УДК 539.3

ВПЛИВ ЖОРСТКОГО ЕЛЕКТРОДА, РОЗТАШОВАНОГО НА МЕЖІ ПОДІЛУ ПРУЖНОГО БІМАТЕРІАЛУ, НА ЙОГО ДЕФОРМУВАННЯ

Лобода К. В.[1], Ходанен Т.В.[1]
[1]*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

Анотація: У даній статті розглянуто задачу плоскої деформації двох різнорідних п'єзоелектричних півпросторів із жорстким електродом кінцевої довжини, розташованим на межі їх поділу. Вважається, що електрод може бути нерухомим, а п'єзоелектричний композит повертається на деякий кут, що еквівалентно випадку, коли віддалені переміщення відсутні, а задається кут повороту електрода. Крім того, на електроді може бути задане його внутрішнє електричне поле та сумарний заряд. Також враховано зміщення електроду в горизонтальному або вертикальному напрямку під дією віддаленого навантаження.

Для побудови розв'язку використано представлення механічних та електричних факторів через функцію, яка аналітична у всій комплексній площині за виключенням області електроду. За допомогою цих представлень проблема зведена до рівняння Рімана-Гільберта, для вказаної кусково-аналітичної функції зі стрибком по області електроду. Додаткові умови до цього рівняння витікають із умов на нескінченості і умов механічної та електричної рівноваги електроду. Виписано аналітичне представлення розв'язку з невідомими коефіцієнтами, що визначаються із вказаних вище умов. Визначення останніх проводиться шляхом розкладення розв'язку в ряд на нескінченності та знаходження перших коефіцієнтів розкладення.

На основі отриманого розв'язку виписано аналітичні вирази для переміщень поза електродом та стрибків напружень і електричних зміщень на його берегах. Встановлено, що вказані фактори мають осциляційну особливість у вершинах електрода. Додатковий аналіз дозволив отримати вирази для напружень і електричного зміщення на верхній грані електрода та вказати методику їх знаходження на нижній грані. Розглянуто частковий випадок деформації, спричиненої поворотом електрода навколо його середньої точки. Для цього випадку побудовано графіки переміщень поза електродом і напружень на його верхній і нижній гранях. Для підтвердження достовірності результатів за допомогою методу скінченних елементів розглянуто задачу, яка є близькою по суті до випадку дії на електрод сили у вертикальному напрямку. Встановлено хороше узгодження аналітичного розв'язку з результатами скінченно-елементного аналізу, що підтверджує адекватність методики і достовірність одержаних результатів.

Ключові слова: напруження, деформація, електрод, п'єзоелектричний біматеріал, задача лінійного спряження, метод скінченних елементів.

THE EFFECT OF A RIGID INTERFACE ELECTRODE ON THE DEFORMATION OF A BIMATERIAL PLATE

K. Loboda[1], T. Khodanen[1]
[1]*Oles Honchar Dnipro National University*

Abstract: This article considers the problem of plane deformation of an absolutely rigid electrode located at the boundary of two dissimilar piezoelectric half-spaces. It is assumed that the electrode can be motionless, and the piezoelectric composite rotates by a certain angle, which is equivalent to the case when there are no remote displacements and the angle of rotation of the electrode is given. In addition, the internal electric field and total charge of the electrode can be given. The displacement of the electrode in the horizontal or vertical direction under the action of a remote load can also be taken into account.

To construct the solution, the representation of mechanical and electrical factors through a function that is analytic in the entire complex plane except for the electrode region was used. Applying these representations, the problem is reduced to the Riemann-Hilbert equation for the specified piecewise-

analytic function with a jump over the electrode region. Additional conditions to this equation follow from the conditions at infinity and the conditions of mechanical and electrical equilibrium of the electrode. An analytical representation of the solution with unknown coefficients determined from the above conditions is written. The latter is found by expanding the solution in a series at infinity and finding the first coefficients of the expansion.

Based on the obtained solution, analytical expressions were written for displacements outside the electrode and stress and electrical displacements jumps on its faces. It was found that the specified factors have an oscillating singularities at the electrode tips. By means of additional analysis, expressions for stresses and electrical displacement on the upper face of the electrode were found and the way of their determination on the lower face was indicated. A partial case of deformation caused by rotation of the electrode around its midpoint was considered. For this case, the graphs of displacements outside the electrode and stresses on its upper and lower faces were presented. To confirm the reliability of the results a problem that is essentially close to the case of a force acting on the electrode in the vertical direction was considered using the finite element method. Good agreement of the analytical solution with the results of finite element analysis was established, which confirms the correctness of the methodology and the obtained results.

Keywords: stress, deformation, electrode, piezoelectric bimaterial, problem of linear relationship, finite element method.

.

1 ВСТУП

Електродні шари, що розташовані на поверхні або на межі поділу компонент п’єзоелектричного біматеріалу, широко використовуються в різних електромеханічних пристроях. Міжфазне руйнування між електродним шаром і вбудованим матеріалом було визначено Hao et al [1] як основну причину несправності таких пристроїв, і тому дослідження внутрішніх і міжфазних електродів є дуже важливим для різних застосувань. У найпростіших випадках електроди можуть бути змодельовані або механічно жорсткими, або механічно м'якими включеннями. Отже, жорсткий можна розглядати як жорстке включення, тобто таке, що не зазнає деформацій під дією зовнішніх сил. Це є ідеалізацією, але в інженерній практиці розрахунку композитних матеріалів включення (наприклад, борні волокна), які є набагато жорсткішими від матриці, без втрати точності вважають абсолютно жорсткими. Таке припущення суттєво спрощує задачі, і в ряді випадків дозволяє отримати навіть їх точні аналітичні розв’язки.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Кількість наукових робіт, присвячених проблемі міжфазних електродів, є досить обмеженою. Зокрема, в роботі [2] розглянуто жорстке електрично провідне включення на межі поділу двох п’єзоелектричних матеріалів. В роботі [3] отримано аналітичні розв’язки для механічно м’якого електрода, розташованого на межі двох зв’язаних п’єзоелектричних півплощин, індукованих електричним зарядом. Крім того, точний аналітичний розв’язок для однієї тріщини на межі поділу, розташованої з одного боку електродного шару, було отримано в [4]. М’який електрод, вбудований на межі поділу двох п’єзоелектричних керамік під дією механічного навантаження та електричного поля, розглянуто в [5, 6]. Модель електричного пробою на кінцях м’якого електроду досліджено в [7], а взаємодія міжфазних тріщини і м’якого електроду вивчено в роботі [8].

Наскільки відомо авторам, жорсткий електрод на межі поділу двох п’єзокерамік під дією електромеханічного навантаження досліджений недостатньо. Дана робота якраз і присвячена цьому питанню.

Розглянемо абсолютно жорсткий електрод $a \le x_1 \le b$, $x_3 = 0$ між двома напівнескінченними керамічними просторами $x_3 > 0$ і $x_3 < 0$. Фізичні властивості півпросторів визначаються тензорами $c_{ijkl}^{(1)}$, $e_{ijk}^{(1)}$, $\chi_{ij}^{(1)}$ та $c_{ijkl}^{(2)}$, $e_{ijk}^{(2)}$, $\chi_{ij}^{(2)}$, де $c_{ijkl}^{(m)}$, $e_{ijk}^{(m)}$, $\chi_{ij}^{(m)}$ – компоненти пружної, п’єзоелектричної та діелектричної матриць відповідно. Обидва напівпростори мають клас симетрії 6mm, поляризовані у напрямку осі x_3 [9].

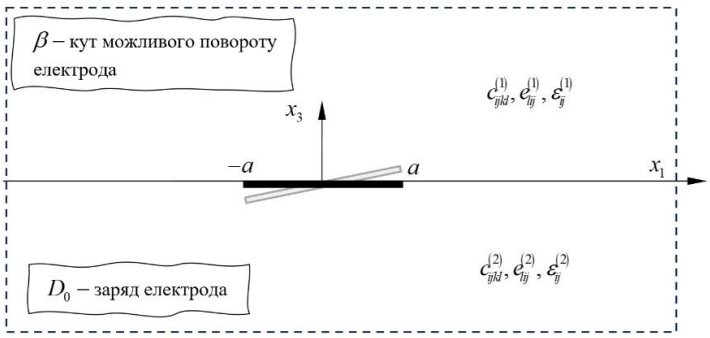

Рис. 1. Біматеріальна п’єзоелектрична площина з абсолютно жорстким електродом на межі поділу матеріалів

Вважаємо, що всі зовнішні впливи не залежить від координати x_2, тому можна розглядати задачу плоскої деформації в площині (x_1, x_3) (рис. 1).

Позначаємо через $L' = [-a, a]$ область електрода, а через $L'' = (-\infty, \infty) \setminus L'$. Припускаємо, що електрод може бути електрично зарядженим, і повний електричний заряд поперечного перерізу електрода в площині (x_1, x_3) дорівнює D_0.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ціллю даної роботи є побудова аналітичного розв'язку задачі плоскої деформації двох різнорідних п'єзоелектричних півпросторів із жорстким зарядженим електродом кінцевої довжини, розташованого на межі їх поділу, який може повертатися в площині та/або зміщуватися в горизонтальному або вертикальному напрямку під дією віддаленого навантаження.

Досягнення цієї цілі потребувало вирішення таких задач:

- знаходження зручних представлень компонент електромеханічного стану через кусково-аналітичні функції;
- формулювання на основі цих представлень задачі лінійного спряження Гільберта-Рімана і отримання її точного розв'язку;
- отримання аналітичних формул для механічних переміщень, електричного потенціалу, напружень і електричних зміщень у будь-якій точці біматеріального простору;
- аналіз цих величин в околі електроду та його вершин;
- побудова графіків зміни механічних та електричних факторів вздовж електроду та на його продовженні;
- підтвердження достовірності результатів шляхом розгляду близької по суті задачі методом скінченних елементів і порівняння аналітичних і чисельних результатів.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Загальний розв'язок основних рівнянь. Замкнена система рівнянь п'єзостатики за відсутності масових сих і вільних зарядів у загальному випадку описується рівняннями [9]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k; \quad D_i = e_{ikl}\varepsilon_{kl} + \chi_{ik}E_k; \tag{1}$$

$$\sigma_{ij,i} = 0; \quad D_{i,i} = 0; \; \varepsilon_{ij} = 0.5\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right); \quad E_i = -\varphi_{,i}, \quad i, j, k, l = 1, 3, \tag{2}$$

де u_i – компоненти вектора переміщень; $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – компоненти тензорів напружень та деформацій; E_i – компоненти вектора електричного поля; D_i – компоненти вектора електричної індукції; φ – електричний потенціал; кома означає похідні по відповідним координатним змінним. В умовах плоскої деформації $u_2 = 0$, $\sigma_{12} = 0$, $\sigma_{23} = 0$, $\varepsilon_{12} = 0$, $\varepsilon_{23} = 0$, $E_2 = 0$, $D_2 = 0$, а всі інші компоненти є функціями лише змінних x_1 та x_3.

Із виключенням напружень і деформацій система (1), (2) зводиться до системи диференційних рівнянь:

$$\left(c_{ijkl}u_k + e_{lij}\varphi\right)_{,li} = 0;$$

$$\left(e_{ikl}u_k - \chi_{il}\varphi\right)_{,li} = 0. \tag{3}$$

Припускаючи, що всі поля не залежать від координати x_2, розв'язок рівнянь (3) можна представити у вигляді [10]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{a} f(z), \tag{4}$$

де $z = x_1 + p x_3, \mathbf{V} = [u_1, u_2, u_3, \varphi]^T$, а f є довільною функцією, яку необхідно визначити; $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$ і p є власним вектором і власним значенням рівняння:

$$\left[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2 \mathbf{T}\right]\mathbf{a} = 0, \tag{5}$$

де **Q**, **R** і **T** визначаються з коефіцієнтів рівнянь (3). Тут і далі верхній індекс T означає транспоновану матрицю.

Оскільки відповідно до [10] рівняння (5) не має дійсних власних значень, власне значення (5) з додатними уявними частинами позначено як p_s, а відповідні власні вектори (5) як $\mathbf{a}_s$ (нижній індекс s тут і далі приймає значення 1, 2, 3, 4). Загальний дійсний розв'язок рівнянь (1), (2) можна подати згідно з [10] у вигляді:

$$\mathbf{V} = \sum_{s=1}^{4} \left[\mathbf{a}_s f_s(z_s) + \bar{\mathbf{a}}_s \bar{f}_s(\bar{z}_s)\right], \tag{6}$$

де $z_s = x_1 + p_s x_3$, а $f_s(*)$ є довільними аналітичними функціями.

Введемо вектор

$$\mathbf{t} = [\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, D_3]^T. \tag{7}$$

За допомогою рівнянь (1), (2) цей вектор можна подати у вигляді:

$$\mathbf{t} = \sum_{s=1}^{4} \left[\mathbf{b}_s f_s'(z_s) + \bar{\mathbf{b}}_s \bar{f}_s'(\bar{z}_s)\right], \tag{8}$$

де компоненти векторів $\mathbf{b}_s$ визначені через коефіцієнти рівнянь (1) і (2), а штрих означає похідну по аргументу.

Використовуючи для зручності такі позначення [11]:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4],\ \mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4],\ \mathbf{f}(z) = [\, f_1(z_1), f_2(z_2),\ f_3(z_3), f_4(z_4)]^{\mathrm{T}},$$

вирази (8) і (10) можна подати у такому вигляді:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{f}(z) + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{f}}(\bar{z}),\ \mathbf{t} = \mathbf{B}\mathbf{f}'(z) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{f}}'(\bar{z}), \tag{9}$$

де $\mathbf{f}'(z) = \left[\dfrac{df_1(z_1)}{dz_1}, \dfrac{df_2(z_2)}{dz_2}, \dfrac{df_3(z_3)}{dz_3}, \dfrac{df_4(z_4)}{dz_4}\right]^T$.

Аналітичні формули для дослідження електродів на межі поділу матеріалів. Застосуємо тепер отримані вище формули для дослідження біматеріальної області з міжфазним електродом. Граничні умови на межі поділу матеріалів можна подати у вигляді:

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{t}^{(2)}(x_1, 0) \text{ для } x_1 \in L'', \tag{10}$$

$$\mathbf{V}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{V}^{(2)}(x_1, 0) \text{ для } x_1 \in (-\infty, \infty), \tag{11}$$

де верхні індекси означають вектори (9), записані для верхньої і нижньої областей. Інші граничні умови будуть сформульовані пізніше.

У цьому випадку згідно з (6), (8) розв'язок рівнянь (1), (2) для кожної області після диференціювання можна записати так:

$$\mathbf{V}'^{(m)}(x_1, x_3) = \mathbf{A}^{(m)}\mathbf{f}'^{(m)}(z) + \bar{\mathbf{A}}^{(m)}\bar{\mathbf{f}}'^{(m)}(\bar{z}), \tag{12}$$

$$\mathbf{t}^{(m)}(x_1, x_3) = \mathbf{B}^{(m)}\mathbf{f}'^{(m)}(z) + \bar{\mathbf{B}}^{(m)}\bar{\mathbf{f}}'^{(m)}(\bar{z}). \tag{13}$$

Формули (12) та умови на межі поділу матеріалів

$$\mathbf{V}'^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{V}'^{(2)}(x_1, 0) \text{ для } -\infty < x_1 < \infty$$

дають

$$\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{f}'^{(1)}(x_1) - \bar{\mathbf{A}}^{(2)}\bar{\mathbf{f}}'^{(2)}(x_1) = \mathbf{A}^{(2)}\mathbf{f}'^{(2)}(x_1) - \bar{\mathbf{A}}^{(1)}\bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1) \text{ для } -\infty < x_1 < \infty. \tag{14}$$

Отримане рівняння забезпечує неперервність похідних переміщень v_1', v_2', v_3' і електричного поля по всій межі поділу. Ліва частина рівняння (14) є граничним значенням аналітичної функції в області $x_3>0$, а права частина цього рівняння є граничним значенням іншої аналітичної функції в області $x_3<0$. Рівняння (14) означає, що обидві функції можна аналітично продовжити на всю площину, тобто вони дорівнюють при $x_3>0$ і $x_3<0$ відповідно, вектор-функції **C**(z) аналітичній на всій площині.

Враховуючи, що всі електромеханічні характеристики обмежені на нескінченності, отримуємо, що

$$\mathbf{C}(z)|_{z\to\infty} = \mathbf{C}^{(0)} = \mathbf{const}.$$

Однак, згідно з теоремою Ліувіля це означає, що $\mathbf{C}(z)=\mathbf{C}^{(0)}$ виконується на всій площині.

Отже, з рівнянь (14) маємо:

$$\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{f}'^{(1)}(z) - \bar{\mathbf{A}}^{(2)}\bar{\mathbf{f}}'^{(2)}(z) = \mathbf{C}^{(0)} \quad \text{для } x_3>0,$$

$$\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{f}'^{(2)}(z) - \bar{\mathbf{A}}^{(1)}\bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(z) = \mathbf{C}^{(0)} \quad \text{для } x_3<0, \tag{15}$$

де $\mathbf{C}^{(0)}$ — довільний постійний вектор.

Оскільки $\mathbf{f}^{(m)}(z)$ є довільними вектор-функціями, можна вибрати $\mathbf{C}^{(0)} = \mathbf{0}$.

Припускаючи, що власні значення є різними, та беручи до уваги, що матриці в рівняннях (15) є неособливими [10], отримуємо:

$$\bar{\mathbf{f}}'^{(2)}(z) = (\bar{\mathbf{A}}^{(2)})^{-1}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{f}'^{(1)}(z) \quad \text{для } x_3>0,$$

$$\bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(z) = (\bar{\mathbf{A}}^{(1)})^{-1}\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{f}'^{(2)}(z) \quad \text{для } x_3<0. \tag{16}$$

Далі введемо вектор

$$\langle \mathbf{t}(x_1) \rangle = \mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) - \mathbf{t}^{(2)}(x_1, 0). \tag{17}$$

Перші три компоненти цього вектора – це стрибки напружень, а четверта – стрибки електричного зміщення уздовж межі поділу матеріалів. Тут і далі кутові дужки $\langle f(x_1) \rangle$ деякої функції f означають стрибки цієї функції на межі поділу матеріалів. Використовуючи рівняння (13) і (16), рівняння (17) можна записати у вигляді:

$$\langle \mathbf{t}(x_1) \rangle = \mathbf{D}\mathbf{f}'^{(1)}(x_1) + \bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1), \tag{18}$$

де $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{(1)} - \bar{\mathbf{B}}^{(2)}(\bar{\mathbf{A}}^{(2)})^{-1}\mathbf{A}^{(1)}$.

Приймаючи до уваги рівняння (12), вектор $\mathbf{V}^{(1)}$ на межі поділу матеріалів можна записати як

$$\mathbf{V}'^{(1)}(x_1,0) = \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{f}'^{(1)}(x_1) + \bar{\mathbf{A}}^{(1)}\bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1). \tag{19}$$

Вводячи вектор-функцію $\mathbf{W}(z)$ за допомогою формули

$$\mathbf{W}(z) = \begin{cases} \mathbf{D}\mathbf{f}'^{(1)}(z) & \text{для } x_3 > 0, \\ -\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(z) & \text{для } x_3 < 0, \end{cases} \tag{20}$$

виражаючи $\mathbf{f}'^{(1)}(z)$ для $x_3 > 0$ і $\bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(z)$ для $x_3 < 0$ через $\mathbf{W}(z)$, і підставляючи результати в (18), (19), отримуємо наступні вирази:

$$\langle \mathbf{t}(x_1) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \tag{21}$$

$$\mathbf{V}'^{(1)}(x_1,0) = \mathbf{G}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{G}}\ \mathbf{W}^-(x_1), \tag{22}$$

де $\mathbf{G} = \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{D}^{-1}$ і $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}(x_1 + i0)$, $\mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1 - i0)$ – значення вектор-функції $\mathbf{W}(z)$ у верхній і нижній околах поверхні поділу матеріалів, відповідно.

Із рівнянь (21), (22) та умов неперервності (14) витікає, що вектор-функція $\mathbf{W}(z)$ є аналітичною у всій площині з розрізом по відрізку L'. Слід зазначити, що завдяки рівнянню (14), співвідношення (22) задовольняють умовам $\mathbf{V}'^{(1)}(x_1,0) = \mathbf{V}'^{(2)}(x_1,0)$ для всього інтерфейсу $x_1 \in (-\infty, \infty)$.

Співвідношення (21), (22) можна використовувати для аналітичного розв'язання різних задач для одного або кількох жорстких електродів на межі поділу двох п'єзоелектричних матеріалів.

У подальшому основна увага буде приділена випадку плоскої деформації. Матриця $\mathbf{G}$ без других рядка і стовпця, що відповідають антиплоскій компоненті деформації, має таку структуру:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{13} & G_{14} \\ G_{31} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ig_{11} & g_{13} & g_{14} \\ g_{31} & ig_{33} & ig_{34} \\ g_{41} & ig_{43} & ig_{44} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

де всі g_{ij} дійсні.

Використовуючи методику, викладену в роботі [12], з рівняння (23) отримуємо наступні представлення:

$$u_3'(x_1,0) - m_{j4}E_1(x_1,0) + im_{j1}u_1'(x_1,0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \tag{24}$$

$$n_{j1}\langle \sigma_{13}(x_1,0) \rangle + i\left[n_{j3}\langle \sigma_{33}(x_1,0) \rangle + n_{j4}\langle D_3(x_1,0) \rangle \right] = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1) \tag{25}$$

де $F_j(z) = n_{j1}W_1(z) + i[n_{j3}W_3(z) + n_{j4}W_4(z)]$, (26)

$m_{j4} = S_{j4}$, $m_{j1} = -iS_{j1}$, $n_{j1} = Y_{j1}$, $n_{j3} = -iY_{j3}$, $n_{j4} = -iY_{j4}$, причому m_{jl}, n_{jl} $(j,l=1,3,4)$ є дійсними; власні вектори $\mathbf{S}_j^T = [S_{j1}, S_{j3}, S_{j4}]^T$, що відповідають власним значенням γ_j $(j = 1,3,4)$, знаходяться з системи:

$$(\gamma\mathbf{G}^T + \bar{\mathbf{G}}^T)\mathbf{S}^T = 0, \tag{27}$$

а вектор $\mathbf{Y}_j$ визначається так:

$$\mathbf{Y}_j = [Y_{j1}, Y_{j3}, Y_{j4}] = \mathbf{S}_j \mathbf{G} \quad (j=1,3,4).$$

При цьому власні значення мають вигляд:

$$\gamma_1 = \frac{1+\delta}{1-\delta}, \quad \gamma_3 = \gamma_1^{-1}, \quad \gamma_4 = 1,$$

де $\delta^2 = \dfrac{g_{14}^2 g_{33} + g_{13}^2 g_{44} - 2g_{14}g_{13}g_{34}}{g_{11}(g_{33}g_{44} - g_{34}^2)} > 0$, тобто воно дійсне.

Формулювання та розв'язок задачі лінійного спряження. Припустимо, що на включені $u_3'(x_1,0) = u_{30}'$, $E_1^{(1)}(x_1,0) = E_{10}$, $u_1'(x_1,0) = u_{10}'$. Це можна пояснити так, що включення повертається на деякий кут β відносно своєї середньої точки, і на ньому задано внутрішнє електричне поле E_{10}. Тоді $u_{10}' = \sin\beta$, а $u_{10}' = 1 - \cos\beta$. Тоді з рівняння (24) отримуємо:

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = u_{30}' - m_{j4}E_{10} + i m_{j1} u_{10}' \ (j=1,3,4) \text{ для } x_1 \in L' \tag{28}$$

Вводячи нову функцію

$$\Phi_j(z) = F_j(z) + \eta_j - i\theta_j, \tag{29}$$

де $\eta_j = \dfrac{-u_{30}' + m_{j4}E_{10}}{1+\gamma_j}$, $\theta_j = \dfrac{m_{j1}u_{10}'}{1+\gamma_j}$, $(j=1,3,4)$,

яка має ті ж властивості, що і $F_j(z)$, рівняння(28 40) набуває вигляду:

$$\Phi_j^+(x_1) + \gamma_j \Phi_j^-(x_1) = 0 \ \ (j=1,3,4) \text{ для } x_1 \in L'. \tag{30}$$

Якщо вважати, що $F_j(z)\big|_{z\to\infty} \to 0$, то

$$\Phi_j(z)\big|_{z\to\infty} \to \eta_j - i\theta_j. \tag{31}$$

Враховуючи заміну (29), рівняння (24) і (25) можна переписати у вигляді:

$$u_3'(x_1,0) - m_{j4}E_1(x_1,0) + i m_{j1} u_1'(x_1,0) = \Phi_j^+(x_1) + \gamma_j \Phi_j^-(x_1) - r_j\left(\eta_j - i\theta_j\right), \tag{32}$$

$$n_{j1}\langle \sigma_{13}(x_1,0)\rangle + i\left[n_{j3}\langle \sigma_{33}(x_1,0)\rangle + n_{j4}\langle D_3(x_1,0)\rangle\right] = \Phi_j^+(x_1) - \Phi_j^-(x_1). \tag{33}$$

Інтегруючи (33) по електроду, отримуємо

$$\int_{-a}^{a} \{\Phi_j^+(x_1) - \Phi_j^-(x_1)\} dx_1 = n_{j1}Q_1 + i\left[n_{j3}Q_3 + n_{j4}D_0\right], \tag{34}$$

де $Q_1 = \int_{-a}^{a} \langle \sigma_{13}(x_1)\rangle dx_1$, $Q_3 = \int_{-a}^{a} \langle \sigma_{33}(x_1)\rangle dx_1$ – сумарні сили, що діють на електрод по напрямку осей x_1 і x_3, відповідно. Ці сили можуть бути спричинені, наприклад, магнітними полями, які діють на електрод, що має магнітні властивості.

$D_0 = \int_{-a}^{a} \langle D_3(x_1)\rangle dx_1$ – сумарний заряд електрода.

Беремо до уваги, що рівняння (34) може бути переписане у вигляді

$$\frac{\gamma_j+1}{\gamma_j}\int_{-a}^{a}\Phi_j^+(x_1)dx_1 = n_{j1}Q_1 + i\left[n_{j3}Q_3 + n_{j4}D_0\right] \ (j=1,3,4). \tag{35}$$

Розв'язок задачі (30), (31) та (35) будемо розшукувати у формі [13]

$$\Phi_j(z) = \frac{c_{0j}+c_{1j}z}{\sqrt{z^2-a^2}}\left(\frac{z+a}{z-a}\right)^{i\varepsilon_j} \ (j=1,3,4), \tag{36}$$

де c_0, c_1 – довільні константи, $\varepsilon_j = \dfrac{\ln\gamma_j}{2\pi}$.

При розкладенні на нескінченості функції $\Phi_j(z)$, представленої формулою (36), маємо:

$$\Phi_j(z) = c_{1j} + \left\{c_{0j} + 2ia\varepsilon_j c_{1j}\right\}\frac{1}{z} + O(z^{-2}). \tag{37}$$

Із представлень (31) і (34) отримаємо наступні рівняння:

$$c_{1j} = \eta_j - i\theta_j,\ c_{0j} + 2ia\varepsilon_j c_{1j} = \left\{in_{j1}Q_1 - \left[n_{j3}Q_3 + n_{j4}D_0\right]\right\}/(2\pi). \tag{38}$$

Звідси отримуємо вирази для констант

$$c_{0j} = \frac{in_{j1}Q_1 - \left[n_{j3}Q_3 + n_{j4}D_0\right]}{2\pi} - 2ia\varepsilon_j\left(\eta_j - i\theta_j\right). \tag{39}$$

Підставляючи одержані вирази (38), (39) в (37), одержуємо розв'язок у вигляді:

$$\Phi_j(z) = \frac{\left\{in_{j1}Q_1 - \left[n_{j3}Q_3 + n_{j4}D_0\right]\right\}/(2\pi) + (\eta_j - i\theta_j)\left(z - 2i\varepsilon_j a\right)}{\sqrt{z^2-a^2}}\left(\frac{z+a}{z-a}\right)^{i\varepsilon_j}. \tag{40}$$

Слід відзначити, що у формулі (40) має місце осциляційна сингулярність біля вершин електрода.

Враховуючи рівності (30) на L' і $\Phi_j^+(x_1) = \Phi_j^-(x_1) = \Phi_j(x_1)$ на L'', із формул (32) отримуємо:

$$u_3'(x_1,0) - m_{j4}E_1(x_1,0) + im_{j1}u_1'(x_1,0) = -r_j\left(\tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j\right) \text{ на } L', \tag{41}$$

$$u_3'(x_1,0) - m_{j4}E_1(x_1,0) + im_{j1}u_1'(x_1,0) = r_j\left[\Phi_j(x_1) - \left(\tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j\right)\right] \text{ на } L''. \tag{42}$$

Розв'язок рівнянь (41) дає задані значення $u_3'(x_1,0), E_1^{(1)}(x_1,0), u_1'(x_1,0)$ на електроді, а з (42) отримуємо:

$$u_1'(x_1,0) = r_1\,\mathrm{Im}\left[\Phi_1(x_1) - \left(\tilde{\sigma}_1 - i\tilde{\tau}_1\right)\right]/m_{11}, \tag{43}$$

а також наступну СЛАР:

$$u_3'(x_1,0) - m_{14}E_1(x_1,0) = r_1\Psi_1(x_1),$$

$$u_3'(x_1,0) - m_{44}E_1(x_1,0) = r_4\Psi_4(x_1),$$

де $\Psi_j(x_1) = \mathrm{Re}\left[\Phi_j(x_1) - \left(\tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j\right)\right]$,

із якої отримуємо:

$$u_3'(x_1,0)=\left[m_{14}r_4\Psi_4(x_1)-m_{44}r_1\Psi_1(x_1)\right]/\left(m_{14}-m_{44}\right),$$

$$E_1(x_1,0)=\left[r_4\Psi_4(x_1)-r_1\Psi_1(x_1)\right]/\left(m_{14}-m_{44}\right). \tag{44}$$

Знайдемо стрибки напружень і електричного зміщення. На основі (30) рівняння (33) може бути записане у вигляді:

$$n_{j1}\left\langle\sigma_{13}(x_1,0)\right\rangle+i\left[n_{j3}\left\langle\sigma_{33}(x_1,0)\right\rangle+n_{j4}\left\langle D_3(x_1,0)\right\rangle\right]=\frac{\gamma_j+1}{\gamma_j}\Phi_j^+(x_1). \tag{45}$$

Звідси $\left\langle\sigma_{13}(x_1,0)\right\rangle=\dfrac{\gamma_1+1}{\gamma_1 n_{11}}\operatorname{Im}\left[\Phi_1^+(x_1)\right]$. (46)

Крім того, із (45) отримуємо:

$$n_{13}\left\langle\sigma_{33}(x_1,0)\right\rangle+n_{14}\left\langle D_3(x_1,0)\right\rangle=\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1}\operatorname{Im}\left[\Phi_1^+(x_1)\right],$$

$$n_{43}\left\langle\sigma_{33}(x_1,0)\right\rangle+n_{44}\left\langle D_3(x_1,0)\right\rangle=2\operatorname{Im}\left[\Phi_4^+(x_1)\right].$$

Із останньої системи знаходимо:

$$\left\langle\sigma_{33}(x_1,0)\right\rangle=\left\{n_{44}\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1}\operatorname{Im}\left[\Phi_1^+(x_1)\right]-n_{14}2\operatorname{Im}\left[\Phi_4^+(x_1)\right]\right\}/\Delta_0,$$

$$\left\langle D_3(x_1,0)\right\rangle=\left\{-n_{43}\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1}\operatorname{Im}\left[\Phi_1^+(x_1)\right]+n_{13}2\operatorname{Im}\left[\Phi_4^+(x_1)\right]\right\}/\Delta_0, \tag{47}$$

де $\Delta_0=n_{13}n_{44}-n_{43}n_{14}$.

Напруження та електричні зміщення на верхній і нижній гранях електроду. Визначимо спочатку напруження та електричні зміщення на верхній грані електроду. На основі (9) можемо записати:

$$\mathbf{t}^{(1)}=\mathbf{B}^{(1)}\mathbf{f}'(z)+\overline{\mathbf{B}}^{(1)}\overline{\mathbf{f}}'(\overline{z})=2\operatorname{Re}\left\{\mathbf{B}^{(1)}\mathbf{f}'^{(1)}(z)\right\},$$

а із (20) маємо:

$$\mathbf{f}'^{(1)}(z)=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}(z),\ \mathbf{D}^{-1}=\left(\mathbf{A}^{(1)}\right)^{-1}\mathbf{G},$$

отже,

$$\mathbf{t}^{(1)}=2\operatorname{Re}\left\{\mathbf{B}^{(1)}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}(z)\right\}. \tag{48}$$

Рівняння (26) можна записати у векторно-матричній формі так:

$$\mathbf{F}(z)=\mathbf{N}\mathbf{W}(z),$$

де $\mathbf{F}(z)=\begin{Bmatrix}F_1(z)\\F_3(z)\\F_4(z)\end{Bmatrix}$, $\mathbf{N}=\begin{bmatrix}n_{11} & in_{13} & in_{14}\\ n_{31} & in_{33} & in_{34}\\ n_{41} & in_{43} & in_{44}\end{bmatrix}$, $\mathbf{W}(z)=\begin{Bmatrix}W_1(z)\\W_3(z)\\W_4(z)\end{Bmatrix}$.

Звідси

$$\mathbf{W}(z)=\mathbf{N}^{-1}\mathbf{F}(z). \tag{49}$$

Тоді на основі (45), (49) можемо записати

$$\mathbf{t}^{(1)} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{\Omega}\,\mathbf{F}(z)\right\}, \tag{50}$$

де $\mathbf{\Omega} = \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{B}^{(1)}\left(\mathbf{A}^{(1)}\right)^{-1}\mathbf{G}\,\mathbf{N}^{-1}$.

Аналогічно можна отримати формули для напружень та електричних зміщень на нижній грані електроду. Але їх можна також знайти через значення на верхній грані електроду і стрибки цих факторів, що визначені формулами (46) та (47).

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Чисельна реалізація отриманих формул проводилась для біматеріалу, скомпонованого із матеріалів PZT4 (верхня півплощина) і PZT5 (нижня). Всі величини, якщо не вказано протилежне, задаються в системі одиниць *СІ*. Вважалося, що на відрізку $L' = [-0,01; 0,01]$ межі поділу матеріалів знаходиться абсолютно жорсткий нерухомий електрод. При цьому біматеріальна область повертається за годинниковою стрілкою на кут $\beta = arctg\left(u'_{30}\right)$. НДС в околі електрода не зміниться, якщо припустити, що біматеріальна область на віддаленні від електрода нерухома, а сам електрод повертається на той же кут β, але проти годинникової стрілки. Результати розрахунку в останньому випадку проілюстровані на рисунках 2-4.

На рис. 2 наведено розподіл переміщення $10^6 u_3(x_1, 0)$ в правій частині електрода та на його продовженні. Суцільна і пунктирна лінії побудовані при $\beta_1 = 10^{-4}$ і $\beta_2 = 5\times10^{-5}$, відповідно. Видно, що для $0 \le x_1 \le 0,01$ переміщення співпадають з переміщеннями електрода, а на його продовженні різко згасають.

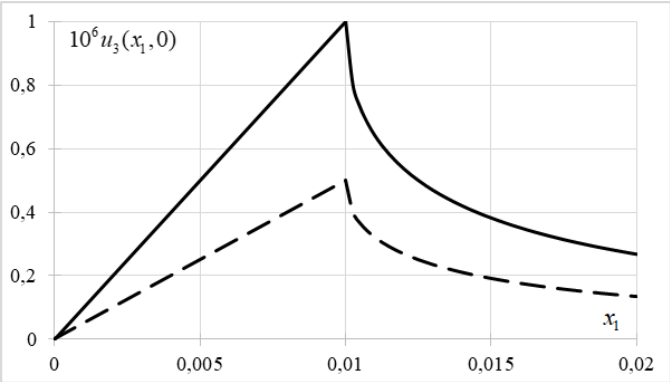

Рис. 2. Переміщення $10^6 u_3(x_1, 0)$ в правій частині електрода та на його продовженні

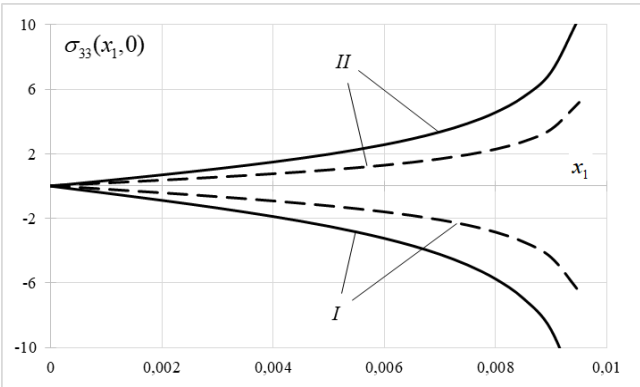

Рис. 3. Варіація напруження $10^{-6}\sigma_{33}(x_1, 0)$ на верхній (лінії I) і нижній (лінії II) гранях електрода при різних кутах його повороту

Зміна напруження $10^{-6}\sigma_{33}(x_1,0)$ на верхній (лінії I) і нижній (лінії II) гранях правої частини електрода при $\beta_1 = 10^{-4}$ і $\beta_2 = 5\times10^{-5}$ показані на Рис. 3 суцільними і пунктирними лініями, відповідно. Видно, що оскільки електрод повертається проти годинникової стрілки, то напруження у його правій частині на верхній грані є стискальними, на нижній – розтягувальними.

Зміна електричного зміщення $D_3(x_1,0)$ на верхній (лінії *I*) і нижній (лінії *II*) гранях правої частини електрода при $\beta_1 = 10^{-4}$ і $\beta_2 = 5\times10^{-5}$ показані на рис. 4 суцільними і пунктирними лініями, відповідно.

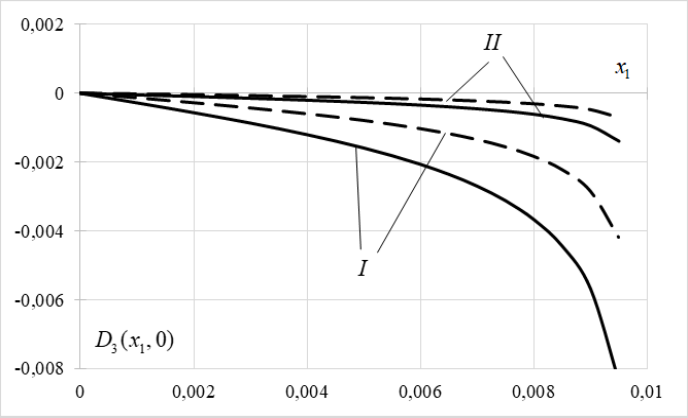

Рис. 4. Варіація електричного зміщення $D_3(x_1,0)$ на верхній (лінії *I*) і нижній (лінії *II*) гранях електрода при різних кутах його повороту

Підтвердження достовірності результатів. Розглянемо задачу, яка близька по суті до випадку дії на електрод сили у вертикальному напрямку, а саме, розглянемо область, що скомпонована з двох жорстко зчеплених довгими торцями прямокутників розмірами 50мм*25мм. Вважаємо, що верхній прямокутник виготовлений із матеріалу PZT4, нижній – PZT5. В центральній частині межі поділу матеріалів знаходиться абсолютно жорсткий електрод довжиною 10мм. Верхній і нижній торці біматеріалу жорстко закріплені.

Припустимо, що під дією вертикальної сили електрод зміщується на 0,0001мм вверх. Для аналізу напружено-деформівного стану застосуємо метод скінченних елементів (МСЕ) в середовищі пакету Abaqus. Фрагмент сітки скінченних елементів в околі тріщини разом із полем вертикальних переміщень показаний на рис. 5.

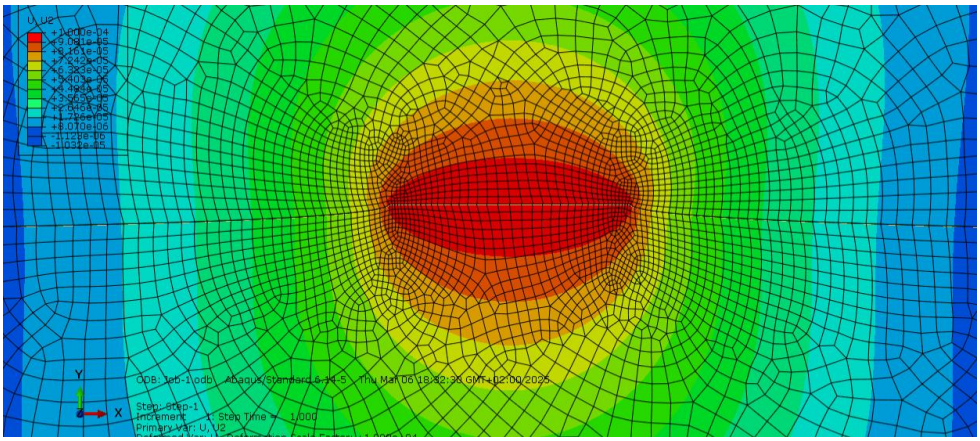

Рис. 5. Фрагмент сітки скінченних елементів в околі тріщини разом із полем вертикальних переміщень

Графіки напруження $10^{-6}\sigma_{33}(x_1)$ вздовж верхньої і нижньої сторін електрода показані суцільними лініями (I) на рисунках 6 і 7, відповідно. На основі цих результатів наближено знайдено, що головні вектори вказаних напружень дорівнюють $-1,2256\times10^4\,\frac{Н}{м}$ – для верхнього торця і $8,3569\times10^4\,\frac{Н}{м}$ – для нижнього. Враховуючи, що головний вектор напружень для нижнього торця, як і для верхнього, направлений вертикально вниз, одержуємо, що сумарна сила, яка тримає включення в рівновазі, дорівнює $2,0612\times10^4\,\frac{Н}{м}$.

Далі проведено розрахунок відповідно до результатів аналітичного аналізу при $Q_3 = 2,0612\times10^4\,\frac{Н}{м}$. Результати обчислення напружень $10^{-6}\sigma_{33}(x_1)$ вздовж верхньої і нижньої сторін електрода показані на рисунках 6 і 7 пунктирними лініями (II).

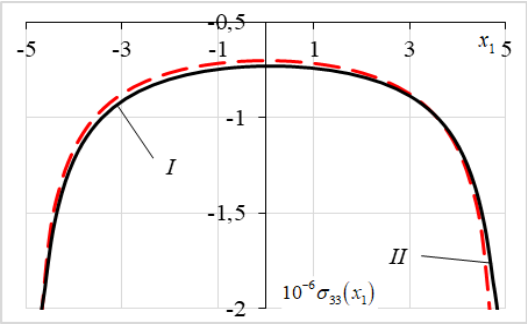

Рис. 6. Розподіл напружень вдовж верхнього торця

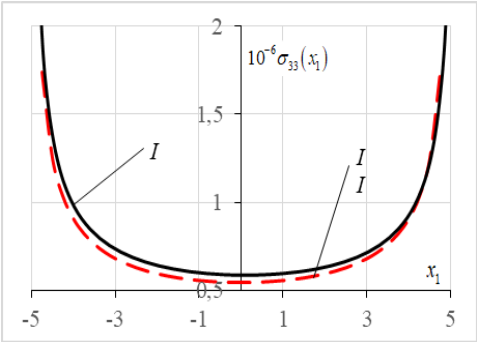

Рис. 7. Розподіл напружень вдовж нижнього торця

Із рисунків 6 і 7 видно дуже хороше узгодження аналітичного розв'язку з результатами скінченно-елементного аналізу: максимальне відхилення значень менше 1 %. Ця обставина підтверджує адекватність методики і достовірність одержаних результатів.

6 ВИСНОВОК

Розв'язана задача плоскої деформації двох різнорідних п'єзоелектричних півпросторів із жорстким зарядженим електродом кінцевої довжини, розташованого на межі їх поділу зміщення. Електронапружений стан може бути знайдений для випадків електроду в горизонтальному або вертикальному напрямку під дією віддаленого навантаження, його повороту відносно середньої точки, а також при наявності внутрішнього електричного поля та заряду електрода.

Для розв'язку задачі подано представлення (24), (25) механічних та електричних факторів через кусково-аналітичні функції, за допомогою яких проблема зведена до векторної задачі лінійного спряження, що розв'язана точно. На основі отриманого розв'язку виписані аналітичні вирази (43), (44) для переміщень електричного поля на поза електродом та стрибків напружень і електричних зміщень (46), (47) на його берегах. Встановлено, що вказані фактори мають осциляційну особливість у вершинах електрода. Знайдено також вираз (50) для вектора напружень і електричного зміщення на верхній грані електрода.

В результаті аналізу випадку повороту електрода навколо його середньої точки встановлено, що в правій його частині напруження є стискальними на верхній грані і розтягувальними на нижній, причому вони різко зростають при підході до вершин

електроду. З метою апробації результатів за допомогою методу скінченних елементів розв'язано близьку по суті задачу, але для області скінченних розмірів, і встановлено хороше узгодження аналітичного розв'язку з результатами скінченно-елементного аналізу.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають будь-яких фінансових чи нефінансових інтересів щодо матеріалів, представлених у цій статті, які слід розкривати.

Література

1. Hao T. H., Gong X., Suo Z. Fracture mechanics for the design of ceramic multilayer actuators. J. Mech. Phys. Solids. 1996. Volume 44. P. 23-48. doi: 10.1016/0022-5096(95)00068-2.
2. Deng W., Megui S. A. Analysis of conducting rigid inclusion at the interface of two dissimilar piezoelectric materials. ASME J. Appl. Mech. 1998. Volume 65. P. 76-84. doi: 10.1115/1.2789049.
3. Ru C. Q., Exact solution for finite electrode layers embedded at the interface of two piezoelectric half-planes. J. Mech. Phys. Solids. 2000. Volume 48. P. 693-708. doi: 10.1016/S0022-5096(99)00056-3.
4. Ru C. Q., Electrode-ceramic interfacial cracks in piezoelectric multilayer materials. ASME J. Appl. Mech. 2000. Volume 67. P. 255-261. doi: 10.1115/1.1303825.
5. Narita F., Yoshida M., Shindo Y. Electroelastic effect induced by electrode embedded at the interface of two piezoelectric half-planes. 2004. Mechanics of Materials. Volume 36. P. 999-1006. doi: 10.1016/j.mechmat.2003.04.003.
6. Loboda V., Mahnken R. On investigation of an electrode at the interface of a piezoelectric bimaterial space under remote electromechanical loading. Acta Mech. 2011. Volume 221(3). P. 327-339. doi: 10.1007/s00707-011-0519-6.
7. Loboda V., Sheveleva A., Chapelle F., Lapusta Y. A dielectric breakdown model for an electrode along an interface between two piezoelectric materials. Engineering Fracture Mechanics. 2020. Volume 224. 106809. doi: 10.1016/j.engfracmech.2019.106809.
8. Sheveleva A., Loboda V., Lapusta Y. A conductive crack and a remote electrode at the interface between two piezoelectric materials. Applied Mathematical Modelling. 2020. Volume 87. P. 287–299. doi: 10.1016/j.apm.2020.06.003.
9. Parton V. Z., Kudryavtsev B. A.: Electromagnetoelasticity. Gordon and Breach Science Publishers, New York. 1988. 526 p.
10. Suo Z., Kuo C.-M., Barnett D. M., Willis J. R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics. Journal of Mechanics and Physics of Solids. 1992. Volume 40. P. 739-765. doi: 10.1016/0022-5096(92)90002-J.
11. Soh A. K., Liu J. X., Fang D. N. Explicit expressions of generalized Barnet-Lothe tensors for anisotropic piezoelectric materials. Int. J. Engng Sci. 2001. Volume 39. P. 1803-1814. doi: 10.1016/S0020-7225(01)00018-0.
12. Herrmann K. P., Loboda V. V., Govorukha V. B. On contact zone models for an interface crack with electrically insulated crack surfaces in a piezoelectric biomaterial. Int. J. Fract. 2001. Volume 111. P. 203-227. doi: 10.1007/s10704-010-9465-x.
13. Muskhelishvili N. I. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity. Springer Dordrecht. 1977. 732 p. doi: 10.1007/978-94-017-3034-1.

References

1. Hao, T. H., Gong, X., Suo, Z. (1996). Fracture mechanics for the design of ceramic multilayer actuators. *J. Mech. Phys. Solids*. Volume 44. P. 23-48.
2. Deng, W., Meguid, S. A. (1998). Analysis of conducting rigid inclusion at the interface of two dissimilar piezoelectric materials. ASME J. Appl. Mech. Volume 65. P. 76-84.
3. Ru, C. Q. (2000). Exact solution for finite electrode layers embedded at the interface of two piezoelectric half-planes. J. Mech. Phys. Solids. Volume 48. P. 693-708.
4. Ru, C. Q. (2000). Electrode-ceramic interfacial cracks in piezoelectric multilayer materials. ASME J. Appl. Mech. Volume 67. P. 255-261.

5. Narita, F., Yoshida, M., Shindo, Y. (2004). Electroelastic effect induced by electrode embedded at the interface of two piezoelectric half-planes. Mechanics of Materials. Volume 36. P. 999-1006.
6. Loboda, V., Mahnken, R. (2011). On investigation of an electrode at the interface of a piezoelectric bimaterial space under remote electromechanical loading. Acta Mech. Volume 221(3). P. 327-339.
7. Loboda V., Sheveleva A., Chapelle F., Lapusta Y. (2020). A dielectric breakdown model for an electrode along an interface between two piezoelectric materials. Engineering Fracture Mechanics. 2020. Volume 224. 106809.
8. Sheveleva A., Loboda V., Lapusta Y. (2020). A conductive crack and a remote electrode at the interface between two piezoelectric materials. Applied Mathematical Modelling. Volume 87. P. 287–299.
9. Parton, V. Z., Kudryavtsev, B. A. (1988). Electromagnetoelasticity. Gordon and Breach Science Publishers, New York. 526 p.
10. Suo, Z., Kuo, C.-M., Barnett, D. M., Willis, J. R. (1992). Fracture mechanics for piezoelectric ceramics. Journal of Mechanics and Physics of Solids. Volume 40. P. 739-765.
11. Soh, A. K., Liu, J. X., Fang, D. N. (2001). Explicit expressions of generalized Barnet-Lothe tensors for anisotropic piezoelectric materials. Int. J. Engng Sci. Volume 39. P. 1803-1814.
12. Herrmann, K. P., Loboda, V. V., Govorukha, V. B. (2001). On contact zone models for an interface crack with electrically insulated crack surfaces in a piezoelectric biomaterial. Int. J. Fract. 2001. Volume 111. P. 203-227.
13. Muskhelishvili N. I. (1977) Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity. Springer Dordrecht. 732 p.

Лобода Кирило Володимирович
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
аспірант
пр. Науки, 72, Дніпро, Україна 49010
loboda.kirill@gmail.com
ORCID: 0009-0004-8241-7105
Ходанен Тетяна Володимирівна
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
к. ф.-м. н., доцент
пр. Науки, 72, Дніпро, Україна 49010
thod7474@gmail.com
ORCID: 0000-0001-9194-3634

Для посилань:
Лобода К. В., Ходатен Т. В. Вплив жорсткого електрода розташованого на межі поділу пружного біоматеріалу, на його деформування. Механіка та математичні методи, 2025. Т. VII. № 2. С. 101–115.

For references:
K. Loboda, T. Khodanen (2025). The effect of a rigid interface electrode on the deformation of a bimaterial plate. Mechanics and Mathematical Methods. VII (2). 101–115.