

УДК 514

ТРИВИМІРНІ ЗВІДНІ ПСЕВДОРИМАНОВІ ПРОСТОРИ

Лесечко О. В.¹, Соловійов А. А.²

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

²Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Анотація: У роботі досліджено спеціальні класи псевдоріманових просторів та взаємозв'язки між ними.

Розглянуто клас звідних псевдоріманових просторів. Встановлено характерні тотожності для цих просторів і доведено, що тензор другої валентності, який отримано з тензорної ознаки звідних просторів, комує з тензором Річчі цього простору. У випадку, якщо звідний простір є тривимірним показано, що цей тензор можна виразити як лінійну комбінацію метричного тензора та тензора Річчі, а його згортка з тензором Річчі може бути подана через сам цей тензор із певним коефіцієнтом. Крім того, для тривимірних звідних псевдоріманових просторів отримано явне представлення тензора Річчі через його згортку із самим собою та метричним тензором, з коефіцієнтом, який містить скалярну кривину.

Досліджено внутрішню геометрію двох можливих типів тривимірних звідних просторів. Перший тип це псевдоріманів простір, у якому матриця метричного тензора має блочно-діагональну структуру, у якій перша компонента залежить лише від першої координати, а інші компоненти з блоку рангу два залежать від другої та третьої координат. Аналогічно досліджено другий тип, також з блочно-діагональною структурою матриці метричного тензора, проте тут кожна компонента першого блоку рангу два залежать від першої та другої координат, тоді як остання компонента матриці метричного тензора залежить лише від третьої координати. Для загальної матриці метричного тензора для цих двох типів, а також для кожного з цих типів окремо отримано явні значення тензора другої валентності, який отримано з тензорної ознаки звідних просторів.

Центральним результатом дослідження є теорема, яка стверджує, що тривимірні звідні псевдоріманові простори за необхідністю є рекурентними і, як наслідок, Річчі-рекурентними.

Отримані результати можуть бути корисними для подальших досліджень у диференціальній геометрії, загальній теорії відносності та теоретичній механіці при моделюванні фізичних процесів.

Ключові слова: псевдоріманові простори; тривимірні простори; звідні простори; рекурентні простори; Річчі-рекурентні простори.

THREE-DIMENSIONAL REDUCIBLE PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES

Lesechko O. V.¹, Soloviov A. A.²

¹Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

²Odesa I. I. Mechnikov National University

Abstract: The paper investigates certain classes of pseudo-Riemannian spaces and the relationships between them.

The class of reducible pseudo-Riemannian spaces is considered. Characteristic identities for these spaces are established, and it is proven that the tensor of the second valence, derived from the tensor criterion of reducible spaces, commutes with the Ricci tensor of the space. In the case where the reducible space is three-dimensional, it is shown that this tensor can be expressed as a linear combination of the metric tensor and the Ricci tensor, and its contraction with the Ricci tensor can be represented in terms of itself with a certain coefficient. Furthermore, for three-dimensional reducible pseudo-Riemannian spaces, an explicit representation of the Ricci tensor is obtained through its contraction with itself and the metric tensor, with a coefficient that involves the scalar curvature.



The intrinsic geometry of two possible types of three-dimensional reducible spaces is examined. The first type is a pseudo-Riemannian space in which the metric tensor matrix has a block-diagonal structure, where the first component depends only on the first coordinate, while the remaining components in the rank-two block depend on the second and third coordinates. Similarly, the second type is studied, also featuring a block-diagonal structure of the metric tensor matrix; however, in this case, each component of the first rank-two block depends on the first and second coordinates, whereas the last component of the metric tensor matrix depends only on the third coordinate. Explicit values of the second-order tensor, derived from the tensor criterion of reducible spaces, are obtained for the general metric tensor matrix of these two types, as well as for each type separately.

The central result of the study is a theorem stating that three-dimensional reducible pseudo-Riemannian spaces are necessarily recurrent and, consequently, Ricci-recurrent.

The obtained results may be useful for further research in differential geometry, general relativity, and theoretical mechanics in the modeling of physical processes.

Keywords: pseudo-Riemannian spaces; three-dimensional spaces; reducible spaces; recurrent spaces; Ricci-recurrent spaces.

1 ВСТУП

Нехай V_n – псевдорімановий простір з метричним тензором g_{ij} , $n > 2$. Рімановий простір V_n називається (локально) звідним, якщо в деякому околі D кожної його точки M може бути вибрана така система координат $y^1, y^2, \dots, y^n$, відносно якої основна метрична форма має вигляд [1-3]:

$$I = g_{ab}(x^c) dx^a dx^b + g_{\alpha\beta}(x^\gamma) dx^\alpha dx^\beta, \quad a, b, c = 1, \dots, k, \quad \alpha, \beta, \gamma = k+1, \dots, n.$$

Тут g_{ab} передбачаються залежними тільки від $x^1, x^2, \dots, x^k$, а $g_{\alpha\beta}$ – тільки від $x^{k+1}, x^{k+2}, \dots, x^n$. Тим самим звідний рімановий простір V_n згідно означенню представляє собою добуток ріманового простору V_m (віднесеного до координат $x^1, x^2, \dots, x^k$) з основною метричною формою $g_{ab}(x^c) dx^a dx^b$ на рімановий простір V_{n-m} (віднесеного до координат $x^{k+1}, x^{k+2}, \dots, x^n$) з метричною формою $g_{\alpha\beta}(x^\gamma) dx^\alpha dx^\beta$. Таким чином матриця метричного тензору має вид [1, 4-6]

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11}(X) & \dots & g_{1k}(X) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{k1}(X) & \dots & g_{kk}(X) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & g_{k+1,k+1}(Y) & \dots & g_{k+1,n}(Y) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & g_{nk+1}(Y) & \dots & g_{nn}(Y) \end{pmatrix},$$

де $X = x^1, x^2, \dots, x^k$, $Y = x^{k+1}, x^{k+2}, \dots, x^n$.

Тензорною ознакою звідності псевдоріманового простору є існування в ньому двічі коваріантного симетричного коваріантно сталого ідемпотентного тензора a_{ij} , який не пропорційний метричному тензору [7, 8]:

$$\begin{cases} a_{ij,k} = 0 \\ a_{i\alpha} a_j^\alpha = a_{ij} \\ a_{ij} = a_{ji} \\ a_{ij} \neq c g_{ij} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Тут $_{,k}$ – знак коваріантної похідної у просторі V_n , обчисленою за формулою

$$a_{ij,k} = \partial_k a_{ij} - a_{\alpha j} \Gamma_{ik}^\alpha - a_{i\alpha} \Gamma_{jk}^\alpha,$$

$$\partial_k a_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k},$$

$$a_{\alpha j} \Gamma_{ik}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha j} \Gamma_{ik}^\alpha,$$

де за допомогою метричного тензора формулами

$$\Gamma_{ij}^h = g^{h\alpha} \Gamma_{ij,\alpha}$$

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \right)$$

визначаються символи Крістофеля другого роду, що є об'єктами афінної зв'язності Γ на V_n (її називають рімановою зв'язністю), а g^{ij} – елементи оберненої матриці метричного тензора g_{ij} . Ці формули також виконуються у дослідженнях [1, 6, 9 - 12] при відображеннях спеціальних типів просторів.

Умова інтегрування рівняння (1) з урахуванням тотожності Річчі має вигляд

$$a_{i\alpha} R_{jkl}^\alpha + a_{\alpha j} R_{ikl}^\alpha = 0, \quad (3)$$

де R_{ijk}^h – тензор Рімана, який визначається наступною формулою:

$$R_{\cdot ijk}^h = -\frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{k\alpha}^h + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^h$$

та задовольняє умовам:

$$\begin{aligned} R_{\cdot ijk}^h + R_{\cdot ikj}^h &= 0 \\ R_{\cdot (ijk)}^h &= 0 \\ R_{\cdot i(jk,l)}^h &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Тензор типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$R_{hijk} = g_{h\alpha} R_{\cdot ijk}^\alpha$$

називається тензором кривини V_n . Цей тензор було розглянуто у [4], окрім умов на тензор Рімана, він також задовольняє співвідношенням:

$$\begin{aligned} R_{hijk} + R_{ihjk} &= 0 \\ R_{hijk} + R_{hikj} &= 0 \\ R_{hijk} - R_{jkhi} &= 0 \end{aligned}$$

Тензор типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $R_{ij} = R_{\cdot ija}^\alpha$ називається тензором Річчі простору V_n . Він за

необхідністю симетричний: $R_{ij} = R_{ji}$, а його слід: $R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ називається скалярною кривиною простору V_n . Дослідження з використанням цього об'єкту велись у [13-15].

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Спеціалізація псевдоріманових просторів, як засіб введення додаткових обмежень, має два основних джерела. Перше, це накладання геометричних умов на об'єкт, що вивчається, використання геометричних особливостей в дослідженні. Друге, це технологічні можливості, які виникають при використанні розроблених методів дослідження. Враховуючи обидві особливості, запропоновані методи спеціалізації псевдоріманових просторів по типу внутрішніх об'єктів. Зокрема, безпосередньо по виду метричного тензора.

Серед псевдоріманових просторів, що допускають спеціальний вид метрики в деякій системі координат, виділені звідні та напівзвідні простори. Вивчаються їх тензорні ознаки та, спираючись на це, деякі їх геометричні властивості.

Простори малої розмірності мають свої особливості як в методах дослідження, так і в отриманих результатах. Технічні труднощі, що виникають в процесі вивчення таких просторів, мають специфічний характер, а методи їх подолання лежать в основі досліджень просторів більшої розмірності.

В останні роки саме тривимірні простори стали об'єктом заснування нових методів. Тому вивчення тривимірних звідних просторів є актуальною темою дослідження. Робота ведеться локально, тензорними методами.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Спеціалізація псевдоріманових просторів є одним із ефективних методів дослідження в диференціальній геометрії. В нашому випадку, це можливість приведення метричного тензора псевдоріманового простору до спеціального виду в деякій системі координат. Такі псевдоріманові простори називаються майже звідними просторами. Майже звідними просторами є широкі класи псевдоріманових просторів із загальної теорії відносності, теорії геодезичних відображень, теорії квазі відображень та теорії конформних відображень, а також інших розділів диференціальної геометрії та топології.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

З урахуванням (4) проциклювавши рівняння (3) по індексах i, k, l отримаємо

$$a_{i\alpha} R^{\alpha}_{\cdot jkl} + a_{\alpha k} R^{\alpha}_{\cdot jli} + a_{\alpha l} R^{\alpha}_{\cdot jik} = 0. \quad (5)$$

Домножимо рівняння (5) на g^{jk} та згорнемо по індексах j, k

$$a_{i\alpha} R^{\alpha}_{\cdot l} - a_{\alpha l} R^{\alpha}_{\cdot i} = 0.$$

Двічі коваріантні тензори, які задовольняють співвідношенню

$$a_{i\alpha} A^{\alpha k_1 \dots k_n}_{j l_1 \dots l_m} = a_{j\alpha} A^{\alpha k_1 \dots k_n}_{i l_1 \dots l_m}.$$

називають комутуючими з тензором $A^{\alpha k_1 \dots k_n}_{i l_1 \dots l_m}$. Такого типу співвідношення було розглянуто у [16]. Таким чином, має місце

Теорема 1. В звідних псевдоріманових просторах тензор a_{ij} комутує з тензором Річчі R_{ij} .

У [17] було доведено, що у тривимірних псевдоріманових просторах тензор кривини записується у вигляді

$$R_{ijkl} = P_{il} g_{jk} - P_{ik} g_{jl} + P_{jk} g_{il} - P_{jl} g_{ik}. \quad (6)$$

Домножимо це рівняння на g^{jk} та згорнемо по індексах j, k :

$$R_{il} = P_{il} + P g_{il}, \quad (7)$$

тут $P = P_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$.

Далі, рівняння (7) домножимо на g^{il} та згорнемо по індексах i, l - $P = \frac{R}{4}$

і підставимо отримане значення P у співвідношення (7)

$$P_{il} = R_{il} - \frac{R}{4} g_{il}.$$

Отриманий вираз для P_{il} підставимо у (6)

$$R_{ijkl} = R_{il} g_{jk} - R_{ik} g_{jl} + R_{jk} g_{il} - R_{jl} g_{ik} - \frac{R}{2} (g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}) \quad (8)$$

а цей, далі, підставимо в умову інтегрування тензору a_{ij} , відображене у (3)

$$\begin{aligned} & a_{\alpha i} \left(R_{il}^{\alpha} g_{jk} - R_{ik}^{\alpha} g_{jl} + \delta_l^{\alpha} R_{jk} - \delta_k^{\alpha} R_{jl} - \frac{R}{2} (\delta_l^{\alpha} g_{jk} - \delta_k^{\alpha} g_{jl}) \right) + \\ & + a_{\alpha j} \left(R_{il}^{\alpha} g_{ik} - R_{ik}^{\alpha} g_{il} + \delta_l^{\alpha} R_{ik} - \delta_k^{\alpha} R_{il} - \frac{R}{2} (\delta_l^{\alpha} g_{ik} - \delta_k^{\alpha} g_{il}) \right) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Проальтернуємо отриману рівність по індексах j, l :

$$\begin{aligned} & a_{\alpha i} R_{il}^{\alpha} g_{jk} - a_{\alpha i} R_{jk}^{\alpha} g_{il} + a_{li} R_{jk} - a_{ji} R_{lk} - \frac{R}{2} a_{li} g_{jk} + \frac{R}{2} a_{ji} g_{lk} - \\ & - a_{\alpha j} R_{ik}^{\alpha} g_{il} + a_{li} R_{jk}^{\alpha} g_{ij} - a_{kj} R_{il} + a_{kl} R_{ij} + \frac{R}{2} a_{kj} g_{il} - \frac{R}{2} a_{kl} g_{ij} = 0 \end{aligned}$$

перепозначимо індекси i та l

$$\begin{aligned} & a_{\alpha i} R_{il}^{\alpha} g_{jk} - a_{\alpha i} R_{jk}^{\alpha} g_{il} + a_{il} R_{jk} - a_{jl} R_{ik} - \frac{R}{2} a_{il} g_{jk} + \frac{R}{2} a_{jl} g_{ik} - \\ & - a_{\alpha j} R_{ik}^{\alpha} g_{li} + a_{i\alpha} R_{jk}^{\alpha} g_{lj} - a_{kj} R_{li} + a_{ki} R_{lj} + \frac{R}{2} a_{kj} g_{li} - \frac{R}{2} a_{ki} g_{lj} = 0 \end{aligned}$$

та додамо до (9)

$$2a_{\alpha l} R_{il}^{\alpha} g_{jk} - 2a_{\alpha j} R_{jk}^{\alpha} g_{li} + 2a_{il} R_{jk} - 2a_{kj} R_{li} - R a_{il} g_{jk} + R a_{kj} g_{li} = 0.$$

Отриману рівність домножимо на g^{jk} та згорнемо по індексах j, k

$$2na_{\alpha l} R_{il}^{\alpha} - 2a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} g_{il} + 2a_{il} R - 2a_{kj} R_{li} - 3R a_{il} + R a_{kj} g_{li} = 0 \quad (10)$$

і далі, домножимо на a_k^l з урахуванням ідемпотентності (2), згорнемо по індексу l та підставимо індекс k на l :

$$6a_{\alpha l} R_{il}^{\alpha} - 2a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} a_{il} + 2R a_{il} - 2a_{\alpha l}^{\alpha} R_{\alpha i} - 3R a_{il} + R a_{il} = 0$$

або

$$a_{\alpha l} R_{il}^{\alpha} = a_{il} \frac{1}{2(3-a)} (2a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + R - R a).$$

Тобто згортка $a_{\alpha l} R_{il}^{\alpha}$ виражається через a_{il} з коефіцієнтом. Врахуємо це у (10):

$$a_{il} = g_{il} (3-a) \frac{2a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - R a}{2(3a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - R a)} + R_{il} \frac{a(3-a)}{3a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - R a}.$$

Таким чином, доведена

Теорема 2. Тензор a_{il} , отриманий із тензорної ознаки звідності тривимірних псевдоріманових просторів, має вигляд:

$$a_{il} = u g_{il} + v R_{il}, \quad (11)$$

де

$$u = (3-a) \frac{2a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - R a}{2(3a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - R a)},$$

$$v = (3-a) \frac{a}{3a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - R a}.$$

Зауважимо, що якщо $v=0$, то $a_{il} = u g_{il}$, що суперечить означенню a_{il} . Таким чином, $v \neq 0$.

У тотожність (3) підставимо (11)

$$v(R_{\alpha j} R^{\alpha}_{ikl} + R_{\alpha l} R^{\alpha}_{jkl}) = 0.$$

З огляду на те, що $v \neq 0$, отримуємо

$$R_{\alpha j} R^{\alpha}_{ikl} = -R_{\alpha l} R^{\alpha}_{jkl} \quad (12)$$

Вираз (8) домножимо на g^{im} , згорнемо по індексу i та підставимо замість індексу m індекс i

$$R^i_{jkl} = R^i_l g_{jk} - R^i_k g_{jl} + R_{jk} \delta^i_l - R_{jl} \delta^i_k - \frac{R}{2} (\delta^i_l g_{jk} - g \delta^i_k g_{jl}).$$

Отриманий вираз для тензора Рімана підставимо у (12)

$$\begin{aligned} R_{\alpha j} \left(R^{\alpha}_l g_{ik} - R^{\alpha}_k g_{il} + R_{ik} \delta^{\alpha}_l - R_{il} \delta^{\alpha}_k - \frac{R}{2} (\delta^{\alpha}_l g_{ik} - g \delta^{\alpha}_k g_{il}) \right) = \\ = -R_{\alpha l} \left(R^{\alpha}_l g_{jk} - R^{\alpha}_k g_{jl} + R_{jk} \delta^{\alpha}_l - R_{jl} \delta^{\alpha}_k - \frac{R}{2} (\delta^{\alpha}_l g_{jk} - g \delta^{\alpha}_k g_{jl}) \right) \end{aligned}$$

або

$$R_{\alpha j} R^{\alpha}_l g_{ik} - R_{\alpha j} R^{\alpha}_k g_{il} + R_{\alpha l} R^{\alpha}_l g_{jk} - R_{\alpha l} R^{\alpha}_k g_{jl} = \frac{R}{2} (R_{il} g_{jk} - R_{ik} g_{jl} + R_{jl} g_{ik} - R_{jk} g_{il}).$$

Цю рівність домножимо на g^{ik} , згорнемо по індексах i, k

$$3R_{\alpha j} R^{\alpha}_l - R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} g_{jl} = \frac{R}{2} (-R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{jl} + 3R_{jl}),$$

або

$$R_{\alpha j} R^{\alpha}_l = \frac{1}{6} (3R_{jl} R + g_{jl} (2R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - R^2)). \quad (13)$$

Таким чином, доведено

Наслідок 1. Тензор Річчі у звідних тривимірних псевдоріманових просторах задовольняє умовам (13).

При розгляданні (11) врахуємо ідемпотентність a_{il}

$$(u g_{i\alpha} + v R_{i\alpha})(u \delta_l^\alpha + v R_l^\alpha) = u g_{il} + v R_{il},$$

тобто

$$g_{il}(u^2 - u) = R_{il}v(1 - 2u) - v^2 R_{i\alpha} R_l^\alpha.$$

У отриману рівність підставимо вираз (13)

$$g_{il}u(u-1) = R_{il}v(1-2u) - v^2 \left(\frac{1}{6} (3R_{il}R + g_{il}(2R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - R^2)) \right),$$

або, зводячи подібні,

$$R_{il}v \left(1 - 2u - \frac{vR}{2} \right) = g_{il} \left(u^2 - u + \frac{v^2}{6} (2R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - R^2) \right).$$

Отримуємо, що тензор Річчі виражається через метричний тензор із деяким коефіцієнтом, що є характерним для просторів Ейнштейна, у яких кривина є сталою. Однак у просторах, розглянутих у цій роботі, це загалом не виконується. Таким чином, отримана тотожність справедлива лише у випадку, коли коефіцієнт при метричному тензорі та коефіцієнт при тензорі Річчі одночасно дорівнюють нулю. Враховуючи, що $v \neq 0$, отримуємо

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - 2u - \frac{vR}{2} = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u^2 - u + \frac{v^2}{6} (2R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - R^2) = 0 \end{array} \right. \quad (15)$$

Рівність (11) продиференціюємо коваріантно за напрямком x^m з урахуванням коваріантної сталості тензору a_{il}

$$u_{,m} g_{il} + v_{,m} R_{il} + v R_{il,m} = 0 \quad (16)$$

та домножимо на g^{il} , згорнемо по індексах i, l

$$-3u_{,m} = v_{,m} R + v R_{,m} \quad (17)$$

З іншого боку, продиференціюємо коваріантно за напрямком x^m рівність (15)

$$-4u_{,m} = v_{,m} R + v R_{,m} \quad (18)$$

Віднімемо (18) від (17) і отримаємо

$$u_{,m} = 0. \quad (19)$$

Рівність (17) у зв'язку з (19) набуває вигляду

$$v_{,m} R + v R_{,m} = 0. \quad (20)$$

З огляду на те, що v та R – інваріанти, їх коваріантна похідна є звичайною похідною, і тому ми отримали звичайне диференціальне рівняння першого порядку зі змінними, що відокремлюються. Інтегруючи частини рівності (20) отримуємо

$$\int \frac{\partial v}{v} = -\int \frac{\partial R}{R}, \quad \ln |v| = -\ln |R| + \ln C_0,$$

або

$$v = \frac{C_0}{R}. \quad (21)$$

Врахуємо (19) у (16)

$$R_{il,m} = -\frac{v_{,m}}{v} R_{il} \quad (22)$$

та у (17)

$$R_{,m} = -\frac{v_{,m}}{v} R. \quad (23)$$

Підставляючи (23) у (22), отримуємо, що

$$R_{il,m} = \frac{R_{,m}}{R} R_{il}. \quad (24)$$

У [18] було визначено Річчі-рекурентні простори. Псевдорімановий простір V_n називається Річчі-рекурентним, якщо в ньому існує ненульовий вектор ρ_i , для якого виконується умова $R_{ij,k} = \rho_k R_{ij}$.

Таким чином, доведена

Теорема 3. Тривимірні звідні псевдоріманові простори за необхідністю Річчі-рекурентні.

Псевдорімановий простір V_n називається рекурентним, якщо в ньому існує ненульовий вектор ρ_i , для якого виконується умова $R_{hijk,m} = \rho_m R_{hijk}$.

Рівність (8) продиференціюємо коваріантно за напрямком x^m

$$R_{ijkl,m} = R_{il,m} g_{jk} - R_{ik,m} g_{jl} + R_{jk,m} g_{il} - R_{jl,m} g_{ik} - \frac{R_{,m}}{2} (g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}).$$

Враховуючи (23) та (24) послідовно отримуємо

$$\begin{aligned} R_{ijkl,m} &= \frac{R_{,m}}{R} R_{il} g_{jk} - \frac{R_{,m}}{R} R_{ik} g_{jl} + \frac{R_{,m}}{R} R_{jk} g_{il} - \frac{R_{,m}}{R} R_{jl} g_{ik} - \frac{R_{,m}}{R} \frac{R}{2} (g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}). \\ R_{ijkl,m} &= \frac{R_{,m}}{R} \left(R_{il} g_{jk} - R_{ik} g_{jl} + R_{jk} g_{il} - R_{jl} g_{ik} - \frac{R}{2} (g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}) \right) \\ R_{ijkl,m} &= \frac{R_{,m}}{R} R_{ijkl}. \end{aligned}$$

Таким чином, доведено

Наслідок 2. Тривимірні звідні псевдоріманові простори за необхідністю рекурентні.

Рівність (19) говорить про те, що інваріант u – це деяка константа, враховуючи (21) у (14) отимуємо явний вираз цієї константи

$$u = \frac{2 - C_0}{4}. \quad (25)$$

Підставляючи (25) та (21) у (15) отримуємо, що друга згортка тензору Річчі з самим собою $R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}$ виражається через квадрат скалярної кривини з деяким коефіцієнтом

$$R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} = R^2 \frac{C_1}{2}, \quad C_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2C_0^2 + 3(1 - C_0^2)}{2C_0^2}.$$

Таким чином, рівність (13) набуває вигляду

$$R_{\alpha j} R_l^\alpha = \frac{R}{6} (3R_{jl} + g_{jl} R(C_1 - 1)).$$

4 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Тривимірні звідні псевдоріманові простори існують двох типів в залежності від структури метричного тензора. Назвемо V_3 тривимірним звідним псевдорімановим простором I типу, якщо його метричний тензор має наступний вид:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11}(x^1) & 0 & 0 \\ 0 & g_{22}(x^2, x^3) & g_{23}(x^2, x^3) \\ 0 & g_{32}(x^2, x^3) & g_{33}(x^2, x^3) \end{pmatrix}$$

і II типу, якщо метричний тензор V_3 наступного виду

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11}(x^1, x^2) & g_{12}(x^1, x^2) & 0 \\ g_{21}(x^1, x^2) & g_{22}(x^1, x^2) & 0 \\ 0 & 0 & g_{33}(x^3) \end{pmatrix}$$

відповідно.

Розглянемо вираз (6) як систему лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими P_{ij} одразу для двох вказаних типів, тобто враховуючи, що лише компоненти g_{13}, g_{31} матриці метричного тензора дорівнюють нулю:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11}(x^1, x^2, x^3) & g_{12}(x^1, x^2) & 0 \\ g_{21}(x^1, x^2) & g_{22}(x^1, x^2, x^3) & g_{23}(x^2, x^3) \\ 0 & g_{32}(x^2, x^3) & g_{33}(x^1, x^2, x^3) \end{pmatrix}$$

З урахуванням властивостей тензора Рімана, отримуємо систему з 6 рівнянь:

$$\begin{cases} R_{1212} - 2P_{12}g_{12} + P_{11}g_{22} + P_{22}g_{11} = 0 \\ R_{1213} - P_{13}g_{12} + P_{11}g_{23} + P_{23}g_{11} = 0 \\ R_{1223} - P_{13}g_{22} + P_{12}g_{23} + P_{23}g_{12} = 0 \\ R_{1313} + P_{11}g_{33} + P_{33}g_{11} = 0 \\ R_{2323} - 2P_{23}g_{23} + P_{22}g_{33} + P_{33}g_{22} = 0 \\ R_{1323} - P_{13}g_{23} + P_{12}g_{33} = 0 \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи будуть наступні значення P_{ij}

$$\begin{aligned} P_{11} &= M \left(-(\Delta g - g_{11}g_{23}^2)R_{1323}g_{12} + (2\Delta g + g_{12}^2g_{33})R_{1213}g_{23} - R_{1212}\Delta g g_{33} - \right. \\ &\quad \left. - R_{1223}g_{11}g_{12}g_{23}g_{33} - R_{1313}\Delta g g_{22} + R_{2323}\Delta g g_{11} \right); \\ P_{12} &= M \left(((\Delta g + g_{11}g_{23}^2)g_{12} - 2\Delta g g_{22})R_{1323} + (g_{12} - 2g_{22})R_{1213}g_{12}g_{23}g_{33} - \right. \\ &\quad \left. - (g_{12}g_{33} - 2g_{22}g_{33} + 2g_{23}^2)R_{1223}g_{11}g_{23} + R_{1212}g_{12}g_{23}^2g_{33} + R_{1313}g_{12}g_{22}g_{23}^2 - R_{2323}g_{11}g_{12}g_{23}^2 \right); \\ P_{13} &= M \left((g_{12} - 2g_{22})R_{1213}g_{12}g_{33} - (g_{12}g_{33} - 2g_{22}g_{33} + 2g_{23}^2)R_{1223}g_{11}g_{33} - \right. \\ &\quad \left. - (2\Delta g - g_{11}g_{12}g_{33} + g_{12}^2g_{33})R_{1323}g_{23} + R_{1212}g_{12}g_{23}g_{33}^2 + \right. \\ &\quad \left. + R_{1313}g_{12}g_{22}g_{23}g_{33} - R_{2323}g_{11}g_{12}g_{23}g_{33} \right); \\ P_{22} &= \frac{M}{g_{11}} \left(-(2g_{12}g_{33} - 3g_{22}g_{33} + 2g_{23}^2)R_{1223}g_{11}g_{12}g_{23} + (2g_{11}g_{12}g_{23}^2 - g_{11}g_{22}g_{33} + \right. \\ &\quad \left. + g_{12}^2g_{22}g_{33})R_{1323}g_{12} - (g_{11}g_{22}g_{33}^2 - 3g_{11}g_{22}g_{23}^2g_{33} + 2g_{11}g_{23}^4 - g_{12}^2g_{22}g_{33}^2)R_{1212} - \right. \\ &\quad \left. - (-2g_{11}g_{12}g_{22}g_{33} + 2g_{11}g_{12}g_{23}^2 + 2g_{11}g_{22}g_{33}^2 - 2g_{11}g_{22}g_{23}^2 + g_{12}^2g_{22}g_{33})R_{1213}g_{23} - \right. \\ &\quad \left. - ((\Delta g + g_{11}g_{23}^2)g_{12} - g_{11}g_{12}g_{23}^2 - g_{11}g_{22}g_{33}^2 + g_{11}g_{22}g_{23}^2 + g_{12}^2g_{22}g_{33} - g_{12}^2g_{23}^2)R_{1313}g_{22} + \right. \\ &\quad \left. + ((\Delta g + g_{11}g_{23}^2)g_{12} - g_{11}g_{12}g_{23}^2 - g_{11}g_{22}g_{33}^2 + g_{11}g_{22}g_{23}^2 + g_{12}^2g_{22}g_{33} - g_{12}^2g_{23}^2)R_{2323}g_{11} \right); \\ P_{23} &= M \left((g_{22}g_{33} - 2g_{23}^2)R_{1212}g_{23}g_{33} + (g_{22}g_{33} - g_{23}^2)R_{1313}g_{22}g_{23} - (g_{22}g_{33} - g_{23}^2)R_{2323}g_{11}g_{23} + \right. \\ &\quad \left. + (g_{12} - g_{22})R_{1323}g_{12}g_{23}g_{33} - (g_{12}g_{33} - 2g_{22}g_{33} + g_{23}^2)R_{1223}g_{12}g_{33} + \right. \\ &\quad \left. + (g_{12}g_{22}g_{33} - g_{12}g_{23}^2 - 2g_{22}^2g_{33} + 2g_{22}g_{23}^2)R_{1213}g_{33} \right); \\ P_{33} &= \frac{M}{g_{11}} \left(((\Delta g - g_{11}g_{23}^2)R_{1323}g_{12}g_{33} - (2\Delta g + g_{12}^2g_{33})R_{1213}g_{23}g_{33} - (\Delta g g_{12}g_{33} + g_{11}g_{22}g_{33}^2 - \right. \\ &\quad \left. - 3g_{11}g_{22}g_{23}^2g_{33} + 2g_{11}g_{23}^4 - g_{12}^2g_{22}g_{33}^2 + g_{12}^2g_{23}^2g_{33})R_{1313} + \right. \\ &\quad \left. + R_{1212}\Delta g g_{33}^2 + R_{1223}g_{11}g_{12}g_{23}g_{33}^2 - R_{2323}\Delta g g_{11}g_{33} \right); \end{aligned}$$

де Δg – це визначник відповідної матриці метричного тензору;

$$M = \frac{1}{\Delta g g_{12} g_{33} + 2\Delta g g_{22} g_{33} - 2\Delta g g_{23}^2 - g_{12}^2 g_{23} g_{33}}.$$

Підставимо отримані значення у (7) з урахуванням $P = \frac{R}{4}$ і отримаємо відповідні значення для тензору Річчі:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{Rg_{11}}{4} + M \left(-(\Delta g - g_{11}g_{23}^2)R_{1323}g_{12} + (2\Delta g + g_{12}^2g_{33})R_{1213}g_{23} - R_{1212}\Delta g g_{33} - \right. \\ &\quad \left. - R_{1223}g_{11}g_{12}g_{23}g_{33} - R_{1313}\Delta g g_{22} + R_{2323}\Delta g g_{11} \right); \\ R_{12} &= \frac{Rg_{12}}{4} + M \left(((\Delta g + g_{11}g_{23}^2)g_{12} - 2\Delta g g_{22})R_{1323} + (g_{12} - 2g_{22})R_{1213}g_{12}g_{23}g_{33} - \right. \\ &\quad \left. - (g_{12}g_{33} - 2g_{22}g_{33} + 2g_{23}^2)R_{1223}g_{11}g_{23} + R_{1212}g_{12}g_{23}^2g_{33} + R_{1313}g_{12}g_{22}g_{23}^2 - R_{2323}g_{11}g_{12}g_{23}^2 \right); \\ R_{13} &= M \left((g_{12} - 2g_{22})R_{1213}g_{12}g_{33} - (g_{12}g_{33} - 2g_{22}g_{33} + 2g_{23}^2)R_{1223}g_{11}g_{33} - \right. \\ &\quad \left. - (2\Delta g - g_{11}g_{12}g_{33} + g_{12}^2g_{33})R_{1323}g_{23} + R_{1212}g_{12}g_{23}g_{33}^2 + \right. \\ &\quad \left. + R_{1313}g_{12}g_{22}g_{23}g_{33} - R_{2323}g_{11}g_{12}g_{23}g_{33} \right); \\ R_{22} &= \frac{Rg_{22}}{4} + \frac{M}{g_{11}} \left(-(2g_{12}g_{33} - 3g_{22}g_{33} + 2g_{23}^2)R_{1223}g_{11}g_{12}g_{23} + (2g_{11}g_{12}g_{23}^2 - g_{11}g_{22}g_{33} + \right. \\ &\quad \left. + g_{12}^2g_{22}g_{33})R_{1323}g_{12} - (g_{11}g_{22}g_{33}^2 - 3g_{11}g_{22}g_{23}^2g_{33} + 2g_{11}g_{23}^4 - g_{12}^2g_{22}g_{33}^2)R_{1212} - \right. \\ &\quad \left. - (-2g_{11}g_{12}g_{22}g_{33} + 2g_{11}g_{12}g_{23}^2 + 2g_{11}g_{22}g_{33} - 2g_{11}g_{22}g_{23}^2 + g_{12}^2g_{22}g_{33})R_{1213}g_{23} - \right. \\ &\quad \left. - ((\Delta g + g_{11}g_{23}^2)g_{12} - g_{11}g_{12}g_{23}^2 - g_{11}g_{22}g_{33} + g_{11}g_{22}g_{23}^2 + g_{12}^2g_{22}g_{33} - g_{12}^2g_{23}^2)R_{1313}g_{22} + \right. \\ &\quad \left. + ((\Delta g + g_{11}g_{23}^2)g_{12} - g_{11}g_{12}g_{23}^2 - g_{11}g_{22}g_{33} + g_{11}g_{22}g_{23}^2 + g_{12}^2g_{22}g_{33} - g_{12}^2g_{23}^2)R_{2323}g_{11} \right); \\ R_{23} &= \frac{Rg_{23}}{4} + M \left((g_{22}g_{33} - 2g_{23}^2)R_{1212}g_{23}g_{33} + (g_{22}g_{33} - g_{23}^2)R_{1313}g_{22}g_{23} - \right. \\ &\quad \left. - (g_{22}g_{33} - g_{23}^2)R_{2323}g_{11}g_{23} + (g_{12} - g_{22})R_{1323}g_{12}g_{23}g_{33} - \right. \\ &\quad \left. - (g_{12}g_{33} - 2g_{22}g_{33} + g_{23}^2)R_{1223}g_{12}g_{33} + (g_{12}g_{22}g_{33} - g_{12}g_{23}^2 - 2g_{22}^2g_{33} + 2g_{22}g_{23}^2)R_{1213}g_{33} \right); \\ R_{33} &= \frac{Rg_{33}}{4} + \frac{M}{g_{11}} \left((\Delta g - g_{11}g_{23}^2)R_{1323}g_{12}g_{33} - (2\Delta g + g_{12}^2g_{33})R_{1213}g_{23}g_{33} - \right. \\ &\quad \left. - (\Delta g g_{12}g_{33} + g_{11}g_{22}g_{33}^2 - 3g_{11}g_{22}g_{23}^2g_{33} + 2g_{11}g_{23}^4 - g_{12}^2g_{22}g_{33}^2 + g_{12}^2g_{23}^2g_{33})R_{1313} + \right. \\ &\quad \left. + R_{1212}\Delta g g_{33}^2 + R_{1223}g_{11}g_{12}g_{23}g_{33}^2 - R_{2323}\Delta g g_{11}g_{33} \right). \end{aligned}$$

Далі, отримані значення для тензору Річчі підставимо у (11) і отримаємо відповідні значення для тензора a_{ij} :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{2} g_{11} + \frac{C_0 M}{R} \left(-(\Delta g - g_{11} g_{23}^2) R_{1323} g_{12} + (2\Delta g + g_{12}^2 g_{33}) R_{1213} g_{23} - R_{1212} \Delta g g_{33} - \right. \\
 &\quad \left. - R_{1223} g_{11} g_{12} g_{23} g_{33} - R_{1313} \Delta g g_{22} + R_{2323} \Delta g g_{11} \right); \\
 a_{12} &= \frac{1}{2} g_{12} + \frac{C_0 M}{R} \left(((\Delta g + g_{11} g_{23}^2) g_{12} - 2\Delta g g_{22}) R_{1323} + (g_{12} - 2g_{22}) R_{1213} g_{12} g_{23} g_{33} - \right. \\
 &\quad \left. - (g_{12} g_{33} - 2g_{22} g_{33} + 2g_{23}^2) R_{1223} g_{11} g_{23} + R_{1212} g_{12} g_{23}^2 g_{33} + R_{1313} g_{12} g_{22} g_{23}^2 - R_{2323} g_{11} g_{12} g_{23}^2 \right); \\
 a_{13} &= \frac{C_0 M}{R} \left((g_{12} - 2g_{22}) R_{1213} g_{12} g_{23}^2 - (g_{12} g_{33} - 2g_{22} g_{33} + 2g_{23}^2) R_{1223} g_{11} g_{33} - \right. \\
 &\quad \left. - (2\Delta g - g_{11} g_{12} g_{33} + g_{12}^2 g_{33}) R_{1323} g_{23} + R_{1212} g_{12} g_{23} g_{33}^2 + \right. \\
 &\quad \left. + R_{1313} g_{12} g_{22} g_{23} g_{33} - R_{2323} g_{11} g_{12} g_{23} g_{33} \right); \\
 a_{22} &= \frac{1}{2} g_{22} + \frac{C_0 M}{R g_{11}} \left(-(2g_{12} g_{33} - 3g_{22} g_{33} + 2g_{23}^2) R_{1223} g_{11} g_{12} g_{23} + (2g_{11} g_{12} g_{23}^2 - g_{11} g_{22} g_{33} + \right. \\
 &\quad \left. + g_{12}^2 g_{22} g_{33}) R_{1323} g_{12} - (g_{11} g_{22} g_{23}^2 - 3g_{11} g_{22} g_{23}^2 g_{33} + 2g_{11} g_{23}^4 - g_{12}^2 g_{22} g_{33}^2) R_{1212} - \right. \\
 &\quad \left. - (-2g_{11} g_{12} g_{22} g_{33} + 2g_{11} g_{12} g_{23}^2 + 2g_{11} g_{22} g_{23}^2 - 2g_{11} g_{22} g_{23}^2 + g_{12}^2 g_{22} g_{33}) R_{1213} g_{23} - \right. \\
 &\quad \left. - ((\Delta g + g_{11} g_{23}^2) g_{12} - g_{11} g_{12} g_{23}^2 - g_{11} g_{22} g_{23}^2 + g_{11} g_{22} g_{23}^2 + g_{12}^2 g_{22} g_{33} - g_{12}^2 g_{23}^2) R_{1313} g_{22} + \right. \\
 &\quad \left. + ((\Delta g + g_{11} g_{23}^2) g_{12} - g_{11} g_{12} g_{23}^2 - g_{11} g_{22} g_{23}^2 + g_{11} g_{22} g_{23}^2 + g_{12}^2 g_{22} g_{33} - g_{12}^2 g_{23}^2) R_{2323} g_{11} \right); \\
 a_{23} &= \frac{1}{2} g_{23} + \frac{C_0 M}{R} \left((g_{22} g_{33} - 2g_{23}^2) R_{1212} g_{23} g_{33} + (g_{22} g_{33} - g_{23}^2) R_{1313} g_{22} g_{23} - \right. \\
 &\quad \left. - (g_{22} g_{33} - g_{23}^2) R_{2323} g_{11} g_{23} + (g_{12} - g_{22}) R_{1323} g_{12} g_{23} g_{33} - \right. \\
 &\quad \left. - (g_{12} g_{33} - 2g_{22} g_{33} + g_{23}^2) R_{1223} g_{12} g_{33} + (g_{12} g_{22} g_{33} - g_{12} g_{23}^2 - 2g_{22} g_{33} + 2g_{22} g_{23}^2) R_{1213} g_{33} \right); \\
 a_{33} &= \frac{1}{2} g_{33} + \frac{C_0 M}{R g_{11}} \left(((\Delta g - g_{11} g_{23}^2) R_{1323} g_{12} g_{33} - (2\Delta g + g_{12}^2 g_{33}) R_{1213} g_{23} g_{33} - \right. \\
 &\quad \left. - (\Delta g g_{12} g_{33} + g_{11} g_{22} g_{23}^2 - 3g_{11} g_{22} g_{23}^2 g_{33} + 2g_{11} g_{23}^4 - g_{12}^2 g_{22} g_{33}^2 + g_{12}^2 g_{23}^2 g_{33}) R_{1313} + \right. \\
 &\quad \left. + R_{1212} \Delta g g_{33}^2 + R_{1223} g_{11} g_{12} g_{23} g_{33}^2 - R_{2323} \Delta g g_{11} g_{33} \right).
 \end{aligned}$$

Таким чином, доведена

Теорема 4. У тривимірних звідних псевдоріманових просторах тензор a_{ij} виражається через компоненти тензора Рімана, компоненти метричного тензора, скалярну кривину та параметрично залежить від однієї константи C_0 .

Розглянемо тривимірний звідний псевдорімановий простір I типу. Аналогічно отримуємо

Наслідок 3. У тривимірних звідних псевдоріманових просторах I типу тензор a_{ij} виражається через компоненти тензора Рімана, компоненти метричного тензора,

скалярну кривину та параметрично залежить від однієї константи C_0 , а самі компоненти мають вигляд:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2} g_{11} + \frac{C_0}{R} \frac{2R_{1213}g_{23} - R_{1212}g_{33} - R_{1313}g_{22} + R_{2323}g_{11}}{2(g_{22}g_{33} - g_{23}^2)}; \\ a_{12} &= \frac{C_0}{R} \frac{R_{1223}g_{23} - R_{1323}g_{22}}{g_{22}g_{33} - g_{23}^2}; \\ a_{13} &= \frac{C_0}{R} \frac{R_{1223}g_{33} - R_{1323}g_{23}}{g_{22}g_{33} - g_{23}^2}; \\ a_{22} &= \frac{1}{2} g_{22} + \frac{C_0}{R} \frac{(2g_{23}^2 - g_{22}g_{33})R_{1212} - 2R_{1213}g_{22}g_{23} + R_{1313}g_{22}^2 - R_{2323}g_{11}g_{22}}{2(g_{22}g_{33} - g_{23}^2)g_{11}}; \\ a_{23} &= \frac{1}{2} g_{23} + \frac{C_0}{R} \frac{R_{1212}g_{23}g_{33} - 2R_{1213}g_{22}g_{33} + R_{1313}g_{22}g_{23} - R_{2323}g_{11}g_{23}}{2(g_{22}g_{33} - g_{23}^2)g_{11}}; \\ a_{33} &= \frac{1}{2} g_{33} + \frac{C_0}{R} \frac{(2g_{23}^2 - g_{22}g_{33})R_{1313} + R_{1212}g_{33}^2 - 2R_{1213}g_{23}g_{33} - R_{2323}g_{11}g_{33}}{2(g_{22}g_{33} - g_{23}^2)g_{11}}. \end{aligned}$$

Розглянемо тривимірний звідний псевдорімановий простір II типу. Аналогічно отримуємо

Наслідок 4. У тривимірних звідних псевдоріманових просторах II типу тензор a_{ij} виражається через компоненти тензора Рімана, компоненти метричного тензора, скалярну кривину та параметрично залежить від однієї константи C_0 , а самі компоненти мають вигляд:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2} g_{11} + \frac{C_0}{R} \frac{R_{1212}g_{33} + R_{1313}g_{22} + R_{1323}g_{12} - R_{2323}g_{11}}{(g_{12} - 2g_{22})g_{33}}; \\ a_{12} &= \frac{1}{2} g_{12} + \frac{C_0}{R} \frac{R_{1323}}{g_{33}}; \\ a_{13} &= \frac{C_0}{R} \frac{R_{1223}g_{11} - R_{1213}g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}; \\ a_{22} &= \frac{1}{2} g_{22} + \frac{C_0}{R} \frac{(g_{12} - g_{22})R_{1313}g_{22} - (g_{12} - g_{22})R_{2323}g_{11} + R_{1212}g_{22}g_{33} + R_{1323}g_{12}g_{22}}{(g_{12} - 2g_{22})g_{11}g_{33}}; \\ a_{23} &= \frac{C_0}{R} \frac{R_{1223}g_{12} - R_{1213}g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}; \\ a_{33} &= \frac{1}{2} g_{33} + \frac{C_0}{R} \frac{(g_{22} - g_{12})R_{1313} - R_{1212}g_{33} - R_{1323}g_{12} + R_{2323}g_{11}}{(g_{12} - 2g_{22})g_{11}}. \end{aligned}$$

5 ВИСНОВКИ

У роботі вдалося дослідити певні типи псевдоріманових просторів. Для звідних псевдоріманових просторів були отримані тотожності, які описують внутрішню геометрію цих просторів, а також доведено, що тензор Річчі та тензор типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, який отримано з тензорної ознаки звідних просторів, комутують.

Також доведено, що для тривимірних звідних псевдоріманових просторів цей тензор типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ виражається як лінійна комбінація метричного тензора та тензора Річчі і, як наслідок, згортка цього тензора з тензором Річчі виражається через цей тензор включаючи скалярну кривину. Розглянуто два типи цих просторів – обидва характеризуються блочно-діагональною структурою матриці метричного тензора, проте перший елемент матриці метричного тензора тривимірного звідного псевдоріманового простору першого типу є функцією лише від першої координати, а інші елементи з блоку рангу два цієї матриці залежать від другої та третьої координат. У другому типі останній елемент матриці метричного тензора залежить лише від третьої координати, а інші елементи з блоку рангу два цієї матриці залежать від першої та другої координат. Для цих типів у загальному випадку та для кожного типу окремо отримано значення для тензора типу $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Також було доведено, що у загальному випадку тривимірні звідні псевдоріманові простори за необхідністю є рекурентними, що автоматично означає їхню Річчі-рекурентність.

Здобуті результати можуть мати застосування у подальших дослідженнях у сфері диференціальної геометрії, загальної теорії відносності та математичного моделювання фізичних явищ.

Література

1. Kiosak, V.A., Kovalova, G.V. Geodesic mappings of quasi-Einstein spaces with a constant scalar curvature, *Mat. Stud.* 2020. 53(2), 212-217. <https://doi.org/10.30970/ms.53.2.212-217>
2. Kiosak, V., Savchenko, A., Kovalova, G. Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I. *Proceedings of the International Geometry Center.* 2020. 13(1), 35-48. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v13i1.1711>
3. D. Doikov and V. Kiosak, On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe, AIP Conference Proceedings 2302, 040001 (2020); <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
4. V. Kiosak, A. Savchenko and L. Makarenko, Invariant transformations that preserve mappings, AIP Conference Proceedings 2522, 120003 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0100787>
5. V. Kiosak, A. Savchenko and L. Kusik. On the properties of Ricci solitons, AIP Conference Proceedings 2522, 120006 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0100792>
6. Kiosak, V., Lesechko, O., Latysh, O. On geodesic mappings of symmetric pairs. *Proceedings of the International Geometry Center*, 2022, 15, 230-238; <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i3-4.2430>
7. Kiosak, V., Latysh, O., Kuzmich, V. (2024). Split curvature. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(3), 232-243; <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i3.2817>
8. O. Lesechko, O. Latysh, A. Kamienieva, Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor, AIP Conference Proceedings 2164, 040002 (2019); <https://doi.org/10.1063/1.5130794>
9. Kiosak V., Lesechko O., Savchenko O. Mappings of Spaces with Affine Connection, 17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT, 2018. Proceedings, Bratislava. 2018. p.563-569.
10. V. Kiosak, A. Savchenko, O. Gudyreva, On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces, AIP Conference Proceedings, 2164, 040001 (2019); <https://doi.org/10.1063/1.5130793>
11. Kiosak, V., Prishlyak, O., Gudyreva, O. (2024). On geodesic mappings of threesymmetric spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(1), 56-64; <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i1.2647>
12. О. Лесечко, А. Соловійов. Конформно-пласкі келерові простори. Дослідження в математиці і механіці. – 2023. – Т. 28, вип. 1–2 (41–42). – С. 47–63; [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305257](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305257)
13. Kiosak, V., Savchenko, A., Latysh, O. Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II, *Proceedings of the International Geometry Center.* 2021, 14(1), 80–91; <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i1.1936>

14. Kiosak, V., Prishlyak, O., Lesechko, O. On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2021. 14(4), 13-26. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i4.2140>
15. Kiosak, V., Kusik, L., Isaiev, V. Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2022. 15(2), 110-120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
16. Fedchenko Yu., Lesechko O. (2021). Special semi-reducible pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*. 14(1), 49-60. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i1.1940>
17. Yu. Fedchenko, I. Ogorodnichuk and A. Ugol'nikov, Pseudo-Riemannian spaces with semireducible metrics, *AIP Conference Proceedings* 2522, 120001 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0100795>.
18. Lesechko O, Shevchenko T. (2021). Pseudo-riemannian spaces with a special Riemann tensor. *Mechanics and Mathematical Methods*. 3 (1). 106–114. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2021-3-1-106-114>

References

1. Kiosak, V.A., Kovalova, G.V. Geodesic mappings of quasi-Einstein spaces with a constant scalar curvature, *Mat. Stud.* 2020. 53(2), 212-217. <https://doi.org/10.30970/ms.53.2.212-217>
2. Kiosak, V., Savchenko, A., Kovalova, G. Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2020. 13(1), 35-48. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v13i1.1711>
3. D. Doikov and V. Kiosak, On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe, *AIP Conference Proceedings* 2302, 040001 (2020); <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
4. V. Kiosak, A. Savchenko and L. Makarenko, Invariant transformations that preserve mappings, *AIP Conference Proceedings* 2522, 120003 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0100787>
5. V. Kiosak, A. Savchenko and L. Kusik. On the properties of Ricci solitons, *AIP Conference Proceedings* 2522, 120006 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0100792>
6. Kiosak, V., Lesechko, O., Latysh, O. On geodesic mappings of symmetric pairs. *Proceedings of the International Geometry Center*, 2022, 15, 230-238; <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i3-4.2430>
7. Kiosak, V., Latysh, O., Kuzmich, V. (2024). Split curvature. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(3), 232-243; <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i3.2817>
8. O. Lesechko, O. Latysh, A. Kamienieva, Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor, *AIP Conference Proceedings* 2164, 040002 (2019); <https://doi.org/10.1063/1.5130794>
9. Kiosak V., Lesechko O., Savchenko O. Mappings of Spaces with Affine Connection, *17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT*, 2018. Proceedings, Bratislava. 2018. p.563-569.
10. V. Kiosak, A. Savchenko, O. Gudyreva, On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces, *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040001 (2019); <https://doi.org/10.1063/1.5130793>
11. Kiosak, V., Prishlyak, O., Gudyreva, O. (2024). On geodesic mappings of threesymmetric spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(1), 56-64; <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i1.2647>
12. Lesechko O., Soloviov A. Conformally flat Kählerian spaces. *Researches in Mathematics and Mechanics*. 2023, 28, 1–2 (41–42), 47–63; [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305257](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305257)
13. Kiosak, V., Savchenko, A., Latysh, O. Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II, *Proceedings of the International Geometry Center*. 2021, 14(1), 80–91; <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i1.1936>
14. Kiosak, V., Prishlyak, O., Lesechko, O. On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2021. 14(4), 13-26. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i4.2140>

15. Kiosak, V., Kusik, L., Isaiev, V. Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2022. 15(2), 110-120.
<https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
16. Fedchenko Yu., Lesechko O. (2021). Special semi-reducible pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*. 14(1), 49-60.
<https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i1.1940>
17. Yu. Fedchenko, I. Ogorodnichuk and A. Ugol'nikov, Pseudo-Riemannian spaces with semireducible metrics, *AIP Conference Proceedings* 2522, 120001 (2022);
<https://doi.org/10.1063/5.0100795>
18. Lesechko O, Shevchenko T. (2021). Pseudo-riemannian spaces with a special Riemann tensor. *Mechanics and Mathematical Methods*. 3 (1). 106–114.
<https://doi.org/10.31650/2618-0650-2021-3-1-106-114>

Лесечко Олександр Васильович

Одеська державна академія будівництва та архітектури,
к.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона 4 Одеса, Україна 65029
vm@odaba.edu.ua

ORCID: 0000-0002-2352-6174

Соловйов Андрій Анатолійович

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова,
аспірант
вул. Дворянська, 2 Одеса, Україна 65026
andrey-solovyov@stud.onu.edu.ua,
ORCID: 0009-0003-7923-6912

Для посилань:

Лесечко О. В., Соловйов А. А. Тривимірні звідні псевдорімановані простори. Механіка та математичні методи, 2025. Т. VII. №. 2. С. 116-132.

For references:

O. Lesechko, A. Soloviov (2025). Three-dimensional reducible pseudo-riemannian spaces. *Mechanics and Mathematical Methods*. VII (2). 116 –132.

Тривимірні звідні псевдорімановані простори © 2025 by Лесечко О. В., Соловйов А. А. is licensed under CC BY 4.0