneux, V., & Maurel, A. (2006) Lamb wave propagation in elastic waveguides with variable thickness. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 462(2068). 1315-1339.
7. Li, W., Deng, M., Hu, N., & Xiang, Y. (2018) Theoretical analysis and experimental observation of frequency mixing response of ultrasonic Lamb waves. *Journal of Applied Physics*. 124(4).
8. Ishii, Y., Biwa, S., & Adachi, T. (2018) Non-collinear interaction of guided elastic waves in an isotropic plate. *Journal of Sound and Vibration*. 419. 390-404.
9. Novak, A., Bentahar, M., Tournat, V., El Guerjouma, R., & Simon, L. (2012) Nonlinear acoustic characterization of micro-damaged materials through higher harmonic resonance analysis. *Ndt & E International*. 45(1). 1-8.
10. Patil, G. U., & Matlack, K. H. (2022) Review of exploiting nonlinearity in phononic materials to enable nonlinear wave responses. *Acta Mechanica*. 233(1). 1-46.
11. Liu, M., Tang, G., Jacobs, L. J., & Qu, J. (2012) Measuring acoustic nonlinearity parameter using collinear wave mixing. *Journal of applied physics*. 112(2).
12. Sun, Z., Li, F., & Li, H. (2016) A numerical study of non-collinear wave mixing and generated resonant components. *Ultrasonics*. 71. 245-255.
13. Tang, G., Liu, M., Jacobs, L. J., & Qu, J. (2014) Detecting localized plastic strain by a scanning collinear wave mixing method. *Journal of Nondestructive Evaluation*. 33. 196-204.
14. Jiao, J., Lv, H., He, C., & Wu, B. (2017) Fatigue crack evaluation using the non-collinear wave mixing technique. *Smart Materials and Structures*. 26(6). 065005.
15. Qiao, R., & Yan, X. (2022) The characterization of fatigue damage of 316L stainless steel parts formed by selective laser melting with harmonic generation technique. *Materials*. 15(3). 718.
16. Cr  t  , J. P., Long  re, P., & Cadou, J. M. (2014) Numerical modelling of crack propagation in ductile materials combining the GTN model and X-FEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 275. 204-233.
17. Zhang, Y., Wang, X., Yang, Q., Xue, R., Zhang, J., Sun, Y., & Krishnaswamy, S. (2020) Research on epoxy resin curing monitoring using laser ultrasonic. *Measurement*. 158. 107737.
18. Chu, Q., Li, Y., Xiao, J., Huan, D., Zhang, X., & Chen, X. (2018) Processing and characterization of the thermoplastic composites manufactured by ultrasonic vibration-assisted automated fiber placement. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*. 31(3). 339-358.
19. Gao, X., & Qu, J. (2020) Necessary and sufficient conditions for resonant mixing of plane waves in elastic solids with quadratic nonlinearity. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 148(4). 1934-1946.
20. Zhao, Y., Chen, Z., Cao, P., & Qiu, Y. (2015) Experiment and FEM study of one-way mixing of elastic waves with quadratic nonlinearity. *NDT & E International*. 72. 33-40

Alexander Pysarenko

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture
Ph.D., Associate Professor
Didrihsona str., 4, Odesa, Ukraine, 65029
pysarenkoan@gmail.com,
ORCID: 0000-0001-5938-4107

For references:

A. Pysarenko. (2025). Second order guided wave propagation in layered plates. *Mechanics and Mathematical Methods*. VII (2). 147-159.

Для посилань:

Писаренко О. М. Поширення керованих хвиль другого порядку у шаруватих пластинах. *Механіка та математичні методи*, 2025. Т. VII. №. 2. с. 147–159.

[Second order guided wave propagation in layered plates.](#)    2025 by [A. Pysarenko](#) is licensed under [CC BY 4.0](#)

УДК 004.9

ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ДИНАМІКИ РОЗВИТКУ ПОЖЕЖІ

Рачинська А. Л.¹, Недєва О. А.¹, Іщенко О. В.¹

¹Одеський національний університет імені І.І.Мечникова

Анотація: В умовах сьогодення питання пожежної безпеки особливо гостро стоїть на тлі все більш масштабних техногенних, природних і соціальних катастроф, з якими стикається людство. Особливо тривожно, що кількість пожеж через військові конфлікти, обстріли та вибухи на об'єктах інфраструктури зростає. Ця динаміка створює додаткове навантаження на системи цивільного захисту і вимагає оперативних інструментів для прогнозування та оцінки ризиків. Пожежі є великими руйнівниками навколишнього середовища, промислових зон і житлових районів, вони становлять велику небезпеку для життя і здоров'я людей. Основні напрями, спрямовані на забезпечення пожежної безпеки, є імперативними, якщо ми зможемо звести до нуля обставини виникнення пожеж і зменшити їх наслідки.

Розуміння фундаментальних принципів горіння та гасіння важливе для успішної профілактики та гасіння пожеж. Тому сучасні інформаційні технології, придатні для моделювання динаміки поведінки пожежі з урахуванням фізико-хімічних властивостей горючих матеріалів і для швидкого виявлення критичних станів, схильних до займання, повинні бути реалізовані. Інноваційна інформаційна технологія, заснована на математичних моделях процесів горіння та поширення полум'я, дозволяє прогнозувати поширення пожежі в просторі.

В роботі представлено інформаційну технологію, що реалізується за допомогою мови програмування C# та графічних бібліотек. Розроблена ІТ поєднує в собі різні модулі технології, які дозволяють користувачеві створювати індивідуальні розрахунки, візуалізацію даних та інструмент аналізу результатів. Ця схема поєднує підхід зверху вниз до проблем прогнозування пожеж. Аналіз отриманих результатів свідчить про те, що, використовуючи такий інструмент візуалізації, можна досліджувати динаміку поширення пожежі, що, в свою чергу, спрощує подальший аналіз і допомагає приймати компетентні рішення.

Ключові слова: інформаційна технологія, візуалізація процесу, чисельне дослідження, моделювання, програмування.

INFORMATION TECHNOLOGY FOR VISUALIZATION OF FIRE DEVELOPMENT DYNAMICS

A. Rachinska¹, O. Nedieva¹, O. Ishchenko¹

¹Odesa I.I. Mechnikov National University

Abstract: In today's conditions, fire safety is a particularly pressing issue given the increasingly large-scale man-made, natural, and social disasters facing humanity. It is especially alarming that the number of fires caused by military conflicts, shelling, and explosions at infrastructure facilities is on the rise. This dynamic creates an additional burden on civil protection systems and requires operational tools for risk prediction and assessment. Fires are major destroyers of the environment, industrial areas, and residential areas, posing a great danger to human life and health. The main areas aimed at ensuring fire safety are imperative if we are to reduce the circumstances of fires to zero and mitigate their consequences.

Understanding the fundamental principles of combustion and extinguishing is important for successful fire prevention and extinguishing. Therefore, modern information technologies suitable for modeling the dynamics of fire behavior, taking into account the physical and chemical properties of



combustible materials, and for the rapid detection of critical conditions prone to ignition, must be implemented. Innovative information technology based on mathematical models of combustion and flame propagation processes allows predicting the spread of fire in space. IT is implemented using the C# programming language and graphics libraries.

It combines various technology modules that allow the user to create individual calculations, data visualization, and a tool for analyzing results. This scheme combines a top-down approach to fire prediction problems. Analysis of the results obtained shows that using such a visualization tool, it is possible to study the dynamics of fire spread, which, in turn, simplifies further analysis and helps to make competent decisions. There are many organizations that need help, and this technology can be customized to the exact requirements of a particular organization. It can be easily adapted to any needs – emergency response services, the environment, civil protection, or other structures involved in the analysis and prediction of emergencies.

Keywords: information technology, process visualization, numerical research, modeling, programming.

1 ВСТУП

У сучасних умовах, зокрема на тлі воєнних конфліктів та вибухів на об'єктах критичної інфраструктури, проблема пожеж набуває ще більшої гостроти. Такі події значно ускладнюють роботу рятувальних служб та підвищують ризики для населення. Вогонь, що вийшов з із-під контролю, здатний викликати значні руйнівні та смертоносні наслідки.

Пожежі почали розглядати як комплекс взаємопов'язаних процесів і явищ. Розпочалися розробки нових вогнегасних речовин та застосування вже наявних речовин іншими способами. Існує безпосередня зацікавленість у зниженні вірогідності виникнення пожеж і зменшенні шкоди від них. Досягнення цієї мети є досить актуальним і складним соціально-економічним завданням, вирішенню якого повинні сприяти системи пожежної безпеки. Боротьба з пожежами, а отже і розвиток науки про пожежі в цілому, включно з дослідженням процесів горіння під час пожеж, у поєднанні з використанням сучасних інформаційних технологій, стає надзвичайно важливим завданням сучасного суспільства.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Важлива особливість явища горіння — здатність до просторового поширення. Більшість розрахункових методів є наближеними, мають характер емпіричних залежностей. Таким прикладом є формули для визначення температури самозаймання за середньою довжиною вуглецевого ланцюга, концентраційних меж поширення полум'я та інші.

Щоб визначити теоретичну кількість повітря, необхідну для горіння досліджуваної речовини використовується бруто-рівняння матеріального і теплового балансу реакції горіння [1-3]

$$n_{\text{п}}[\text{п}] + n_{\text{о}}[\text{о}] = n_{\text{пр}}[\text{пр}] + Q, \quad (1)$$

де $n_{\text{п}}[\text{п}]$, $n_{\text{о}}[\text{о}]$, $n_{\text{пр}}[\text{пр}]$ — стехіометричні коефіцієнти при відповідних речовинах, ($[\text{п}]$ — пальне, $[\text{о}]$ — окислювач, $[\text{пр}]$ — продукти горіння); Q — тепловий ефект хімічної реакції.

Теоретичний об'єм повітря $V_{\text{п}}^0$ м³/кг необхідного для горіння пального

$$V_{\text{п}}^0 = \frac{22,4(n_{\text{O}_2} + n_{\text{N}_2})}{n_{\text{п}}M_{\text{п}}}, \quad (2)$$

де n_{O_2} і n_{N_2} — мольні частки кисню та азоту у стехіометричній реакції, $n_{\text{п}}$ — кількість речовини пального, $M_{\text{п}}$ — молярна маса пального.

Для практичних розрахунків приймають, що повітря складається з 21% кисню і 79% азоту. Таким чином, об'ємне співвідношення азоту і кисню в повітрі становитиме:

$$\frac{\varphi_{\text{N}_2}}{\varphi_{\text{O}_2}} = \frac{79}{21} = 3.76, \quad (3)$$

де φ_{N_2} , φ_{O_2} — відповідно (% об.) вміст азоту та кисню в окислювальному середовищі.

Під час горіння на пожежах витрата повітря відрізняється від теоретично необхідної. Дійсна витрата повітря на одиницю пального записується як

$$V_{\pi} = \alpha V_{\pi}^0 \quad (4)$$

Множник α називається коефіцієнтом надлишку повітря. Різниця між дійсною і теоретично необхідною кількістю повітря називається надлишком повітря.

$$\Delta V = V_{\pi} - V_{\pi}^0$$

або

$$\Delta V_{\pi} = V_{\pi}^0 (\alpha - 1). \quad (5)$$

Повний, дійсний об'єм продуктів горіння знаходиться з урахуванням надлишку повітря ($\alpha > 1$)

$$V_{\text{пр}} = V_{\text{пр}}^0 + (\alpha - 1)V_{\pi}^0, \quad (6)$$

де $V_{\text{пр}}^0$ – теоретичний об'єм продуктів при $\alpha = 1$.

Адіабатична температура горіння – температура, до якої нагріваються продукти горіння, коли все тепло, що виділилося в результаті згоряння, йде на їх нагрівання. Дійсна температура горіння завжди нижча за адіабатичну через тепловтрати [1-3].

Для розрахунку температури горіння складемо рівняння теплового балансу, вважаючи, що тепло, яке виділилося в результаті згоряння, нагріває продукти горіння ($\text{CO}_2, \text{H}_2\text{O}, \text{N}_2$) від початкової температури T_0 до температури T_r .

$$Q_{\pi} (1 - \eta) = \sum c_{p_{\text{пр}i}} V_{\text{пр}i} (T_r - T_0), \quad (7)$$

де Q_{π} – нижча теплота згоряння, η – коефіцієнт тепловтрат (частка втрат тепла на випромінювання, а також унаслідок неповноти згоряння); $c_{p_{\text{пр}i}}$ і $V_{\text{пр}i}$ – теплоємність і об'єм i -го продукту горіння.

У пожежній інженерії для швидких оцінок часто застосовують спрощене рівняння енергетичного балансу, де теплова енергія від горіння підвищує температуру повітря в приміщенні:

$$T_{\text{avg}} = T_0 + \frac{Q_{\text{total}}}{\rho c_p V}, \quad Q_{\text{total}} = m_r H_c, \quad (8)$$

де T_{avg} – середньооб'ємна температура, T_0 – початкова температура повітря (зазвичай 20°C), Q_{total} – сумарна теплова енергія, c_p – питома теплоємність повітря ($\approx 1000 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$), ρ – густина повітря (приблизно $1.2 \text{ кг}/\text{м}^3$ при нормальних умовах), V – об'єм приміщення, m_r – маса згорілої речовини за даний час, H_c – теплота згоряння.

Динамікою будь-якого процесу, в тому числі пожежі, називається залежність його параметрів від часу. Знання закономірностей зміни параметрів пожежі необхідне для гарантування безпеки людей, розроблення заходів для запобігання поширенню пожеж, для проектування систем автоматичного виявлення і гасіння, планування сил і засобів, необхідних під час ліквідації пожеж.

У багатьох випадках пожежа починається з прогрівання локальної ділянки поверхні горючого матеріалу й утворення над нею горючої суміші, яка потім запалюється. Зростання температури матеріалів супроводжується збільшенням лінійної швидкості поширення фронту полум'я.

При розрахунку площі пожежі припускається, що фронт полум'я поширюється рівномірно в усіх напрямках зі швидкістю ν , м/хв. До моменту торкання стін має форму кола

$$F(t) = \pi(\nu t)^2. \quad (9)$$

Коли фронт полум'я досягає огорожувальної конструкції, його форма відразу стає прямокутною.

3 ЦІЛІ ТА ЗАВДАННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

Проведемо дослідження для прямокутних приміщень з внутрішнім розташуванням осередку горіння. Згідно формулам (2-8) проводиться аналітична оцінка параметрів вибухонебезпечності різних речовин: розрахунки кількості повітря, необхідного для горіння досліджуваної речовини, температури горіння та площі пожежі.

В роботі ставиться ціль побудувати інформаційну технологію для моделювання чисельних досліджень та візуалізації динаміки розвитку пожежі у приміщеннях на основі математичної моделі поширення полум'я та теплових процесів горіння.

Для досягнення поставленої цілі необхідно розглянути наступні задачі:

- задача побудови модуля користувацького інтерфейсу інформаційної технології відповідно до принципів об'єктно-орієнтованого програмування;
- задача візуалізації динаміки розвитку пожежі у 2D-просторі з використанням засобів комп'ютерної графіки;
- задача розробки модулю математичного моделювання та чисельних розрахунків пожежних процесів;
- задача створення системи зберігання вхідних даних та отриманих результатів.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

В роботі побудовано інформаційну технологію [4-5] для моделювання чисельних досліджень та візуалізації динаміки розвитку пожежі у приміщеннях прямокутної форми. Архітектура ІТ має вигляд, що представлено на рис. 1.

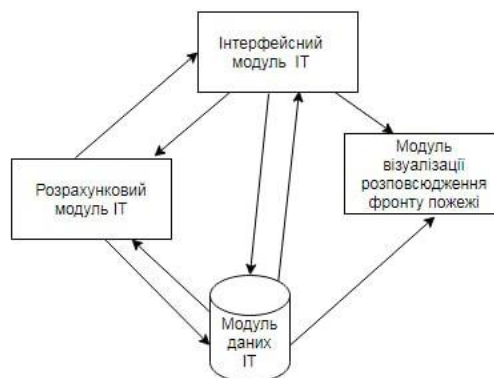


Рис. 1. Архітектура інформаційної технології

Інформаційна технологія створена у середовищі розробки Visual Studio на мові програмування C# із використанням принципів об'єктно-орієнтованого програмування [6-8]. Бібліотека класів реалізує обчислювальну частину та забезпечує виконання чисельних розрахунків динаміки розвитку пожеж у приміщенні. Візуалізація отриманих результатів здійснюється за допомогою комп'ютерної графіки у 2D-просторі [9-11].

Для визначення теоретичної кількості повітря, необхідного для горіння досліджуваної речовини створено модуль даних з характеристиками різних паливних, для яких користувач ІТ може проводити розрахунок.

Інтерфейсний модуль ІТ є центральним вузлом архітектурного рішення побудованого проекту. Він забезпечує навігацію між іншими функціональними модулями та виконання основних розрахунків. Містить інтерфейсну панель із зручним доступом до розрахункових вікон та основного функціоналу проекту.

В роботі виконано чисельне дослідження для двох моделей розвитку пожежі. Обидві моделі розраховані для двох однакових за розмірами приміщень, але з різним розташуванням осередків горіння. Перша модель має осередок горіння біля дверей приміщення. А друга – з осередком у центрі приміщення. Для кожного сценарію визначено площу пожежі, середньооб'ємну температуру, температуру над осередком та температуру на рівні 1,7 м біля дверей у часові моменти 5, 15 та 20 хв з моменту виникнення загоряння.

Результати чисельного дослідження візуалізуються за допомогою відповідного графічного модуля. В роботі представлено модель приміщення – бібліотека з розмірами і об'ємом відповідно $48 \times 24 \times 4.2$ (м), $V = 4838.4$ (м³). Приміщення має 8 вікон уздовж кожної довгої стіни з розмірами розміри 3×1.8 (м). Двері приміщення розташовані на меншій стороні по центру. Початкова температура приміщення $T_0 = 20$ С. Повітря в бібліотеці має густину $\rho = 1.2$ кг/м³, та питому теплоємність повітря $c_p = 1000$ Дж/(кгК). Частка втрат/акумуляції тепла в огороженнях: $\eta = 0.995$. Обмеження тепловиділення вентиляцією (оцінка MQH): $\dot{Q}_{\max} \approx 192$ МВт (для середньої висоти $\sim 2\text{--}2.2$ м) [12]. У розрахунках над осередком тепловиділення обмежуємо цим значенням.

На рисунку 2 представлено процес динаміки фронту пожежі в приміщенні з осередком горіння біля дверей зі швидкістю поширення фронту пожежі $v = 1.2$ м/хв. В роботі на рис. 2а-2г представлено візуалізацію у моменти часу $t = 5, 10, 15, 20$ хв відповідно. Також на рисунках 2а-2г вказана розрахована площа пожежі S_{fire} (м²) у перераховані моменти часу.

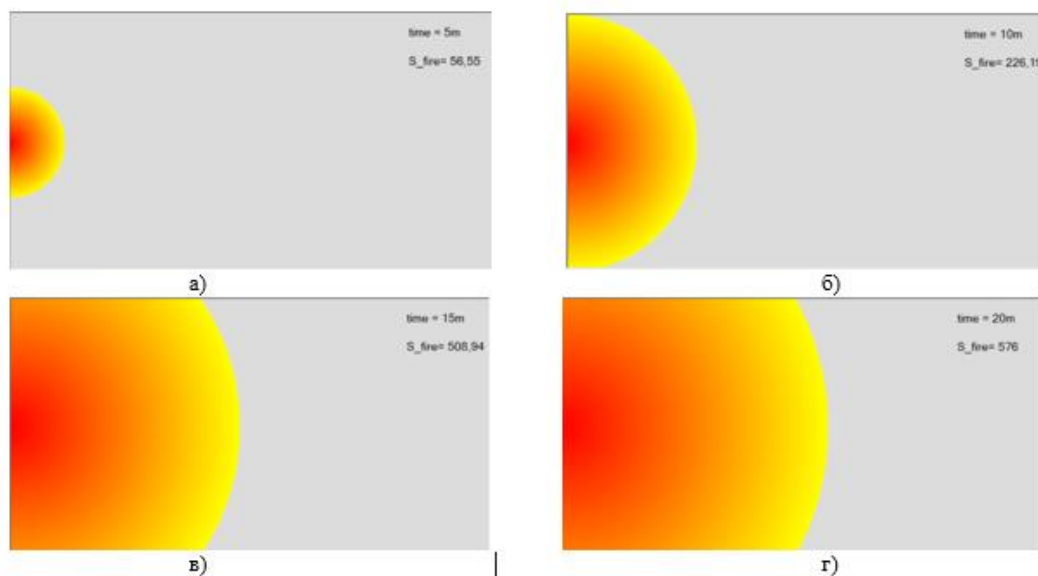


Рис. 2. Динаміка розвитку пожежі в приміщенні з осередком горіння біля дверей

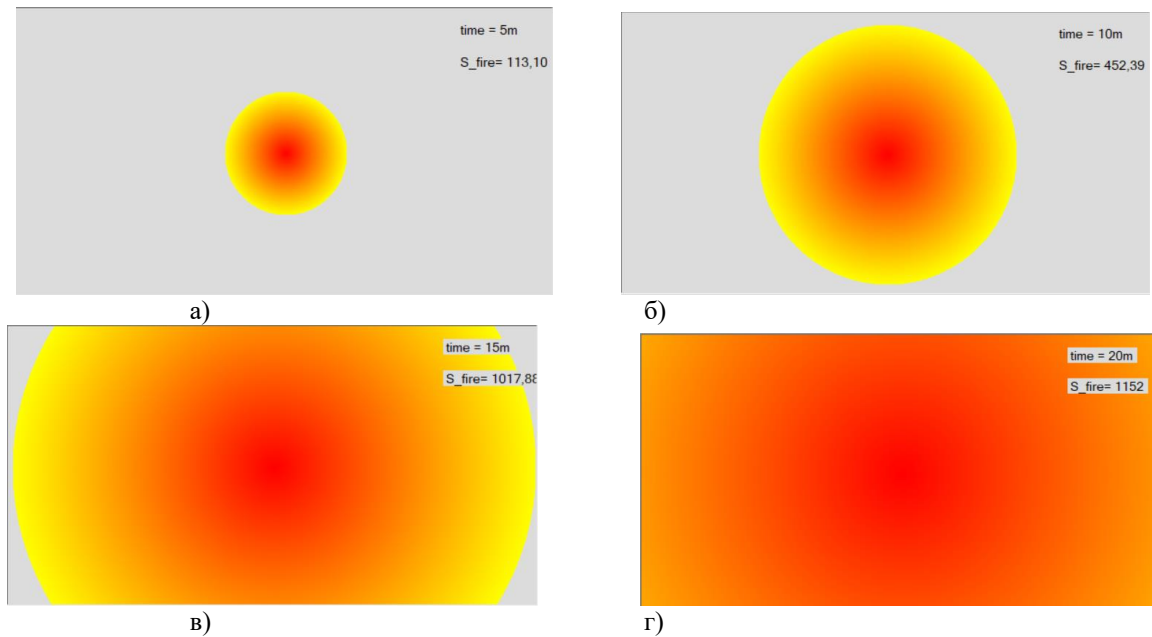


Рис. 3. Динаміка розвитку пожежі з осередком горіння в центрі приміщення

На рисунку 3 розглянуто модель розповсюдження пожежі у прямокутному приміщенні тієї самої бібліотеки з осередком горіння в центрі приміщення. Моделювання проведено з тією ж швидкістю фронту пожежі $v=1.2$ м/хв. Повітря приміщення та технічні характеристики співпадають з параметрами першої моделі. На рис. 3а-3г представлено візуалізацію динаміки пожежі та площу пожежі у моменти часу $t=5, 10, 15, 20$ хв відповідно.

Візуалізація проводиться згідно результатам отриманим розрахунковим модулем розробленої інформаційної технології. Функціонал розрахункового модуля дозволяє проаналізувати температуру над осередком, середньооб'ємної температури та температури на заданому рівні біля дверей приміщення.

На рис. 4 представлено графік температури над осередком для двох моделей розташування осередку пожежі.

Середньооб'ємна температура (час в секундах) розраховується згідно формули

$$T_{cp}(t) = T_0 + \frac{(1-\eta)\dot{q}''F(t)t}{\rho c_p V}.$$

Над осередком (під стелею): кореляція типу Heskestad, константу підібрано так, щоб при $\dot{Q}=192$ МВт отримувати ≈ 1260 С, далі усе масштабується та обрізається цим максимумом.

Результат обчислення середньооб'ємної температури для двох розрахункових моделей розташування осередка пожежі представлено на рис. 5.

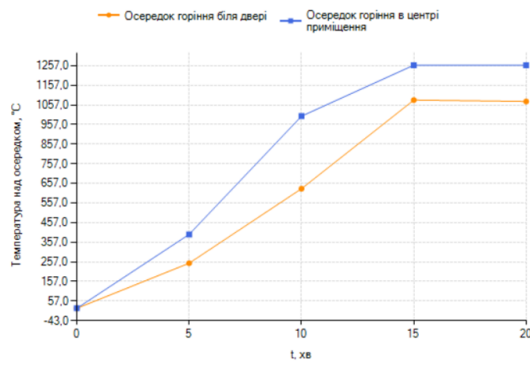


Рис.4. Графік температури над осередком

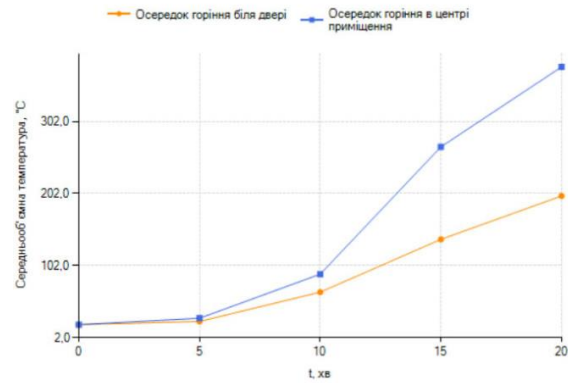


Рис.5. Графік середньооб'ємної температури

В роботі представлено графік зміни температури на рівні 1.7 м біля дверей бібліотеки на рис. 7.

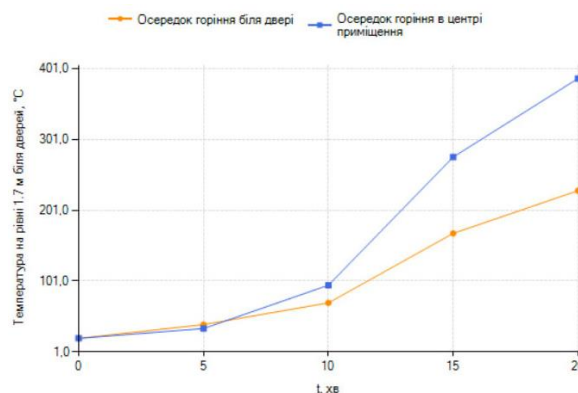


Рис. 6. Графік температури на рівні 1.7 м біля дверей

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Результати чисельного дослідження та моделювання динаміки пожежі показали, що для першої моделі з осередком біля дверей розповсюдження полум'я відбувається переважно в глиб приміщення, і вже через 20 хв пожежа займає приблизно половину його площі. При цьому середньооб'ємна температура зростає до 198,6°C, а температура над осередком – до 1075°C.

Для другої моделі, коли осередок горіння у центрі приміщення, фронт пожежі має більш рівномірний круговий характер, тим самим полум'я швидше охоплює більшу площу. Температури зростають значно інтенсивніше, досягаючи 377,7°C середньооб'ємної та 1260°C над осередком через 20 хв після початку загоряння.

Згідно результатам розрахунків, що представлено на рис. 5, температура над осередком вища у сценарії 2, але після ~15 хв у обох випадках її зростання обмежується вентиляцією (беремо ліміт ~1260 °C).

Проведене чисельне дослідження (див. рис. 6) показало, що середньооб'ємна температура у сценарії 1 нижча, бо площа палаючої зони на ранніх етапах — півколо, а не коло; і навіть на 20-й хв вогонь обмежений половиною зали.

Розташування осередку змінює розподіл температур і темп охоплення площі — це критично для планування евакуації (точка 1.7 м у дверях) і розстановки датчиків. Згідно рис. 7 видно, що температура на висоті 1.7 м біля дверей для першої моделі розташування осередка до 12-ї хв збільшується на +15 °C, а після 12-ї хв на +30 °C. Та ж сама температура для другої моделі розташування осередку до 12-ї хв збільшується

на 5°C, а після 12-ї хв - на 10 °С. Точка 1.7 м біля дверей чутливіша до близькості джерела: у сценарії 1 додаток T_{cp} більший (бо осередок поруч).

Порівняльний аналіз свідчить, що розташування осередку горіння та умови вентиляції суттєво впливають на швидкість розповсюдження вогню і температурні режими у приміщенні.

6 ВИСНОВКИ

Розроблено інформаційну технологію дослідження динаміки пожежі в прямокутних приміщеннях з внутрішнім розташуванням осередку горіння.

Отримані ІТ-моделі дозволяють швидко отримувати інженерно корисні оцінки середньооб'ємної температури та температур під стелею, якщо чітко зафіксовані $\dot{q}''$, η і правила геометрії фронту.

Для точності у майбутньому варто додати двошарову модель (гарячий/холодний шари), явне випромінювання, теплообмін зі стінами та час-до-руйнування отворів як розрахункові параметри.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

Література

1. Кусковець С. Л., Шаталов О. С., Турченко В. О. Основи теорії горіння та вибуху: Навчальний посібник. Рівне: НУВГП, 2012. 374 с.
2. Ємельяненко С. О., Лавренюк О. І., Михалічко Б. М. Теорія горіння та вибуху. Пожежі та їх ліквідація: Навчальний посібник. Львів: ЛДУ БЖД, 2019. 158 с.
3. Тарахно О. В., Жернокльов К. В., Трегубов Д. Г. Теорія розвитку та припинення горіння. Методичні вказівки до вивчення курсу, контрольні завдання для курсантів, слухачів денної та заочної форм навчання. Харків: Університет цивільного захисту України, 2011. 207 с.
4. Peter Bernus, Kai Mertins, Gunter Schmidt. Handbook on Architectures of Information Systems. Berlin: Springer, 2016. 886 p.
5. Авраменко В. С., Авраменко А. С. Проектування інформаційних систем. Черкаси: Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького, 2017. 434 с.
6. Daniel Solis. Illustrated C# 2012. Berkeley: APress, 2012. 732 p.
7. Andrew Troelsen, Phillip Japikse Pro C# 9 with .NET 5: Foundational Principles and Practices in Programming. Apress: New York, 2021. 1383 p.
8. Svetlin Nakov & Co Fundamentals of computer programming with C#. The Bulgarian C# Programming Book: Sofia, 2013. 1122 p.
9. Маценко В. Г. Комп'ютерна графіка. Чернівці: Рута, 2009. 343 с.
10. Пічугін М. Ф., Канкін І. О., Вороніков В. В. Комп'ютерна графіка. Київ: Центр учбової літ., 2013. 346 с.
11. Рачинська А. Л. Конспект лекцій з дисципліни «Комп'ютерна графіка» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня. Електронне видання. Одеса: ОНУ, 2021. 119 с.
12. Білик С. І. Інформаційно-довідковий збірник з пожежної безпеки: Довідник. Львів: Львівський державний університет безпеки життєдіяльності МНС України, 2013. 79 с.

References

1. Kuskovec, S. L., Shatalov, O. S., Turcheniuk, V. O. (2012). *Osnovy teorii horinnia ta vybukhu* [Fundamentals of combustion and explosion theory] (monograph). Rivne: NUVHP [in Ukraine].
2. Iemelienenko, S. O., Lavreniuk, O. I., Mykhalichko, B. M. (2019) *Teoriia horinnia ta vybukhu. Pozhezhi ta yikh likvidatsiia*. [Theory of combustion and explosion. Fires and their elimination:] (monograph). Lviv: LDU BZhd [in Ukraine].

3. Tarakhno, O. V., Zhernoklov, K. V., Trehubov, D. H. (2011) Teoriia rozvytku ta prypynennia horinnia. [Theory of development and cessation of combustion] (monograph). Kharkiv: Universytet tsyvilnoho zakhystu Ukrainy [in Ukraine].
4. Peter, Bernus, Kai, Mertins, Gunter Schmidt. (2016) Handbook on Architectures of Information Systems. (monograph). Berlin: Springer.
5. Avramenko, V. S., Avramenko, A. S. (2017). Proektuvannya informacijnih system. [Design of information systems]. (monograph). Cherkasy: Cherkasy National University named after. B. Khmelnytsky. [in Ukraine].
6. Daniel, Solis. (2012) Illustrated C# 2012. (monograph). Berkeley: APress.
7. Andrew, Troelsen, Phillip, Japikse (2021) Pro C# 9 with .NET 5: Foundational Principles and Practices in Programming. (monograph). Apress: New York.
8. Svetlin, Nakov & Co (2013) Fundamentals of computer programming with C#. (monograph). The Bulgarian C# Programming Book: Sofia.
9. Matsenko V. G. (2009). Komp'yuterna grafika. [Computer graphics]. (monograph). Chernivtsi: Ruta. [in Ukraine].
10. Pichugin, M. F., Kankin, I. O., Vorotnikov, V. V. (2013). Komp'yuterna grafika [Computer graphics]. (monograph). Kyiv: Center for educational literature. [in Ukraine].
11. Rachynska, A. L. (2021) Konspekt leksii z dystsypliny «Kompiuterna hrafika» dlia zdobuvachiv vyshchoi osvity pershoho (bakalavrskoho) rivnia. [Lecture notes on the discipline "Computer Graphics" for first-year (bachelor's) level higher education students] (monograph). Odesa: ONU [in Ukraine].
12. Bilyk, S. I (2013) Informatsiino-dovidkovyi zbirnyk z pozhezhnoi bezpeky: [Information and reference collection on fire safety] Lviv: Lvivskyi derzhavnyi universytet bezpeky zhyttiediialnosti MNS Ukrainy [in Ukraine].

Рачинська Алла Леонідівна

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова,
к.ф.-м.н., доцент
вул. Всеволода Змієнка, 2 Одеса, Україна, 65082
rachinskaya@onu.edu.ua,
ORCID: 0000-0003-2430-9603

Недєва Ольга Анатоліївна

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова,
викладач
вул. Всеволода Змієнка, 2 Одеса, Україна 65082
nedevaolga@gmail.com,
ORCID: 0009-0005-6469-5213

Іщенко Олеся Володимирівна

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова,
к.т.н.
вул. Всеволода Змієнка, 2 Одеса, Україна 65082
Alesya.Ishchenko@gmail.com,
ORCID: 0000-0002-7882-4718

Для посилань:

Рачинська А. Л., Недєва О. А., Іщенко О. В. Інформаційна технологія візуалізації динаміки розвитку пожежі. Механіка та математичні методи, 2025. Т. VII. № 2. С. 160–169

For references:

A. Rachinska, O. Nedieva, O. Ishchenko (2025). Information technology for visualization of fire development dynamics. Mechanics and Mathematical Methods. VII (2). 160–169.

Інформаційна технологія візуалізації динаміки розвитку пожежі. © 2025 by Рачинська А. Л., Недєва О. А., Іщенко О. В. is licensed under CC BY 4.0

Наукове видання

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ
MECHANICS AND MATHEMATICAL METHODS

Науковий журнал
(українською та англійською мовами)

Відповідальний за випуск: Ковров А. В.

Підписано до друку 29.09.2025 р.
Формат 60×84/8 Папір офісний Гарнітура Times
Цифровий друк. Ум.-друк. арк. 19,65
Наклад 50 прим. Зам. №24-23Е

Видавець і виготовлювач:
Одеська державна академія будівництва та архітектури
Свідоцтво ДК № 4515 від 01.04.2013 р.
Україна, 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 4.
тел.: (048) 729-85-34, e-mail: rio@odaba.edu.ua

Надруковано в авторській редакції з готового оригінал-макету
в редакційно-видавничому відділі ОДАБА