УДК 531.381

ЗБУРЕНІ РУХИ ГІРОСТАТА З РУХОМОЮ МАСОЮ В СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ

Лещенко Д. Д.[1], Козаченко Т. О.[1]
[1]*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація: Розвиток досліджень задач динаміки твердого тіла, яке рухається навколо нерухомої точки полягає в тому, що тіла не є абсолютно твердими, а близькі до ідеальних моделей. Вплив неідеальностей може бути виявленим на основі методів сингулярних збурень, усереднення та інших асимптотичних методів нелінійної механіки. Він зводиться до наявності додаткових доданків в динамічних рівняннях Ейлера для фіктивного твердого тіла.

Припускається, наприклад, що динамічно симетричне тіло містить сферичну порожнину, заповнену рідиною великої в’язкості (при малих числах Рейнольдса) і в'язкопружний елемент, який моделюється рухомою масою, з'єднаною демпфером з корпусом. Ці рухи можуть бути зумовлені наявністю рідини в порожнинах в тілі (наприклад, рідке паливо, окислювач в резервуарах ракети). Наявність рухомої маси моделює присутність нежорстко закріплених елементів на космічному апараті, що при тривалому періоді часу має суттєвий вплив на його рух відносно центра мас. Крім того, на тіло діє малий момент сил опору середовища.

У статті за допомогою методу усереднення знайдено наближений розв'язок рівнянь у випадку задачі про рух в середовищі з опором динамічно симетричного гіростата з рухомою масою. Проведено чисельне інтегрування усередненої системи рівнянь руху тіла. Графічні зображення розв'язків представлені та обговорені. Побудовано графіки зміни величин квадратів екваторіальної та осьової компонент кутової швидкості. Одержані кількісні та якісні результати досліджень руху в середовищі з опором динамічно симетричного твердого тіла з порожниною, заповненою вязкою рідиною, та з рухомою масою. Досліджено еволюцію збуреного руху Ейлера-Пуансо під впливом малих внутрішніх і зовнішніх моментів. Перевага цієї роботи полягає в отриманні оригінальних асимптотичних розв’язків та чисельних розрахунків, які описують еволюцію руху даної механічної системи. Робота може розглядатися як розвиток попередніх задач про рух твердого тіла під дією малих моментів окремо (порожнини заповненою рідиною великої в’язкості, середовища з опором, рухомої маси). Стаття вносить вклад в вивчення задач руху штучних супутників і рухів членів екіпажу відносно цих тіл, рухів обертових снарядів з масою.

Ключові слова: тверде тіло, середовище з опором, рухома маса, в’язка рідина.

PERTURBED MOTIONS OF A GYROSTAT WITH A MOVABLE MASS IN A RESISTIVE MEDIUM

D. Leshchenko[1], T. Kozachenko[1]
[1]*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract: Investigation of the dynamics of a rigid body moving about a fixed point implies that the bodies are not absolutely rigid but are close to ideal models. The effect of nonidealities can be analyzed by singular perturbation methods, averaging, or other asymptotic methods of nonlinear mechanics. It is reduced to the presence of additional terms in Euler’s dynamics equations for a fictitious rigid body.

It is assumed that, for example, the dynamically symmetric body contains a spherical cavity filled with a highly viscous fluid (at small Reynolds numbers) and a viscoelastic element that is modeled by a moving mass connected to the body by a strong damper. These motions may have various case: for example, the presence of fluid in the cavities in the body (e.g., liquid fuel or oxidizer in the tanks of

rocket). The moving mass models loosely attached elements in a space vehicle, which can significantly affect the vehicle's motion relative to its center of mass during a long period of time. In addition, the body affected by a small medium resistance torque.

The paper develops an approximate solution by means of an averaging method for the perturbed motion of this rigid body. The numerical integration of the averaged system of equations is conducted for the body motion. The graphical presentations of the solutions are represented and discussed. The graphs of changes in the squared values of the equatorial and axial components of the angular velocity are constructed. The quantitative and qualitative results of the study of motion in a medium with resistance of a dynamically symmetric solid with a cavity filled with a viscous liquid and a moving mass are obtained. Evolution of perturbed Euler-Poinsot motion under the influence of small internal and external torques is studied. The advantage of this work is in receiving the original asymptotic and numerical calculations, as well as solutions that describe the evolution in of a rigid body with cavity, filled with a viscous fluid and with a moving mass. The paper can be considered as mainstreaming of previous works for the problem of rigid body motion under the action of small torques (cavity filled with a fluid of high viscosity, moving mass, resistive medium). Results summed up in this paper make it possible to analyze motions of artificial satellites, of spinning projectiles with mass and the activities of crew members about a vehicle.

Keywords: rigid body, resistive medium, movable mass, cavity, viscous fluid.

1 ВСТУП

Космічний корабель або супутник в своєму русі відносно центра мас зазнає вплив моментів сил різної фізичної природи. Це, наприклад, моменти, викликані рухом внутрішніх мас, які можуть виникати через такі фактори, як наявність обертових компонентів (роторів, гіроскопів), а також переміщеннями екіпажу в випадку пілотованого апарату.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Проблеми динаміки тіл з порожнинами, що містять рідину, відносяться до класичних задач механіки [1, 2]. В статті [1] досліджується сумісний вплив рідини великої в'язкості в порожнині твердого тіла і рухомої маси, з'єднаної з тілом пружним зв'язком з в'язким тертям або з квадратичною дисипацією, на рух динамічно симетричного тіла. В статті [2] вивчається рух в середовищі з опором близького до динамічно сферичного твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною при малих числах Рейнольдса.

В статті [3] розглядається можливість демпфування нутаційних коливань за допомогою в'язкої рідини, яка заповнює порожнини в роторі або в рамках гіроскопа. В [4] показана можливість стабілізації нестійкого рівномірного обертання в середовищі з опором «сплячого» гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною за допомогою другого обертового гіроскопа та пружних сферичних шарнірів.

Велика кількість робіт присвячена дослідженню обертання твердого тіла з рухомими внутрішніми масами [1, 5-11]. Огляд робіт з цієї тематики представлений в [5, 8-11]. В книзі [6] вивчається вплив внутрішньої пружності та дисипації на рух супутника відносно центра мас. В статті [8] за допомогою методу усереднення отримано наближене розв'язання задачі про рух в середовищі з опором близького до динамічно сферичного твердого тіла з в'язкопружним елементом. В роботі [9] досліджується задача про рух в середовищі з опором динамічно симетричного твердого тіла з рухомою масою, яка з'єднана з тілом пружною в'яззю при наявності в'язкого тертя. В [10] за допомогою метода усереднення одержується наближене розв'язання задачі про рух динамічно симетричного твердого тіла з в'язкопружним елементом під дією постійного моменту в зв'язаних осях. В статті [11] проведене асимптотичне розв'язування системи рівнянь Ейлера з додатковими збурюючими моментами сил для близького до динамічно сферичного твердого тіла з в'язкопружним елементом під дією сталого моменту в зв'язаних з тілом осях.

Важливою областю застосування динаміки твердого тіла є механіка гіроскопічних систем. Ряд випадків інтегрування рівнянь руху твердого тіла в середовищі з опором розглянуто в [12-15]. У статті [16] розглядається збурений рух космічного апарата, що обертається, на круговій орбіті під дією малого аеродинамічного моменту, пропорційного кутовій швидкості тіла. В [17] одержані умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опором.

Розглянемо просторовий рух динамічно симетричного тіла, що містить сферичну порожнину, заповнену рідиною великої в'язкості. Рух відбувається відносно центра інерції. До точки на осі симетрії тіла (у її недеформованому стані) прикріплена рухома точкова маса, яка з'єднана в'язкопружним демпфером з корпусом [1]. Окрім того, на тіло діє момент сил опору середовища, який пропорційний кутовому моменту тіла із «замерзлою» рідиною [2, 8, 13, 15]

В даному випадку наближена система рівнянь збуреного руху в проекціях на головні центральні осі інерції має вигляд [1, 2] (крапка позначає похідну за часом t):

$$A\dot{p} + (C - A)qr = \frac{\beta P}{\nu A^2} C(A - C)pr^2 + Fqr + Dpr^4 - \varepsilon\lambda Ap,$$
$$A\dot{q} + (A - C)pr = \frac{\beta P}{\nu A^2} C(A - C)qr^2 - Fpr + Dqr^4 - \varepsilon\lambda Aq, \qquad (1)$$
$$C\dot{r} = \frac{\beta P r}{\nu A}(C - A)(p^2 + q^2) - AC^{-1}Dr^3(p^2 + q^2) - \varepsilon\lambda C r.$$

де p, q, r – проекції вектора абсолютної кутової швидкості $\bar{\omega}$ на зв'язані осі, A і C головні центральні моменти інерції системи, λ – додатний коефіцієнт пропорційності, який залежить від фізичних характеристик середовища та форми тіла, β – густина рідини, $P > 0$ скалярна величина, яка для сферичної порожнини радіуса b визначається за формулою $P = 8\pi b^7 / 525$ [1, 2]. Перші доданки в правих частинах рівнянь (1) відображають момент сил в'язкої рідини у порожнині тіла в межах асимптотичного наближення. При цьому передбачається, що число Рейнольдса мале: $\mathrm{Re} << 1$ [1], ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості рідини $\nu = 1/\mathrm{Re} >> 1$ і $\nu^{-1} << 1$. Будемо вважати, що безрозмірний параметр $\nu^{-1} \sim \varepsilon$.

Коефіцієнти L, S, що входять у рівняння (2) задаються через параметри системи за формулами:

$$F = m\rho^2 \Omega^{-2} A^{-3} C\left(A^2(p^2 + q^2) + C^2 r^2\right),$$
$$D = m\rho^2 \Lambda \Omega^{-4} C^3 (A - C) A^{-4} \qquad (2)$$

Коефіцієнти F, D характеризують вплив збурюючих моментів сил, які обумовлені наявністю в'язкопружного елемента. Позначимо, m як масу рухомої точки, а ρ – відстань від центра мас недеформованої системи до місця її кріплення, яке, згідно з припущенням, розташоване на осі динамічної симетрії тіла. Константи $\Omega^2 = c/m,\ \Lambda = \delta/m$ визначають частоту коливань та інтенсивність їх згасання відповідно; параметр c характеризує жорсткість (тобто коефіцієнт пружності), тоді як δ є коефіцієнтом в'язкого тертя в демпфері.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Досліджується випадок демпфера, коли коефіцієнти Ω, Λ задовольняють нерівностям [1, 8]:

$$\Omega^2 \square \Lambda\omega \square \omega^2 \qquad (3)$$

Умова (3) дозволяє ввести малий параметр в (3) і вважати вказані збурюючі моменти малими. Це створює можливість застосування асимптотичного метода усереднення [18]. Крім того, виконання нерівності (3) дає підстави нехтувати вільними коливаннями точкової маси, які обумовлені початковими відхиленнями, внаслідок їх швидкого згасання. Натомість основна увага приділяється вимушеним квазістаціонарним рухам, які спричинені обертанням тіла.

Припустимо, що $\Omega^2 \square \varepsilon,\ \Lambda\Omega^{-4} \sim \varepsilon$.

У випадку, коли $\varepsilon = 0,\ \Omega^2 = 0,\ \Lambda\Omega^{-4} = 0\ \ \nu^{-1} = 0$, система (1) інтегрується, при цьому $r = r_0$.

Якщо $r_0 \neq 0$, то в цьому випадку змінні p, q здійснюють гармонійні коливання, частота яких $|(C - A)r_0|$ залежить від r_0 та система рівнянь (1) є нелінійною.

Загальний породжувальний розв'язок системи (1) має вигляд [19]:

$$p = a\cos\varphi, \quad q = a\sin\varphi, \quad r = r_0 \tag{4}$$

Застосуємо його як перетворення до змінних a, r, де $a > 0$, $a = \text{const}$, $\varphi = r(C - A)A^{-1}t$.

В результаті одержимо, що $\dot{a} = \dot{p}\cos\varphi + \dot{q}\sin\varphi$. Підставимо в цей вираз $\dot{p}$ і $\dot{q}$ з перших двох рівнянь (1). Далі проводимо процедуру усереднення одержаного рівняння для a за фазою φ [18] і, враховуючи, що $a^2 = p^2 + q^2$ запишемо рівняння (1) для r у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon\frac{\beta P}{A^3}C(A-C)r^2a + \varepsilon m\rho^2C^3(A-C)A^{-5}r^4a - \varepsilon\lambda a, \\ \frac{dr}{dt} &= \varepsilon\frac{\beta P r}{AC}(C-A)a^2 - \varepsilon m\rho^2A^{-3}C(A-C)r^3a^2 - \varepsilon\lambda r. \end{aligned} \tag{5}$$

Здійснюючи заміну змінних $x = a^2$, $y = r^2$ систему (5) приведемо до наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= 2x\left[\frac{\beta P}{A^3}C(A-C)y + m\rho^2A^{-5}C^3(A-C)y^2 - \lambda\right], \\ \frac{dy}{d\tau} &= -2y\left[\frac{\beta P}{AC}(A-C)x + \varepsilon m\rho^2A^{-3}C(A-C)xy + \lambda\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

В цій системі x, y – повільні змінні ($\tau = \varepsilon t$).

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Система (6) проінтегрована чисельно за початкових умов $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ та параметрів $\rho = 1$; $m = 1$; $\varepsilon = 0.1$; $P_0 = 0.48$; $\beta = 1260$; $C = 1$; $A = 1.2$, 1.5, 2.0, 2.5; $\lambda = 0.1$, 0.5. Розв'язок системи отримано в математичному пакеті Maple із використанням методу Рунге-Кутти-Фельберга п'ятого порядку точності.

На рис. 1 – 3 наведено графічне представлення величин квадратів екваторіальної $x = a^2$ та осьової компонент $y = r^2$ кутової швидкості твердого тіла у випадках: $A = 1.2$, 1.5, 2.0, 2.5 і $\lambda = 0.1$ (рис. 1, 3), та $A = 1.2$, 1.5, 2.0, 2.5 і $\lambda = 0.5$ (рис. 2), при незмінних інших параметрах.

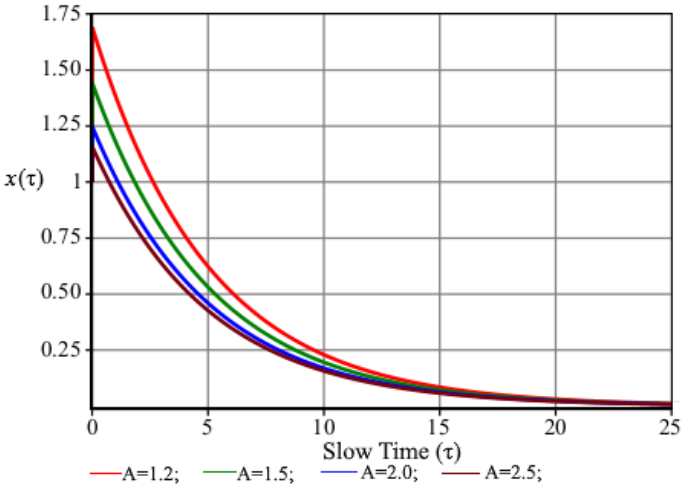

Рис. 1. Графіки змінної x у випадку $\lambda = 0.1$

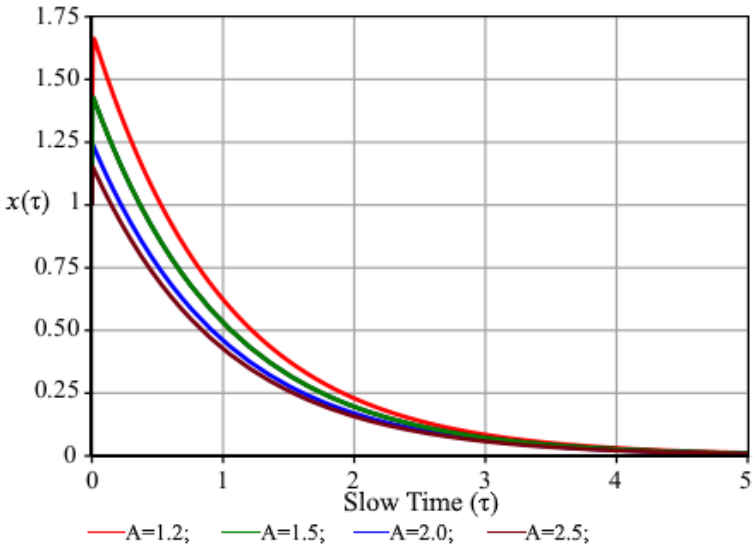

Рис. 2. Графіки змінної x у випадку $\lambda = 0.5$

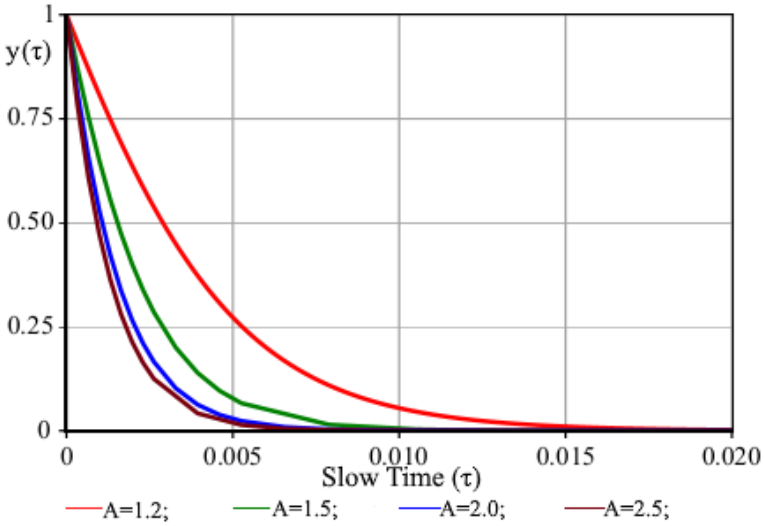

Рис. 3. Графік змінної y в випадку $\lambda = 0.1$

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Як бачимо з рис. $1-3$ змінні $x = a^2$ та $y = r^2$ спадають асимптотично наближаючись до нуля. У випадку виконання співвідношення $A/C \sim 1$, $A > C$ спостерігається стрімке зростання величини x на достатньо малому часовому інтервалі. Однак при більших значеннях A темп зростання $x = a^2$ знижується і близьке до випадку $A = C$ (сфери). Змінна y прагне до нуля на дуже малому проміжку часу $[0;\ 0.02]$.

Також характер спадання величин квадратів екваторіальної та осьової компонент кутової швидкості твердого тіла залежить від властивостей середовища та форми тіла. При зростанні величини λ (при однакових інших параметрах) спадання змінних $x = a^2$ та $y = r^2$ відбувається швидше.

6 ВИСНОВКИ

В результаті дослідження в середовищі з опором руху твердого тіла зі сферичною порожниною, заповненою рідиною високої в'язкості, та з рухомою масою, зв'язаною з тілом пружною в'яззю при наявності в'язкого тертя одержано систему рівнянь руху в стандартній формі. Після переходу до усередненої системи знайдено чисельний розв'язок задачі. Еволюція руху твердого тіла описується розв'язками, які можуть бути використаними, при дослідженні орієнтації та стабілізації руху супутника відносно центра мас і рухів членів екіпажів відносно цих тіл.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

Література

1. Leshchenko D. D., Sallam S. N. Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. International Applied Mechanics, 1992. 28(8). P. 524–528.
2. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Еволюція обертань сфероїда з порожниною, заповненою в'язкою рідиною в середовищі з опором. Праці ІПММ НАН України, 2021. Том 35. № 2. С. 152-160.
3. Ivashchenko B. P. Motion of a gyroscope with a cavity filled with a viscous liquid. Soviet Applied Mechanics, 1978. 14. P. 872–876.
4. Kononov Y. M., Svyatenko Y. I. Stabilization of a Spinning Lagrange Gyroscope Filled with Ideal Fluid in a Resisting Medium. International Applied Mechanics, 2023. 59(2). P. 207–217.
5. He L., Sheng T., Kumar K. D., Zhao Y., Ran D., Chen X. Attitude maneuver of a satellite using moving masses. Acta Astronautica, 2020. 176. P. 464–475.
6. Thomson W. T. Introduction to Space Dynamics. New York: Dower, 1986, 317p.
7. Jansses F. L. and Van der Ha J. C. Stability of spinning satellite under axial thrust, internal mass motion, and damping. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2015. 38 (4). P. 761-771.
8. Leshchenko D., Rachinskaya A. Evolution of rotational motions in a resistive medium of a nearly dynamically spherical rigid body with a movable mass. Праці ІПММ НАН України, 2024. Том 38. № 1. С. 44-53.
9. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи твердого тіла з рухомою масою в середовищі з опором. Механіка та математичні методи, 2023. Т. 5. № 2. С. 16–24.
10. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи твердого тіла з рухомою масою під дією постійного моменту. Механіка та математичні методи, 2025. Т. 7. № 1. С. 6–14.
11. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи близького до динамічно сферичного твердого тіла з рухомою масою під дією постійних моментів в зв'язаних з тілом осях. Механіка та математичні методи, 2024. Т. 6. № 2. С. 18–30.
12. Magnus K. Kreisel. Theorie and Anwendungen. Berlin, Heidelbuerg, New York: Springer-Verlag, 1971.
13. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 288с.
14. Leimanis E. The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies About a Fixed Point. Berlin: Springer, 1965. 337 p.
15. Routh E. J. Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part II. New York: Dover Publications, 1955. 484 p.
16. Inarrea M., Lanchares V. Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2006. 41(1). P. 86–100.
17. Kononov Yu. M. Stability of a uniform rotation of an asymmetric rigid body in a resisting medium under a constant moment. International Applied Mechanics, 2021. 57(4). P. 432–439.
18. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. К.: Наукова Думка, 1971. 440 с.

19. Landau L. D. and Lifshitz E. M. Mechanics. Volume 1 of Couse of Theoretical Physics. Boston, Johannesburg, Melbourne, New Delhi, Singapore: Butterworth-Heinemann, 2000.

References

1. Leshchenko, D. D., Sallam, S. N. (1992). Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*. 28(8). 524–528.
2. Leshchenko, D. D., Kozachenko, T. O. (2021). Evolution of rotations of a spheroid with cavity containing a viscous fluid in a resistive medium. *Proceeding of IAMM NAS of Ukraine*. 35 (2). 152-160. [in Ukrainian]
3. Ivashchenko, B. P. (1978). Motion of a gyroscope with a cavity filled with a viscous liquid. Soviet Applied Mechanics. 14. 872–876.
4. Kononov, Y. M., Svyatenko, Y. I. (2023). Stabilization of a Spinning Lagrange Gyroscope Filled with Ideal Fluid in a Resisting Medium. International Applied Mechanics. 59(2). 207–217.
5. He, L., Sheng, T., Kumar, K. D., Zhao Y., Ran D., Chen X. (2020). Attitude maneuver of a satellite using moving masses. Acta Astronautica. 176. 464–475.
6. Thomson, W.T. (1986). Introduction to Space Dynamics. New York: Dower.
7. Jansses, F. L. and Van der Ha J. C. (2015). Stability of spinning satellite under axial thrust, internal mass motion, and damping. Journal of Guidance Control and Dynamics. 38(4). 761-771.
8. Leshchenko, D. D. & Rachinskaya, A. L. (2024). Evolution of motions in a resistive medium of a body with a movable mass. Proceeding of IAMM NAS of Ukraine. 38 (1). 44-53.
9. Leshchenko, D., Kozachenko, T. (2023). Perturbed motions of a rigid body with a movable mass in a resistive medium. Mechanics and Mathematical methods. 5 (2). 16–24. [in Ukrainian]
10. Leshchenko, D., Kozachenko, T. (2025). Perturbed motions of a rigid body with a movable mass under the action of constant torque. Mechanics and Mathematical Methods. 7 (1). 6–14. [in Ukrainian]
11. Leshchenko, D., Kozachenko, T. (2024). Perturbed motions of a nearly dynamically spherical rigid body with a movable mass subject to constant body-fixed torque. Mechanics and Mathematical methods. 6 (2). 18–30.
12. Magnus, K. (1971). Kreisel. Theorie and Anwendungen. Berlin, Heidelbuerg, New York: Springer-Verlag.
13. Koshlyakov, V. N. (1985). Zadachi dinamiki tverdogo tela i prikladnoj teorii giroskopov: Analiticheskie metody [Problems in Dynamics of Solid Bodies and in Applied Gyroscope Theory: Analytical Methods]. Nauka, Moskva.
14. Leimanis, E. (1965). The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies About a Fixed Point. Berlin: Springer.
15. Routh, E. J. (1955). Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part II. New York: Dover Publications.
16. Inarrea, M., Lanchares, V. (2006). Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit. International Journal of Non-Linear Mechanics. 41(1). 86–100.
17. Kononov, Yu. M. (2021). Stability of a uniform rotation of an asymmetric rigid body in a resisting medium under a constant moment. International Applied Mechanics. 57(4). 432–439.
18. Mitropolskiy, Yu. A. (1971). Metod usredneniya v nelineynoy mehanike [Averaging method in nonlinear mechanics]. Kyiv, Naukova Dumka.
19. Landau, L. D., and Lifshitz, E. M. (2000). Mechanics. Volume 1 of Couse of Theoretical Physics. Boston, Johannesburg, Melbourne, New Delhi, Singapore: Butterworth-Heinemann.

Лещенко Дмитро Давидович
Одеська державна академія будівництва та архітектури,
д.ф.-м.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029
leshchenko_d@ukr.net
ORCID: 0000-0003-2436-221X

Козаченко Тетяна Олександрівна
Одеська державна академія будівництва та архітектури,
к.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029
kushpil.t.a@gmail.com
ORCID: 0000-0001-9034-3776

Для посилань:
Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи гіростата з рухомою масою в середовищі з опором. Механіка та математичні методи, 2025. Т. VII. № 2. С. 19–27.

For references:
D. Leshchenko, T. Kozachenko. (2025). Perturbed motions of a gyrostat with a movable mass in a resistive medium. Mechanics and Mathematical methods. VII (2). 19–27.