

ISSN 2618-0650 (Print)  
ISSN 2664-1364 (Online)

---

**Механіка**



**та математичні методи**

---

**Mechanics  
and Mathematical Methods**

**Науковий журнал  
The scientific journal**

**I/2/2019**

УДК 531 : 51-7 (05)  
М55

# МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

Науковий журнал



Засновник і видавець:

**Одеська державна академія будівництва та архітектури**

**Том I  
№2  
2019**

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: Серія КВ №23478–13318 Р від 13.07.2018 р.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
Серія ДК №4515 від 01.04.2013 р.

**М55**      **Механіка та математичні методи** : науковий журнал. — Одеса : ОДАБА, 2019. — Том I. — Вип. №2. — 84 с.

В науковому журналі публікуються статті і огляди за спеціальностями:

- 111 Математика;
- 112 Статистика;
- 113 Прикладна математика;
- 121 Інженерія програмного забезпечення;
- 122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології;
- 124 Системний аналіз;
- 131 Прикладна механіка;
- 192 Будівництво та цивільна інженерія.

---

**Рекомендовано до друку Вченою радою Одеської державної академії будівництва та архітектури, протокол №11 від 20.06.2019 р.**

---

**Адреса:**    редакція журналу «Механіка та математичні методи»  
Одеська державна академія будівництва та архітектури  
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029

**Телефони:** (048)723-23-10, (048)7323402, (048)7298626

**E-mail:** mmm@ogasa.org.ua

**Web:** mmm-journal.com.ua

---

УДК 531 : 51-7 (05)  
М55

ISSN 2618-0650 (Print)  
ISSN 2664-1364 (Online)

Одеська державна академія  
будівництва та архітектури, 2019

---

## Склад редакційної колегії:

**Головний редактор:** Ковров А. В., к.т.н., проф., ректор Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

**Заступники головного редактора:**

Крутій Ю. С., д.т.н., проф., проректор з науково-педагогічної роботи Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Сур'янінов М. Г., д.т.н., проф., завідувач кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

**Відповідальний секретар:** Кіосак В. А., д.ф.-м.н., доц., професор кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

- Бербюк В. Є. д.ф.-м.н., проф., професор кафедри механіки та морських наук, Технічний університет Чалмерса, Гетеборг, Швеція;
- Ватуля Г. Л., д.т.н., проф., професор кафедри будівельної механіки та гідравліки Українського державного університету залізничного транспорту, Харків, Україна;
- Горик О. В., д.т.н., проф., завідувач кафедри загальнотехнічних дисциплін Полтавської державної аграрної академії, Полтава, Україна;
- Карпюк В. М., д.т.н., проф., професор кафедри залізобетонних конструкцій та транспортних споруд Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Куріазопоулос А., к.т.н., доц., професор кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Кода Е., д.т.н., проф., декан факультету будівництва та інженерії середовища Варшавського природничого університету, Варшава, Польща;
- Кононов Ю. М., д.ф.-м.н., проф., в.о. завідувача відділу теорії керуючих систем інституту прикладної математики та механіки НАН України, Слав'янск, Україна;
- Кривий О. Ф., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики Національного університету "Одеська морська академія", Одеса, Україна;
- Круглов В. Є., к.ф.-м.н., проф., декан факультету математики, фізики і інформаційних технологій Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна;
- Кучер М. К., д.т.н., проф., завідувач відділу конструкційних матеріалів інституту проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна;
- Лесечко О. В., к.ф.-м.н., доц., завідувач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Лещенко Д. Д., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри теоретичної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Ляшенко Т. В., д.т.н., проф., професорка кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Максимович О. В., д.т.н., проф., професорка кафедри зварювального виробництва, діагностики та відновлення металоконструкцій Національного університету "Львівська політехніка", Львів, Україна;
- Пастернак Я. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна;
- Пневматікос Н., к.т.н., доц., доцент кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Попов В. Г., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри вищої математики Національного університету "Одеська морська академія", Одеса, Україна;
- Савченко О. Г., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри прикладної математики та економічної кібернетики Херсонського державного аграрного університету, Херсон, Україна;
- Трач В. М., д.т.н., проф., завідувач кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування, Рівне, Україна;
- Шваб'юк В. І., д.т.н., проф., професор кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна.

Технічний редактор: Головата Злата Олександрівна

Лінгвістичний радник з англійської мови: Мар'яно Яніна Георгіївна, к.ф.н, доц.

ІТ підтримка: Вандинський Віктор Юрійович

---

## The composition of the editorial board:

**Chief Editor:** Kovrov A., Ph.D., Professor, Rector of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

**Deputy Chief Editor:**

Krutii Yu., Doctor of Technical Science, Professor, Pro-rector for Research of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

Suryaninov M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

**Assistant Editor:** Kiosak V., Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Professor of Higher Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

- Berbyuk V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor in Mechanical Systems, Division of Dynamics, Department of Mechanics and Maritime Sciences Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden;
- Vatulia G., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Structural Mechanics and Hydraulics Department, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine;
- Goryk O., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Basic Technical Disciplines Department, Poltava State Agrarian Academy, Poltava, Ukraine;
- Karpyuk V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Reinforced Concrete Constructions and Transport Constructions, Odessa, Ukraine;
- Kyriazopoulos A., Ph.D., Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Koda E., Doctor of Technical Science, Professor, Dean of Construction and Environmental Engineering Faculty, University of Life Sciences, Warsaw, Poland;
- Kononov Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Control-system Theory Division, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Slavyansk, Ukraine;
- Kryvyi O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Department of Higher Mathematics Department, National University "Odessa Maritime Academy", Odessa, Ukraine;
- Kruglov V., Ph.D., Professor, Dean of Mathematics, Physics and Information Technology Faculty, Odessa I. I. Mechnikov National University, Odessa, Ukraine;
- Kucher M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Materials Division, G. S. Pisarenko Institute for Problems of Strength, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine;
- Lesechko O., Ph.D., Associate Professor, Head of Higher Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Leshchenko D., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Lyashenko T., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Information Technology and Applied Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Maksymovych O., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Welding Engineering, Diagnostics and Rebuilding of Metal Structures, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine;
- Pasternak Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Applied Mathematics and Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine;
- Pnevmatikos N., Ph.D., Associate Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Popov V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Higher Mathematics Department, National University "Odessa Maritime Academy", Odessa, Ukraine;
- Savchenko O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Applied Mathematics and Economic Cybernetics Department, Kherson State Agrarian University, Kherson, Ukraine;
- Trach V., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Bridges and Tunnels, Strength of Materials and Structural Mechanics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine;
- Shvabyuk V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Engineering Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine.

Technical Editor: Holovata Zlata

Linguistic Adviser in English language: Maryanko Yanina, Ph.D., Associate Professor

IT Support: Vandynskiy Viktor

---

## ЗМІСТ

<b>Кононов Ю. Н., Шевченко В. П., Лимарь А. А.</b> Об устойчивости колебаний прямоугольной пластины в идеальной жидкости .....	6
<b>Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О.</b> Еволюція обертальних рухів твердого тіла, близьких до випадку Лагранжа, під дією нестационарного моменту.....	18
<b>Выровой В. Н., Суханов В. Г.</b> Структурная динамика строительных композитов .....	27
<b>Куреннов С. С., Барахов К. П.</b> Температурні напруження у клейовому з'єднанні. Спрощена двовимірна модель.....	36
<b>Yu. Krutii, M. Surianinov, V. Osadchiy</b> The exact solution of the differential equation of the compelled cross vibrations of the core with any continuous parameters.....	46
<b>Вашпанова Н. В., Подоусова Т. Ю., Шевченко Т. І.</b> Умови Сен-Венана для псевдоріманових просторів.....	62
<b>Кондратьева Н. А., Гундина М. А.</b> Особенности формирования цифровой компетенции в рамках дисциплин механика и математика.....	75

---

## CONTENT

<b>Yu. Kononov, V. Schevchenko, A. Lymar</b> On the stability of oscillations of a rectangular plate in an ideal liquid .....	6
<b>L. Akulenko, D. Leshchenko, T. Kozachenko</b> Evolution of rotational motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque of forces.....	18
<b>V. Vyrovoy, V. Sukhanov</b> Structural dynamic of building composites .....	27
<b>S. Kurennov, K. Barakhov</b> The temperature stresses in the adversive joint. A simplified two-dimensional model.....	36
<b>Yu. Krutii, M. Surianinov, V. Osadchiy</b> The exact solution of the differential equation of the compelled cross vibrations of the core with any continuous parameters.....	46
<b>N. Vashpanova, T. Podousova, T. Shevchenko</b> Saint-Venant conditions of pseudo-riemannian spaces.....	62
<b>N. Kandratsyeva, M. Hundzina</b> Features of formation of digital competence when reading disciplines mechanics and mathematics .....	75

УДК 533.6.013.42

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Кононов Ю. Н.<sup>1</sup>, Шевченко В. П.<sup>2</sup>, Лимарь А. А.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики и механики Национальной академии наук Украины

<sup>2</sup>Донецкий национальный университет имени Василя Стуса

<sup>3</sup>Николаевский национальный аграрный университет

**Аннотация:** В линейной постановке рассмотрена плоская гидроупругая задача о колебании защемленной тонкой изотропной прямоугольной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости в прямоугольном канале с жесткими боковыми стенками и жестким верхом и дном. Пластина подвержена растягивающим или сжимающим усилиям в срединной поверхности. Задача о плоских совместных колебаниях пластины и жидкости представлена системой интегро-дифференциальных уравнений с граничными условиями закрепления пластины и условием сохранения объема несжимаемой жидкости. При решении краевой задачи на собственные значения форма прогиба пластины предоставлена суммой фундаментальных решений однородного уравнения для пластины и частного решения неоднородного уравнения в виде разложения по собственным функциям колебаний идеальной жидкости в прямоугольном канале. Получено в виде определителя четвертого порядка частотное уравнение свободных совместных колебаний пластины и жидкости и проведено его упрощение. Показано, что оно распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты свободных колебаний (нечетные и четные частоты) и может быть представлено в единой форме для этих частот в виде бесконечного ряда. С учетом двух членов ряда выписано приближенное частотное уравнение (учет одного члена ряда не содержал уравнения). Из условия положительности квадрата частоты получены приближенные условия устойчивости колебаний пластины и жидкости. Эти условия не зависят от глубин заполнения жидкостей и массы пластины. При действии растягивающих усилий условия устойчивости всегда будут выполнены, а в случае сжимающих усилий оценено влияние механических параметров системы на устойчивость колебаний пластины и жидкости. Удалось получить точные условия устойчивости. Показано, что приближенные условия устойчивости с достаточной для практики точностью совпадают с точными.

**Ключевые слова:** гидроупругость, упругая изотропная прямоугольная пластина, идеальная несжимаемая жидкость, прямоугольный канал, плоские колебания, устойчивость.

## ON THE STABILITY OF OSCILLATIONS OF A RECTANGULAR PLATE IN AN IDEAL LIQUID

Yu. Kononov<sup>1</sup>, V. Schevchenko<sup>2</sup>, A. Lymar<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine

<sup>2</sup>Vasyl' Stus Donetsk National University

<sup>3</sup>Mykolayiv National Agrarian University

**Abstract:** A linear hydroelastic problem of oscillating a clamped thin isotropic rectangular plate separating ideal incompressible fluids in a rectangular channel with rigid side walls and a rigid top and bottom is considered in the linear formulation. The plate is subject to tensile or compressive forces in the middle surface. The problem of plane joint oscillations of a plate and a fluid is represented by a system of integro-differential equations with boundary conditions for fixing the plate and the condition for maintaining the volume of an incompressible fluid. When solving the eigenvalue boundary value problem, the plate deflection form is provided by the sum of the fundamental solutions of the homogeneous equation for the plate and the particular solution of the inhomogeneous equation in the



form of expansion in eigenfunctions of oscillations of an ideal fluid in a rectangular channel. The frequency equation of free joint oscillations of a plate and a liquid was obtained in the form of a fourth-order determinant and was simplified. It is shown that it splits into two equations describing asymmetric and symmetric frequencies of free oscillations (odd and even frequencies) and can be represented in a single form for these frequencies in the form of an infinite series. Taking into account the two terms of the series, an approximate frequency equation was written out (accounting for one term of the series did not contain an equation). From the condition of the positivity of the frequency square, approximate conditions for the stability of the plate and fluid oscillations are obtained. These conditions do not depend on the depth of filling of liquids and the mass of the plate. Under the action of tensile forces, the stability conditions will always be fulfilled, and in the case of compressive forces, the influence of the mechanical parameters of the system on the stability of the plate and fluid oscillations is estimated. It was possible to obtain exact conditions of stability. It is shown that the approximate stability conditions with accuracy sufficient for practice coincide with the exact ones.

**Keywords:** hydroelasticity, elastic isotropic rectangular plate, ideal incompressible fluid, rectangular channel, flat oscillations, stability.



## 1 ВВЕДЕНИЕ

Для безопасности транспортировки и хранения жидких грузов большие резервуары разделяют на отсеки. В этой связи возникает задача о влиянии упругих и массовых характеристик пластин, разделяющих жидкости, на частотный спектр и устойчивость колебаний механической системы. Наиболее актуальна эта проблема возникает при работе и охлаждении ядерных реакторов. В статье рассмотрена модельная задача, когда отсек в виде жесткого прямоугольного канала с идеальной несжимаемой жидкостью горизонтально разделяется изотропной прямоугольной пластиной на два отсека.

## 2 АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРНЫХ ДАННЫХ И ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

На основании единого лагранжевого подхода задача о колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале с учетом свободной поверхности у верхней жидкости, по-видимому, впервые была рассмотрена в [1-2]. В работе [3] эта задача была рассмотрена на основании эйлера подхода. Наиболее полное исследование свободных колебаний мембраны на свободной поверхности жидкости в прямоугольном канале было проведено в статье [4]. В работе [5] эта задача была обобщена на случай упругого дна и двухслойной жидкости с мембранами на свободной и внутренней поверхностях. Приближенные условия устойчивости колебаний прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с одним и с двумя упругими основаниями выведены в [7-8]. В статье [8] удалось получить точные условия устойчивости колебаний пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале. Колебания двухслойной жидкости в упругом прямоугольном канале рассмотрены в [9].

Условия устойчивости колебаний упругих пластин, разделяющих многослойную идеальную жидкость в жестком цилиндрическом резервуаре произвольного поперечного сечения с жестким плоским дном получены в [10].

Большой цикл работ посвящен гидроупругим колебаниям идеальной жидкости в круговых и коаксиальных цилиндрах с жесткими и упругими основаниями. Это работы [11-15] и мн. др. В статье [11] выведено частотное уравнение осесимметричных колебаний тяжелой двухслойной идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре с упругими верхним и нижним основаниями в виде заземленных кольцевых пластин. Работа [12] посвящена исследованию частотных уравнений несимметричных и симметричных собственных колебаний тяжелой идеальной двухслойной жидкости в жестком круговом цилиндрическом резервуаре с упругими основаниями в виде круговых заземленных пластин. На примере однородной жидкости со свободной поверхностью и упругим дном в виде мембраны аналитически и численно исследован частотный спектр. Симметричные и несимметричные колебания пластины или мембраны на свободной поверхности идеальной жидкости в круговом резервуаре с абсолютно жестким дном подробно рассмотрены в [13]. Несимметричные колебания круговой пластины на свободной поверхности идеальной жидкости в круговом цилиндре исследованы в [14]. В статье [15] рассмотрены колебания идеальной жидкости в круговом цилиндрическом резервуаре с одинаковыми упругими основами в виде круговых пластин. В ней предложено аналитический метод, основанный на разложении в ряд Фурье-Бесселя и методе Рэлея-Ритца.

В данной статье продолжены исследования, начатые в работах [1-8]. Выведено частотное уравнение совместных колебаний прямоугольной пластины и идеальной жидкости, показана возможность упрощения этого уравнения, получены

приближенные и точные условия устойчивости свободных колебаний пластины и жидкости.

### 3 ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

В линейной постановке рассмотреть модельную гидроупругую задачу о плоских колебаниях защемленной изотропной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости в жестком прямоугольном канале. Пластина подвержена растягивающим или сжимающим усилиям в срединной поверхности. Вывести уравнения совместных колебаний пластины и жидкости. Получить и исследовать частотного уравнение свободных колебаний. Выписать приближенные условия устойчивости колебаний пластины и жидкости и уточнить их.

### 4 РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Рассмотрим плоские колебания упругой прямоугольной пластины горизонтально разделяющей идеальные несжимаемые жидкости плотности  $\rho$  в жестком прямоугольном канале шириной  $b$  ( $b = 2a$ ). Пластина обладает постоянной изгибной жесткостью  $D$  и подвержена растягивающим ( $T > 0$ ) или сжимающим ( $T < 0$ ) усилиям интенсивности  $T$  в срединной поверхности. Контуры пластины защемлены. Верхняя жидкость заполняет сосуд до глубин  $h_1$ , а нижняя жидкость до глубины  $h_2$ .

Систему координат  $Oxuz$  расположим так, чтобы плоскость  $Oxy$  находилась на невозмущенной срединной поверхности пластины, ось  $Oy$  была направлена вдоль оси канала, а ось  $Oz$  – противоположно вектору ускорения силы тяжести  $\vec{g}$ . Колебания пластины и жидкости будем рассматривать в линейной постановке, считая совместные колебания пластины и жидкости безотрывными, а движения жидкостей потенциальными.

Уравнения плоских колебаний упругой пластины и жидкости имеют вид, аналогичный [6-8]

$$k_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \rho \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right) + Q \text{ при } z = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \text{ при } z = 0; \quad (3)$$

$$W|_{\gamma_j} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x}|_{\gamma_j} = 0, \quad (j = 1, 2); \quad (4)$$

$$\int_{-a}^a W dx = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}|_{\gamma_i} = 0 \quad (i, j = 1, 2); \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h_1, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -h_2. \quad (7)$$

Здесь  $k_0 = \rho_0 h_0$ ;  $W(x, t)$ ,  $\rho_0$ ,  $h_0$  – соответственно нормальный прогиб, плотность и толщина пластины;  $\Phi_i(x, z, t)$  – потенциал скоростей  $i$ -ой жидкости ( $i=1, 2$ );  $Q$  – произвольная функция времени. Для удобства записи введено обозначение контуров пластины через  $\gamma_j$  (индекс  $j=1$  соответствует контуру  $x=-a$ , а  $j=2$  –  $x=a$ ).

Представим функции  $\Phi_i(x, z, t)$  в виде рядов Фурье по собственным функциям  $\psi_n(x)$

$$\Phi_i(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{in}(t)e^{k_n z} + B_{in}(t)e^{-k_n z}] \psi_n(x) \quad (i=1, 2), \quad (9)$$

где функции  $\psi_n(x) = \cos k_n(x+a)$ , соответствующие им собственные числа  $k_n = \pi n/2a$ .

Представление функций  $\Phi_i(x, z, t)$  в виде (9) позволяет удовлетворить уравнению (2) и граничным условиям (6).

Подставив ряды (9) в (3) и (7) и, воспользовавшись ортогональностью функций  $\psi_n$ , получаем линейную систему уравнений относительно неизвестных  $A_{in}$ ,  $B_{in}$  и  $W_n$ , которой имеет решение:

$$\begin{aligned} A_{1n} &= -\frac{\dot{W}_n e^{-\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}, \quad B_{1n} = -\frac{\dot{W}_n e^{-\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}; \\ A_{2n} &= \frac{\dot{W}_n e^{\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}, \quad B_{2n} = \frac{\dot{W}_n e^{-\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\kappa_{in} = h_i k_n$ ,

$$W_n = \frac{1}{N_n^2} \int_{-a}^a W \psi_n dx, \quad N_n^2 = \int_{-a}^a \psi_n^2 dx = a. \quad (11)$$

С учетом соотношений (9)-(11) уравнение (1) примет вид:

$$k_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \ddot{W}_n}{k_n} \psi_n + Q, \quad (12)$$

где  $a_n = \rho(\coth \kappa_{1n} + \coth \kappa_{2n}) = \rho \sinh \kappa_{1n} / \sinh \kappa_{1n} \sinh \kappa_{2n}$ ,  $\kappa_n = k_n(h_1 + h_2)$ .

Таким образом, совместные колебания упругой пластины и жидкости находятся из системы интегро-дифференциальных уравнений (11)-(12), граничных условий (4), условий сохранения объема несжимаемой жидкости (5) и заданных начальных условий.

**Собственные частоты совместных колебаний упругой пластины и жидкости.**

Для нахождения собственных частот совместных колебаний упругой пластины и жидкости положим

$$W(x, t) = w(x) e^{i\omega t}, \quad Q = C_0 e^{i\omega t}. \quad (13)$$

Подставив (13) в (11) - (12), в граничные условия (4) и условия (5), получим:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - P \frac{d^2 w}{dx^2} - q w = \frac{\omega^2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n w_n}{k_n} \psi_n + C; \quad (14)$$

$$w_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a w \psi_n dx; \quad (15)$$

$$\int_{-a}^a w dx = 0; \tag{16}$$

$$w|_{\gamma_j} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{\gamma_j} = 0, \quad (j=1,2). \tag{17}$$

Здесь  $P=T/D$ ,  $q=k_0\omega^2/D$ ,  $C=C_0/D$ .

Решение уравнения (14) будем искать в виде общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного

$$w = \sum_{k=1}^4 A_k^0 w_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \psi_n + w_0, \tag{18}$$

где  $w_k^0$  ( $k=\overline{1,4}$ ) фундаментальная система решений однородного уравнения

$$\frac{d^4 w_k^0}{dx^4} - P \frac{d^2 w_k^0}{dx^2} - q w_k^0 = 0. \tag{19}$$

Здесь  $A_k^0$  и  $\tilde{C}_n$  и  $w_0$  неизвестные константы.

Подставив (18) в уравнение (14) и, воспользовавшись соотношениями  $d^2 \psi_n / dx^2 = -k_n^2 \psi_n$ ,  $d^4 \psi_n / dx^4 = -k_n^4 \psi_n$ , найдем константу  $\tilde{C}_n$

$$\tilde{C}_n = \frac{\omega^2 a_n w_n}{k_n d_n}, \tag{20}$$

где  $d_n = (Dk_n^2 + T)k_n^2 - k_0\omega^2$ .

Подставив (18) в (15) и, принимая во внимание (20), получим выражение для  $w_n$

$$w_n = \frac{k_n d_n}{k_n d_n - \omega^2 a_n} \sum_{k=1}^4 A_k^0 E_{kn}^0. \tag{21}$$

Здесь

$$E_{kn}^0 = \frac{1}{a} \int_{-a}^a w_k^0 \psi_n dx. \tag{22}$$

С учетом (16), (20) и (21) окончательное выражение для формы прогиба пластины  $w$  примет вид

$$w = \sum_{k=1}^4 \left( w_k^0 - \tilde{w}_k^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n E_{kn}^0}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} \psi_n \right) A_k^0, \tag{23}$$

где  $\tilde{w}_k^0 = 1/2 a \int_{-a}^a w_k^0 dx$ ,  $\tilde{a}_n = a_n + k_n k_0$ ,  $\tilde{d}_n = (Dk_n^2 + T)k_n^2$ .

Воспользовавшись разложением функций  $w_k^0$  в ряд по полной и ортогональной системе функций  $\psi_n$ , условием  $\int_{-a}^a w_n dx = 0$  и представлением (22), выражение (23) можно переписать так

$$w = -\sum_{k=1}^4 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \psi_n \right) A_k^0. \quad (24)$$

Здесь  $\beta_n = k_n d_n / (\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n)$ .

В формулу (24) входит четыре неизвестные константы  $A_k^0$ . Из граничных условий закрепления пластины (17) имеем четыре линейных однородных уравнений относительно  $A_k^0$ . Из равенства нулю определителя этой системы следует частотное уравнение собственных совместных колебаний упругой пластины и жидкости

$$\left\| \|C_{qk}\|_{q,k=1}^4 \right\| = 0, \quad (25)$$

где

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0, \quad C_{2k} = C_{1k}^0, \quad C_{jk}^0 = \left. \frac{dw_k^0}{dx} \right|_{y_j}, \quad C_{3k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0 (-1)^n, \quad C_{4k} = C_{2k}^0, \quad (k = \overline{1,4}). \quad (26)$$

Таким образом, рассматриваемая задача имеет бесконечный дискретный спектр собственных значений  $\omega_m^2$ , являющихся корнями характеристического уравнения (25), а соответствующие им собственные функции  $w_m(x)$  образуют полную и ортогональную систему функций на отрезке  $[-a, a]$  ( $m = \overline{1, \infty}$ ) [8].

Следует отметить, что при определенных соотношениях параметров механической системы частотное уравнение (25) может не иметь положительных корней, т.е. плоская форма равновесия упругой пластины может быть неустойчивой.

**Упрощение частотного уравнения.** Проведем упрощение частотного уравнения (25). Для этого вычислим коэффициенты  $E_{kn}^0$ . Так как  $q > 0$ , то фундаментальная система решений уравнения (19) и коэффициенты  $E_{kn}^0$  примут вид:

$$\begin{aligned} w_k^0 &= \{ \sinh \tilde{p}_1 x, \cosh \tilde{p}_1 x, \sinh \tilde{p}_2 x, \cosh \tilde{p}_2 x \}; \\ E_{1n}^0 &= \frac{\tilde{p}_1 \cosh \tilde{p}_1^*}{a(k_n^2 + \tilde{p}_1^2)} [(-1)^n - 1], \quad E_{2n}^0 = \frac{\tilde{p}_1 \sinh \tilde{p}_1^*}{a(k_n^2 + \tilde{p}_1^2)} [(-1)^n + 1]; \\ E_{3n}^0 &= \frac{\tilde{p}_2 \cosh \tilde{p}_2^*}{a(k_n^2 - \tilde{p}_2^2)} [(-1)^n - 1], \quad E_{4n}^0 = \frac{\tilde{p}_2 \sinh \tilde{p}_2^*}{a(k_n^2 - \tilde{p}_2^2)} [(-1)^n + 1], \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\tilde{p}_{1,2}^2 = \pm P/2 + \sqrt{P^2/4 + q}$ ,  $\tilde{p}_l^* = a\tilde{p}_l$ , ( $l = 1, 2$ ).

Коэффициенты  $C_{qk}$  согласно (26) и (27) запишутся так:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, \quad C_{12} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{2,2m}^0, \quad C_{13} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, \quad C_{14} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{4,2m}^0; \\ C_{21} &= \tilde{p}_1 \cosh \tilde{p}_1^*, \quad C_{22} = -\tilde{p}_1 \sinh \tilde{p}_1^*, \quad C_{23} = \tilde{p}_2 \cosh \tilde{p}_2^*, \quad C_{24} = -\tilde{p}_2 \sinh \tilde{p}_2^*; \\ C_{31} &= -C_{11}, \quad C_{32} = C_{12}, \quad C_{33} = -C_{13}, \quad C_{34} = C_{14}; \\ C_{41} &= C_{21}, \quad C_{42} = -C_{22}, \quad C_{43} = -C_{23}, \quad C_{44} = -C_{24}. \end{aligned}$$

Проводя преобразования со строками и столбцами определителя уравнения (25), приводим его к блочному виду с нулевыми двумя блоками. В результате получим уравнение

$$\left( \tilde{p}_2 \cos \tilde{p}_2^* \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0 - \tilde{p}_1 \cosh \tilde{p}_1^* \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0 \right) \times \\ \times \left( \tilde{p}_1 \sinh \tilde{p}_1^* \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{4,2m}^0 - \tilde{p}_2 \sin \tilde{p}_2^* \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{2,2m}^0 \right) = 0. \quad (28)$$

Уравнение (28) распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты.

С учетом соотношений (27) и равенства  $(k_n^2 + \tilde{p}_1^2)(k_n^2 - \tilde{p}_2^2) = (1/D)d_n$  выражения  $\tilde{p}_2 \cos \tilde{p}_2^* E_{1,2m-1}^0 - \tilde{p}_1 \cosh \tilde{p}_1^* E_{3,2m-1}^0$  и  $-\tilde{p}_1 \sinh \tilde{p}_1^* E_{4,2m}^0 - \tilde{p}_2 \sin \tilde{p}_2^* E_{2,2m}^0$  примут вид:

$$\tilde{p}_2 \cos \tilde{p}_2^* E_{1,2m-1}^0 - \tilde{p}_1 \cosh \tilde{p}_1^* E_{3,2m-1}^0 = -\frac{2}{a} \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \cosh p_1^* \cos p_2^* \frac{\tilde{p}_2^2 - \tilde{p}_1^2}{d_{2m-1}} D; \\ -\tilde{p}_1 \sinh \tilde{p}_1^* E_{4,2m}^0 - \tilde{p}_2 \sin \tilde{p}_2^* E_{2,2m}^0 = \frac{2}{a} \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \sinh \tilde{p}_1^* \sin \tilde{p}_2^* \frac{\tilde{p}_1^2 - \tilde{p}_2^2}{d_{2m}} D.$$

Подставив вычисленные выражения в (28) будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} = 0. \quad (29)$$

Таким образом, частотное уравнение (25) распадается на нечетные и четные частоты и может быть записано в единой форме для этих частот. При  $n = 2m - 1$  уравнение (29) описывает нечетные частоты, а при  $n = 2m$  – четные частоты.

Левая часть уравнения (29) является монотонно возрастающей функцией параметра  $\omega^2$  на интервале  $(k_n \tilde{d}_n / \tilde{a}_n, k_{n+1} \tilde{d}_{n+1} / \tilde{a}_{n+1})$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), принимающая на нем значения от  $-\infty$  до  $\infty$ . Следовательно, между двумя последовательными значениями  $k_n \tilde{d}_n / \tilde{a}_n$  лежит только один корень уравнения (29). Этим заранее определяются интервалы, в которых находятся собственные частоты.

**Устойчивость колебаний упругой пластины и жидкости.** Если в ряде уравнения (29) удержать два члена, то из неравенства  $\omega^2 > 0$  следует условие устойчивости плоской формы равновесия пластины:  $\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 > 0$ .

Для нечетных и четных форм колебаний оно соответственно примет вид, аналогичный [8]:

$$2,05\pi^2 D/a^2 + T > 0 \quad (n = 1, 3), \quad (30)$$

$$3,40\pi^2 D/a^2 + T > 0 \quad (n = 2, 4). \quad (31)$$

Из неравенств (30)-(31) следует, что при действии растягивающих усилий или при их отсутствии ( $T \geq 0$ ) они всегда будут выполнены. Неустойчивость может возникнуть только при действии сжимающих усилий ( $T < 0$ ). Условия устойчивости (30)-(31) не зависят от глубин заполнения жидкостей и массы пластины. Из этих условий видно, что для устойчивости несимметричных колебаний нужно значительно большая изгибная жесткость, чем для симметричных. Неравенства (30)-(31) можно уточнить с учетом трех и более членов ряда, но при этом придется воспользоваться условиями положительности корней полиномов  $n$ -ой степеней, что значительно усложнит аналитические исследования.

Для нахождения критических значений механических параметров при которых происходит потеря устойчивости, по аналогии с работой [8], в частотном уравнении (29) положим  $\omega^2 = 0$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(Dk_n^2 + T)k_n^2} = 0. \quad (32)$$

Уравнение (32) можно переписать так

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 - \beta^2 n^2} = 0. \quad (33)$$

Здесь  $\beta^2 = 4\tilde{T}a^2 / D\pi^2 > 0$ ,  $\tilde{T} = -T > 0$ .

Числовые ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/[n^2(n^2 - \beta^2)]$  для нечетных и четных значений  $n$  имеют представление:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2 [(2m-1)^2 - \beta^2]} = \pi^4 \frac{\tan x - x}{32x^3}; \quad (34)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^2 [(2m)^2 - \beta^2]} = -\pi^4 \frac{x^2 + 3x \coth x - 3}{96x^4}, \quad (35)$$

где  $x = \pi\beta/2$ .

Первый корень уравнения (33) при  $n = 2m - 1$  с учетом (34) имеет вид  $x = 4,49341$  из которого следует следующее уточненное условие устойчивости

$$D > 0,04953\tilde{T}a^2. \quad (36)$$

Приближенное значение условия устойчивости, выписанное из условия (30), запишется так:

$$D > 0,04943\tilde{T}a^2. \quad (37)$$

Следует отметить хорошую близость приближенного значения и точного.

Первый корень уравнения (33) при  $n = 2m$  с учетом (35) имеет вид  $x = 5,76346$  из которого следует следующее уточненное условие устойчивости

$$D > 0,03011\tilde{T}a^2. \quad (38)$$

Приближенное значение условия устойчивости, выписанное из условия (31) запишется так:

$$D > 0,02980\tilde{T}a^2. \quad (39)$$

Также следует отметить хорошую близость приближенного значения и точного.

Из точных и приближенных условий устойчивости (36)-(37) и (38)-(39) следует, что учет двух членов ряда дает достаточно хорошую для практики точность.

## 5 ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ

Совместные колебания упругой пластины и жидкости находятся из системы интегро-дифференциальных уравнений (11) - (12), граничных условий (4), условий сохранения объема несжимаемости жидкости (5) и заданных начальных условий.

Частотное уравнение собственных совместных колебаний упругой пластины и жидкости (25) представлено в виде определителя четвертого порядка. Проведено упрощение этого уравнения. Показано, что оно распадается на два уравнения, описывающие несимметричные и симметричные колебания (нечетные и четные частоты) и может быть представлено в единой форме (29) для этих частот.



С учетом двух членов ряда в уравнении (29) получено приближенное частотное уравнение. Из неравенства  $\omega^2 > 0$  выписано приближенные условия устойчивости колебаний пластины и жидкости (30)-(31). Эти условия не зависят от глубин заполнения жидкостей и массы пластины. Из них видно, что для устойчивости несимметричных колебаний нужна значительно большая изгибная жесткость, чем для симметричных. В случае действия растягивающих усилий условия устойчивости (30)-(31) будут всегда выполнены, а в случае сжимающих усилий – оценено влияние механических параметров системы на устойчивость колебаний пластины. Удалось получить точные условия устойчивости. Из сравнения точных и приближенных условий следует, что учет двух членов ряда дает достаточно хорошую для практики точность.

## 6 ВЫВОДЫ

В линейной постановке рассмотрена гидроупругая задача о плоских колебаниях заземленной изотропной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости в жестком прямоугольном канале. Пластина подвержена растягивающим или сжимающим усилиям в срединной поверхности. Выведено интегро-дифференциальное уравнение совместных колебаний пластины и жидкости. Получено и проведено упрощение частотного уравнения свободных колебаний пластины и жидкости. Показано, что оно распадается на два уравнения, описывающие несимметричные и симметричные колебания (нечетные и четные частоты) и может быть представлено в единой форме для этих частот. Выписаны приближенные условия устойчивости колебаний пластины и жидкости. Показано, что в случае действия растягивающих усилий они всегда будут выполнены, в случае сжимающих усилий оценено влияние механических параметров системы на устойчивость колебаний пластины и жидкости. Удалось получить точные условия устойчивости. Показано хорошее совпадение приближенных и точных условий устойчивости.

Исследования выполнены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки, проект № 0119U100042.

## Литература

1. Ильгамов М. А. Об устойчивости упругой пластины между жидкостями разной плотности / М. А. Ильгамов, Ж. М. Сахабутдинов. Изб. проблемы прикл. механики. Сб. статей к шестидесятилетию акад. Н. Челомея – М.: Машиностроение, 1974. – С. 341–346.
2. Ильгамов М. А. Введение в нелинейную гидроупругость / М. А. Ильгамов – М.: Наука, 1991. – 200 с.
3. Кононов Ю. Н. Свободные колебания двухслойной жидкости, разделенной упругой пластинкой в прямоугольном канале / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Теор. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 170–176.
4. Троценко В. А. Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности / В.А. Троценко // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, №8. – С.74–80.
5. Кононов Ю. Н. Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Прикл. гидромеханіка. – 2008. – №1. – С. 33–38.
6. Кононов Ю. Н. О колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с одним упругим основанием / Ю. Н. Кононов, А. А. Лимарь // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць. – 2017. – Вип. 26. – С. 79–96.
7. Кононов Ю. Н. Колебания прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с упругими основаниями / Ю. Н. Кононов, А. А.



- Лимарь // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2017. – №1. – С. 190–204.
8. Kononov Yu. N. On the update of the conditions of the stability of vibrations of the plate separating ideal liquids in a rectangular channel with hard foundations / Yu. N. Kononov, A. A. Lyamar // Intern. Journal of Mechanical Engineering and Information Technology. – 2018. – Vol. 06, Issue 1. – P. 1755–1760.
  9. Amaouche M. Coupled frequencies of a rectangular hydroelastic system with two fluids / M. Amaouche, B. Meziani // Meccanica. – 2012. – 47. – P. 71–83.
  10. Шевченко В. П. Об устойчивости упругих пластинок, разделяющих многослойную идеальную жидкость / В. П. Шевченко, Ю. Н. Кононов // Актуальные аспекты физико-механических исследований. Механика. – 2007. – С. 348–361.
  11. Kononov Yu. M. Axially symmetric vibrations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical vessel / Yu. M. Kononov, V. P. Shevchenko, Yu. O. Dzhukha // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – Vol. 240, №1, July. – P. 98–112.
  12. Кононов Ю. М. Коливання двошарової ідеальної рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з пружними основами / Ю. М. Кононов, Ю. О. Джуха // Нелінійні коливання. – 2018. – т. 21, №4. – С. 496–513.
  13. Bauer H. F. Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover / H. F. Bauer // J. Sound Vib. – 1995. – 180, №5. – P. 689–704.
  14. Jeong K.-H. Free vibration of two identical circular plates coupled with bounded fluid / K.-H. Jeong // J. Sound Vib. – 2003. – 260, №4. – P. 653–670.
  15. Tariverdilo S. Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid / S. Tariverdilo, M. Shahmardani, J. Mirzapour, R. Shabani // Appl. Math. Model. – 2013. – 37, №1–2. – P. 228–239.

## References

1. П'гамов, М. А., Сакхатудінов, З. М. (1974). Об устойчивости упругой пластины между жидкостями разной плотности. М.: Mashynostroenie, 341–346.
2. П'гамов, М. А. (1991). Введение в нелинейную гидродинамику. М.: Наука, 200.
3. Kononov, Yu. N., Tatarenko, E. A. (2002). Svobodnye kolebaniya dvukhsloynnoy zhidkosti, razdelennoy uprugoy plastinkoy v pryamougol'nom kanale. Teor. i prikl. mekhanika, 36, 170–176.
4. Trotsenko, V. A. (1995). Svobodnye kolebaniya zhidkosti v pryamougol'nom kanale s uprugoy membranoy na svobodnoy poverkhnosti. Prikl. mekhanika, 31, 8, 74–80.
5. Kononov, Yu. N., Tatarenko, E. A. (2008). Svobodnye kolebaniya uprugikh membran i dvukhsloynnoy zhidkosti v pryamougol'nom kanale s uprugim dnom. Prikl. gidromekhanika, 1, 33–38.
6. Kononov, Yu. N., Limar, A. A. (2017). O kolebanii pryamougol'noy plastiny, razdelyayushchey ideal'nye zhidkosti raznoy plotnosti v pryamougol'nom kanale s odnim uprugim osnovaniem. Problemi obchislyval'noi mekhaniki i mitsnosti konstruktsiy: zbirnik naukovikh prats', 26, 79–96.
7. Kononov, Yu. N., Limar, A. A. (2017). Kolebaniya pryamougol'noy plastiny, razdelyayushchey ideal'nye zhidkosti raznoy plotnosti v pryamougol'nom kanale s uprugimi osnovaniami. Visnik Zaporiz'kogo natsional'nogo universitetu. Fiziko-matematichni nauki, 1, 190–204.
8. Kononov, Yu. N., Lyamar, A. A. (2018). On the update of the conditions of the stability of vibrations of the plate separating ideal liquids in a rectangular channel with hard foundations. Intern. Journal of Mechanical Engineering and Information Technology, 06, Issue 1, 1755–1760.
9. Amaouche, M., Meziani, B. (2012). Coupled frequencies of a rectangular hydroelastic system with two fluids. Meccanica, 47, 71–83.
10. Shevchenko, V. P., Kononov, Yu. N. (2007) Ob ustoychivosti uprugikh plastinok, razdelyayushchikh mnogoslounnyu ideal'nyu zhidkost'. Aktual'nye aspekty fiziko-mekhanicheskikh issledovaniy. Mekhanika. Kiev: Nauk. dumka, 348–361.
11. Kononov, Yu. M., Shevchenko, V. P., Dzhukha, Yu. O. (2019). Axially symmetric vibrations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical vessel. Journal of Mathematical Sciences, 240, №1, July, 98–112.
12. Kononov, Yu. M., Dzhukha, Yu. O. (2018). Kolivannya dvoшarovoї ideal'noї ridini v zhorstkomu tsilindrichnomu rezervuari z pruzhnimi osnovami. Neliniyni kolivannya, 21, №4, 496–513.

13. Bauer, H. F. (1995). Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover. *J. Sound Vib.*, 180, №5, 689–704.
14. Jeong, K.-H. (2003). Free vibration of two identical circular plates coupled with bounded fluid. *J. Sound Vib.*, 260, №4, 653–670.
15. Tariverdilo, S., Shahmardani, M., Mirzapour, J., Shabani, R. (2013). Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid. *Appl. Math. Model.*, 37, №1–2, 228–239.

**Кононов Юрий Никитович**

Институт прикладной математики и механики Национальной академии наук, д.ф.-м.н., профессор  
ул. Добровольского, 1 Славянск, Украина 84100  
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-1609-0253

**Шевченко Владимир Павлович**

Донецкий национальный университет имени Василя Стуса, д.ф.-м.н., академик НАН Украины,  
профессор  
ул. 600-летия, 21 Винница, Украина 21021  
v.shevchenko@donnu.edu.ua  
ORCID: 0000-0001-7092-0492

**Лимарь Александр Александрович**

Николаевский национальный аграрный университет, к.ф.-м.н., ассистент,  
ул. Георгия Гонгадзе, 9 Николаев, Украина 54020  
aleksandr1402a@mail.ua  
ORCID: 0000-0002-0301-7313

*Для посилань:*

Кононов Ю. М. Об устойчивости колебаний прямоугольной пластины в идеальной жидкости / Ю. Н. Кононов, В. П. Шевченко, А. А. Лимарь // Механіка та математичні методи. – 2019. – №2. – С. 6-17.

*For references:*

Kononov, Yu., Schevchenko, V., Lyumar, A. (2019). On the stability of oscillations of a rectangular plate in an ideal liquid. *Mechanics and Mathematical Methods*, 2, 6-17.

УДК 531.383

## ЕВОЛЮЦІЯ ОБЕРТАЛЬНИХ РУХІВ ТВЕРДОГО ТІЛА, БЛИЗЬКИХ ДО ВИПАДКУ ЛАГРАНЖА, ПІД ДІЄЮ НЕСТАЦІОНАРНОГО МОМЕНТУ

Акуленко Л. Д.<sup>1</sup>, Лещенко Д. Д.<sup>2</sup>, Козаченко Т. О.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Інститут проблем механіки ім. О. Ю. Ішлінського РАН

<sup>2</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Анотація:** В космонавтиці, гіроскопії, під час входу літальних апаратів в атмосферу виникають ряд задач, які пов'язані з обертальними рухами тіла відносно нерухомої точки. У багатьох випадках в якості руху твердого тіла, що враховує основні моменти сил, які діють на тіло, може розглядатися рух у випадку Лагранжа. В роботі розглядається рух динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки під дією відновлюючого і збурюючого моментів, які повільно змінюються з часом. У випадку, коли відновлюючий момент, не залежить від часу, отримуємо модель важкого вовчка. Ставиться задача дослідження асимптотичної поведінки розв'язків системи рівнянь руху твердого тіла при значеннях малого параметра  $\varepsilon$ , відмінних від нуля, на досить великому проміжку часу. Для аналізу нелінійної системи рівнянь руху застосовується метод усереднення. Процедура усереднення у випадку Лагранжа, на відмінну від процедури усереднення у випадку Ейлера-Пуансо, дозволяє нам розглядати рух з обертальними моментами зовнішніх сил, які є великими за абсолютною величиною, як породжувальний рух. Для можливості використання метода усереднення у системі рівнянь збуреного руху, за допомогою ряду перетворень, змінні розділяємо на повільні та швидкі. Наведені умови можливості усереднення рівнянь руху за фазою кута нутації. Одержана усереднена система рівнянь першого наближення для повільних змінних. За допомогою методу усереднення порядок системи рівнянь зменшився з шести до трьох, що полегшує розв'язання задачі.

Як приклад запропонованої методики розглянуто збурений рух тіла, близький до випадку Лагранжа, під дією зовнішнього середовища. Усереднена система проінтегрована чисельно при різних початкових умовах і параметрах задачі. Повна енергія тіла, кутова швидкість обертання відносно осі динамічної симетрії спадають. Проекція вектору кінетичного моменту на вертикаль наближається до нуля. Під дією дисипативного моменту тіло прагне до рівноваги. Досліджено новий клас обертальних рухів динамічно симетричного твердого тіла відносно нерухомої точки з урахуванням нестационарних відновлюючого і збурюючого моментів.

**Ключові слова:** випадок Лагранжа, відновлюючий і збурюючий моменти, лінійна дисипація.

## EVOLUTION OF ROTATIONAL MOTIONS OF A RIGID BODY CLOSE TO THE LAGRANGE CASE UNDER THE ACTION OF AN UNSTEADY TORQUE OF FORCES

L. Akulenko<sup>1</sup>, D. Leshchenko<sup>2</sup>, T. Kozachenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS

<sup>2</sup>Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract:** We investigate a new problem of the motion of a rigid body about a fixed point under the action of perturbation torque of forces of different physical nature. The problem of evolution of the rigid body rotations about a fixed point attract the attention of researches. The perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case under the action of restoring torque and perturbation torque that are slowly varying in time are investigated, conditions for the possibility of averaging the system of



equations is obtained. In contrast to the procedure of averaging with respect to the Euler-Poinsot motion, averaging with respect to Lagrange motion permits us to examine the motion with external force torques, large in absolute value, as the generating motion.

The paper develops an approximate solution to a specific set of dynamic equations. These equations are the basic Euler equations with the symmetric heavy mass assumption and an additional  $\varepsilon M_i (i = 1, 2, 3)$  perturbation term (where  $\varepsilon$  is a small quantity). We describe an averaging procedure for slow variables of a perturbed motion of a rigid body, where the motion is close to Lagrange case in the first approximation. Conditions for the possibility of averaging the equations of motion with respect to the nutation phase angle are presented. The averaged system of equations is obtained and qualitative analysis of motion is conducted. At is further assumed that the problem can be decomposed into slowly and quickly changing variable, that one quickly changing variable ( $\theta$ , the nutation angle) has  $2\pi$  periodicity, and thus that averaging with respect to phase angle  $\theta$  can be accomplished with a small resulting error in the results. The averaging technique reduces the system order from 6 to 3, making the system autonomous, and contains only slowly changing variables, thus facilitating numerical solution. An example using linearly dissipative torques is worked out to demonstrate the use of the general equations. We shall assume that the drag force generated by the motion of the body is equivalent to a small dissipative torque vector. The classic Lagrange top can be considered as an integrable limit of the problem.

**Keywords:** Lagrange case, restoring and perturbation torques, linear dissipation.

## 1. ВСТУП

Проблема еволюції обертань твердого тіла відносно нерухомої точки привертає увагу дослідників. В космонавтиці, гіроскопії, під час входу літальних апаратів в атмосферу виникають ряд задач, які пов'язані з обертальними рухами тіла відносно нерухомої точки. У багатьох випадках в якості руху твердого тіла, що враховує основні моменти сил, які діють на тіло, може розглядатися рух у випадку Лагранжа. Тобто тіло знаходиться в полі сили ваги, а також центр мас тіла і нерухома точка знаходяться на осі динамічної симетрії тіла. Відновлюючий момент сил, аналогічний моменту сили ваги, створюється аеродинамічними силами, що діють на тіло у потоці газу. Тому рухи, які близькі до випадку Лагранжа, досліджувалися у ряді робіт з динаміки літальних апаратів, де враховувалися відновлюючий і збурюючі моменти.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Збурені рухи твердого тіла, які близькі до випадку Лагранжа, досліджені у ряді робіт, наприклад [1–11]. У [1, 2, 5–8] наведені умови можливості усереднення рівнянь руху тіла, близького до випадку Лагранжа, по фазі кута нутації. Отримана усереднена система рівнянь і розглянуто рух тіла в середовищі з лінійною дисипацією. Досліджені збурені рухи твердого тіла, близькі до випадку Лагранжа, під дією моменту сил, що повільно змінюється за часом. Розглянуті обертання твердого тіла, які близькі до регулярної прецесії у випадку Лагранжа, коли проекції вектору збурюючого моменту сил різного порядку порівняно з відновлюючим моментом. Досліджена еволюція обертань тіла, близьких до регулярної прецесії, під дією сталого відновлюючого і збурюючого моменту сил, що повільно змінюються за часом. Вивчалася асимптотична поведінка рухів вовчка Лагранжа, близьких до регулярних прецесій, під дією малого збурюючого моменту [9, 10]. Вплив дисипативного та сталого моментів на стійкість рівномірного обертання вовчка Лагранжа з осесиметричною порожниною, що заповнена ідеальною рідиною, оцінено в [11].

Досліджуються збурені рухи відносно нерухомої точки динамічно симетричного твердого тіла під дією відновлюючого і збурюючого моментів, які залежать від повільного часу  $\tau = \varepsilon t$ , де  $t$  – час, а  $\varepsilon$  – малий параметр, що характеризує величину збурень ( $\varepsilon \ll 1$ ). Рівняння руху мають вигляд:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= \mu(\tau) \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1; \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= -\mu(\tau) \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2; \\ Cr &= \varepsilon M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad i = 1, 2, 3; \\ \psi &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \quad \tau = \varepsilon t; \\ \theta &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $p, q, r$  – проекції вектора кутової швидкості на головні осі інерції тіла,  $\varepsilon M_i (i = 1, 2, 3)$  – проекції вектора збурюючого моменту на ці ж осі;  $\psi, \theta, \varphi$  – кути Ейлера;  $A$  – екваторіальний, а  $C$  – осьовий момент інерції тіла. Передбачається, що на тіло діє відновлюючий момент  $\mu = \mu(\tau)$ , який повільно змінюється за часом і є диференційованою функцією. Рівняння (1) описують рух твердого тіла у випадку Лагранжа, якщо  $\varepsilon = 0$  та відновлюючий момент сталий.

Ставиться задача дослідження асимптотичної поведінки розв'язків системи (1) при значеннях малого параметра  $\varepsilon$ , відмінних від нуля, на досить великому проміжку часу, за допомогою методу усереднення [12].

Для розв'язання задачі використовується методика усереднення, яка розроблена в [1, 2]. Дана методика використовується для усереднення системи (1) за фазою кута нутації  $\theta$  уздовж траєкторії зміни  $\theta(t)$  під час при руху тіла під дією відновлюючого і збурюючого моментів, які залежать від повільного часу.

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для незбуреної системи (1) коли  $\varepsilon = 0$  першими інтегралами є величини [1,13]:

$$\begin{aligned} G_z &= A \sin \theta (p \sin \varphi + q \cos \varphi) + Cr \cos \theta = c_1; \\ H &= \frac{1}{2} [A(p^2 + q^2) + Cr^2] + \mu \cos \theta = c_2, \quad r = c_3, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $G_z$  – проекція вектора кінетичного моменту на вертикаль  $Oz$ ,  $H$  – повна енергія тіла,  $r$  – проекція вектора кутової швидкості на вісь динамічної симетрії,  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  – довільні сталі,  $c_2 \geq -\mu$ .

Також відомий вираз для кута нутації  $\theta$  при незбуреному русі Лагранжа як функції часу [1, 13], через  $u_1, u_2, u_3$  – позначено дійсні корені кубічного багаточлена

$$\begin{aligned} Q(u) &= A^{-2} [(2H - Cr^2 - 2\mu u)(1 - u^2)A - (G_z - Cru)^2], \\ u = \cos \theta &= u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2(\alpha t + \beta), \quad \alpha = [\mu(u_3 - u_1) / (2A)]^{1/2}, \\ \operatorname{sn}(\alpha t + \beta) &= \sin \operatorname{am}(\alpha t + \beta, k), \quad k^2 = (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $u$  – періодична функція за часом  $t$  з періодом  $K(k) / \alpha$ ;  $\operatorname{sn}$  і  $\operatorname{am}$  – еліптичний синус і амплітуда [13],  $k$  – модуль еліптичних функцій.

Використовуючи співвідношення (2) як формули перетворення від змінних  $(p, q, r, \psi, \theta, \varphi)$  до змінних  $(G_z, H, r, \psi, \theta, \varphi)$  приведемо перші три рівняння (1) до вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= \varepsilon F_1, \quad F_1 = (M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi) \sin \theta + M_3 \cos \theta; \\ H &= \varepsilon F_2, \quad F_2 = (M_1 p + M_2 q + M_3 r) + \frac{d\mu(\tau)}{d\tau} \cos \theta; \\ \dot{r} &= \varepsilon F_3, \quad F_3 = C^{-1} M_3, \quad M_i = M_i(G_z, H, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4)$$

Праві частини (4) містять повільні змінні  $G_z, H, r$  та швидкі змінні  $\psi, \theta, \varphi$ , які періодичні по  $t$ , що може сприяти появі резонансу. Для подолання цього та можливості усереднення будемо вважати виконаними необхідні і достатні умови, що накладаються на моменти прикладених сил:

$$\begin{aligned} M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi &= M_1^*, \quad M_1 p + M_2 q = M_2^*, \quad M_3 = M_3^*; \\ M_i^* &= M_i^*(G_z, H, r, \tau, \theta), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5)$$

Тоді праві частини рівнянь (4) можуть бути представлені як функції від повільних змінних  $G_z, H, r, \tau$  і однієї швидкої змінної – кута нутації  $\theta$ :  $F_i = F_i(G_z, H, r, \tau, \theta)$   $i = 1, 2, 3$  періодичні за фазою кута  $\theta$  з періодом  $2\pi$ .

Передбачається проводити дослідження збуреного руху у повільних змінних  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , які можна виразити через перші інтеграли, таким чином:





$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{H}{\mu} - \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{C^2 r^2}{2A\mu}, \quad u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 = \frac{G_z Cr}{A\mu} - 1;$$

$$u_1 u_2 u_3 = -\frac{H}{\mu} + \frac{Cr^2}{2\mu} + \frac{G_z^2}{2A\mu}, \quad -1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1 < u_3 < +\infty.$$

Після ряду перетворень шукана система рівнянь для повільних змінних  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  має вигляд:

$$\frac{du_i}{dt} = \varepsilon V_i(u_1, u_2, u_3, \tau, \theta), \quad u_i(0) = u_i^0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (6)$$

$$V_i = V_{i1} F_1^* + V_{i2} F_2^* + V_{i3} F_3^* + V_{i4} \mu', \quad V_{ij} = V_{ij}(u_1, u_2, u_3, \tau) \quad j = 1, 2, 3;$$

$$V_{11} = \frac{G_z - Cru_1}{A\Delta}, \quad V_{12} = \frac{u_1^2 - 1}{\Delta}, \quad \mu = \mu(\tau), \quad \mu' = \frac{d\mu(\tau)}{d\tau};$$

$$V_{13} = \frac{C}{A\Delta} [Ar(1 - u_1^2) - u_1(G_z - Cru_1)];$$

$$V_{14} = \frac{[A(u_1^2 - 1)(Cr^2 - 2H) - (G_z - Cru)^2]}{2A\mu\Delta}, \quad \Delta = \mu(u_1 - u_2)(u_1 - u_3),$$

де функції  $V_{2j}, V_{3j}$ ,  $j = 1, 2, 3$  одержуємо з відповідних виразів (6) для того ж значення  $j$  шляхом циклічної перестановки індексів  $i$  у величини  $u_i$ . Функції  $F_i^*$  є підстановкою в  $F_i$  з (4) виразів

$$G_z = \chi \delta (u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 + R)^{1/2}, \quad r = \chi C^{-1} (u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 - R)^{1/2},$$

$$H = \frac{1}{2} \mu [(u_1 + u_2 + u_3)(1 + AC^{-1}) + (R - u_1 u_2 u_3)(1 - AC^{-1})], \quad (7)$$

$$R = \text{sign}(G_z^2 - C^2 r^2) [(1 - u_1^2)(1 - u_2^2)(u_3^2 - 1)]^{1/2},$$

$$\chi = (A\mu)^{1/2} \text{sign } r, \quad \delta = \text{sign}(1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3),$$

де величини  $\chi$  і  $R$  в початковий момент визначаються за початковими умовами для  $G_z$  і  $r$ . Якщо в процесі руху одна або обидві величини  $G_z^2 - C^2 r^2$  і  $r$  проходять через нуль, то можлива зміна знаків  $\chi$  і  $R$ , для визначення яких можна скористатися початковою системою (4).

Процедура усереднення рівнянь (6) для повільних змінних  $u_i$  першого наближення полягає в наступному. Підставимо в праві частини системи (6) швидку змінну  $\theta$  з (3) для незбуреного руху. В цьому випадку праві частини системи (6) будуть періодичними функціями  $t$  з періодом  $2K(k)/\alpha$ , де  $k$  і  $\alpha$  визначаються за допомогою співвідношень (3). Після усереднення правих частин отриманої системи за фазою кута нутації одержуємо у повільному часі  $\tau = \varepsilon t$  усереднену систему першого наближення:

$$\frac{du_i}{d\tau} = U_i(u_1, u_2, u_3, \tau), \quad u_i(0) = u_i^0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (8)$$

$$U_i(u_1, u_2, u_3, \tau) = \frac{\alpha}{2K(k)} \int_0^{2K/\alpha} V_i(u_1, u_2, u_3, \tau, \theta(t)) dt.$$

Після дослідження і розв'язання системи (8) для  $u_i$  повільні змінні  $G_z, H, r$  відновлюються за формулами (7). Повільні змінні  $u_i$  і  $G_z, H, r$  визначаються з похибкою порядку  $\varepsilon$ .

#### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянемо випадок, коли збурені моменти мають вигляд:

$$M_1 = pf, \quad M_2 = qf, \quad M_3 = M_3^*, \quad f = f(G_z, H, r, \theta, \tau).$$

Ці умови є достатніми для забезпечення правильності співвідношень (5).

Дослідимо збурений рух, близький до випадку Лагранжа, під дією зовнішнього середовища. Як приклад можна розглянути зовнішнє середовище, що повільно змінює властивості в'язкості внаслідок зміни щільності, температури, складу середовища. Збурюючі моменти  $\varepsilon M_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  мають вигляд [14]:

$$M_1 = -a(\tau)p, \quad M_2 = -a(\tau)q, \quad M_3 = -b(\tau)r, \quad a(\tau), b(\tau) > 0, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (9)$$

де  $a(\tau)$ ,  $b(\tau)$  – функції, які інтегруються та залежать від властивостей середовища і форми тіла. Система (4) записується таким чином:

$$\begin{aligned} \dot{G}_z &= -\varepsilon \left[ (a(\tau)p \sin \varphi + a(\tau)q \cos \varphi) \sin \theta + b(\tau)r \cos \theta \right]; \\ \dot{H} &= -\varepsilon \left[ a(\tau)(p^2 + q^2) + b(\tau)r^2 + \frac{d\mu(\tau)}{d\tau} \cos \theta \right]; \\ \dot{r} &= -\varepsilon C^{-1} b(\tau)r. \end{aligned} \quad (10)$$

Інтегруючи третє рівняння (3.2), одержуємо ( $r_0$  – довільне початкове значення осьової швидкості обертання)

$$r = r_0 \exp(-\varepsilon C^{-1} \int_0^t b(\varepsilon t) dt). \quad (11)$$

Розглянемо випадок, коли  $a(\tau)$ ,  $b(\tau)$ ,  $\mu(\tau)$  мають вигляд:

$$\begin{aligned} a(\tau) &= a_0 + a_1 \tau, \quad b(\tau) = b_0 + b_1 \tau, \quad \mu(\tau) = \mu_0 + \mu_1 \text{Exp}(\tau); \\ a_0, a_1, b_0, b_1, \mu_0 - \text{const}, \quad a_0 > 0, \quad b_0 > 0, \quad \mu_0 > 0, \quad a_1 \geq 0, \quad b_1 \geq 0, \quad \mu_1 \geq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Перейдемо до нових повільних змінних і отримаємо усереднену систему (8) з урахуванням збурюючих моментів (9) у повільному часі  $\tau = \varepsilon t$ :

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\tau} &= \frac{-1}{\Delta} \left\{ a(\tau) A^{-1} \left[ A^{-1} (G_z - C r u_1) (G_z - C r v) + (u_1^2 - 1) (2H - C r^2 - 2\mu_0 v) \right] + \right. \\ &+ b(\tau) r A^{-1} (G_z - C r u_1) (v - u_1) - \mu' \left[ (u_1^2 - 1) \left( v + \frac{1}{2\mu} (C r^2 - 2H) \right) - \frac{1}{2A\mu} (G_z - C r u_1)^2 \right] \left. \right\}; \\ v &= u_3 - (u_3 - u_1) E(k) / K(k). \end{aligned} \quad (13)$$

Символ (123) означає, що рівняння для  $u_2$ ,  $u_3$  отримаємо з (13) циклічною перестановкою індексів 1, 2, 3. Але при цій перестановці вираз для  $v$ , де  $K(k)$ ,  $E(k)$  – повні еліптичні інтеграли першого і другого роду, слід залишити незмінними в усіх трьох рівняннях. Замість  $G_z$ ,  $H$ ,  $r$ ,  $k$  підставляємо їх вирази з (1.3), (2.5).



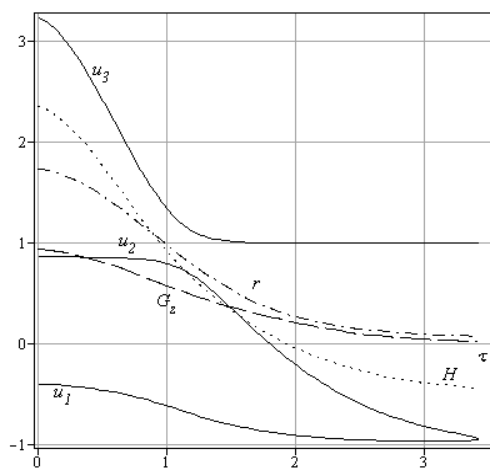
Усереднена система (13) проінтегрована чисельно для  $\tau \geq 0$  при різних початкових умовах та параметрах задачі. Передбачається, що в початковий момент  $t = 0$  вочок Лагранжа отримав кутову швидкість обертання навколо осі динамічної симетрії, що дорівнює  $r_0 = 1,73$ , і відхилення на кут  $\theta_0$  від вертикалі, а також  $A = 1,5$ ,  $C = 1$ ,  $\mu_0 = 0,5$ ,  $a_0 = 0,125$ ,  $b_0 = 0,1$ ,  $\mu_1 = 0,01$ ,  $a_1 = b_1 = 1$ ,  $u_2^0 = \cos \theta^0$ . В цьому випадку інші початкові дані мають вигляд (Таблиця 1.):

**Таблиця 1**

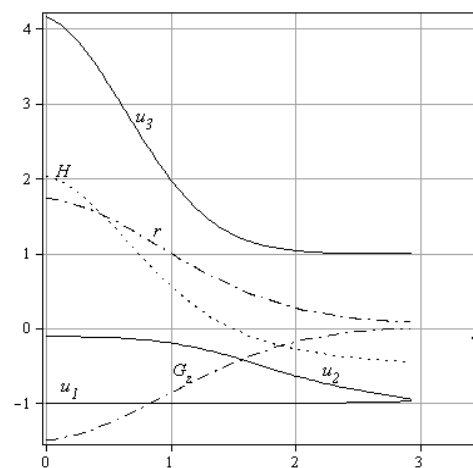
Початкові значення змінних  $u_1, u_2, u_3$  та кута нахилу  $\theta$

Випадок	$u_1^0$	$u_2^0$	$u_3^0$	$\theta^0$
1	-0,4	0,866	3,25	30°
2	-0,992	-0,105	4,15	96°

Використовуючи значення  $u_i$ , що одержали в результаті чисельного інтегрування, знаходимо  $G_z$ ,  $H$ ,  $r$  за формулою (7). На рис. 1-2 зображені графіки функцій  $G_z$ ,  $H$ ,  $r$   $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).



**Рис. 1.** Випадок 1



**Рис. 2.** Випадок 2

Повна енергія тіла і кутова швидкість обертання відносно осі динамічної симетрії спадають. Проекція вектору кінетичного моменту на вертикаль наближається до нуля. Величина  $u_3$  асимптотично прагне до одиниці. Величини  $u_1$  і  $u_2$  монотонно спадають і прагнуть до  $-1$ . Згідно першої рівності (3), при  $\theta \rightarrow \pi$  маємо  $\cos \theta \rightarrow -1$ . Повна енергія  $H$  монотонно спадає, асимптотично наближаючись до значення  $H = -0,5$ .

## 5 ВИСНОВКИ

При порівнянні одержаних результатів з результатами [1, 2], де  $\mu$  і  $M_i$  не залежать від повільного часу  $\tau$  та з [8], де тільки  $M_i$  залежать від повільного часу, можна відмітити їх механічний зміст. Залежність відновлюючого і збурюючого моментів від повільного часу призводить до появи в усередненій системі рівнянь першого наближення для повільних змінних функцій  $a(\tau)$ ,  $b(\tau)$  і  $\mu(\tau)$ , що залежать

від повільного часу, які при чисельному інтегруванні згладжують поведінку  $u_i$  ( $i=1,2,3$ ),  $G_z$ ,  $H$ . Під дією дисипативного моменту (9) тіло прагне до стійкого нижнього положення рівноваги швидше, ніж у розглянутих випадках [1, 2, 8], що є наслідком завдання коефіцієнтів (12).

Коректність розрахунку підтверджується тим, що отримані за чисельними даними та формулами (7) значення  $r$  практично співпадають з точним розв'язком (11).

Таким чином, досліджено новий клас обертальних рухів динамічно симетричного твердого тіла відносно нерухомої точки з урахуванням нестационарних відновлюючого і збурюючого моментів.

## Література

1. Chernousko F. L. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass / F. L. Chernousko, L. D. Akulenko, D. D. Leshchenko. – Springer, 2017. – 260 p. doi 10.1007/978-3-319-53928-7
2. Акуленко Л. Д. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Прикладная математика и механика. – 1979. – 43, Вып.5.– С. 771–778.
3. Кузмак Г. Е. Движение осесимметричного твердого тела около неподвижной точки под воздействием моментов, медленно изменяющихся во времени / Г. Е. Кузмак // Известия АН СССР ОТН. Механика и машиностроение. – 1961. – №4. – С.65–78.
4. Simpson H. C. A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction / H. C. Simpson, M. D. Gunzburger // J. Appl. Math. Phys. – 1986. – V. 37, №6. – P. 867–894.
5. Акуленко Л. Д. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Изв. АН СССР. МТТ. – 1986. – №5. – С. 3–10.
6. Акуленко Л. Д. Возмущенные вращения твердого тела под действием нестационарного восстанавливающего момента / Л. Д. Акуленко, Т. А. Козаченко, Д. Д. Лещенко // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 77–84.
7. Акуленко Л. Д. Вращения твердого тела под действием нестационарных восстанавливающих и возмущающих моментов / Л. Д. Акуленко, Т. А. Козаченко, Д. Д. Лещенко // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – №2. – С. 3–12.
8. Акуленко Л. Д. Эволюция движений твердого тела, близких к случаю Лагранжа, под действием нестационарного момента сил / Л. Д. Акуленко, Я. С. Зинкевич, Т. А. Козаченко, Д. Д. Лещенко // Прикладная математика и механика. – 2017. – Т.81, Вып. 2. – С.115–122.
9. Сазонов В. В. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярным прецессиям Лагранжа / В. В. Сазонов, В. В. Сидоренко // Прикладная математика и механика. – 1990. – Т.54, Вып. 6. – С. 951–957.
10. Sidorenko V. V. Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium / V. V. Sidorenko // J. Nonlinear Sci. – 1994. – V.4. – P. 35–57.
11. Кононов Ю. Н. Влияние диссипативного и постоянного моментов на устойчивость равномерного вращения в сопротивляющейся среде волчка Лагранжа с идеальной жидкостью / Ю. Н. Кононов, Н. В. Киселева // Вісник Харківського нац. універс. ім. В. Н. Каразіна. Сер. «Матем., прикл. матем. і механіка». – 2009. – №850. – С. 52–56.
12. Волосов В. М. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем / В. М. Волосов, Б. И. Моргунов. – М.: Изд-во МГУ. – 1971. – 507с.
13. Суслов Г. К. Теоретическая механика / Г. К. Суслов – М.-Л.: Гостехиздат. – 1946. – 655с.
14. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы / В. Н. Кошляков – М.: Наука. – 1985. – 288с.

## References

1. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer, 260. doi 10.1007/978-3-319-53928-7
2. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Chernousko, F. L. (1979). Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case. J. Appl. Math. Mech., 43 (5), 829–837.

3. Kuzmak, G. E. (1961). Dvizheniye osesimmetrichnogo tverdogo tela okolo nepodvizhnoy toчки pod vozdeystviyem momentov medlenno izmenyayushchehtsya vo vremeni. Izvestiya AN SSSR OTN. Mekhanika i mashinostroyeniye, 4, 65–78.
4. Simpson, H. C. Gunzburger, M. D. (1986). A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction. J. Appl. Math. and Phys., 37 (6), 867–894.
5. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Chernousko, F. L. (1986). Perturbed motion of a rigid body, close to regular precession. Mechanics of Solids, 21 (5), 1–8.
6. Akulenko, L. D., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2002). Vozmushchennyye vrashcheniya tverdogo tela pod deystviyem nestatsionarnogo vosstanavlivayushchego momenta. Mekh. Tverd. Tela, 32, 77–84.
7. Akulenko, L. D., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2003). Rotations of a rigid body under the action of unsteady restoring and perturbation torques. Mechanics of Solids, 38 (2), 1–7.
8. Akulenko, L. D., Zinkevich, Ya. S., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2017). The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. J. Appl. Math. Mech., 81 (2), 79–84. doi.org/10.1016/j.iappmathmech:2017.08.001
9. Sazonov, V. V., Sidorenko, V. V. (1990). The perturbed motions of a solid close to regular Lagrangian precessions. J. Appl. Math. Mech., 54 (6), 781–787.
10. Sidorenko, V. V. (1994). Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium. J. Nonlinear Sci., 4, 35–57.
11. Kononov, Y. N. Kiseleva, N. V. (2009). Vliyaniye dissipativnogo i postoyannogo momentov na ustoychivost' k ravnomernomu vrashcheniyu v soprotivlyayemoy srede. Visnik Kharkivs'kogo nats. unіver. ім. V.N. Karazіna. Ser. „Matematika, prikladnaya matematika i mekhanika”, 850, 52–56.
12. Volosov, V. M., Morgunov, B. I. (1971). Metod osrednenia v teorii nelineynykh kolebatelnykh system. M.: Izdatelstvo MGU, 507.
13. Suslov, G. K. (1946). Teoreticheskaya mekhanika. M.-L.: Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, 655.
14. Koshlyakov, V. N. (1985). Zadachi dinamiki tverdogo tela i prikladnoy teorii giroskopov: Analiticheskie metody. M.: Nauka, 288.

**Акуленко Леонід Денисович**

Інститут проблем механіки ім. О.Ю. Ішлінського РАН, д.ф.-м.н., професор  
Проспект Вернадського, д. 101, Москва, Росія 119526  
l.akulenko@bk.ru  
ORCID: 0000-0003-3209-1472

**Лещенко Дмитро Давидович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.ф.-м.н., професор  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029  
leshchenko\_d@ukr.net  
ORCID: 0000-0003-2436-221X

**Козаченко Тетяна Олександрівна**

Одеська державна академія будівництва та архітектури, к.ф.-м.н., доцент  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029  
kushpil.t.a@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-9034-3776

*Для посилань:*

Акуленко Л. Д. Еволюція обертальних рухів твердого тіла, близьких до випадку лагранжа, під дією нестационарного моменту / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Т. О. Козаченко // Механіка та математичні методи. – 2019. – №2. – С. 18–26.

*For references:*

Akulenko, L., Leshchenko, D., Kozachenko, T. (2019). Evolution of rotational motions of a rigid body close to the lagrange case under the action of an unsteady torque of forces. Mechanics and Mathematical Methods, 2, 18 – 26.

УДК 691.32:620.191

## СТРУКТУРНАЯ ДИНАМИКА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОМПОЗИТОВ

Выровой В. Н.<sup>1</sup>, Суханов В. Г.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одесская государственная академия строительства и архитектуры

**Аннотация:** Строительные изделия и конструкции представляют собой открытые сложноорганизованные динамические самоорганизующиеся системы. Это предполагает, что структура материала является неотъемлемой частью структуры конструкции. Анализ позволил предложить классификацию элементов структуры по скорости реакции на внутренние и внешние воздействия. На каждом уровне структурных неоднородностей материала и в самой «конструкции-системе» выделены консервативные, метастабильные, активные элементы структуры, а также распределенные в материале конструкции локальные и интегральные остаточные деформации. Особенное внимание уделяется активным элементам, к которым отнесены технологические трещины и внутренние поверхности раздела. Это объясняется тем, что сам факт присутствия трещин предполагает неравновесное состояние отдельной подсистемы и всей системы. Установлено, что переход в состояние локализованного во времени (временного) динамического равновесия осуществляется путем изменения параметров трещин и диссипацией энергии на внутренних поверхностях раздела. Происходит спонтанная структурная перестройка, при которой свойства остаются на требуемом уровне. Трещины, которые способствуют сохранению функциональных свойств материалов и изделий за счет изменений собственных параметров, отнесены к «трещинам-созидателям». При достижении критических ситуаций «трещины-созидатели» могут трансформироваться в «трещины-разрушители», которые рассматриваются в виде самостоятельной динамической саморазвивающейся системы, возникающей внутри базовой системы. Целевая установка новой системы заключается в прохождении собственного жизненного цикла. Новая система переориентирует целевые функции базовой системы на себя и использует весь потенциал базовой системы для собственного развития. Завершение жизненного цикла трещины разрушения как «системы-паразита» автоматически приводит к выходу из функционирования «конструкции-системы». Рассмотрены технологические и конструктивные способы минимизации рисков, связанных с трансформацией «трещин-созидателей» в «трещины-разрушители» («системы паразиты»).

**Ключевые слова:** конструкция, система, элементы структуры, самоорганизация, трещины.

## STRUCTURAL DYNAMIC OF BUILDING COMPOSITES

V. Vyrovoy<sup>1</sup>, V. Sukhanov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract:** Building products and constructions are open complexly organised dynamic self-organizing systems. This suggests that the structure of the material is an integral part of the structure of the constructure. The analysis allowed us to propose a classification of the elements of the structure according to the speed of reaction to internal and external influences. At each level of structural inhomogeneities of the material and in the “construction-system” itself, conservative, metastable, active elements of the structure are identified, as well as local and integral residual deformations distributed in the construction material. Particular attention is paid to active elements, which include technological cracks and internal interfaces. This is explained by the fact that the very presence of cracks implies a nonequilibrium state of a separate subsystem and the entire system. It is established that the transition to a state of localized (temporal) dynamic equilibrium in time is carried out by



changing the parameters of cracks and energy dissipation at internal interfaces. A spontaneous structural adjustment occurs, in which the properties remain at the required level. Cracks that contribute to the preservation of the functional properties of materials and products due to changes in their own parameters are referred to as “creator cracks”. When critical situations are reached, “crack-builders” can be transformed into “crack-destroyers”, which are considered as an independent dynamic self-developing system arising within the base system. The target installation of the new system is to go through its own life cycle. The new system reorients the target functions of the base system towards itself and uses the full potential of the base system for its own development. The completion of the life cycle of a fracture crack as a “parasite system” automatically leads to the exit from the functioning of the “structure-system”. Technological and constructive ways to minimize the risks associated with the transformation of “crack-builders” into “crack-destroyers” (“parasite systems”) are considered.

**Keywords:** construction, system, structure elements, self-organization, cracks.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Индивидуальное функциональное поведение строительных изделий и конструкций должно быть предсказуемым в течение нормируемого периода эксплуатации зданий и сооружений, в состав которых они входят. Предсказания (прогноз), даже если они достаточно логичные и точные, не могут и не способны заменить объяснение процессов и явлений, протекающих при перманентном изменении внешних условий, что характерно для строительных объектов различных видов и назначения. Объяснение и понимание расширяют границы возможностей управления механизмами реализации тех или иных процессов. Особенно это актуально при изменении свойств материала под действием комплекса возникающих при эксплуатации нагрузок, что неизбежно сказывается на изменении свойств конструкций. Уровень допустимого изменения свойств материалов регламентируется нормативными документами, что позволяет количественно оценить текущее состояние конструкции. Накопленный опыт показал, что при удовлетворительных средних значениях требуемых свойств материалов в конструкции может возникнуть критическая ситуация. Как правило, события, сопровождающие такие ситуации, локализованы и связаны с образованием новой для материала и конструкции составляющей – трещины. Процесс развития трещин инициируется внешними и внутренними факторами и провоцирует структурные перестройки в материале, перераспределение напряжений и деформаций в конструкции, что может стимулировать дальнейшее развитие трещин до критических параметров. Любой процесс, включая процесс роста трещин, не поддается анализу путем его остановки. Поэтому для установления факторов управления процессом необходимо изучить историю его возникновения и развития, что позволит выработать представление о механизмах течения процесса с учетом фактора времени.

## 2 АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРНЫХ ДАННЫХ И ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Обязательное присутствие истории развития позволяет проследить структурную трансформацию материала и изделия с учетом и пониманием, что нет «хороших» или «плохих» элементов, все они неотъемлемые – части целого. Представление материала и конструкции в виде неразрывной целостности позволяет рассматривать конструкцию как открытую сложную самоорганизующуюся систему [1,2,3]. Система не существует вне ее структурного оформления. Профессор В. И. Соломатов и его последователи подчеркивали полиструктурность композиционных строительных материалов и изделий. Взаимосвязь и взаимовлияние различных уровней структурных составляющих отмечается в работах П. Г. Комохова, П. В. Кривенко, В. И. Большакова, В. Н. Деревянко, А. Н. и А. П. Плуговых, Р. Ф. Руновой, А. Г. Вандаловского, В. И. Братчуна, И. Штарка, М. Ш. Файнера, Е. С. Шинкевич, А. В. Мишутина и многих других отечественных и зарубежных исследователей.

Процессам самоорганизации в периоды формирования структуры и эксплуатации строительных композитов посвящены работы М. Д. Корчака, Л. А. Шейнича, Е. К. Пушкаревой, И. В. Барабаша, А. Н. Бобрышева, В. М. Хрулева, В. Л. Чернявского, С. Фица и др. Роль трещин в формировании свойств материалов и конструкций показана в исследованиях Н. И. Карпенко, К. И. Пирадова, Ю. В. Зайцева, В. С. Дорофеева, В. В. Болотина, И. М. Грушко, И. И. Лучко, С. И. Солодкого, С. Н. Леоновича, Р. Лермита. Влияние рецептурно-технологических факторов на формирование свойств строительных материалов и изделий изучено в исследованиях В. А. Вознесенского, Т. В. Ляшенко, Л. И. и О. Л. Дворкиных, С. В. Коваля, А. Е. Шейкина, И. Н. Ахвердова, М. А. Саницкого, Т. И. Горчакова и многих других исследователей.



Все перечисленные (и многие другие) исследования выполнены, как правило, в рамках действующей парадигмы, в которой подчеркивается, что уровень конечных свойств материалов и изделий определяется начальным составом, технологическими условиями получения материалов и их переработки в конструкцию. В готовой конструкции материал рассматривается как некая данность вне истории его образования и вне особенностей его структурного оформления. Несовпадение терминологии технологов-материаловедов и конструкторов препятствует выработке совместных конфигураций взаимодействия. При этом очевидно, что не существует изделий и конструкций вне их материального наполнения, как и не существует материала без его конструктивного оформления.

Системный подход позволяет органично объединить материал и конструкцию в неразрывное целое - систему с заданной целевой функцией. В такой системе реализуется принцип соучастия всех структурных элементов в функционально ориентированном поведении «конструкции-системы». При анализе структурно оформленной «конструкции-системы» возможно и даже необходимо создание общего терминологического словаря, что расширит понятийный аппарат материаловедов и конструкторов и создаст предпосылки иных базовых моделей, формирующих профессионально-научные взгляды и убеждения на общей, взаимно согласованной терминологической основе.

### **3 ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЙ**

Для реализации декларируемого подхода была поставлена цель – обосновать выбор динамических моделей, позволяющих определить набор элементов структуры конструкции-системы, наличие, взаимодействие и развитие которых обеспечивает её рабочее функциональное состояние. Для достижения поставленной цели были определены и решены следующие основные задачи исследования:

- проанализировать основные механизмы структурных изменений материала (бетона) и конструкции на различных уровнях структурных неоднородностей при внешних и внутренних воздействиях;
- проанализировать роль элементов структуры в структурном развитии материала, рассматривая их коэволюцию, как первооснову устойчивости «конструкции-системы»;
- оценить влияние трещин, как активных элементов структуры, в развитии и разрушении материала и конструкции;
- предложить классификацию трещин в зависимости от их влияния на спонтанную структурную перестройку;
- дать рекомендации по технологическим и конструктивным способам минимизации рисков, связанных с переходом трещин в категорию самостоятельных «систем-паразитов», автоматически приводящих к выходу из функционирования «конструкций-систем».

### **4 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ**

Экспериментальные исследования проводили на бетонных моделях и образцах нормативных форм и размеров в соответствии с государственными стандартами Украины и специально разработанными методиками с использованием аттестованной измерительной техники и испытательного оборудования.

При начальном описании и анализе «конструкции-системы» уместным является вербальный метод [4]. Он позволяет на качественном уровне раскрыть структуру системы, установить базовые процессы ее развития, описать механизмы

взаимодействия между разномасштабными структурами. В свою очередь вербальный метод является базовым при реализации когнитивных подходов, которые ставят своей целью исследовать процессы восприятия, категоризации, осмысления и объяснения объектов, а также репрезентации и хранения знаний [5,6]. Когнитивный подход уместен в случаях: - если взаимосвязность процессов ведет к необходимости рассматривать отдельные явления в их совокупности; - при отсутствии достаточной количественной информации о динамике структурного развития; - при развитии процессов самоорганизации, что затрудняет построение количественных моделей. Использование методов когнитивного моделирования, основанного на проведении мысленных экспериментов, позволяет, при накоплении соответствующей информации, перейти на следующем этапе к количественным моделям. В данной работе использованы методы качественного описания «конструкции-системы». Проведенные ранее исследования [3,7] позволили предложить классификацию структурных элементов, основанную на их различной «чувствительности» при воздействии на «конструкцию-систему» внешних и внутренних факторов. В общем случае можно выделить консервативные, метастабильные и активные структурные элементы.

К консервативным (от лат. *conservation* - сохранение) структурным элементам относят элементы, которые практически не изменяют либо достаточно медленно изменяют свои параметры в период выполнения объектом заложенных в него функций. Как правило, консервативные элементы принадлежат масштабному уровню, на котором доминирующими являются силы тяжести и на котором реализуются феноменологические подходы оценки свойств.

Элементы структуры, которые в данных условиях обладают относительной устойчивостью и которые способны самопроизвольно перейти в устойчивое или неустойчивое состояние при действии внешних или внутренних факторов, отнесены к метастабильным (от греч. *meta* – между, после, через) элементам структуры.

Отличительным признаком активных (от лат. *activus* - деятельный) элементов структуры является их способность адекватно реагировать на испытываемые воздействия в соразмерном временном интервале (одном темпоритме).

## 5 РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Весь набор структурных элементов система в виде строительных изделий и конструкций приобретает в технологический период получения бетона и его переработки в изделия (конструкции). На этом этапе все исходные элементы активно участвуют в процессах разномасштабного структурного оформления с образованием новых элементов структуры формирующейся системы. Не исключены ситуации, при которых возникающие промежуточные структурные образования инициируют зарождение и развитие принципиально иных элементов, входящих в структуру конечного продукта. Характерно проявление эффектов эквивинальности (от лат. *aequus* – равный, соразмерный; *finalis* – конечный), – под которыми в нашем случае понимается реализация различных механизмов структурной организации, которые приводят к появлению качественно одинаковых элементов структуры. В качестве примеров рассмотрено зарождение технологических трещин: - при образовании дискретных структур на уровне продуктов новообразований и на уровне взаимодействия исходных зерен минеральных вяжущих; - при развитии градиентов собственных деформаций на границах раздела твердеющего матричного материала и заполнителей; - под действием возникающих градиентов деформаций на уровне изделий или конструкций.

Таким образом, в период функционирования «конструкция-система» вступает с определенным набором структурных элементов, включая наличие технологических



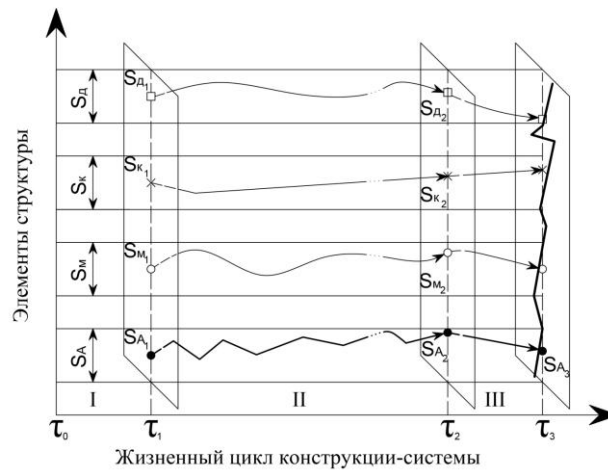
(остаточных, начальных, наследственных) локальных и интегральных деформаций. Поэтому функционирование следует рассматривать как непрекращающийся «структурный дрейф» в направлении, при котором проявляются эффекты адаптации системы в условиях перманентного воздействия эксплуатационной среды. В связи с этим жизненный цикл конструкции предлагается описывать историей коэволюции структурных составляющих, рис. 1.

Коэволюция различных по виду и назначению элементов структуры предполагает их взаимодействие, что является первоосновой устойчивости – способности системы сохранять динамическое равновесие за счет проявления внутренней и внешней безопасности.

Особенное внимание следует уделить трещинам. Термин «трещина» общий для материаловедов и конструкторов, изначально несет негативный смысл. Трещина представляет собой локализованный элемент структуры. Феномен локализации приводит к распаду непрерывной среды на отдельные локальные структуры. Поэтому когда в конструкции появляется трещина, парадигма непрерывности автоматически теряет смысл. Наши исследования дают основания утверждать, что трещины являются неизбежной и необходимой структурной составляющей на всех уровнях структурных неоднородностей. «Трещины-созидатели» способствуют релаксации деформаций, в том числе критических, сохраняют свойства целого путем изменения собственных параметров, могут трансформироваться во внутренние поверхности раздела, включать в работу метастабильные и консервативные структурные элементы.

Взаимодействие и взаимовлияние структурных элементов повышает разнообразие структуры, способствует выработке межструктурных связей, обеспечивая тем самым проявление явлений гомеостаза, что обеспечивает жизнеспособность системы. Для реализации движения структуры в сторону самосохранения «конструкции-системы» следует определить приоритетный ряд элементов, способных влиять на периоды наступления неблагоприятных ситуаций. В таком приоритетном ряду первое место занимает трещина, которая в силу определенных причин перешла из ранга «трещины-созидателя» в «трещину-разрушителя», реализовав тем самым идею самоорганизованной критичности [8] и определив начало иной истории жизненного периода системы.

С момента образования «трещины-разрушителя» (точка М, рис. 2) нужно рассматривать истории развития двух систем – базовой «конструкции-системы» и вновь образованной «трещины-системы». «Трещина-система» в силу своей активности, (которая проявляется через перераспределение деформаций с их концентрацией по фронту трещины, выделение поверхностной энергии по мере увеличения площади берегов трещины, вовлечение в процесс своего развития разномасштабных трещин и поверхностей раздела), переориентирует функции базовой системы на себя.



**Рис. 1.** Коэволюция элементов структуры в период функционирования «конструкции-системы»

I – этап становления «конструкции-системы» ( $\tau_1$ ); II – период функционирования «конструкции-системы» ( $\tau_1 \dots \tau_2$ ); III – этап выхода конструкции-системы из безопасного функционирования ( $\tau_2 \dots \tau_3$ );

$S_A, S_M, S_K, S_D$  – структурные составляющие (элементы) «конструкции-системы»;

$S_{A1}, S_{M1}, S_{K1}, S_{D1}$  – начальный набор активных ( $A_1$ ), метастабильных ( $M_1$ ), консервативных ( $K_1$ ) элементов и технологических деформаций ( $S_{D1}$ );

$S_{A1} \dots S_{A2}$  – изменение параметров активных элементов;

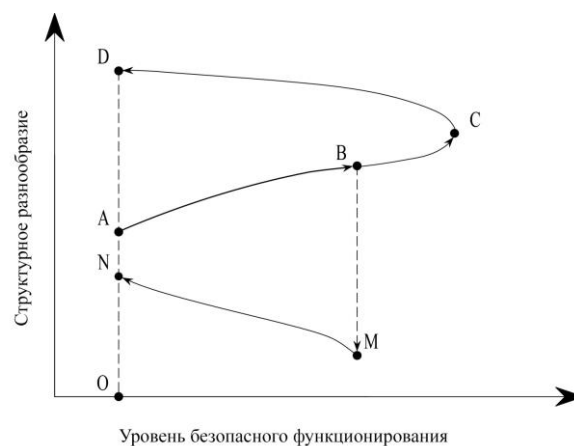
$S_{M1} \dots S_{M2}$  – изменение параметров метастабильных элементов;

$S_{K1} \dots S_{K2}$  – изменение параметров консервативных элементов;

$S_{D1} \dots S_{D2}$  – изменение локальных и интегральных остаточных деформаций;

$S_{A3}$  – изменение структурных параметров саморазвивающейся «системы-паразит».

При увеличении степени структурного разнообразия конструкции уровень ее безопасного функционирования снижается. В этот период поведение «конструкции-системы» определяется динамикой развития новой системы, которая по своей сути является «системой-паразитом», рис. 2.



**Рис. 2.** Динамическая модель изменения структурного разнообразия в течение жизненного цикла «конструкции-системы»

$O$  – минимально допустимый уровень безопасного функционирования;  
 $A$  – необходимый набор элементов структуры, обеспечивающий безопасное функционирование конструкции-системы;  
 $(A-B)$  – структурные трансформации в период функционирования;  
 $B$  – самозарождение в конструкции-системе «системы-паразита»;  
 $(B-C)$  – интегральные структурные изменения базовой системы;  
 $M$  – переориентирование целевой функции «конструкции-системы» на цель функционирования самозародившейся системы;  
 $(C-D)$  – снижение уровня безопасного функционирования «конструкции-системы»;  
 $(M-N)$  – активное функционирование «системы-паразита»;  
 $N$  – завершение жизненного цикла «системы-паразита»;  
 $D$  – завершение жизненного цикла «конструкции-системы».

Такое определение на наш взгляд правомерно, поскольку трещина самозародилась в базовой структуре и черпает энергию для собственного развития из своего окружения – материала конструкции системы.

Цель существования и развития «системы-паразита» заключается в полном прохождении собственных этапов своего жизненного цикла – от самозарождения через развитие до завершения своего существования. Завершением существования «трещины-системы» является выход ее фронта на поверхность базовой системы. На этом завершается жизненный цикл «системы-паразита», что вызывает неизбежное завершение истории существования «конструкции-системы». Таким образом, инфляция структуры «конструкции-системы» через вырождение всего многообразия структурных составляющих до возникновения новой сравнительно простой «системы-паразита» приводит к нарушению ее внешней безопасности и полному выходу из функционального состояния.

## 6 ВЫВОДЫ

Представление строительных изделий и конструкций в виде структурно организованных систем на данном этапе исследований следует рассматривать как своеобразное начало объяснения механизмов функционирования структурированных объектов. Структурный подход базируется на укореняющейся научной идеологии, основанной на идеях и методах системного мышления и синергетике, для которых понятие «структура» является доминирующим.

Неизбежный сдвиг парадигм в направлении структурированных объектов значительно ускорится при создании совместного терминологического словаря материаловедов и конструкторов и выработке общего стратегического направления получения «конструкций-систем» с требуемым набором необходимых элементов структуры.

## Литература

1. Корчак М. Д. Синергетика в теории и практике / М. Д. Корчак, А. Ф. Чепцов – Электросталь. ЭПИ МИСиС., 2006. – 434 с.
2. Дидрих Я. Проектирование и конструирование: Системный подход / Я. Дидрих – М.: Мир, 1984. – 456 с.
3. Суханов В. Г. Структура материала в структуре конструкции / В. Г. Суханов, В. Н. Выровой, О. А. Коробко – Одесса: Полиграф, 2016. – 244.
4. Могилевский В. Д. Методология систем: вербальный подход / В. Д. Могилевский – М.: Экономика, 1999. – 251 с.
5. Вандейк Т. А. Язык. Познание, Коммуникация / Т. А. Вандейк – М.: Прогресс, 1989. – 312 с.

6. Рудакова А. В. Когнитология и когнитивная лингвистика / А. В Рудакова – Воронеж, 2002. – 69 с.
7. Выровой В. Н. Композиционные строительные материалы и конструкции. Структура, самоорганизация, свойства / В. Н. Выровой, В. С. Дорофеев, В. Г. Суханов – Одесса: ТЭС, 2010 – 152 с.
8. Бак П. Как работает природа: Теория самоорганизованной критичности / П. Бак – М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. – 276 с.

## References

1. Korchak, M. D., Cheptsov, A. F. (2006). Sinergetika v teorii i praktike. Elektrostal EPI MISiS, 434.
2. Didrih, Ya. (1984). Proektirovanie i konstruirovaniye: Sistemnyiy podhod. M.: Mir, 456.
3. Sukhanov, V. G., Vyrovoy, V. N., Korobko, O. A. (2016). Struktura materiala v strukture konstruktсии. Odessa: Poligraf, 244.
4. Mogilevskiy, V. D. (1999). Metodologiya sistem: verbalnyiy podhod. M.: Ekonomika, 251.
5. Vandeyk, T. A. (1989). Yazyik. Poznanie, Kommunikatsiya. M.: Progress, 312.
6. Rudakova, A. V. (2002). Kognitologiya i kognitivnaya lingvistika. Voronezh, 69.
7. Virovyy, V. N., Dorofeev, V. S., Sukhanov, V. G. (2010). Kompozitsionnyie stroitelnyie materialyi i konstruktсии. Struktura, samoorganizatsiya, svoystva. Odessa: TES, 152.
8. Buck, P. (2014). Kak rabotaet priroda: Teoriya samoorganizovannoy kritichnosti. M.: URSS: Knizhkoviy dim “LIBROKOM”, 276.

### **Выровой Валерий Николаевич**

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, д.т.н., профессор  
ул. Дидрихсона, 4, Одесса, Украина 65029  
vyrovoy@ukr.net  
ORCID: 0000-0001-8818-4112

### **Суханов Владимир Геннадиевич**

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, д.т.н., профессор  
ул. Дидрихсона, 4, Одесса, Украина 65029  
sukhanov@mail.ua  
ORCID: 0000-0002-5831-2811

### *Для посилань:*

Вировий В.М. Структурна динаміка будівельних композитів / В. М. Вировий, В. Г. Суханов // Механіка та математичні методи. – 2019. – №2. – С. 27-35.

### *For references:*

Vyrovoy, V., Sukhanov, V. (2019). Structural dynamic of building composites. Mechanics and Mathematical Methods, 2, 27-35

УДК 624.072.45: 539.384

## ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ У КЛЕЙОВОМУ З'ЄДНАННІ. СПРОЩЕНА ДВОВИМІРНА МОДЕЛЬ

Курєннов С. С.<sup>1</sup>, Барахов К. П.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ»

**Анотація:** В деяких випадках при розрахунку напруженого стану клейового з'єднання необхідно враховувати деформації в площині з'єднання, обумовлені коефіцієнтами Пуассона деталей, що з'єднуються. Знаходження напруженого стану з'єднання в загальній двовимірній постановці є надзвичайно складною проблемою і аналітичний розв'язок даної задачі досі невідомий. Р. Адамс запропонував ввести в модель деякі спрощення, наприклад вважати дотичні напруження у шарах, що з'єднуються, рівними нулю, тобто вважати пластини абсолютно піддатливими до зсуву. Ця гіпотеза дозволяє знехтувати похідними від дотичних напружень в рівняннях рівноваги і звести задачу до системи двох диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно нормальних напружень в одному шарі, але ж не дає загального розв'язку задачі. Пізніше було отримано розв'язок зазначеної системи диференціальних рівнянь у вигляді подвійних рядів Фур'є. Ця методика також була застосована в деяких подальших роботах для розв'язання аналогічних задач. В даній роботі побудовано аналітичний розв'язок задачі з визначення напруженого стану клейового з'єднання в наближеній двовимірній постановці в прямокутній області. Використовується двовимірне узагальнення класичної моделі Фолькерсена. Для побудови розв'язку застосовано гіпотезу про малість похідних від дотичних напружень у шарах, що з'єднуються. Це накладає обмеження на крайові умови на бічних сторонах пластинки – нормальні напруження вважаються рівномірно розподіленими уздовж сторін, а дотичні – дорівнюють нулю. Розв'язок будується за допомогою методу відокремлення змінних і має вигляд ряду Фур'є за однією з координат. Збіжність метода обґрунтовано. Розв'язано модельні задачі, які ілюструють вплив пружних характеристик на поперечні напруження в клею. Досліджено температурні напруження у клейовому шарі і встановлено що класична одновимірна модель дає дещо занижені значення напружень.

**Ключові слова:** клейове з'єднання, двовимірна модель, температурні напруження, відокремлення змінних.

## THE TEMPERATURE STRESSES IN THE ADVERSIVE JOINT. A SIMPLIFIED TWO-DIMENSIONAL MODEL

S. Kurennov<sup>1</sup>, K. Barakhov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National Aerospace University H.E. Zhukovsky «Kharkiv Aviation Institute»

**Abstract:** In some cases, when calculating the stress state of the adhesive joint, it is necessary to take into account deformations in the joint plane caused by the Poisson's coefficients of the connecting parts. Finding a tense connection state in a two-dimensional overall formulation is an extremely difficult problem and the analytical solution to this problem is still unknown. R. Adams suggested introducing some simplifications into the model, for example, to consider the tangent stresses in the connecting layers to be equal to zero, that is, to consider the plates absolutely susceptible to shear. This hypothesis allows one to neglect derivatives of tangent stresses in equilibrium equations and reduce the problem to a system of two differential equations in partial derivatives relative to normal stresses in one layer, but does not give a general solution to the problem. Later, the solution of the specified system of differential equations in the form of double Fourier series was obtained. This technique has also been applied in some further work to solve similar problems. In this work, an analytical solution to the problem of determining the stress state of the adhesive joint in the approximate two-dimensional formulation in a rectangular region is constructed. A two-dimensional



generalization of the classic Volkersen model is used. The hypothesis of the smallness of the derivatives of tangent stresses in the connecting layers was applied to construct the solution. This places a boundary on the boundary conditions on the sides of the plate - normal stresses are considered to be uniformly distributed along the sides, and tangents are zero. The solution is constructed using separation of variables method and has the form of the Fourier series in one of the coordinates. The convergence of the method is substantiated. It solves model problems, which illustrate the influence of elastic characteristics of the transversed stresses in glue. The fact of temperature strain in adhesive joint is analyzed and it was found that classical one-dimensional model gives somewhat lower values of stresses.

**Key words:** adhesive joint, two-dimensional model, temperature strain, separation of variables.



## 1 ВСТУП

Розглядається задача знаходження напружено-деформованого стану з'єднання внапуск двох прямокутних пластин. Згин пластин нехтується. Досліджується взаємний вплив поздовжніх та поперечних деформацій на напруження у клейовому шарі. Для побудови аналітичного розв'язку пластини вважаються абсолютно піддатливими до зсуву у площини, а додані нормальні навантаження – рівномірними вздовж бічних сторін пластинок.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Першою і найбільш простою моделлю клейового з'єднання є модель Фолькерсена [1]. Подальше уточнення одновимірних моделей з'єднання було направлено на врахування взаємного впливу вигину несучих шарів і дотичних напружень в клеї [2], моделювання несучих шарів балками Тимошенко, вивчення впливу нелінійного поведіння клейового прошарку [3], узагальнення моделей на більше число шарів [4]. Сучасний розвиток цього напрямку орієнтований на розв'язання задач зі знаходження напруженого стану з'єднань при дії динамічних навантажень, знаходження напружень у з'єднаннях, що мають тріщини чи відшарування в клеї, уточнення напруженого стану клейового прошарку [5], впливу форми і розміру фасок на напруження поблизу краю клейового шва, тощо. Всі перелічені моделі є одновимірними, тобто досліджують розподіл напруженого стану вздовж з'єднання. При цьому розподіл напружень за товщиною вважається заданим (модель стрижня чи балки) а за шириною – рівномірним. Тобто у моделях нехтується вплив напружень у поздовжньому напрямку на поперечні деформації та взаємний вплив поздовжніх та поперечних деформацій при складному напруженому стані.

Однак в деяких випадках при розрахунку напруженого стану необхідно враховувати деформації в площині з'єднання, обумовлені коефіцієнтами Пуассона деталей, що з'єднуються. Знаходження напруженого стану з'єднання в загальній двовимірній постановці є надзвичайно складною проблемою і аналітичний розв'язок даної задачі досі невідомий [6]. В зв'язку з цим було запропоновано ввести в модель деякі спрощення, наприклад вважати дотичні напруження у шарах, що з'єднуються, рівними нулю, тобто пластини вважаються абсолютно піддатливими до зсуву [7]. Ця гіпотеза дозволяє знехтувати похідними від дотичних напружень в рівняннях рівноваги і звести задачу до системи двох диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно нормальних напружень в одному шарі. Але загальний розв'язок задачі в роботі [7] не отримано. В роботі [8] отримано розв'язок зазначеної системи диференціальних рівнянь у вигляді подвійних рядів Фур'є. Ця методика також була застосована в подальших роботах [9-11] для розв'язання аналогічних задач.

У даній роботі отримано аналітичний розв'язок задачі (в рамках описаної наближеної теорії), який будується за допомогою методу відокремлення змінних і має вигляд ряду Фур'є за однією координатою. Вперше вказаний підхід було запропоновано одним з авторів у роботі [12], але автором досліджувалися лише напруження, які викликані навантаженням. В даній роботі модель розвинуто на дослідження температурних деформацій, які можуть суттєво впливати на міцність композитних конструкцій.

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою роботи є дослідження температурних напружень у клейовому з'єднанні. Для досягнення мети застосовано спрощену двовимірну модель клейового з'єднання.

### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянемо склеєні прямокутні пластинки (рис. 1)  $D = \{(x, y) \in [0, l_1] \times [0, l_2]\}$ , які мають товщину  $\delta_1$  та  $\delta_2$  відповідно. До бічних сторін пластинок прикладені рівномірні нормальні зусилля.

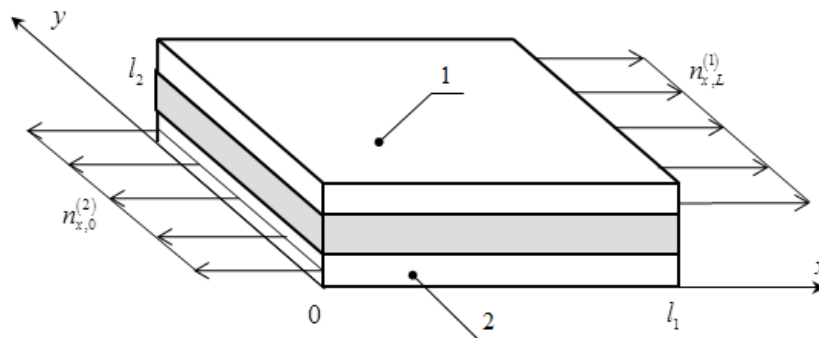


Рис. 1. Схема з'єднання

Розв'язання задачі базується на наступних гіпотезах [6-8]: клейовий прошарок працює тільки на зсув; напруження рівномірно розподілені за товщиною шарів; напрямки ортотропії шарів збігаються з напрямками координатних осей; ефекти, пов'язані з вигином, не враховуються; дотичні напруження в несучих шарах вважаються відсутніми або постійними у площині з'єднання, тобто похідні від них дорівнюють нулю.

Рівняння рівноваги диференціальних елементів верств мають вигляд [7]:

$$\tau_x + \frac{\partial N_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial q^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad \tau_y + \frac{\partial N_y^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial q^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad -\tau_x + \frac{\partial N_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial q^{(2)}}{\partial y} = 0, \quad -\tau_y + \frac{\partial N_y^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial q^{(2)}}{\partial x} = 0,$$

де  $\tau_x, \tau_y$  - дотичні напруження в клейовому шарі в напрямках  $x, y$ ;  $N_x^{(k)}, N_y^{(k)}$  - нормальні зусилля в несучому шарі  $k$  ( $k=1,2$ ) у відповідному напрямку ( $N_x^{(k)} = \delta_k \sigma_{xx}^{(k)}$ ,  $N_y^{(k)} = \delta_k \sigma_{yy}^{(k)}$ );  $q^{(k)}$  - дотичні зусилля в  $k$ -м шарі ( $q^{(k)} = \delta_k \tau_{xy}^{(k)}$ ).

Відповідно до прийнятої вище гіпотези про рівність нулю похідних від дотичних зусиль в несучих шарах, рівняння рівноваги можна записати у вигляді:

$$\tau_x + \frac{\partial N_x^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad \tau_y + \frac{\partial N_y^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad \tau_x - \frac{\partial N_x^{(2)}}{\partial x} = 0, \quad \tau_y + \frac{\partial N_y^{(2)}}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Граничні умови

$$N_x^{(k)} \Big|_{x=0} = n_{x,0}^{(k)}, \quad N_x^{(k)} \Big|_{x=l_1} = n_{x,1}^{(k)}, \quad N_y^{(k)} \Big|_{y=0} = n_{y,0}^{(k)}, \quad N_y^{(k)} \Big|_{y=l_2} = n_{y,1}^{(k)}, \quad (2)$$

повинні задовольняти умовам загальної рівноваги з'єднання



$$\begin{aligned} N_x^{(1)} + N_x^{(2)} &= n_{x,0}^{(1)} + n_{x,0}^{(2)} = n_{x,1}^{(1)} + n_{x,1}^{(2)} = F_x, \\ N_y^{(1)} + N_y^{(2)} &= n_{y,0}^{(1)} + n_{y,0}^{(2)} = n_{y,1}^{(1)} + n_{y,1}^{(2)} = F_y. \end{aligned} \quad (3)$$

Напруження в клейовий прошарку пропорційні різниці переміщень шарів

$$\tau_x = \frac{G_0}{\delta_0} (U_x^{(2)} - U_x^{(1)}), \quad \tau_y = \frac{G_0}{\delta_0} (U_y^{(2)} - U_y^{(1)}), \quad (4)$$

де  $U_x^{(k)}, U_y^{(k)}$  - переміщення у відповідному напрямку  $k$ -го шару;  $G_0, \delta_0$  - модуль зсуву і товщина клейового шару.

Закон Гука для деталей, що з'єднуються, має вигляд

$$\varepsilon_x^{(k)} = \frac{N_x^{(k)}}{\delta_k E_x^{(k)}} - \frac{\mu_{xy}^{(k)} N_y^{(k)}}{\delta_k E_y^{(k)}} + \alpha_x^{(k)} T_k, \quad \varepsilon_y^{(k)} = \frac{N_y^{(k)}}{\delta_k E_y^{(k)}} - \frac{\mu_{yx}^{(k)} N_x^{(k)}}{\delta_k E_x^{(k)}} + \alpha_y^{(k)} T_k,$$

де  $E_x^{(k)}, E_y^{(k)}, \mu_{xy}^{(k)}, \mu_{yx}^{(k)}, \alpha_x^{(k)}, \alpha_y^{(k)}$  - модулі пружності, коефіцієнти Пуассона і коефіцієнти лінійного температурного розширення у відповідних напрямках;  $T_k$  - різниця середньої за товщиною температури формування з'єднання і температури експлуатації.

Диференціюючи перші два рівняння (1) і залежності (4), потім застосовуючи співвідношення Коші  $\varepsilon_x^{(k)} = \partial U_x^{(k)} / \partial x$  та  $\varepsilon_y^{(k)} = \partial U_y^{(k)} / \partial y$ , закон Гука і умови рівноваги з'єднання (3) для виключення зусиль у другому шарі, отримаємо систему диференціальних рівнянь щодо зусиль в одному (наприклад, в першому) несучому шарі

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 N_x^{(1)}}{\partial x^2} - c_{11} N_x^{(1)} + c_{12} N_y^{(1)} + c_{13} = 0, \\ \frac{\partial^2 N_y^{(1)}}{\partial y^2} + c_{21} N_x^{(1)} - c_{22} N_y^{(1)} + c_{23} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$c_{11} = \frac{P_0}{\delta_1 E_x^{(1)}} + \frac{P_0}{\delta_2 E_x^{(2)}}, \quad c_{12} = \frac{\mu_{xy}^{(1)} P_0}{\delta_1 E_y^{(1)}} + \frac{\mu_{xy}^{(2)} P_0}{\delta_2 E_y^{(2)}}, \quad c_{21} = \frac{\mu_{yx}^{(1)} P_0}{\delta_1 E_x^{(1)}} + \frac{\mu_{yx}^{(2)} P_0}{\delta_2 E_x^{(2)}}, \quad c_{22} = \frac{P_0}{\delta_1 E_y^{(1)}} + \frac{P_0}{\delta_2 E_y^{(2)}},$$

$$c_{13} = P_0 \left( \frac{F_x}{\delta_2 E_x^{(2)}} - \frac{\mu_{xy}^{(2)} F_y}{\delta_2 E_y^{(2)}} + \alpha_x^{(2)} T_2 - \alpha_x^{(1)} T_1 \right), \quad c_{23} = P_0 \left( \frac{F_y}{\delta_2 E_y^{(2)}} - \frac{\mu_{yx}^{(2)} F_x}{\delta_2 E_x^{(2)}} + \alpha_y^{(2)} T_2 - \alpha_y^{(1)} T_1 \right),$$

$$P_0 = \frac{G_0}{\delta_0}.$$

Напружений стан першого шару в точці в даній постановці задачі описується двома нормальними напруженнями. На границі заданий лише один з компонентів тензора напружень, а другий знаходиться з рівнянь рівноваги (5). При цьому одне з рівнянь на границі набуває вигляду звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{\partial^2 B_{x,j}}{\partial x^2} - c_{11} B_{x,j} + c_{13} + c_{12} n_{y,j}^{(1)} = 0; \quad \frac{\partial^2 B_{y,j}}{\partial y^2} - c_{22} B_{y,j} + c_{23} + c_{21} n_{x,j}^{(1)} = 0, \quad (6)$$

де  $j = 0, 1$ ; для зусиль вздовж границь введені позначення  $B_{x,0} = N_x^{(1)}|_{y=0}$ ,  $B_{x,1} = N_x^{(1)}|_{y=l_2}$ ,

$B_{y,0} = N_y^{(1)}|_{y=l_2}$ ,  $B_{y,1} = N_y^{(1)}|_{x=l_2}$ . Розв'язки рівнянь (6) мають вигляд:

$$B_{x,j}(x) = S_{1,j} \sinh(a_{11}x) + S_{2,j} \cosh(a_{11}x) + \frac{c_{12}n_{y,j}^{(1)} + c_{13}}{c_{11}}; \quad (7)$$

$$B_{y,j}(y) = S_{3,j} \sinh(a_{22}y) + S_{4,j} \cosh(a_{22}y) + \frac{c_{21}n_{x,j}^{(1)} + c_{23}}{c_{22}},$$

де  $a_{11} = \sqrt{c_{11}}$ ,  $a_{22} = \sqrt{c_{22}}$ .

Сталі знаходяться з крайових умов (2). Вирази (7) являють собою класичні одномірні розв'язки задачі про напружений стан з'єднання [1, 3]. Зусилля (7) є крайовими умовами на бічних сторонах пластинки у сукупності з умовами (2). Відповідно напруження у клейовому шарі за одномірною моделлю визначаються наступним чином:

$$T_x(x) = (-1)^j \frac{d}{dx} B_{x,j}(x), \quad T_y(y) = (-1)^j \frac{d}{dy} B_{y,j}(y).$$

Виключивши одну з невідомих в системі (5), отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial^4 N_x^{(1)}}{\partial x^2 \partial y^2} - A_1 \frac{\partial^2 N_x^{(1)}}{\partial x^2} - A_2 \frac{\partial^2 N_x^{(1)}}{\partial y^2} + A_3 N_x^{(1)} = A_4; \quad (8)$$

$$\frac{\partial^4 N_y^{(1)}}{\partial x^2 \partial y^2} - B_1 \frac{\partial^2 N_y^{(1)}}{\partial x^2} - B_2 \frac{\partial^2 N_y^{(1)}}{\partial y^2} + B_3 N_y^{(1)} = B_4, \quad (9)$$

де  $A_1 = C_{22}$ ,  $A_2 = C_{11}$ ,  $A_3 = C_{22}C_{11} - C_{21}C_{12}$ ,  $A_4 = C_{22}C_{13} + C_{12}C_{23}$ ;

$$B_1 = C_{22}, \quad B_2 = C_{11}, \quad B_3 = C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21}, \quad B_4 = C_{11}C_{23} + C_{21}C_{13}.$$

Рівняння є незалежними і дозволяють знайти зусилля  $N_x^{(1)}, N_y^{(1)}$ . Втім, можна знайти зусилля в одному напрямку, а зусилля в іншому знайти з рівнянь (5). Обидва шляхи призводять до однакових результатів [12].

Розглянемо побудову розв'язку рівняння (8). Крайові умови (2) на границях  $x = 0$  та  $x = l_1$  та рівняння (8) є неоднорідними. Для виключення цих неоднорідностей поздовжні зусилля представимо у вигляді

$$N_x^{(1)} = R(x) + N(x, y), \quad (10)$$

де функція  $R(x)$  задовольняє відповідні неоднорідні крайові умови (2), тобто функція  $N(x, y)$  на границях  $x = 0$  та  $x = l_1$  має однорідні крайові умови.

Підставивши вираз (10) в рівняння (8), отримаємо рівняння

$$-A_1 \frac{d^2 R}{dx^2} + A_3 R = A_4, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^4 N}{\partial x^2 \partial y^2} - A_1 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - A_2 \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + A_3 N = 0. \quad (12)$$

Розв'язок рівняння (11) має вигляд

$$R(x) = V_1 \sinh\left(\sqrt{\frac{A_3}{A_1}}x\right) + V_2 \cosh\left(\sqrt{\frac{A_3}{A_1}}x\right) + \frac{A_4}{A_3}. \quad (13)$$

Константи  $V_1$  і  $V_2$  визначаються з відповідних крайових умов (2). Потрібно відзначити, що функція (13) була запропонована в роботі [7] як наближений розв'язок системи (5). Слід зауважити, що поздовжні зусилля (13) мають вигляд, аналогічний

зусиллям (7), але відрізняється від класичного розв'язку (7) тим, що враховує жорсткість шарів також і у поперечному до навантаження напрямку.

Оскільки неоднорідні крайові умови (2) при  $x = 0$  і  $x = l_1$  враховано за допомогою функції (13), то відповідні крайові умови для  $N(x, y)$  будуть однорідними. Це дозволяє застосувати метод відокремлення змінних. Розв'язок рівняння (12) шукаємо у вигляді добутку  $N = Y(y)X(x)$ . Розділивши змінні, отримаємо систему рівнянь

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0, \quad (A_2 + \lambda^2) \frac{d^2 Y}{dy^2} - (A_3 + \lambda^2 A_1) Y = 0.$$

Розв'язок першого рівняння має вигляд

$$X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x.$$

Оскільки крайові умови для  $N(x, y)$  на сторонах  $x = 0$  і  $x = l_1$  однорідні, то вони однорідні і для  $X(x)$ . Функція  $X(x)$  задовольняє крайові умови і тотожно не дорівнює нулю, тільки якщо  $\lambda_n = \pi n / l_1$  і  $C_2 = 0$ . Розв'язок другого рівняння системи має вигляд:

$$Y(y) = C_3 \sinh(\mu_n y) + C_4 \cosh(\mu_n y), \quad \mu_n = \sqrt{\frac{A_3 l_1^2 + \pi^2 n^2 A_1}{A_2 l_1^2 + \pi^2 n^2}}.$$

Підсумувавши по  $n$  і підставивши отримані результати в (10), отримаємо

$$N_x^{(1)} = R(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{l_1} \cdot [C_{3,n} \sinh(\mu_n y) + C_{4,n} \cosh(\mu_n y)]. \quad (14)$$

Задовольнивши крайові умови (7) на сторонах  $y = 0$  і  $y = l_2$ , отримаємо рівняння

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{4,n} \sin \frac{\pi n x}{l_1} = B_{x,0}(x) - R(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{l_1} [C_{3,n} \sinh(\mu_n l_2) + C_{4,n} \cosh(\mu_n l_2)] = B_{x,1}(x) - R(x).$$

Використовуючи повноту та ортогональність системи функцій  $\sin \pi n x / l_1$  на відріжку  $[0; l_1]$ , отримаємо

$$C_{4,n} = \frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} (B_{x,0} - R) \sin \frac{\pi n y}{l_1} dx, \quad C_{3,n} = \frac{\frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} (B_{x,1} - R) \sin \frac{\pi n y}{l_1} dx - C_{4,n} \cosh(\mu_n l_2)}{\sinh(\mu_n l_2)}.$$

Обидва інтеграла обчислюються аналітично. Зусилля  $N_y^{(1)}$  мають вигляд

$$N_y^{(1)} = T(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n y}{l_2} \cdot [C_{5,n} \sinh(v_n x) + C_{6,n} \cosh(v_n x)], \quad (15)$$

де  $T(y) = V_3 \sinh(\sqrt{(B_3/B_2)}y) + V_4 \cosh(\sqrt{(B_3/B_2)}y) + B_4/B_3$ , сталі  $V_3$  і  $V_4$  знаходяться із відповідних крайових умов (2). В свою чергу

$$v_n = \sqrt{\frac{B_3 l_2^2 + \pi^2 n^2 B_2}{B_1 l_2^2 + \pi^2 n^2}}, \quad C_{5,n} = \frac{\frac{2}{l_2} \int_0^{l_2} (B_{y,1} - T) \sin \frac{\pi n y}{l_2} dy - C_{6,n} \cosh(v_n l_1)}{\sinh(v_n l_1)},$$

$$C_{6,n} = \frac{2}{l_2} \int_0^{l_2} (B_{y,0}(y) - T(y)) \sin \frac{\pi n y}{l_2} dy.$$

Формули для напружень в клейовому шарі можна отримати з рівнянь (1), диференціюючи (13) і (14). Зусилля в другому шарі знаходяться із співвідношень (3).

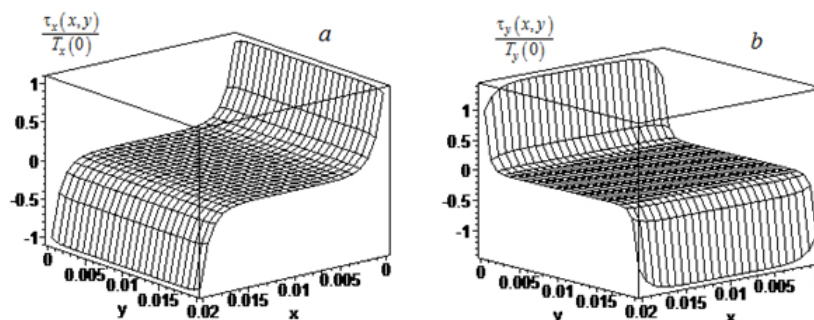
Авторами також доведено, що коефіцієнти рядів Фур'є в виразах (14) і (15) зменшуються пропорційно  $n^{-3}$ , і оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = const$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = const$ , то вирази (14) і (15) допускають дворазове диференціювання і є розв'язками рівнянь (5), (8), (9).

Розглянемо напружений стан з'єднання:  $l_1 = l_2 = 20$  мм,  $\delta_1 = 1$  мм,  $\delta_2 = 0,5$  мм,  $\delta_0 = 0,15$  мм,  $G_0 = 4,2$  ГПа. Перший шар виготовлений з вуглепластика з напрямком армування вздовж осі  $x$  ( $E_x^{(1)} = 181$  ГПа,  $E_y^{(1)} = 10$  ГПа,  $\mu_{xx}^{(1)} = 0,28$ ,  $\alpha_x^{(1)} = -0,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ,  $\alpha_y^{(1)} = 34 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ), другий шар виготовлений із алюмінію ( $E_x^{(2)} = E_y^{(2)} = 72$  ГПа,  $\mu_{xy}^{(2)} = 0,32$ ,  $\alpha_x^{(1)} = \alpha_y^{(1)} = 23,8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ). Навантаження відсутні:

$$N_x^{(k)} \Big|_{x=l_1} = N_x^{(k)} \Big|_{x=0} = 0, \quad N_y^{(k)} \Big|_{y=0} = N_y^{(k)} \Big|_{y=l_2} = 0, \quad k = 1, 2.$$

Вважаємо що з'єднання має рівномірний нагрів до деякої температури. Внаслідок різниці коефіцієнтів лінійного температурного розширення шарів у з'єднанні виникнуть напруження. Графіки дотичних напружень у клейовому шарі наведено на рис. 2. Для того, щоб виключити з дослідження вплив температури, графіки наведено в безрозмірній формі, як відношення діючих напружень до напружень, які розраховано за одновимірною моделлю  $T_{(x)}(x)$  і  $T_{(y)}(y)$ , (7) на краю з'єднання, у зоні де напруження досягають максимальних значень. Таке подання результатів дає можливість оцінити вплив врахування нерівномірності напруженого стану за шириною з'єднання.

Другий розрахунковий випадок – з'єднані дві прямокутні пластини ( $l_1 = 20$  мм,  $l_2 = 30$  мм,  $\delta_1 = 1$  мм,  $\delta_2 = 0,5$  мм,  $\delta_0 = 0,15$  мм,  $G_0 = 4,2$  ГПа) з алюмінію ( $E_x^{(2)} = E_y^{(2)} = 72$  ГПа,  $\mu_{xy}^{(2)} = 0,32$ ,  $\alpha_x^{(1)} = \alpha_y^{(1)} = 23,8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ), які мають різну температуру та вільні від навантаження границі. Напруження наведено в безрозмірній формі на рис. 3.



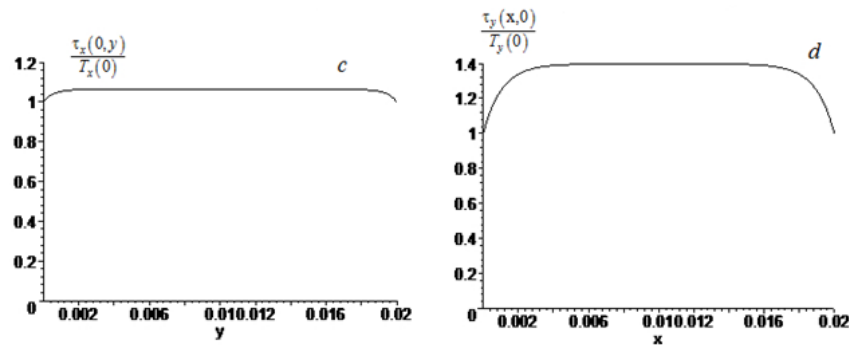


Рис. 2. Дотичні напруження в клеї у площині з'єднання (а), (b), і на границі (с), (d) у з'єднанні алюмінієвої пластини з вуглепластиком

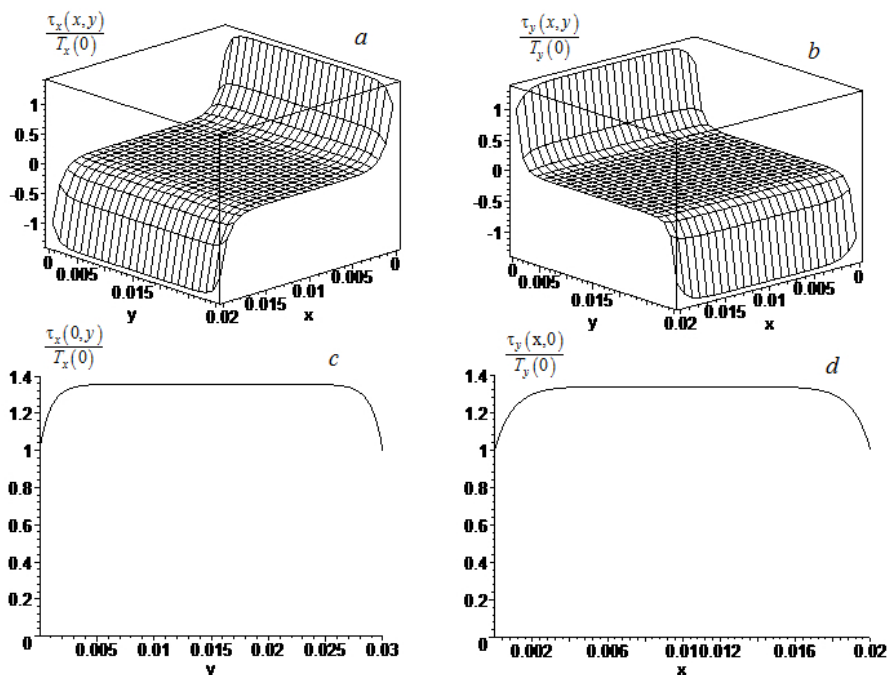


Рис. 3. Дотичні напруження в клеї у площині з'єднання (а), (b), і на границі (с), (d) у з'єднанні двох алюмінієвих пластин.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Аналізуючи результати обчислень можна зробити наступні висновки:

1) Одновимірний модель дає дещо занижені значення максимальних температурних напружень у з'єднанні. Напруження у клейовому шарі, розраховані за двовимірною моделлю можуть перевищувати відповідні напруження, які розраховані за одновимірною моделлю більш ніж на 30%.

2) Розмір з'єднання майже не впливає на максимальні значення напружень, оскільки нерівномірність напруженого стану має місце лише поблизу краю з'єднання.

3) Температурні напруження у клейовому шарі досягають максимальних значень на краю області склеювання, а в середині області – близькі до нуля.

## 6 ВИСНОВКИ

Отримано аналітичний розв'язок задачі про термонапружений стан клейового з'єднання в наближеній двовимірній постановці. Розв'язок отримано за допомогою методу відокремлення змінних и доведено його збіжність. Отримані результати

показали, що температурні напруження, розраховані за одномірною моделлю суттєво нижче, ніж знайдені за запропонованою двовимірною моделлю.

### Література:

1. Volkersen O. Die Niekraft in Zugbeanspruchten mit Konstanten Laschenquerschriften / O. Volkersen // Luftfahrtforschung. – 1938. – Vol. 5. – P. 41–47.
2. Goland M. The stress in cemented joints / M. Goland, E. Reissner // Journal of Applied Mechanics. – 1944. – Vol. 11. – A17–A27.
3. da Silva L. F. M. Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey / L. F. M. da Silva, P. J. C. das Neves, R. D. Adams, J. K Spelt // International Journal of Adhesion & Adhesives. – 2009. - Vol. 29. - P. 319–330. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005
4. Kurennov S. S. Through-thickness stress distribution in the adhesive joint for the multilayer composite material / S. S. Kurennov, A. G. Koshevoi, A. G. Polyakov // Russian Aeronautics (Iz VUZ). – 2015. – Vol. 58, Issue 2. – P. 145–151. DOI: 10.3103/S1068799815020026.
5. Wang J. Three-parameter elastic foundation model for analysis of adhesively bonded joints / J. Wang, C. Zhang // Int. J. Adhes. & Adhes. – 2009. – Vol. 29. – P. 495–502.
6. Rapp P. Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends / P. Rapp // Archives of Civil and Mechanical Engineering. – 2015. - V. 15, I. 2. - P. 603–619. DOI: 10.1016/j.acme.2014.06.004.
7. Adams R. D. Effect of Poisson's ratio strains in adherends on stresses of an idealized lap joint / R. D. Adams, N. A. Peppiatt // J. of Strain Analysis. – 1973. – Vol. 8 (2). – P. 134–139.
8. Mathias J. D. On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches / J. D. Mathias, M. Grédiac, X. Balandraud // Int. J. of Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43. – P. 6921–6947. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.02.016
9. Deheeger A. A closed-form solution for the thermal stress distribution in rectangular metal/composite bonded joints / A. Deheeger, J. D. Mathias, M. Grédiac // Int. J. of Adhesion & Adhesives. – 2009. – Vol. 29. – P. 515–524. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.10.004
10. Randrianalisoa J. On the thermomechanical behavior of two-dimensional foam/metal joints with shear-deformable adherends – Parametric study / J. Randrianalisoa, R. Dendievel, Y Bréchet // Composites: Part B. – 2011. – Vol. 42. – P. 2055–2066. DOI: 10.1016/j.compositesb.2011.04.011
11. Kima H. S. Three dimensional stress analysis of a composite patch using stress functions / H. S. Kima, M. Cho, J. Lee, A. Deheeger, J. D. Mathias, M. Grédiac // Int. J. of Mechanical Sciences. – 2010. – Vol. 52. – P. 1646–1659. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2010.08.006
12. Kurennov S. S. An Approximate Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Analytical Solution / S. S. Kurennov // Mechanics of Composite Materials. – 2014. – V. 50, Issue 1. – P. 105–114, DOI: 10.1007/s11029-014-9397-z.

#### **Куреннов Сергій Сергійович**

Національний аерокосмічний університет ім. М.С. Жуковського «ХАІ», д.т.н., професор  
вул. Чкалова, 17, Харків, Україна 61070

ss.kurennov@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3835-3288

#### **Барахов Костянтин Петрович**

Національний аерокосмічний університет ім. М.С. Жуковського «ХАІ», ст. викладач  
вул. Чкалова, 17, Харків, Україна 61070

kpbarakhov@gmail.com

ORCID: 0000-0003-1714-7917

#### *Для посилань:*

Куреннов С. С. Температурні напруження у клейовому з'єднанні. спрощена двовимірною моделлю / С. С. Куреннов, К. П. Барахов // Механіка та математичні методи. – 2019. – №2. – С. 36-45.

#### *For references:*

Kurennov, S., Barakhov, K., (2019). The temperature stresses in the adhesive joint. A simplified two-dimensional model. Mechanics and Mathematical Methods, 2, 36-45



UDK 624.072.2

## THE EXACT SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL EQUATION OF THE COMPELLED CROSS VIBRATIONS OF THE CORE WITH ANY CONTINUOUS PARAMETERS

Yu. Krutii<sup>1</sup>, M. Surianinov<sup>1</sup>, V. Osadchiy<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract:** The compelled cross vibrations of a core with any continuous variable parameters, loaded with evenly distributed harmonious loading are considered. The exact solution of the corresponding differential equation of vibrations in partial derivatives is constructed for the first time. As a result, in an analytical look formulas for dynamic movements and internal efforts in any section of a core are received. A practically important case is considered when the external dynamic load acting on the core is harmonic. For the external friction, the hypothesis is accepted according to which the resistance force is proportional to the mass and speed of the core, and the internal friction is taken into account according to the Kelvin-Voigt hypothesis, where the internal resistance force is proportional to the first degree of the strain rate.

As is known, the Kelvin-Voigt hypothesis in its pure form has several disadvantages. The main one is that it leads to a contradictory experimental data conclusion about the frequency-dependent internal friction in the material. This drawback can be eliminated if we accept the adjusted Kelvin-Voigt hypothesis, according to which the coefficient of internal friction is chosen inversely proportional to the frequency with which the structure oscillates.

The dynamic parameters of the core are fully defined. The obtained formulas contain unknown constants in the form of initial values of real and imaginary components (initial parameters). Additionally, the formulas which are equivalent to them are proposed. They are recommended for practical use during the study of the oscillations, which are different, the amplitude functions of dynamic parameters are clearly distinguished in them.

The solution of this problem opens up the prospect of creating a new method for studying the transverse vibrations of the cores with arbitrary continuous parameters taking into account the resistances. For this purpose, it is sufficiently to indicate an effective method for the numerical implementation of the exact solutions.

The integration of fourth-order linear ordinary differential equations with variable coefficients leads to problems associated with calculating the parameters of various systems; therefore, the method for solving the problem proposed in the article has a value that goes far beyond the limits of the considered problem.

**Keywords:** cross vibrations of a core, variable parameters, harmonic load, equation of oscillations, Kelvin-Voigt hypothesis, exact solution.

## ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВИМУШЕНИХ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ СТРИЖНЯ З ДОВІЛЬНИМИ НЕПЕРЕРВНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Крутій Ю. С.<sup>1</sup>, Сур'янінов М. Г.<sup>1</sup>, Осадчий В. С.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація:** Розглядаються вимушені поперечні коливання стрижня з довільними неперервними змінними параметрами, навантаженого рівномірно розподіленим гармонійним навантаженням. Вперше побудовано точний розв'язок відповідного диференціального рівняння коливань в частинних похідних. Як наслідок, в



аналітичному вигляді одержано формули для динамічних переміщень і внутрішніх зусиль в довільному перерізі стержня. Розглянуто практично важливий випадок, коли діюче на стрижень зовнішня динамічне навантаження є гармонійним. Для зовнішнього тертя приймається гіпотеза, згідно з якою сила опору пропорційна масі стержня і швидкості, а внутрішнє тертя враховується за гіпотезою Кельвіна-Фохта, згідно з якою сила внутрішнього опору пропорційна першому степеню швидкості деформації.

Як відомо, гіпотеза Кельвіна-Фохта в її чистому вигляді має ряд недоліків. Головний з них полягає в тому, що вона призводить до суперечливого дослідним даним висновку про частотно-залежне внутрішнє тертя в матеріалі. Зазначений недолік може бути усунутий, якщо прийняти скориговану гіпотезу Кельвіна-Фохта, згідно з якою коефіцієнт внутрішнього тертя вибирається обернено пропорційним частоті, з якою коливається конструкція.

Повністю визначені динамічні параметри стержня. Отримані формули містять невідомі сталі у вигляді початкових значень дійсних і уявних складових (початкові параметри). Додатково запропоновані рівносильні їм формули, які рекомендуються для практичного застосування при дослідженні коливань, які відрізняються тим, що в них явно виділені амплітудні функції динамічних параметрів.

Розв'язок поставленої проблеми відкриває перспективу для створення нового методу дослідження поперечних коливань стержнів з довільними неперервними параметрами з урахуванням опорів. Для цього достатньо вказати ефективний метод чисельної реалізації знайдених в роботі точних розв'язків.

До інтегрування лінійних звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами призводять завдання, пов'язані з розрахунками параметрів різноманітних систем, тому запропонований в статті метод розв'язання задачі має значення, що виходить далеко за межі розглянутої проблеми.

**Ключові слова:** Вимушені коливання стержня, змінні параметри, гармонійне навантаження, рівняння коливань, гіпотеза Кельвіна-Фохта, точний розв'язок.

## 1 INTRODUCTION

It is commonly known, the estimation of bearing ability of any design typically involves issues of strength, stability and dynamics. Historically, the most structural elements in various branches of technology were carried out with the constant geometric parameters in terms of cross section. From the mathematical point of view, in the calculations it leads to differential equations (or their systems) with the constant coefficients. The exact solutions of such equations are made in many cases. If it is impossible to do the approximate or numerical methods are used.

However, the development of technology, the construction of large buildings, the success of aviation, aerospace, shipbuilding have highlighted the issue of reduction in consumption of materials. One of the most effective ways to achieve this goal is the design of systems with variable parameters, in particular, variable stiffness. In the calculations of such systems the differential equations (or systems of equations) with variable coefficients have to be dealt with. The success of mathematics in the solution of these equations looks rather modestly. Only certain special cases of the construction of exact solutions are known. This work is devoted to the actual problem, namely, the formation of exact solution of the differential equation of core's forced transverse vibrations with arbitrary continuous parameters.

## 2 LITERATURE DATA ANALYSIS AND TARGET SETTING

The integration of linear ordinary fourth-order differential equations with variable coefficients is led by the problems associated with calculating the parameters of various core systems, which are of great practical importance for various fields of technology. We note the work of I. Babakov [1], T. Danilevich [2], O. Galas [3], G. Maslov [4], V. Svetlitskii [5-6], E. Kharchenko [7-9], F. Shevchenko [10]. Asymptotic or numerical methods of solution are used in these works.

This article is devoted to the compelled cross vibrations of direct, generally speaking, non-uniform core of variable cross section of length  $l$ , taking into account resistances.

We will combine an axis  $x$  with the line of the centers of gravity of cross sections of a core and we will consider that its ends lie in points  $x=0$  and  $x=l$ . Downward deflections of the core are considered to be positive deflections.

The general scheme of vibrations is submitted in fig. 1. in fig. 2 the scheme of operating efforts to a core element is represented at fluctuations.

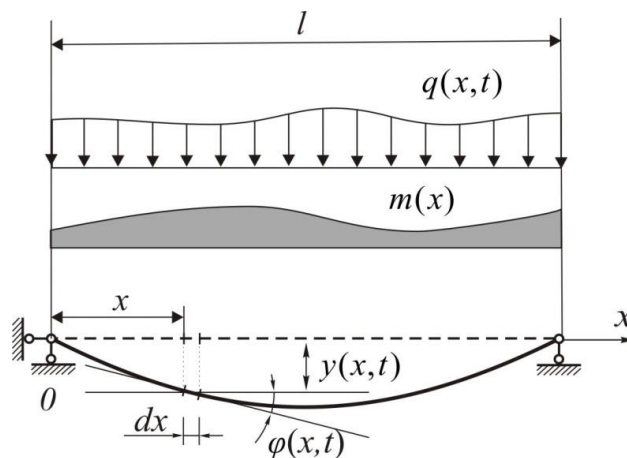


Fig. 1. Forced cross vibrations of the core



Kelvin-Voigt hypothesis [12] according to which force of internal resistance is proportional to the first degree of speed of deformation. In that case for intensity of forces of resistance we will have:

$$p(x,t) = \alpha m(x) \frac{\partial y}{\partial t}; \quad r(x,t) = \beta \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E(x)I(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right], \quad (3)$$

where  $\alpha, \beta$  – constant coefficients of external and internal friction respectively.

Equation (1) taking into account (2), (3) assumes following form

$$\left( 1 + \beta \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E(x)I(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha m(x) \frac{\partial y}{\partial t} = q(x) \sin \theta t. \quad (4)$$

Let cross rigidity  $E(x)I(x)$ , running mass of the core  $m(x)$  and amplitude function of loading  $q(x)$  represent any continuous functions of coordinate  $x$ .

However, as we know, it is not possible to find exact solutions of differential equations with variable coefficients in the most cases. This circumstance was one of the main reasons for rapid development of approximate methods.

Above mentioned is also fully applicable to the equation (4). For example, in widely known monograph [13], in regard to the special case of the equation (4) when  $\alpha = \beta = 0$  and  $q(x) \equiv 0$ , they say that it is possible to receive the exact solution only in some special cases. Therefore the performance task, even in that specific case  $\alpha = \beta = 0$  and  $q(x) = 0$ , represents a difficult and actual scientific problem. It is quite clear that the existence of transversal loading and resisting forces in the equation (4) only complicate this problem.

Kelvin – Voigt hypothesis in its pure form is reported to have several disadvantages [15, 16]. The main one is that it leads to a contradictory experimental data conclusion about the frequency-dependent internal friction in the material. This disadvantage can be avoided if we accept the adjusted Kelvin – Voigt hypothesis [15], according to which the coefficient  $\beta$  is chosen inversely proportional to the frequency with which the structure oscillates. Accepting the version of frequency-independent friction for external forces [15], for the coefficients of external and internal friction we assume:

where  $\nu$  – is the coefficient of inelastic resistance of the circumscription,  $\gamma$  – is the coefficient of inelastic resistance of the material of the rod.

### 3 PURPOSE AND OBJECTIVES OF RESEARCH

The purpose of this article is to construct an accurate solution of forced transverse vibrations of the core with arbitrary continuous variable parameters, loaded with a uniformly distributed harmonic load. Using the predicted solution, it is required to obtain the formulas in an analytical form for dynamic displacements and dynamic internal forces in an arbitrary section of the core.

### 4 RESEARCH RESULTS

The solution of the equation (4) will be found out with the generalized separation of the variables

$$y(x,t) = y_1(x) \sin \theta t + y_2(x) \cos \theta t, \quad (5)$$

where  $y_1(x), y_2(x)$  - are unknown functions depending only on a variable  $x$ .

Having accepted the formula for a dynamic deflection in the form of (5), for other *dynamic parameters* of core's state, namely, for the angle of rotation, deflection moment and transversal force, there will be:

$$\varphi(x,t) = \varphi_1(x)\sin \theta t + \varphi_2(x)\cos \theta t ; \quad (6)$$

$$M(x,t) = M_1(x)\sin \theta t + M_2(x)\cos \theta t ; \quad (7)$$

$$Q(x,t) = Q_1(x)\sin \theta t + Q_2(x)\cos \theta t , \quad (8)$$

where

$$\varphi_j(x) = y_j'(x); \quad M_j(x) = -E(x)I(x)\varphi_j'(x); \quad Q_j(x) = M_j'(x) \quad (j=1,2) . \quad (9)$$

Therefore, the dynamic parameters will be defined completely by the functions  $y_j(x)$ ,  $\varphi_j(x)$ ,  $M_j(x)$ ,  $Q_j(x)$ , ( $j=1,2$ ), which we will call *components* for the dynamic parameters.

Substituting in the equation (4) its representation (5) instead of unknown function  $y(x,t)$ , after apparent transformations, there will be

$$\begin{aligned} & \left[ (E(x)I(x)y_1''(x))'' - \theta^2 m(x)(y_1(x) + \nu y_2(x)) - \gamma(E(x)I(x)y_2''(x))'' - q(x) \right] \sin \theta t + \\ & + \left[ (E(x)I(x)y_2''(x))'' - \theta^2 m(x)(y_2(x) - \nu y_1(x)) + \gamma(E(x)I(x)y_1''(x))'' \right] \cos \theta t = 0. \end{aligned}$$

This equality is obliged to be for any value  $t$ , that can be achieved, only having equated to zero multipliers at the functions  $\sin \theta t$  and  $\cos \theta t$ . After that we will have the system of two differential equations which we will write down in a matrix form

$$\begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (E(x)I(x)y_1''(x))'' \\ (E(x)I(x)y_2''(x))'' \end{pmatrix} = \theta^2 m(x) \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

The constant matrixes, appearing in the record of system, are given by the uniform homothetic transformation to a diagonal look:

$$S^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1+i\gamma & 0 \\ 0 & 1-i\gamma \end{pmatrix}; \quad S^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ -\nu & 1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1-i\nu & 0 \\ 0 & 1+i\nu \end{pmatrix},$$

where  $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$  – is transforming matrix ( $i$  – imaginary unit). Thereof, carrying out the substitution (9)

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} z(x) \\ \overline{z(x)} \end{pmatrix},$$

where

$$z(x) = \frac{y_1(x) + iy_2(x)}{2}, \quad \overline{z(x)} = \frac{y_1(x) - iy_2(x)}{2}, \quad (10)$$

– new unknown functions, we come to two self-contained equations

$$(1+i\gamma)((E(x)I(x)z''(x))'' - \theta^2(1-i\nu)m(x)z(x) = \frac{q(x)}{2}, \quad (11)$$



$$(1 - i\gamma) \left( E(x)I(x)\overline{z(x)}'' \right)'' - \theta^2(1 + i\nu)m(x)\overline{z(x)} = \frac{q(x)}{2}. \quad (12)$$

It is important to notice that each of the equations (11), (12) is derived from another one by the method of complex conjugation. Therefore, if  $z(x)$  is the solution of the first equation, the solution of the second will be  $\overline{z(x)}$ , and vice versa. Therefore it makes sense to consider only one of these equations.

Let's choose for further consideration the equation (11), which we will copy as follow

$$(E(x)I(x)z''(x))'' - \lambda^2 m(x)z(x) = \frac{q(x)}{2(1 + i\gamma)}, \quad (13)$$

where  $\lambda^2 = \theta^2 \frac{1 - i\nu}{1 + i\gamma}$ .

Let's put in compliance to the equation (13) The system of differential equations equivalent to it. Thus as a vector of indeterminate we will accept the following vector

$$Z(x) = \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ -E(x)I(x)z''(x) \\ -(E(x)I(x)z''(x))' \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Then

$$\frac{dZ(x)}{dx} = P(x)Z(x) - f(x), \quad (15)$$

where

$$P(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{E(x)I(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda^2 m(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = \frac{q(x)}{2(1 + i\gamma)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

At the beginning we will find the fundamental solutions of the homogeneous equation

$$(E(x)I(x)z''(x))'' - \lambda^2 m(x)z(x) = 0, \quad (16)$$

to which the homogeneous system will be corresponded

$$\frac{dZ(x)}{dx} = P(x)Z(x). \quad (17)$$

For this purpose we will insert into consideration four infinite systems of unknowns for four times continuously differentiable functions  $b_{n,0}(x), b_{n,k}(x) (n = 1, 2, 3, 4) (k = 1, 2, 3, \dots)$ . By means of these functions and their derivatives we form the following ranks on parameter degrees  $\lambda^2$ :

$$U_n(x) = b_{n,0}(x) + \lambda^2 b_{n,1}(x) + \lambda^4 b_{n,2}(x) + \lambda^6 b_{n,3}(x) + \dots; \quad (18)$$

$$U'_n(x) = b'_{n,0}(x) + \lambda^2 b'_{n,1}(x) + \lambda^4 b'_{n,2}(x) + \lambda^6 b'_{n,3}(x) + \dots; \quad (19)$$

$$U''_n(x) = b''_{n,0}(x) + \lambda^2 b''_{n,1}(x) + \lambda^4 b''_{n,2}(x) + \lambda^6 b''_{n,3}(x) + \dots; \quad (20)$$

$$(E(x)I(x)U_n''(x))' = (E(x)I(x)b_{n,0}''(x))' + \lambda^2(E(x)I(x)b_{n,1}''(x))' + \lambda^4(E(x)I(x)b_{n,2}''(x))' + \dots; \quad (21)$$

$$(E(x)I(x)U_n''(x))'' = (E(x)I(x)b_{n,0}''(x))'' + \lambda^2(E(x)I(x)b_{n,1}''(x))'' + \lambda^4(E(x)I(x)b_{n,2}''(x))'' + \dots. \quad (22)$$

So we assume that all the ranks evenly converge on the segment  $x \in [0, l]$ .

Unknown functions  $b_{n,0}(x), b_{n,k}(x) (n=1,2,3,4) (k=1,2,3,\dots)$  Will be found from the statement that  $U_n(x)$  Satisfies the equation (16), that is

$$(E(x)I(x)U_n''(x))'' - \lambda^2 m(x)U_n(x) = 0 \quad (n=1,2,3,4). \quad (23)$$

Then, taking into account the formulas (18), (22), we come to solve the equality

$$(E(x)I(x)b_{n,0}''(x))'' + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} \left( (E(x)I(x)b_{n,k}''(x))'' - m(x)b_{n,k-1}(x) \right) = 0.$$

Thus, equating to zero all the coefficients at degrees  $\lambda^2$ , including zero degree, we will have:

$$(E(x)I(x)b_{n,0}''(x))'' = 0; \quad (24)$$

$$(E(x)I(x)b_{n,k}''(x))'' = m(x)b_{n,k-1}(x) \quad (k=1,2,3,\dots). \quad (25)$$

It is easy to write out fundamental system of solutions (24). Before integrating the equation (25), for all  $n=1,2,3,4$  we will set boundary conditions

$$b_{n,k}(0) = b_{n,k}'(0) = E(0)I(0)b_{n,k}''(0) = (E(0)I(0)b_{n,k}''(0))' = 0 \quad (k=1,2,3,\dots). \quad (26)$$

As a result we will have:

$$b_{n,0}(x) = x^{n-1} (n=1,2), \quad b_{n,0}(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{x^{n-3}}{E(x)I(x)} dx dx \quad (n=3,4); \quad (27)$$

$$b_{n,k}(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{1}{E(x)I(x)} \int_0^x \int_0^x m(x)b_{n,k-1}(x) dx dx dx dx \quad (k=1,2,3,\dots). \quad (28)$$

Thus, accordingly to the recursion formula (28), each *initial* function  $b_{n,0}(x)$  has its own multiplicity of functions  $b_{n,k}(x) (k=1,2,3,\dots)$  which will be called *generating*. For such functions the equalities (23) are identically kept under the formation.

For descriptive reasons we will write down the formula (28) also in expanded form

$$b_{n,k}(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{1}{E(x)I(x)} \int_0^x \int_0^x m(x) \dots \int_0^x \int_0^x \frac{1}{E(x)I(x)} \int_0^x \int_0^x m(x)b_{n,0}(x) dx dx dx dx \dots dx dx dx dx. \quad (29)$$

The number of integrals in this formula, without considering the integrals which may contain initial functions, is equal to  $4k$ .

We investigate now a row (18) as for convergence. To construct majorant row, the positive constants will be used.

$$g_1 = \max_{x \in [0, l]} m(x), \quad g_2 = \max_{x \in [0, l]} \frac{1}{E(x)I(x)}, \quad h_n = \max_{x \in [0, l]} |b_{n,0}(x)|.$$

Then for forming functions (30) from the formula there are some estimates





$$|b_{n,k}(x)| \leq h_n (g_1 g_2)^k \left| \int_0^x \int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x \int_0^x \int_0^x dx dx \dots dx dx \right| = h_n (g_1 g_2)^k \frac{x^{4k}}{(4k)!} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Hence, for the row, made from the modules we receive

$$|b_{n,0}(x)| + |\lambda^2 b_{n,1}(x)| + |\lambda^4 b_{n,2}(x)| + \dots \leq h_n \left( 1 + g_1 g_2 \lambda^2 \frac{x^4}{4!} + (g_1 g_2)^2 \lambda^4 \frac{x^8}{8!} + \dots \right) = \frac{h_n}{2} \left( \operatorname{ch} \sqrt[4]{g_1 g_2 \lambda^2} x + \operatorname{cos} \sqrt[4]{g_1 g_2 \lambda^2} x \right).$$

The majorant one within the multiplier is apparently the sum of the elementary functions. Each of them is defined by the row which evenly meets. Therefore, the row made of modules also meets evenly. The ranks (18) are proved to meet absolutely and evenly.

Similarly it is possible to prove absolute and uniform convergence of the ranks (19) - (21). Convergence of the row (22) does not demand the separate proof as it, according to the identity (23), differs from the row (18) only by a multiplier. As a result, ranks (18) - (21) can be differentiated termwise, so, the designations,  $U'_n(x), U''_n(x), (E(x)I(x)U''_n(x))', (E(x)I(x)U''_n(x))''$  for ranks (19) - (22) are true.

Therefore, four solutions  $U_n(x) (n=1,2,3,4)$  of the equation (16) are defined by formulas (18), (27) - (29). According to formula (14) we receive four vectors – system solutions (17)

$$Z_n(x) = \begin{pmatrix} U_n(x) \\ U'_n(x) \\ -E(x)I(x)U''_n(x) \\ -(E(x)I(x)U''_n(x))' \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, 4). \tag{30}$$

Then the matrix, made of these vectors,

$$\Omega(x) = \|Z_1(x) \ Z_2(x) \ Z_3(x) \ Z_4(x)\|,$$

also satisfies the system.

Let's calculate the value  $\Omega(0)$ . For this purpose at the beginning the formula for calculation  $Z_n(0) (n=1,2,3,4)$  has to be worked out. Having  $x=0$  in formulas (18) - (21) and considering boundary conditions (26), we receive

$$Z_n(0) = \begin{pmatrix} U_n(0) \\ U'_n(0) \\ -E(0)I(0)U''_n(0) \\ -(E(0)I(0)U''_n(0))' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n,0}(0) \\ b'_{n,0}(0) \\ -E(0)I(0)b''_{n,0}(0) \\ -(E(0)I(0)b''_{n,0}(0))' \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Hence

$$Z_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Therefore,

$$\Omega(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

For Wronskian  $W(x) = |\Omega(x)|$ , considering equality (32), we receive  $W(0) = 1 \neq 0$ . So the vectors (30) are independent linearly. The matrix  $\Omega(x)$  is a fundamental matrix of system (17).

Multiplying on the right  $\Omega(x)$  by a constant matrix  $\Omega^{-1}(0)$ , we will receive a new fundamental matrix

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} U_1(x) & U_2(x) & -U_3(x) & -U_4(x) \\ U_1'(x) & U_2'(x) & -U_3'(x) & -U_4'(x) \\ -E(x)I(x)U_1''(x) & -E(x)I(x)U_2''(x) & E(x)I(x)U_3''(x) & E(x)I(x)U_4''(x) \\ -(E(x)I(x)U_1''(x))' & -(E(x)I(x)U_2''(x))' & (E(x)I(x)U_3''(x))' & (E(x)I(x)U_4''(x))' \end{pmatrix},$$

for which

$$\Lambda(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

The fundamental matrix, meeting the condition (33), is unambiguously and is called as a matrizant [17]. Considering that,  $SpP(x) = 0$  for the determinant of the matrizant by formula of Jacobi [17] we have

$$W(x) = |\Lambda(x)| = |\Lambda(0)| \exp \left( \int_0^x SpP(x) dx \right) = 1. \quad (34)$$

Using the properties of the determinants, it is possible to establish the dependence between Wronskian  $W(x)$  of vector system (30) and Wronskian  $w(x)$  of function system  $U_n(x)$  ( $n=1,2,3,4$ )

$$w(x) = \begin{vmatrix} U_1(x) & U_2(x) & U_3(x) & U_4(x) \\ U_1'(x) & U_2'(x) & U_3'(x) & U_4'(x) \\ U_1''(x) & U_2''(x) & U_3''(x) & U_4''(x) \\ U_1'''(x) & U_2'''(x) & U_3'''(x) & U_4'''(x) \end{vmatrix}.$$

This dependence will be expressed by the equality  $W(x) = (E(x)I(x))^2 w(x)$ . Then taking into account (34) We receive  $w(x) = 1/(E(x)I(x))^2 \neq 0$ .

As the linear independence of the relevant system of functions [17] follows from an inequality to zero of Wronskian, functions  $U_n(x)$  ( $n=1,2,3,4$ ) are independent linearly, so, they form fundamental system of solutions of the equation (16).

For the specific solution of the nonuniform equation (13) there is

$$U_*(x) = \frac{1}{2(1+i\gamma)} U_5(x). \quad (35)$$



Thus  $U_5(x)$  by analogy to the formula (18) we will search as follows

$$U_5(x) = b_{5,0}(x) + \lambda^2 b_{5,1}(x) + \lambda^4 b_{5,2}(x) + \lambda^6 b_{5,3}(x) + \dots, \quad (36)$$

where the functions  $b_{5,k}(x)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) can be defined.

Substituting the value  $U_*(x)$  in the equation (13), we will receive

$$(E(x)I(x)b_{5,0}''(x))'' - q(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} \left( (E(x)I(x)b_{5,k}''(x))'' - m(x)b_{5,k-1}''(x) \right) = 0.$$

For satisfaction of this equality, it is necessary to equate to zero all the coefficients at degrees  $\lambda^2$ , starting from zero degree. The coefficient at zero degree is apparently equal to  $(E(x)I(x)b_{5,0}''(x))'' - q(x)$ . Therefore, we will have:

$$(E(x)I(x)b_{5,0}''(x))'' = q(x); \quad (37)$$

$$(E(x)I(x)b_{5,k}''(x))'' = m(x)b_{5,k-1}''(x) \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (38)$$

The quality (38) is similar to the equality (25) by its form, and the equality (37) differs from the equality (24) by existence of a right part. For required forming functions  $b_{5,k}(x)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) the formulas (28), (29) will be fair but taking into account  $n = 5$ . We will choose the following partial solution of the equation (37) as an initial function

$$b_{5,0}(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{1}{E(x)I(x)} \int_0^x \int_0^x q(x) dx dx dx dx.$$

But the property of an initial function is

$$b_{5,0}(0) = b_{5,0}'(0) = E(0)I(0)b_{5,0}''(0) = (E(0)I(0)b_{5,0}''(0))' = 0. \quad (39)$$

Thereby, the partial solution of the equation (13) is found. According to the known partial solution (35) we form a vector

$$\Psi_5(x) = \frac{1}{2(1+i\beta\theta)} \begin{pmatrix} U_5(x) \\ U_5'(x) \\ -E(x)I(x)U_5''(x) \\ -(E(x)I(x)U_5''(x))' \end{pmatrix},$$

which will be the partial solution of the system (15), what can be easily proved by the substitution. Besides, taking into account (31), (39), there is

$$\Psi_5(0) = \frac{1}{2(1+i\beta\theta)} \begin{pmatrix} U_5(0) \\ U_5'(0) \\ -E(0)I(0)U_5''(0) \\ -(E(0)I(0)U_5''(0))' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finally, the general solution of the system (15) looks like [17]

$$Z(x) = \Lambda(x)Z(0) + \Psi_5(x). \quad (40)$$

On the other hand, differentiating the first formulas (10) and considering thus for the vector  $Z(x)$  we will receive

$$Z(x) = \begin{pmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ -E(x)I(x)z''(x) \\ -(E(x)I(x)z''(x))' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} y_1(x) + iy_2(x) \\ \varphi_1(x) + i\varphi_2(x) \\ M_1(x) + iM_2(x) \\ Q_1(x) + iQ_2(x) \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Having regard to (41), the matrix equality (40) Has to be rewritten in extended form. As a result we will come to the formulas:

$$\frac{y_1(x) + iy_2(x)}{2} = \frac{y_1(0) + iy_2(0)}{2} U_1(x) + \frac{\varphi_1(0) + i\varphi_2(0)}{2} U_2(x) - \frac{M_1(0) + iM_2(0)}{2} U_3(x) - \frac{Q_1(0) + iQ_2(0)}{2} U_4(x) + \frac{1}{2(1+i\gamma)} U_5(x); \quad (42)$$

$$\frac{\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)}{2} = \frac{y_1(0) + iy_2(0)}{2} U'_1(x) + \frac{\varphi_1(0) + i\varphi_2(0)}{2} U'_2(x) - \frac{M_1(0) + iM_2(0)}{2} U'_3(x) - \frac{Q_1(0) + iQ_2(0)}{2} U'_4(x) + \frac{1}{2(1+i\gamma)} U'_5(x); \quad (43)$$

$$\frac{M_1(x) + iM_2(x)}{2} = -E(x)I(x) \left( \frac{y_1(0) + iy_2(0)}{2} U''_1(x) + \frac{\varphi_1(0) + i\varphi_2(0)}{2} U''_2(x) - \frac{M_1(0) + iM_2(0)}{2} U''_3(x) - \frac{Q_1(0) + iQ_2(0)}{2} U''_4(x) + \frac{1}{2(1+i\gamma)} U''_5(x) \right); \quad (44)$$

$$\frac{Q_1(x) + iQ_2(x)}{2} = -\frac{y_1(0) + iy_2(0)}{2} (E(x)I(x)U''_1(x))' - \frac{\varphi_1(0) + i\varphi_2(0)}{2} (E(x)I(x)U''_2(x))' + \frac{M_1(0) + iM_2(0)}{2} (E(x)I(x)U''_3(x))' + \frac{Q_1(0) + iQ_2(0)}{2} (E(x)I(x)U''_4(x))' - \frac{1}{2(1+i\gamma)} (E(x)I(x)U''_5(x))'. \quad (45)$$

So, the complex functions, which real part is the components  $y_1(x)$ ,  $\varphi_1(x)$ ,  $M_1(x)$ ,  $Q_1(x)$ , are found, and the imaginary part are the components  $y_2(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $M_2(x)$ ,  $Q_2(x)$ . Adapted to circumstances, we will distinguish the *real and imaginary components* of dynamic parameters (5) - (8).

$U_n(x) = \text{Re}U_n(x) + i \text{Im}U_n(x)$  ( $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ) are used and the right members of the formulas (42) - (45) are transformed, having allocated there the real and imaginary parts. As a result, for the real components of dynamic parameters we will receive:

$$y_1(x) = y_1(0) \text{Re}U_1(x) + \varphi_1(0) \text{Re}U_2(x) - M_1(0) \text{Re}U_3(x) - Q_1(0) \text{Re}U_4(x) - y_2(0) \text{Im}U_1(x) - \varphi_2(0) \text{Im}U_2(x) + M_2(0) \text{Im}U_3(x) + Q_2(0) \text{Im}U_4(x) + \frac{1}{1+\gamma^2} (\text{Re}U_5(x) + \gamma \text{Im}U_5(x)); \quad (46)$$

$$\varphi_1(x) = y_1(0) \text{Re}U'_1(x) + \varphi_1(0) \text{Re}U'_2(x) - M_1(0) \text{Re}U'_3(x) - Q_1(0) \text{Re}U'_4(x) - y_2(0) \text{Im}U'_1(x) - \varphi_2(0) \text{Im}U'_2(x) + M_2(0) \text{Im}U'_3(x) + Q_2(0) \text{Im}U'_4(x) + \frac{1}{1+\gamma^2} (\text{Re}U'_5(x) + \gamma \text{Im}U'_5(x)); \quad (47)$$

$$\begin{aligned}
 M_1(x) = & -E(x)I(x)[y_1(0)\operatorname{Re}U_1''(x) + \varphi_1(0)\operatorname{Re}U_2''(x) - M_1(0)\operatorname{Re}U_3''(x) - \\
 & -Q_1(0)\operatorname{Re}U_4''(x) - y_2(0)\operatorname{Im}U_1''(x) - \varphi_2(0)\operatorname{Im}U_2''(x) + M_2(0)\operatorname{Im}U_3''(x) + \\
 & + Q_2(0)\operatorname{Im}U_4''(x) + \frac{1}{1+\gamma^2}(\operatorname{Re}U_5''(x) + \gamma\operatorname{Im}U_5''(x))];
 \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
 Q_1(x) = & -y_1(0)(E(x)I(x)\operatorname{Re}U_1''(x))' - \varphi_1(0)(E(x)I(x)\operatorname{Re}U_2''(x))' + \\
 & + M_1(0)(E(x)I(x)\operatorname{Re}U_3''(x))' + Q_1(0)(E(x)I(x)\operatorname{Re}U_4''(x))' + \\
 & + y_2(0)(E(x)I(x)\operatorname{Im}U_1''(x))' + \varphi_2(0)(E(x)I(x)\operatorname{Im}U_2''(x))' - \\
 & - M_2(0)(E(x)I(x)\operatorname{Im}U_3''(x))' - Q_2(0)(E(x)I(x)\operatorname{Im}U_4''(x))' - \\
 & - \frac{1}{1+\gamma^2}((E(x)I(x)\operatorname{Re}U_5''(x))' + \gamma(E(x)I(x)\operatorname{Im}U_5''(x))').
 \end{aligned} \tag{49}$$

For imaginary components of dynamic parameters we will have:

$$\begin{aligned}
 y_2(x) = & y_2(0)\operatorname{Re}U_1(x) + \varphi_2(0)\operatorname{Re}U_2(x) - M_2(0)\operatorname{Re}U_3(x) - Q_2(0)\operatorname{Re}U_4(x) + \\
 & + y_1(0)\operatorname{Im}U_1(x) + \varphi_1(0)\operatorname{Im}U_2(x) - M_1(0)\operatorname{Im}U_3(x) - Q_1(0)\operatorname{Im}U_4(x) + \\
 & + \frac{1}{1+\gamma^2}(\operatorname{Im}U_5(x) - \gamma\operatorname{Re}U_5(x));
 \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_2(x) = & y_2(0)\operatorname{Re}U_1'(x) + \varphi_2(0)\operatorname{Re}U_2'(x) - M_2(0)\operatorname{Re}U_3'(x) - Q_2(0)\operatorname{Re}U_4'(x) + \\
 & + y_1(0)\operatorname{Im}U_1'(x) + \varphi_1(0)\operatorname{Im}U_2'(x) - M_1(0)\operatorname{Im}U_3'(x) - Q_1(0)\operatorname{Im}U_4'(x) + \\
 & + \frac{1}{1+\gamma^2}(\operatorname{Im}U_5'(x) - \gamma\operatorname{Re}U_5'(x));
 \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
 M_2(x) = & -E(x)I(x)[y_2(0)\operatorname{Re}U_1''(x) + \varphi_2(0)\operatorname{Re}U_2''(x) - M_2(0)\operatorname{Re}U_3''(x) - \\
 & - Q_2(0)\operatorname{Re}U_4''(x) + y_1(0)\operatorname{Im}U_1''(x) + \varphi_1(0)\operatorname{Im}U_2''(x) - M_1(0)\operatorname{Im}U_3''(x) - \\
 & - Q_1(0)\operatorname{Im}U_4''(x) + \frac{1}{1+\gamma^2}(\operatorname{Im}U_5''(x) - \gamma\operatorname{Re}U_5''(x))];
 \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2(x) = & -y_2(0)(E(x)I(x)\operatorname{Re}U_1''(x))' - \varphi_2(0)(E(x)I(x)\operatorname{Re}U_2''(x))' + \\
 & + M_2(0)(E(x)I(x)\operatorname{Re}U_3''(x))' + Q_2(0)(E(x)I(x)\operatorname{Re}U_4''(x))' - \\
 & - y_1(0)(E(x)I(x)\operatorname{Im}U_1''(x))' - \varphi_1(0)(E(x)I(x)\operatorname{Im}U_2''(x))' + \\
 & + M_1(0)(E(x)I(x)\operatorname{Im}U_3''(x))' + Q_1(0)(E(x)I(x)\operatorname{Im}U_4''(x))' - \\
 & - \frac{1}{1+\gamma^2}((E(x)I(x)\operatorname{Im}U_5''(x))' - \gamma(E(x)I(x)\operatorname{Re}U_5''(x))').
 \end{aligned} \tag{53}$$

For the sake of clarity it was necessary to indicate the real and imaginary parts at functions  $U_n(x)$  ( $n=1,2,3,4,5$ ) in an explicit form. As a result we will present number  $\lambda^2$  in a trigonometrical form.

On the basis of trigonometrical form of numbers' designation  $1-iv$  and  $1+i\gamma$ , for number  $\lambda^2$  we will have

$$\lambda^2 = \theta^2 \frac{1-iv}{1+i\gamma} = \theta^2 \sqrt{\frac{1+v^2}{1+\gamma^2}} (\cos\delta - i\sin\delta),$$

where  $\delta = \arctg \nu + \arctg \gamma$ . Thus any natural degree  $k$  of number  $\lambda^2$  can be calculated, having used Moivre formula

$$\lambda^{2k} = \theta^{2k} \left( \frac{1+\nu^2}{1+\gamma^2} \right)^{\frac{k}{2}} (\cos k\delta - i \sin k\delta). \quad (54)$$

As a result, for the fundamental solutions (18) and function (36), taking into account (54), we receive

$$U_n(x) = b_{n,0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} b_{n,k}(x) = b_{n,0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \Theta^{2k} \cos k\delta b_{n,k}(x) - i \sum_{k=1}^{\infty} \Theta^{2k} \sin k\delta b_{n,k}(x)$$

$$(n = 1, 2, 3, 4, 5),$$

where  $\Theta = \theta \sqrt[4]{\frac{1+\nu^2}{1+\gamma^2}}$ .

Thus, the dynamic parameters of the core are completely determined by formulas (5) - (8), (46) - (53). Be it noted that these formulas contain unknown constants in the form of initial values of the real and imaginary components (*initial parameters*). For instance, the exact solution of differential equation of the forced transverse harmonic vibrations of the core taking into account the resistance (4), which is given by formulas (5), (46), (50), is found.

At last we will notice that in practice for the research of vibrations instead of formulas (5) - (8) it is effectually to use formulas equivalent to them:

$$y(x,t) = y(x) \sin(\theta t + \chi_y(x)), \quad y(x) = \sqrt{y_1^2(x) + y_2^2(x)}, \quad \chi_y(x) = \arctg \frac{y_2(x)}{y_1(x)}; \quad (55)$$

$$\varphi(x,t) = \varphi(x) \sin(\theta t + \chi_\varphi(x)), \quad \varphi(x) = \sqrt{\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x)}, \quad \chi_\varphi(x) = \arctg \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}; \quad (56)$$

$$M(x,t) = M(x) \sin(\theta t + \chi_M(x)), \quad M(x) = \sqrt{M_1^2(x) + M_2^2(x)}, \quad \chi_M(x) = \arctg \frac{M_2(x)}{M_1(x)}; \quad (57)$$

$$Q(x,t) = Q(x) \sin(\theta t + \chi_Q(x)), \quad Q(x) = \sqrt{Q_1^2(x) + Q_2^2(x)}, \quad \chi_Q(x) = \arctg \frac{Q_2(x)}{Q_1(x)}. \quad (58)$$

Advantage of formulas (55) - (58) is that amplitude functions of the dynamic parameters are obviously distinguished in them.

## 5 CONCLUSIONS

In this work the differential equation of the forced transverse vibrations of the core with any continuous variable parameters, loaded evenly by the distributed harmonic load is integrated for the first time. As a result, in an analytic form the formulas are received which allow to define the forced dynamic vibrations  $y(x,t)$ ,  $\varphi(x,t)$  and dynamic internal forces  $M(x,t)$ ,  $Q(x,t)$  from harmonic loading  $q(x,t) = q(x) \sin \theta t$ , where the task at any fixing of the core is to search unknown initial parameters.

The solution of this problem opens a prospect for creation of a new research technique of transverse vibrations of the cores with any continuous parameters taking into account resistances. For this purpose it is enough to indicate an efficient method of numerical implementation of the exact solutions.

## References

1. Babakov, M. A. (1976). Teoriya kolebaniy. M.: Nauka, 592.

2. Danylevych, T. Ye., Senyk, A. P. (2006). Vymusheni kolyvannya vala z yihnim pasyvnym pohlynachem. Avtomatyzatsiya vyrobnychkykh prothesiv u mashynobuduvanni ta prykladobuduvanni: mizhvidomchyi naukovo-tekhnichnyi zbirnyk, 40, 84–87.
3. Halas, O. S. (2008). Rozrobka metodiv analyzy ta hasynnya neliniynykh kolyvan' sterzhnevyykh system. Abstract to Ph. D. thesis.
4. Maslov, G. S. (1968). Raschety kolebaniy valov. M.: Mashynostroyenie, 220.
5. Svetlitskiy, V. A. (1987). Mehanika sterzhney. Uchebnik dlya vtuzov. V 2 ch. 4.1. Statika. M.: Vysshaya shkola, 320.
6. Svetlitskiy, V. A. (1987). Mehanika sterzhney. Uchebnik dlya vtuzov. V 2 ch. 4.2. Dinamika. M.: Vysshaya shkola, 304.
7. Kharchenko, Ye. V., Kvashenko, O. I. (2003). Rozrakhunok nestatsynarnykh kolyvan' stryumuval'nykh konstruktsiy zminnoyi dovzhyny. Proekruvannya, vyrobnytstvo ta ekspluatatsiya avtotransportnykh zasobiv i poyizdiv: zbirnyk naukovykh prats', 7, 170–174.
8. Kharchenko, Ye. V. (2004). Rozrakhunok pozdovzhnyo-poperechnykh kolyvan' stryumuval'nykh konstruktsiy znachnoyi dovzhyny zi zminnyimi pruzhno-inertsyynymi kharakterystykamy. Pozhezhna bezpeka: zbirnyk naukovykh prats', 4, 187–193.
9. Kharchenko, O., Pidhaynyi, T. (2009). Matematychni modeliuvannya vil'nykh pozdovzhnyo-poperechnykh kolyvan' skladenoho tryzhnya. Proceedings of the 9th International Symposium of Ukrainian Mechanical Engineers, 63–64.
10. Shevchenko, F. L. (2006). Uproschennyi dinamicheskyy raschet sterzhnevyykh sistem s raspredelennymi parametrami. Avtomatyzatsiya vyrobnychkykh protsesiv u mashynobuduvanni ta prykladobuduvanni: mizhvidomchyi naukovo-tekhnichnyi zbirnyk, 40, 278–285.
11. Kiselev, V. A. (1980). Stroitel'naya mehanika. M.: Stroyizdat, 616.
12. Babakov, I. M. (2004). Teoriya kolebaniy. M.: Drofa, 591.
13. Tymoshenko, S. P., Young, D. H., Uiver, U. (1985). Kolebaniya v inzhenerov dele. M.: Mashynostroyenie, 1985. – 472 s.
14. Dinnik, A. N. (1955). Prodolnyi izgib. Krucheniye. M.: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 392.
15. Vasylenko, M. V. (2004). Teoriya kolyvan' i stykosti ruhu. K.: Vysha shkola, 525.
16. Sorokin, E. S. (1960). K teorii vnutrennego treniya pri kolebaniyah uprugih sistem. M.: Gosstroyizdat, 131.
17. Gantmaher, F. R. (1988). Teoriya matrity. M.: Nauka, 552.

## Література

1. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков – М.: Наука, 1976. – 592 с.
2. Данилевич Т. Є. Вимушені поперечні коливання вала з їхнім пасивним поглиначем / Т. Є. Данилевич, А. П. Сенік // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні: міжвідомчий науково-технічний збірник. – 2006. – № 40. – С. 84–87.
3. Галас О. С. Розробка методів аналізу та гасіння нелінійних коливань стержневих систем: автореф. Дис. на здобуття наук. ступеня канд. Техн. наук: спец. 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла» / Галас Олег Сергійович; Нац. академія наук України інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного. – Харків – 2008. – 21 с.
4. Маслов Г. С. Расчеты колебаний валов // Справочное пособие. – М.: Машиностроение, 1968. – 220 с.
5. Светлицкий В. А. Механика стержней. Учебник для вузов. В 2-х ч. 4.1. Статика / В. А. Светлицкий. – М.: Высшая школа, 1987. – 320 с.
6. Светлицкий В. А. Механика стержней. Учебник для вузов. В 2-х ч. 4.2. Динамика / В. А. Светлицкий. – М.: Высшая школа, 1987. – 304 с.
7. Харченко Є. В. Розрахунок нестационарних коливань стримувальних конструкцій змінної довжини / Є. В. Харченко, О. І. Квашенко. // Проектування, виробництво та експлуатація автотранспортних засобів і поїздів: збірник наукових праць. – 2003. – Вип. 7. – С. 170–174.
8. Харченко Є. В. Розрахунок поздовжньо-поперечних коливань стримувальних конструкцій значної довжини зі змінними пружно-інерційними характеристиками / Є. В. Харченко, А. М. Петренко // Пожежна безпека: збірник наукових праць. – 2004. – № 4. – С. 187–193.



9. Харченко О. Математичне моделювання вільних поздовжньо-поперечних коливань складеного стрижня / О. Харченко, Т. Підгайний // Праці 9-ого міжнародного симпозіуму українських інженерів-механіків у Львові. – 2009. – С. 63–64.
10. Шевченко Ф. Л. Упрощенный динамический расчет стержневых систем с распределенными параметрами / Ф. Л. Шевченко // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні: міжвідомчий науково-технічний збірник. – 2006. – № 40. – С. 278–285.
11. Киселев В. А. Строительная механика / В. А. Киселев – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
12. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.
13. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
14. Динник А. Н. Продольный изгиб. Кручение. / А. Н. Динник – М.: Издательство академии наук СССР, 1955. – 392 с.
15. Василенко М. В. Теорія коливань і стійкості руху / М. В. Василенко, О. М. Алексейчук – К.: Вища школа, 2004. – 525 с.
16. Сорокин Е. С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем / Е. С. Сорокин – М.: Госстройиздат, 1960. – 131 с.
17. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер – М.: Наука, 1988. – 552 с.

**Krutii Yurii**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Doctor of Technical Science, professor  
Didrihsona str.,4 Odessa, Ukraine 65029  
yurii.krutii@gmail.com  
ORCID:0000-0001-7105-3087

**Surianinov Mykola**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Doctor of Technical Science, professor  
Didrihsona str.,4 Odessa, Ukraine 65029  
sng@ogasa.org.ua  
ORCID:0000-0003-2592-5221

**Osadchiy Vladimir**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Ph.D., associate professor  
Didrihsona str.,4 Odessa, Ukraine 65029  
Ovs1455@gmail.com  
ORCID:0000-0001-8153-8635

*For references:*

Krutii, Yu., Surianinov, M., Osadchiy, V. (2019). The exact solution of the differential equation of the compelled cross vibrations of the core with any continuous parameters. *Mechanics and Mathematical Methods*, 2, 46–61.

*Для посилань:*

Кругтій Ю. С. Точний розв'язок диференціального рівняння вимушених поперечних коливань стрижня з довільними неперервними параметрами / Ю. С. Кругтій, М. Г. Сур'янінов, В. С. Осадчий // *Механіка та математичні методи*. – 2019. – №2. – С. 46–61.

УДК 514.07

## УМОВИ СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ПСЕВДОРІМАНОВИХ ПРОСТОРІВ

Вашпанова Н. В.<sup>1</sup>, Подоусова Т. Ю.<sup>2</sup>, Шевченко Т. І.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Одеська національна академія харчових технологій

<sup>2</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Анотація:** Робота присвячена вивченню деформацій псевдоріманових просторів. Попередні формули для деформацій метрик записані Сен-Венаном в частинних похідних зведені до рівнянь в коваріантних похідних. Умови Сен-Венана — це умови накладені на тензор деформації, що забезпечують збереження евклідовості простору. Отримані узагальнені умови Сен-Венана — це умови збереження тензора Рімана при деформаціях метрик псевдоріманових просторів.

Розроблений метод дозволяє записувати умови збереження і інших внутрішніх об'єктів псевдоріманових просторів. Наприклад, тензор Вейля, тензор конформної кривини, тензор Річчі.

Через значні технічні труднощі локальних розв'язків задач такого типу виникає необхідність спеціалізації просторів або деформацій.

Розглянуті спеціальні деформації, які називають канонічними. Тензор деформації в цьому випадку є лінійною комбінацією метричного тензору та тензору Річчі. В випадку трьохвимірному псевдоріманового простору до канонічних деформацій, за необхідністю, відносяться геодезичні деформації, при яких зберігаються геодезичні лінії. Накладаючи додаткові умови на тензор Річчі вивчення канонічних деформацій зводиться до солітонов Річчі.

Солітони Річчі, що природно виникають із теорії потоків Річчі, дають ще один тип спеціальних псевдоріманових просторів. Зокрема доведено, що в псевдорімановому просторі з градієнтним задаючим вектором сталої довжини, скалярна кривина стала тоді і тільки тоді, коли солітон Річчі стійкий.

Якщо в евклідастному псевдорімановому просторі існує градієнтний задаючий солітон вектор, то або він колінеарний конциркулярному, або конциркулярне векторне поле є коваріантно сталим.

Обґрунтовано, що, якщо в псевдорімановому просторі існує більше ніж одне суттєве градієнтне векторне поле, що задає солітон Річчі, то цей простір евклідастний.

Застосування отриманих результатів продемонстровано за допомогою прикладів. Дослідження ведуться локально, тензорними методами, без обмеження на знак метрики.

**Ключові слова:** канонічні деформації, псевдоріманові простори, умови Сен-Венана.

## SAINT-VENANT'S CONDITIONS FOR PSEUDO-REIMANNIAN SPACES

N. Vashpanova<sup>1</sup>, T. Podousova<sup>2</sup>, T. Shevchenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Odessa National Academy of Food Technologies

<sup>2</sup>Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract:** The article is devoted to the study of the deformations of pseudo-Reimannian spaces. The preceding formulas for metrics' deformations recorded by Saint-Venan in partial derivatives are reduced to the equations in covariant derivatives. Saint-Venan's conditions are the conditions imposed on the strain tensor, which preserve the Euclidean space. The generalized conditions of Saint-Venan are the conditions of Riemann tensor's preservation under the deformations of the metrics of pseudo-Reimannian spaces.

The developed method allows to record the preservation conditions of other internal objects of pseudo-Reimannian spaces, for example, Weyl tensor, the tensor of conformal curvature, Ricci tensor.

Due to the considerable technical difficulties of local solutions to such problems, it is necessary to specialize the spaces or the deformations.

Special deformations called canonical are considered. The deformation tensor in this case is a linear combination of the metric tensor and Ricci tensor. In the case of a three-dimensional pseudo-Reimannian space, if it is necessary, the canonical deformations include the geodetic deformations at which the geodetic lines are preserved. Imposing additional conditions on Ricci tensor the studying of canonical deformations is reduced to Ricci solitons.

The Ricci solitons, naturally arising from the Ricci flow theory, provide another type of special pseudo-Reimannian spaces. In particular, it is proved that in the pseudo-Reimannian space with a gradient set vector of constant length, the scalar curvature is constant if the Ricci soliton is stable.

If there is a gradient set soliton vector in the equidistant pseudo-Reimannian space, so either it is collinear to the circular or the circular vector field is constant covariantly.

It is substantiated if there is more than one significant gradient vector field in the pseudo-Reimannian space defining the Ricci soliton, this space is equidistant.

The application of the obtained results is demonstrated by the examples. The studies are conducted locally by tensor methods without any limitation.

**Keywords:** canonical deformations, pseudo-Reimannian spaces, Saint-Venan conditions.

## 1 ВСТУП

Деформації узагальнених геометричних просторів утворюють один із актуальних напрямків сучасної диференціальної геометрії. В теорії деформацій працювала велика кількість вчених як математиків та механіків, так і фізиків, зацікавлених в застосуванні результатів для моделювання динамічних процесів.

З часів Сен-Венана вивчення деформацій зводиться до системи диференціальних рівнянь. Система диференціальних рівнянь приводить до алгебраїчної системи, що представляє собою умови інтегрування. Частіше за все, ці системи перевизначені, вводячи додаткові обмеження, їх спрощують або інтегрують.

Зауважимо, що принципова можливість локального розв'язку цих задач поєднуються з серйозними труднощами технічного характеру. Тому зберігає актуальність задача вивчення внутрішніх тензорних характеристик узагальнених просторів, що дозволяють чи не дозволяють вказані деформації. Це, в свою чергу, приводить до спеціалізації просторів або до спеціалізації деформацій.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

В своїй першій роботі, виданій 180 років тому, в 1839 році, Сен-Венан розпочав розробку методів, які знайшли широке застосування в теорії деформацій. Сьогодні принцип Сен-Венана вивчений достатньо ґрунтовно. Огляд основних робіт за період до 1955 року можна знайти в роботі Г. Джанелідзе [1]. Після того слід відмітити роботи Н.П. Азанова [2, 3], в яких умови Сен-Венана застосовуються для псевдоріманових просторів.

Під умовами Сен-Венана розуміють умови, яким задовольняє тензор деформації для того, щоб при деформації зберігалась евклідовість просторів.

Узагальнені умови Сен-Венана – це умови співпадіння тензора Рімана псевдоріманового простору, що деформується та псевдо ріманового простору результату деформації.

Ця робота присвячена застосуванню умов Сен-Венана до введених І. Потапенком [4] канонічних деформацій.

Тобто таких деформацій, для яких тензор деформації є лінійна комбінація метричного тензора та тензора Річчі.

## 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою роботи є виявлення нових характеристик псевдоріманових просторів, пов'язаних з їх нескінченно малими деформаціями.

Об'єктом дослідження є спеціальні псевдоріманові простори, тобто простори, які виділяються виконанням в них певних умов, накладених на внутрішні об'єкти та спеціальні деформації.

Предметом дослідження являються диференціальні рівняння, їх умови інтегрованості та диференціальні продовження, які характеризують те допускає чи не допускає заданий узагальнений простір вказаний тип деформацій. Шляхом введення додаткових обмежень, спеціалізації просторів розв'язуються задачі описання геометричних характеристик псевдоріманових просторів, що допускають чи не допускають певні типи деформацій.

Методи дослідження – це класичні методи дослідження ріманової геометрії. Дослідження ведуться локально, в класі достатньо гладких функцій з використанням тензорних методів, без обмежень на знаковизначеність та сигнатуру метрики.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

**Узагальнені умови сен-венана.** Нехай  $V_n$  – псевдоріманів простір з метричним тензором  $g_{ij}$ , а  $\bar{V}_n$  – псевдоріманів простір з метричним тензором  $\bar{g}_{ij}$ . Будемо вважати, що метричні тензори відрізняються на нескінченно малу величину  $\gamma_{ij}$ , тобто

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} + \gamma_{ij}. \quad (1)$$

Нескінченно малі величини вище першого порядку до уваги не беремо. Для тензорів обернених до метричних будемо мати

$$\bar{g}^{ij} = g^{ij} - g^{i\alpha} g^{j\beta} \gamma_{\alpha\beta}. \quad (2)$$

Компоненти тензора  $\gamma_{ij}$  називають компонентами тензорного поля швидкостей нескінченно малої деформації.

В спільній за деформацією системі координат для символів Хриstoffеля виконується

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + P_{ij}^h(x). \quad (3)$$

Спільною за деформацією системою координат називають таку систему криволінійних координат, в якій координати відповідних точок співпадають.

Тензор  $P_{ij}^h(x)$  називають тензором деформації зв'язності при даній деформації. З (1), (2) отримаємо

$$2P_{ij}^h = g^{h\alpha} (\nabla_i \gamma_{\alpha j} + \nabla_j \gamma_{\alpha i} - \nabla_\alpha \gamma_{ij}),$$

$\nabla$  – знак коваріантної похідної за зв'язністю  $V_n$ .

Якщо  $P_{ij}^h(x) \neq 0$ , то деформацію називають нетривіальною.

Зауважимо, що тензор деформації зв'язності симетричний за коваріантними індексами, тобто  $P_{ij}^h = P_{ji}^h$ .

Так як, тензор деформації задовольняє умові

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j),$$

то для тензора деформації зв'язності виконується рівняння

$$2P_{ij}^h = \nabla_j \nabla_i u^h - u^\alpha R_{ij\alpha}^h.$$

Тут  $u_h$  – вектор деформації,  $u^i = u_\alpha g^{\alpha i}$ .

Тензор нескінченно малого обертання має вигляд  $\omega_{ij} = 1/2 (\nabla_i u_j - \nabla_j u_i)$ .

В разі відсутності обертання вектор  $u_i$  буде градієнтним [2, 3, 5, 6, 7].

В випадку тензорного поля  $S$  типу  $\binom{p}{q}$  коваріантна похідна по зв'язності  $V_n$ , в кожній системі координат  $x^1, x^2, \dots, x^n$  визначається наступним чином:

$$\begin{aligned} \nabla_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) = & \partial_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) + \Gamma_{k\alpha}^{i_1}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p}(x) + \dots + \Gamma_{k\alpha}^{i_p}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \alpha}(x) - \\ & - \Gamma_{kj_1}^\beta(x) S_{\beta j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) - \dots - \Gamma_{kj_q}^\beta(x) S_{j_1 j_2 \dots j_{q-1} \beta}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x), \end{aligned} \quad (4)$$



$$(i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q; k = 1, 2, \dots, n).$$

Для простору  $\bar{V}_n$  та коваріантній похідній в ньому  $\bar{\nabla}$  будемо мати в спільній системі координат:

$$\bar{\nabla}_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) = \partial_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) + \bar{\Gamma}_{k\alpha}^{i_1}(x) + \dots + \bar{\Gamma}_{k\alpha}^{i_p}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \alpha}(x) - \bar{\Gamma}_{kj_1}^\beta(x) S_{\beta j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) - \dots - \bar{\Gamma}_{kj_q}^\beta(x) S_{j_1 j_2 \dots j_{q-1} \beta}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x).$$

Віднімаючи від останнього (9), з урахуванням (3), отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) - \nabla_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) &= P_{k\alpha}^{i_1}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p}(x) + \dots + P_{k\alpha}^{i_p}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \alpha}(x) - \\ &- P_{kj_1}^\beta(x) S_{\beta j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) - \dots - P_{kj_q}^\beta(x) S_{j_1 j_2 \dots j_{q-1} \beta}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x), \end{aligned} \quad (5)$$

$$(i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q; k = 1, 2, \dots, n).$$

Останнє справедливе для будь-якого тензора, а для тензора деформації зв'язності (5) прийме вигляд

$$\bar{\nabla}_k P_{ij}^h(x) - \nabla_k P_{ij}^h(x) = P_{k\alpha}^h(x) P_{ij}^\alpha(x) - P_{ki}^\alpha(x) P_{\alpha j}^h(x) - P_{kj}^\alpha(x) P_{i\alpha}^h(x).$$

Симетруючи останнє, отримаємо

$$\bar{\nabla}_k P_{ij}^h + \bar{\nabla}_j P_{ik}^h - \nabla_k P_{ij}^h - \nabla_j P_{ik}^h = -2P_{kj}^\alpha P_{i\alpha}^h.$$

А, альтернуючи –

$$\bar{\nabla}_k P_{ij}^h - \bar{\nabla}_j P_{ik}^h - \nabla_k P_{ij}^h + \nabla_j P_{ik}^h = -2(P_{k\alpha}^h P_{ij}^\alpha - P_{ki}^\alpha P_{\alpha j}^h). \quad (6)$$

Закон зміни тензора кривини, що визначається, як

$$R_{ijk}^h = \partial_j \Gamma_{ik}^h + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^h - \partial_k \Gamma_{ij}^h - \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{k\alpha}^h,$$

при деформації простору  $V_n$  в  $\bar{V}_n$  запишеться в вигляді [8]

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \nabla_k P_{ji}^h - \nabla_j P_{ki}^h + P_{\alpha k}^h P_{ji}^\alpha - P_{\alpha j}^h P_{ki}^\alpha.$$

Або, з урахуванням (6),

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \frac{1}{2}(\nabla_k P_{ji}^h - \nabla_j P_{ki}^h + \bar{\nabla}_k P_{ji}^h - \bar{\nabla}_j P_{ki}^h). \quad (7)$$

Рівняння сумісності Сен-Венана, якщо перейти до коваріантної похідної та вимагати, щоб простір, що деформується та результат деформації були плоскими має вигляд:

$$\nabla_l \nabla_k \gamma_{ij} + \nabla_i \nabla_j \gamma_{lk} - \nabla_l \nabla_j \gamma_{ik} - \nabla_i \nabla_k \gamma_{lj} = 0. \quad (8)$$

Переходячи до розгляду псевдоріманових просторів  $V_n$  та  $\bar{V}_n$  не обмежуючи значення тензора кривини, отримаємо

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \frac{1}{2} g^{h\alpha} (\nabla_k \nabla_i \gamma_{j\alpha} + \nabla_j \nabla_\alpha \gamma_{ki} - \nabla_k \nabla_\alpha \gamma_{ij} - \nabla_j \nabla_i \gamma_{\alpha k} - \gamma_{\alpha\beta} R_{ijk}^\beta - \gamma_{\beta i} R_{\alpha jk}^\beta). \quad (9)$$

Із останнього отримуємо узагальнену умову Сен-Венана для псевдоріманових просторів, а саме: для того, щоб нескінченно мала деформація залишала інваріантним тензор кривини, необхідно і достатньо, щоб



$$\nabla_i \nabla_j \gamma_{kl} + \nabla_k \nabla_l \gamma_{ij} - \nabla_i \nabla_l \gamma_{jk} - \nabla_k \nabla_j \gamma_{il} = R_{jki}^\alpha \gamma_{al} + R_{lki}^\alpha \gamma_{ja}.$$

Таким чином, має місце теорема:

**Теорема 1.** Виконання узагальнених умов Сен-Венана необхідна і достатня умова для того, щоб

$$\nabla_k P_{ji}^h - \nabla_j P_{ki}^h = \bar{\nabla}_j P_{ki}^h - \bar{\nabla}_k P_{ji}^h.$$

**Умови Сен-Венана для канонічних деформацій.** Умови сен-венана для канонічних деформацій перейдемо до розгляду умов на тензори річчі. з (7) отримаємо, що тензор річчі  $R_{ij} = R_{ij\alpha}^\alpha$  змінюється за законом

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + \frac{1}{2} (\nabla_\alpha P_{ji}^\alpha - \nabla_j P_{\alpha i}^\alpha + \bar{\nabla}_\alpha P_{ji}^\alpha - \bar{\nabla}_j P_{\alpha i}^\alpha). \quad (10)$$

Згортаючи (9) отримаємо, аналог рівнянь (10):

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + \frac{1}{2} (g^{\alpha\beta} (\nabla_\beta \nabla_i \gamma_{j\alpha} + \nabla_j \nabla_\alpha \gamma_{\beta i} - \nabla_\beta \nabla_\alpha \gamma_{ij} - \nabla_j \nabla_i \gamma_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\gamma} R_{ij\beta}^\gamma) + \gamma_{\alpha i} R_j^\alpha).$$

Нескінченно мала деформація виду (1) псевдоріманового простору  $(V_n, g_{ij})$  називається канонічною, якщо тензор деформації  $\delta g_{ij}$  можна подати у вигляді

$$\gamma_{ij} = \tau^1 g_{ij} + \tau^2 R_{ij}, \quad (11)$$

де  $\tau^1, \tau^2$  – деякі інваріанти.

Відомо, що клас канонічних нескінченно малих деформацій не пустий. В випадку тримірних псевдоріманових просторів до цього класу належать інфінітезимальні геодезичні деформації [3].

Нескінченно мала деформація псевдоріманового простору  $V_n$ , при якій його геодезичні лінії переходять в геодезичні лінії  $\tilde{V}_n$  називається інфінітезимальною геодезичною деформацією [6].

Згортаючи (11), отримаємо  $\Delta_2 u = n \tau^1 + R \tau^2$ , тут  $\Delta_2 u = \nabla_\alpha u^\alpha$  – другий символ Бельтрамі. Враховуючи це, (11) можна записати в вигляді

$$\gamma_{ij} = \frac{\Delta_2 u}{n} g_{ij} + \tau E_{ij},$$

де  $E_{ij}$  – тензор Ейнштейна,  $E_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}$ .

Згідно закону Гука для однорідного ізотропного середовища

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{E} ((1+x)H_{ij} - xHg_{ij}),$$

де  $H_{ij}$  – тензор напруження,  $H = g^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}$ ,  $E$  – модуль Юнга,  $x$  – коефіцієнт Пуасона.

Підставляючи відповідні умови в рівняння (8) або (9), ми будемо отримувати формули для конкретних деформацій [9, 10, 11, 12, 13].

Наприклад, для канонічних, будемо мати коваріантно диференціюючи (11):

$$\nabla_l \nabla_k \gamma_{ij} = \nabla_l \nabla_k \tau^1 g_{ij} + \nabla_l \nabla_k \tau^2 R_{ij} + \nabla_k \tau^2 \nabla_l R_{ij} + \nabla_l \tau^2 \nabla_k R_{ij} + \tau^2 \nabla_l \nabla_k R_{ij}.$$



Підставляючи останнє в узагальнені умови Сен-Венана, отримаємо

$$\begin{aligned} & \nabla_i \nabla_j \tau^1 g_{kl} + \nabla_k \nabla_l \tau^1 g_{ij} - \nabla_i \nabla_l \tau^1 g_{jk} - \nabla_k \nabla_j \tau^1 g_{il} + \nabla_i \nabla_j \tau^2 R_{kl} + \nabla_k \nabla_l \tau^2 R_{ij} - \\ & - \nabla_i \nabla_l \tau^2 R_{jk} - \nabla_k \nabla_j \tau^2 R_{il} + \tau^2 (\nabla_i \nabla_j R_{kl} + \nabla_k \nabla_l R_{ij} - \nabla_i \nabla_l R_{jk} - \nabla_k \nabla_j R_{il}) - \\ & - \nabla_j \tau^2 (\nabla_k R_{il} - \nabla_i R_{kl}) + \nabla_i \tau^2 (\nabla_j R_{kl} - \nabla_l R_{jk}) + \nabla_k \tau^2 (\nabla_l R_{ij} - \nabla_j R_{il}) - \\ & - \nabla_l \tau^2 (\nabla_i R_{jk} - \nabla_k R_{ij}) = \tau^2 (R_{\alpha l} R_{jki}^\alpha + R_{\alpha j} R_{lki}^\alpha). \end{aligned} \quad (12)$$

Таким чином, має місце:

**Теорема 2.** При канонічних деформаціях псевдоріманових просторів із збереженням тензора Рімана за необхідністю виконується умова (12).

**Спеціальні канонічні деформації.** Якщо в рівнянні (11),  $\tau^1 = \lambda = const$ , а  $\tau^2 = -1$ , то рівняння приймає вигляд

$$\nabla_j u_i + \nabla_i u_j = \lambda g_{ij} - R_{ij}.$$

**Означення 1.** Деформації псевдоріманових просторів, вектор деформації яких задовольняє умовам (24), будемо називати спеціальними канонічними деформаціями.

Виділення таких деформацій зумовлене тісним зв'язком їх вивчення є теорією потоків Річчі.

Потоком Річчі називають сімейство метрик на многовиді  $M$  таке, що

$$\frac{d}{dt} g_t = -2Ric(g_t), \quad (13)$$

де  $Ric(g)$  – тензор Річчі метрики  $g$ .

В роботах, пов'язаних з доведенням гіпотези Пуанкаре, потоки Річчі ріманових просторів використовувались як важливий технічний засіб дослідження, і було отримано багато результатів про існування та властивості таких потоків [14].

З іншого боку, інтерес до геометричних властивостей таких метрик привів до солітонів Річчі [14], а також до  $\varphi(Ric)$  – векторних полів [15, 16, 17, 18].

З самоподібним розв'язком рівняння (13), яке має назву рівняння Гамільтона, пов'язане поняття солітона Річчі як метрики, що задовольняє рівнянням

$$-2Ric_0 = L_{X_0} g_0 + 2\lambda g_0, \quad (14)$$

для деякого векторного поля  $X_0$  на  $M$ , похідної Лі  $L_{X_0}$  по відношенню до  $X_0$  і сталої  $\lambda$ .

Якщо  $\lambda = 0$  солітон Річчі називають стійким, при  $\lambda < 0$  – стискаючим, а при  $\lambda > 0$  – розтягуючим. Ми будемо користуватись цими визначеннями, хоча застосовуються й інші.

Таким чином, під солітоном розуміють трійку: метрику  $g$ , векторне поле  $X_0$  та сталу  $\lambda$ . Векторне поле  $X_0$  називають задаючим солітон-вектором. Якщо задаючий вектор градієнтний, то градієнтним називають і солітон.

Нехай  $V_n$  псевдоріманів простір з метричним тензором  $g_{ij}$ , тоді рівняння (14) для градієнтних солітонів в індексній формі запишеться [14]

$$\nabla_j \varphi_i = \lambda g_{ij} - R_{ij}, \quad (15)$$

$$\lambda_{,i} = 0, \quad (16)$$

де  $\varphi_i$  – деякий ненульовий градієнтний вектор.

Умови інтегрованості, з урахуванням тотожності Річчі приймуть вид

$$\varphi_\alpha R_{ijk}^\alpha = -(\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik}), \quad (17)$$

тут  $R_{ijk}^h$  – тензор Рімана  $V_n$ .

Враховуючи тотожність Біанкі (17), запишемо так

$$\varphi_\alpha R_{ijk}^\alpha = \nabla_\alpha R_{ikj}^\alpha. \quad (18)$$

Згортаючи останнє з  $g^{ij}$ , де  $g^{ij}$  – елементи оберненої до  $\|g_{ij}\|$  матриці, будемо мати  $\varphi_\alpha R_k^\alpha = -\nabla_k R/2$ , тут  $R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$  – скалярна кривина  $V_n$ .

Якщо вектор  $\varphi_i$  має сталу довжину, тобто  $\varphi_\alpha \varphi^\alpha = const$ , де  $\varphi^h = \varphi_\alpha g^{\alpha h}$ , то коваріантно диференціюючи та враховуючи (15) та (18), отримаємо

$$\lambda \varphi_i + \frac{\nabla_i R}{2} = 0.$$

Останнє дає можливість сформулювати теорему:

**Теорема 3.** В псевдорімановому просторі  $V_n$  з задаючим солітон-вектором сталої довжини скалярна кривина стала тоді і тільки тоді, коли солітон стійкий.

Векторне поле називають конциркулярним, якщо воно задовольняє умові

$$\nabla_j \zeta_i = \rho g_{ij}, \quad (19)$$

тут  $\zeta_i \neq 0$ ,  $\rho$  – деякий інваріант.

Якщо  $\rho = const$ , то векторне поле називають – збіжним, а в випадку  $\rho = 0$  – коваріантно сталим. Простори, в яких існує конциркулярне векторне поле, називають еквідистантними.

Розглянемо псевдоріманів простір  $V_n$ , в якому виконуються рівняння (15), (16) та (19). Має місце теорема:

**Теорема 4.** Якщо в еквідистантному псевдорімановому просторі  $V_n$  існує градієнтний задаючий солітон вектор, то або він колінеарний конциркулярному, або конциркулярне векторне поле є коваріантно сталим.

Доведення.

Умови інтегрування (19) мають вигляд

$$\zeta_\alpha R_{ijk}^\alpha = c(\zeta)(\zeta_k g_{ij} - \zeta_j g_{ik}),$$

де  $c(\zeta)$  – деякий інваріант, що залежить від  $\zeta$ , такий що  $\nabla_i \rho = c(\zeta) \zeta_\alpha$ .

Із останнього, враховуючи (40) отримаємо

$$\rho R_{hijk} + \zeta_\alpha \nabla_h R_{ijk}^\alpha = c'(\zeta)(g_{ij} \zeta_k \zeta_h - g_{ik} \zeta_j \zeta_h) + c(\zeta) \rho (g_{ij} g_{kh} - g_{ik} g_{jh}),$$

тут  $R_{hijk} = g_{\alpha n} R_{ijk}^\alpha$ .

Згортаючи з  $g^{hk}$  та приймаючи до уваги (18), (19) будемо мати

$$\rho R_{ij} + c(\zeta)(\zeta_j \varphi_i - \varphi^\alpha \zeta_\alpha g_{ij}) = c'(\zeta) \zeta^\alpha \zeta^\alpha g_{ij} - \zeta_i \zeta_j + c(\zeta) \rho (n-1) g_{ij}.$$

Із останнього, враховуючи симетричність тензорів  $g_{ij}$  та  $R_{ij}$ , витікає

$$c(\zeta)(\zeta_j \varphi_i - \zeta_i \varphi_j) = 0.$$

Якщо  $c(\zeta) = 0$ , то  $\nabla_i \rho = 0$ , і конциркулярне поле коваріантно стале, в протилежному випадку  $\zeta_i = k \varphi_i$ , де  $k$  - деякий інваріант. Таким чином, теорему доведено. Всі псевдоріманові простори  $V_3$  задовольняють умові

$$C_{ijk}^h = 0. \tag{20}$$

Розглянемо простори  $n > 3$ , в яких виконуються ці умови. З (18) переконаємось, що

$$\varphi^\alpha \nabla_\alpha R_{\beta jk}^\alpha = 0, \tag{21}$$

для всіх просторів, які дозволяють вектори  $\varphi^h$  що задають солітони Річчі.

З (21) для просторів  $n > 3$ , в яких виконуються (20), отримаємо

$$\nabla_k R \varphi_j - \nabla_j R \varphi_k = 0. \tag{22}$$

Таким чином, доведено теорему:

**Теорема 5.** Для конформно-пласких псевдоріманових просторів  $V_n (n > 3)$  градієнтне векторне поле, що задає солітон Річчі задовольняє умові

$$\nabla_i \varphi = f(R) \nabla_i R, \tag{23}$$

де  $f(R)$  - деяка функція, що залежить від скалярної кривини простору  $V_n$ .

Рівняння (16), (17) представляють систему диференціальних рівнянь в коваріантних похідних типу Коші відносно невідомих векторів  $\varphi_i$  та сталої  $\lambda$ . Дослідження її та умов інтегрування (19) методами, аналогічними розробленим в роботах [19, 20, 21], дають можливість довести, що максимальну кількість розв'язків системи  $(n+1)$  дозволяють пласкі простори. Не існує псевдоріманових просторів, які дозволяють  $n$  та  $n-1$  розв'язок вказаної системи. Якщо кількість розв'язків більше одного, тобто крім рівняння (16), виконується

$$\nabla_j \Phi_i = \Lambda g_{ij} - R_{ij},$$

принаймні ще для одного деякого вектора  $\Phi_i$  та сталої  $\Lambda$ , то

$$\nabla_j (\varphi_i - \Phi_i) = (\lambda - \Lambda) g_{ij}. \tag{24}$$

Таким чином, справджується:

**Теорема 6.** Якщо в псевдорімановому просторі  $V_n$  існує більше ніж одне суттєве градієнтне векторне поле, що задає солітон Річчі, то цей простір еквідистантний.

Рівняння (24) задають збіжне конциркулярне векторне поле, яке або колінеарне векторному полю, що задає градієнтний солітон Річчі, або коваріантно стале.

Перший випадок проводить до гармонійних псевдоріманових просторів, тобто просторів, для яких  $\nabla_\alpha R_{ijk}^\alpha = 0$ , а другий - дозволяє сформулювати наслідок.

**Наслідок 1.** Стала  $\lambda$  однозначно визначається для псевдоріманових просторів  $V_n$ , відмінних від гармонійних, що дозволяють солітони річчі. discussion of the results of the study.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

В якості прикладу розглянемо тор. Тором називається поверхня, яка утворюється обертанням кола навколо осі, що лежить в її площині та її не перетинає. Якщо за  $X$  взяти широту тора, а за  $Y$  його довготу, то метрика тора запишеться в вигляді:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2(1 + \varepsilon \cos(x))^2 \end{pmatrix},$$

тут  $a$  – радіус кола,  $b$  – віддаль від центра кола до осі обертання,  $\varepsilon = a/b$  – ексцентриситет тору. Символом Христоффеля обчислимо за формулою

$$2\Gamma_{ijk} = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}; \quad \Gamma_{ij}^k = g^{ak} \Gamma_{ija}.$$

Отримаємо три відмінних від нуля коефіцієнти зв'язності

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{\sin x(1 + \varepsilon \cos x)}{\varepsilon}; \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{-\varepsilon \sin x}{(1 + \varepsilon \cos x)}.$$

Для тензора Рімана отримаємо

$$R_{221}^1 = \frac{\cos x(1 + \varepsilon \cos x)}{\varepsilon}; \quad R_{221}^1 = \frac{\varepsilon \cos x}{(1 + \varepsilon \cos x)}.$$

Для тензора Річчі:

$$R_{11} = \frac{\varepsilon \cos x}{(1 + \varepsilon \cos x)}; \quad R_{22} = \frac{\cos x(1 + \varepsilon \cos x)}{\varepsilon}.$$

З визначення коваріантної похідної та значень символів Христоффеля для тора

$$\gamma_{11} = \partial_1 u_1, \quad \gamma_{12} = \frac{\varepsilon \sin x \cdot u_2}{(1 + \varepsilon \cos x)} + \frac{1}{2}(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2),$$

$$\gamma_{22} = \partial_2 u_2 - \frac{\sin x(1 + \varepsilon \cos x)u_1}{\varepsilon}.$$

Враховуючи визначення спеціальних канонічних деформацій, будемо мати [3]

$$\partial_1 u_1 = \lambda a^2 - \frac{\varepsilon \cos x}{(1 + \varepsilon \cos x)},$$

$$\partial_2 u_2 = \frac{\sin x(1 + \varepsilon \cos x)u_1}{\varepsilon} + \lambda b^2(1 + \varepsilon \cos x)^2 - \frac{\cos x(1 + \varepsilon \cos x)}{\varepsilon},$$

$$\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 = \frac{-2\varepsilon \sin x}{(1 + \varepsilon \cos x)}.$$

Наведемо приклад псевдоріманового простору  $V_n (n > 2)$ , який дозволяє градієнтні векторні поля, що задають солітони Річчі, тобто допускають спеціальні канонічні деформації [16].

Розглянемо псевдоріманів простір  $V_3$  з метрикою

$$ds^2 = -(dx')^2 + (x')^{2\cos(\Theta)}(dx^2)^2 + (x')^{2\sin(\Theta)}(dx^3)^2.$$

Побудуємо векторне поле  $\varphi^i$ , що задає параболічний солітон Річчі  $\varphi^i = (\varphi^1(x^1), 0, 0)$ .

Обчислимо тензор Річчі псевдоріманового простору  $V_3$ :

$$R_{11} = \frac{1 - \cos(\Theta) - \sin(\Theta)}{(x^1)^2}, \quad R_{22} = \frac{\cos(\Theta)(1 - \cos(\Theta) - \sin(\Theta))}{(x^1)^{2(1 - \cos(\Theta))}};$$

$$R_{33} = \frac{(1 - \cos(\Theta) - \sin(\Theta) - 1 - \cos(\Theta))}{(x^1)^{2(1 - \cos(\Theta))}}.$$

Скалярна кривина

$$R = \frac{-2(1 - \cos(\Theta))(1 - \sin(\Theta))}{(x^1)^2}.$$

В цьому просторі існує параболічний солітон Річчі, що задається векторним полем:

$$\varphi^h = \frac{(1 - \cos(\Theta) - \sin(\Theta))}{x^1} \delta_1^h.$$

Якщо  $\Theta = \pi$ , то компоненти метричного тензора  $g_{33} = 1$ , і в просторі існує коваріантна стале векторне поле  $\nu = (0, 0, 1)$ , ортогональне гіперповерхні

$$ds^2 = -(dx^1)^2 + \frac{1}{(x^1)^2} (dx^2)^2.$$

## 6 ВИСНОВКИ

Робота носить характер фундаментально-теоретичного дослідження. Отримані результати – це природний розвиток відомих результатів теорії деформацій псевдоріманових просторів. І тому мають теоретичну цінність з точки зору диференціальної геометрії. В той же час, вони можуть бути використані в теоретичній механіці та в загальній теорії відносності при моделюванні динамічних процесів.

## Література

1. Джанелидзе Г. Ю. Признак Сен–Венана / Г. Ю. Джанелидзе // Труд. ЛПИ. –1958. – №192. – С. 7–20.
2. Азанов Н. П. Уравнения совместности Сен–Венана и Бельтрами–Митчелла в римановом пространстве / Н. П. Азанов // Тр. геом. Сем., Казан. Ун–т. – 1989. – №19. – С. 9–13.
3. Азанов Н. П. Определение вектора бесконечно малой деформации мембраны, натянутой на тор / Н. П. Азанов // Тр. геом. Сем., Казан. ун–т. – 1990. – №20. – С. 13–18.
4. Потапенко І. Канонічні деформації метрик псевдоріманового простору / І. Потапенко // XIX Міжнародна конференція "Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем" (DSMSI–2019), Праці конференції, Київ. – 2019. – С. 263–265.
5. Безкоровайна Л. Л., Вашпанова Т. Ю. А–деформації поверхні зі стаціонарною довжиною LGT–ліній. Український математичний журнал. – 2010. – 62 (7). – С. 878–884.
6. Gavrilchenko M. L. Infinitesimal geodesic deformations of the totally geodesic manifolds / M. L. Gavrilchenko, N. N. Kinzerska // Differ. Geom. and Appl.: Proc. 7th Int. Conf., DGA 98. Brno: Masaryk Univ. – 1999. – P. 185–189.
7. Vasilenko A. T. Nonlinear nonaxisymmetric deformation of composite shells of revolution / A. T. Vasilenko, A. V. Lesechko // Journal of Mathematical Sciences. – 1996. – 79 (6). – P. 1458–1461.
8. Kiosak V. Mappings of Spaces with Affine Connection / V. Kiosak, O. Lesechko, O. Savchenko // 17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT 2018 – Proceedings, Bratislava. – 2018. – P. 563–569.
9. Gover A. R. Detecting Einstein geodesics: Einstein metrics in projective and conformal geometry / A. R. Gover, H. R. Macbeth // Differential Geometry and its Application. – 2014. – 33. – P. 44–69.

10. Gover A. R., Projectively related metrics, Weyl nullity and metric projectively invariant equations / A. R. Gover, V. S. Matveev // Proceedings of the London Mathematical Society. – 2017. – 114 (2). – P. 242–292.
11. Kiosak V. A. On the conformal mappings of quasi-Einstein spaces / V.A. Kiosak // Journal of Mathematical Sciences. United States. – 2012. – 184. – P. 12–18.
12. Kiosak V. Holomorphically Projective Mappings of Special Kahler Manifolds / V. Kiosak, O. Savchenko, T. Shevchenko // AIP Conference Proceedings. – 2018. – 2025, 08004(2018).
13. Kiosak V. Special Einstein's equations on Kahler manifolds / V. Kiosak, I. Hinterleitner // Archivum Mathematicum. – 2010. – 46 (5). – P. 333–337.
14. Hamilton R. S. The Ricci flow on surfaces / R.S. Hamilton // Math. and general relativity, Santa Cruz, CA.– 1986.– P. 237–262.
15. Chen B. Y. Classification of torqued vector fields and its applications to Ricci solitons / B. Y. Chen // Kragujevac Journal of Mathematics. – 2017.– 41 (2).– P. 239–250.
16. Kiosak V.  $\varphi(\text{Ric})$ -Vector Fields on Conformally Flat Spaces / V. Kiosak, I. Hinterleitner // Proceedings of American Institute of Physics. – 2009. – 1191. – P. 98–103.
17. Kiosak V.  $\varphi(\text{Ric})$ -Vector Fields in Riemannian Spaces / V. Kiosak, I. Hinterleitner // Archivum-mathematicum, Brno. – 2008. – №44. – P. 385–390.
18. Kirik B. Generalized quasi-Einstein manifolds admitting special vector fields / B. Kirik, F. Zengin // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis.– 2015.– 31 (1).– P. 61–69.
19. Евтушик Л. О мобильности римановых пространств относительно конформных отображений на пространства Эйнштейна / Л. Евтушик, В. Киосак, Й. Микеш // Изв. Вузов. Матем. – 2010. – №8. – С. 36–41.
20. Kiosak V. There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor / V. Kiosak, V. Matveev // Journal of Geometry and Physics. – 2014. – 78. – P. 1–11.
21. Киосак В. А. О степени геодезической подвижности римановых метрик / В. А. Киосак, В. С. Матвеев, Й. Микеш, И. Г. Шандра // Матем. заметки. – 2010. – 87 (4). – С. 628–629.

## References

1. Dzhanelidze, G. Yu. (1958). Equations of Saint-Venant, Trud. LPI, 192, 7–20.
2. Azanov, N. P. (1989). Equations of Saint-Venant and Beltrami-Michell compatibility in a Riemannian space, Tr. Geom. Semin., Kazan University, Kazan, 19, 9–13.
3. Azanov, N. P. (1990). Determining the vector of an infinitesimal deformation of a membrane that is stretched over a torus. Tr. Geom. Semin., Kazan University, Kazan, 20, 13–18.
4. Potapenko, I. (2019). Canonical deformations of pseudo-Riemannian spaces. XIX International Conference DSMSI, Proceedings of Conference reports, Kyiv, 263–265.
5. Bezkorovaina, L. L., Vashpanova, T. Yu. (2010). A-deformations of a surface with stationary lengths of LGT-lines. Ukr. Mat. Zh., 62 (7), 878–884.
6. Gavrilchenko, M. L., Kinzerska, N. N. (1999). Infinitesimal geodesic deformations of the totally geodesic manifolds. Differ. Geom. and Appl.: Proc. 7th Int. Conf., DGA 98. Brno: Masaryk Univ., 185–189.
7. Vasilenko, A. T., Lesechko, A. V. (1996). Nonlinear nonaxisymmetric deformation of composite shells of revolution. Journal of Mathematical Sciences, 79 (6), 1458–1461.
8. Kiosak, V., Lesechko, O., Savchenko, O. (2018). Mappings of Spaces with Affine Connection. 17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT 2018 – Proceedings, Bratislava, 563–569.
9. Gover, A. R., Macbeth, H. R. (2014). Detecting Einstein geodesics: Einstein metrics in projective and conformal geometry. Differential Geometry and its Application, 33, 44–69.
10. Gover, A. R., Matveev, V. S. (2017). Projectively related metrics, Weyl nullity and metric projectively invariant equations. Proceedings of the London Mathematical Society, 114 (2), 242–292.
11. Kiosak, V. A. (2012). On the conformal mappings of quasi-Einstein spaces. Journal of Mathematical Sciences. United States, 184, 12–18.
12. Kiosak, V., Savchenko, O., Shevchenko, T. (2018). Holomorphically Projective Mappings of Special Kahler Manifolds. AIP Conference Proceedings, 2025, 08004(2018).
13. Kiosak, V., Hinterleitner, I. (2010). Special Einstein's equations on Kahler manifolds. Archivum Mathematicum, 46 (5), 333–337.



14. Hamilton, R. S. (1986). The Ricci flow on surfaces. Math. and general relativity, Santa Cruz, CA, 237–262.
15. Chen, B. Y. (2017). Classification of torqued vector fields and its applications to Ricci solitons. Kragujevac Journal of Mathematics, 41 (2), 239–250.
16. Kiosak, V., Hinterleitner, I. (2009).  $\varphi(\text{Ric})$ -Vector Fields on Conformally Flat Spaces. Proceedings of American Institute of Physics, 1191, 98–103.
17. Kiosak, V., Hinterleitner, I. (2008).  $\varphi(\text{Ric})$ -Vector Fields in Riemannian Spaces. Archivum-mathematicum, Brno, 44, 385–390.
18. Kirik, B., Zengin, F. (2015). Generalized quasi-Einstein manifolds admitting special vector fields. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, 31 (1), 61–69.
19. Evtushik, L., Kiosak, V., Mikesh, J. (2010). The mobility of Riemannian spaces with respect to conformal mappings onto Einstein spaces. Russian Mathematics, 54 (8), 29–33.
20. Kiosak, V., Matveev, V. (2014). There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor. Journal of Geometry and Physics, 78, 1–11.
21. Kiosak, V. A., Matveev, V. S., Mikesh, J., Shandra, I. G. (2010). On the degree of geodesic mobility for Riemannian metrics., Mathematical Notes, 87(4), 586–587.

**Вашпанова Ніна Володимирівна**

Одеська національна академія харчових технологій, к.ф.-м.н., доцент  
вул. Канатна, 112 Одеса, Україна 65039  
vashanina@ukr.net  
ORCID: 0000-0002-8639-8368

**Подоусова Тетяна Юрївна**

Одеська державна академія будівництва та архітектури, к.ф.-м.н.  
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029  
tatyana\_top@ukr.net  
ORCID: 0000-0002-9492-126X

**Шевченко Тетяна Іванівна**

Одеська державна академія будівництва та архітектури, к.т.н., доцент  
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029  
shevtat11@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-7304-1706

*Для посилань:*

Вашпанова Н. В. Умови Сен-Венана для псевдоріманових просторів / Н. В. Вашпанова, Т. Ю. Подоусова, Т. І. Шевченко // Механіка та математичні методи. – 2019. – №2. – С. 62–74.

*For references:*

Vashpanova, N., Podousova, T., Shevchenko, T. (2019). Saint-Venant's conditions for pseudo-Riemannian spaces. Mechanics and Mathematical Methods, 2, 62–74.



УДК 378

## ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ЦИФРОВОЙ КОМПЕТЕНЦИИ В РАМКАХ ДИСЦИПЛИН МЕХАНИКА И МАТЕМАТИКА

Кондратьева Н. А.<sup>1</sup>, Гундина М. А.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский национальный технический университет

**Аннотация:** Современный процесс обучения в высшей школе неразрывно связан с использованием информационных технологий при изучении математики и механики.

Восприятие содержания образования с помощью информационных технологий стимулирует познавательный интерес студентов; повышает эмоциональное отношение студентов к учебной деятельности; позволяет проводить организованно контроль и самоконтроль знаний и полученных умений в сжатые сроки.

В данной работе описывается разработанный комплекс мероприятий, направленных на формирование цифровой компетенции в рамках дисциплин «Математика» и «Механика». В статье проанализировано количественное значение частоты употребления прилагательного «цифровой» в ресурсах открытого доступа. Оно часто ассоциируется с прилагательными «виртуальный», «мобильный». Определены частоты использования в оцифрованных ресурсах, представленных в открытом доступе. Для этого используем компьютерную систему Mathematica, позволяющую провести данное исследование и визуализировать полученные результаты.

В работе описаны особенности цифровизации образования. Цифровизация высшей школы предусматривает не только использование информационных технологий в образовании, но и критический подход к выбору инструментов исследования. Требуется четкое осознание выбора преподавателем: на каких занятиях эффективно использовать информационные технологии и соответствующие им приемы, на каких эти нововведения снизят степень усвоения материала.

Основные понятия цифровизации высшей школы связаны с использованием открытых образовательных ресурсов, обменом между университетами учебными планами, осуществлением обмена образовательными ресурсами, организацией проектной деятельности студентов, публикацией в открытом доступе статей, учебно-методических пособий и учебников, использованием интегрированных форм обучения.

В статье выделены основные качества, которые формируются в рамках цифровой компетенции в процессе изучения курсов прикладной механики и математики.

**Ключевые слова:** цифровизация, моделирование, механика, компетенция, информационные технологии.

## FEATURES OF FORMATION OF DIGITAL COMPETENCE WHEN READING DISCIPLINES MECHANICS AND MATHEMATICS

N. Kandratsyeva<sup>1</sup>, M. Hundzina<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Belarusian National Technical University

**Abstract:** The modern studying process in higher education is inextricably linked with the use of information technology in the study of mathematics and mechanics.

The perception of educational content with the help of information technology stimulates the cognitive interest of students; increases students' emotional attitude towards learning activities; allows you to conduct an organized control and self-control of knowledge and acquired skills in a short time.



This paper describes the developed set of activities aimed at the formation of digital competence in the disciplines of "Mathematics" and "Mechanics". The article analyzes the quantitative value of the adjective "digital" use frequency in open access resources. It is often associated with the adjectives "virtual", "mobile". The frequencies of use in digitized resources presented in the public domain are determined. To do this, we use the Mathematica computer system, which allows us to carry out this study and visualize the results.

The paper describes the features of digitalization of education. Higher school digitization involves not only the use of information technology in education, but also a critical approach to the choice of research tools. It requires a clear awareness of the choice of the teacher: in what classes to effectively use information technology and the corresponding methods, in which these innovations will reduce the degree of assimilation of the material.

The basic concepts of digitalization of higher education are associated with the use of open educational resources, the exchange between universities of curricula, the exchange of educational resources, the organization of students' project activities, the publication of articles, teaching aids and textbooks, the use of integrated forms of education.

The article highlights the main qualities that are formed within the framework of digital competence in the process of studying applied mechanics and mathematics courses. **Keywords:** digitalization, modeling, mechanics, competence, information technology.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Развитие роботизации, современного моделирования и прогнозирования, подходов к анализу больших данных, облачных вычислений и хранения данных, разработка «Интернет вещей», совершенствование технологий кибербезопасности, развитие дополнительной реальности, непрерывной 3D-печати создает благоприятные условия для выхода на рынок труда молодых специалистов, у которых сформирована цифровая компетентность. Такой специалист имеет отличные навыки математического моделирования и особый набор личностных качеств. Все описанные особенности не могли не повлиять на процесс подготовки специалистов.

Современный процесс обучения в высшей школе неразрывно связан с использованием информационных технологий при изучении математики и механики. Новейшие технические средства значительно расширяют возможности преподавателя по изложению материала, по организации лабораторных работ в учебных классах с применением математического моделирования процессов. Студенту представляется возможность создания сложнейших конструкций и их тестирование на лабораторных работах.

Восприятие содержания образования с помощью информационных технологий стимулирует познавательный интерес студентов; повышает эмоциональное отношение студентов к учебной деятельности; позволяет проводить организованно контроль и самоконтроль знаний и полученных умений в сжатые сроки.

## 2 АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На сегодняшний день информационные технологии активно используются в различных сферах современной жизни. Так называемая, цифровизация науки способствует установлению прочных междисциплинарных связей между гуманитарными дисциплинами и естествознанием. Появляется возможность уже на первых курсах обучения студентов общеобразовательные дисциплины читать в разрезе тех специальностей, которые они получают. Использование компьютерного математического моделирования позволяет реализовать эти идеи на практике.

«Информационно-коммуникационные технологии – это совокупность информационных технологий и технологий электросвязи, обеспечивающих сбор, обработку, хранение, распространение, отображение и использование информации в интересах ее пользователей» [1].

Доктор педагогических наук, профессор О. Л. Жук отмечает, что «широкое использование информационных технологий способствует увеличению доли самостоятельной работы студентов, что требует разработки нового учебно-методического и информационного обеспечения» [2, 3].

Доктор психологических наук, директор программы «Сити-менеджмент» Пикзулева О. А. понимает цифровизацию как замену аналоговых (физических) систем сбора и обработки данных технологическими системами, которые генерируют, передают и обрабатывают цифровой сигнал о своем состоянии. В широком смысле цифровизация – процесс переноса в цифровую среду функций и деятельности, ранее выполнявшихся людьми и организациями [4].

### 3 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

В данной работе описывается разработанный комплекс мероприятий, направленных на формирование цифровой компетенции в рамках дисциплин «Математика» и «Механика».

### 4 РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Интерес к цифровизации науки в XXI в. возрос в два раза, по сравнению с последними десятилетиями XX в. Приведем количественное значение частоты употребления данного понятия в ресурсах открытого доступа. Прилагательное «цифровой» часто ассоциируется с прилагательными «виртуальный», «мобильный». Определим частоты использования этих прилагательных в оцифрованных ресурсах, представленных в открытом доступе. Для этого используем компьютерную систему Mathematica, позволяющую провести данное исследование и визуализировать полученные результаты.

Расчет мы осуществляли с помощью встроенной функции WordFrequencyData. Данная функция предназначена для получения информации о частоте употребления слова в печатных текстах на многочисленных языках. Ее можно использовать для отслеживания тенденций использования слов со временем:

1) определили список слов, которые будем анализировать:

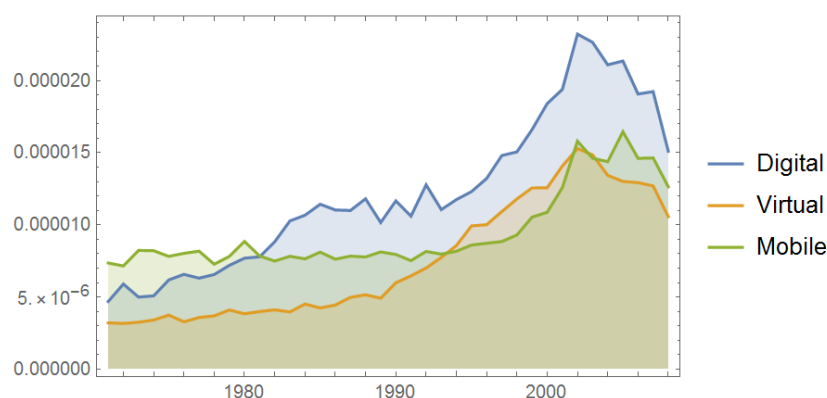
```
t={"Digital","Virtual","Mobile"};
```

2) выбрали временной диапазон, в котором зародились и использовались данные слова:  
`f=WordFrequencyData[t,"TimeSeries",{1971,2019},IgnoreCase->True];`

3) представили результат в графическом виде:

```
DateListPlot[f, Filling->Axis].
```

Полученные результаты представлены на рис. 1. Можно сделать вывод, что вопрос к понятию «цифровизация» возрос. На наш взгляд, это связано с тем, что начало XXI века характеризуется повышением интереса к использованию компьютерных технологий в образовании, экономике, на производстве. Этот интерес возрос более чем в 2 раза, по сравнению с периодом 90-х годов XX в.



**Рис. 1.** Частота использования прилагательных «цифровой», «виртуальный», «мобильный» в период с 1971 года по 2019

Технологический процесс на этом этапе стимулирует развитие соответствующих областей знания. А значит и подготовка специалистов, будущих профессионалов, должна учитывать предпочтения современного рынка труда, адекватно реагировать на нововведения в техногенной сфере, применять новейшие подходы к организации учебного процесса.

Основные понятия цифровизации высшей школы связаны с использованием открытых образовательных ресурсов, обменом между университетами учебными планами, осуществлением обмена образовательными ресурсами, организацией проектной деятельности студентов, публикацией в открытом доступе статей, учебно-методических пособий и учебников, использованием интегрированных форм обучения.

Цифровизация высшей школы предусматривает не только использование информационных технологий в образовании, но и критический подход к выбору инструментов исследования. Требуется четкое осознание выбора преподавателем: на каких занятиях эффективно использовать информационные технологии и соответствующие им приемы, на каких эти нововведения снизят степень усвоения материала.

В вопросах цифровизации образования важным является нахождение баланса между реализацией дидактических принципов, которым должно соответствовать качеству образования (системность, доступность, последовательность и др.) и применением в процессе образовательных инноваций. Этому вопросу посвящены работы [5–7].

Достоинствами внедрения информационных технологий в управлении качеством подготовки студентов технических университетов можно выделить следующие:

- возникновение возможности работы с визуальной информацией большого объема на компактных носителях (задачи, связанные с обработкой изображений, полученных промышленным оборудованием и др.);
- использование проекционных технологий (широко применяются при чтении лекций по дисциплине механика);
- применение электронного раздаточного материала, что позволяет каждому учащемуся выявить основное содержание учебного материала;
- проведение интерактивного тестирования;
- организация мониторинга в компьютерных аудиториях.

Современная учебная программа по прикладной механике и математике построена таким образом, что можно оперативно перестраивать ее в соответствии с требованиями времени. При этой подготовке студентов важнейшим вопросом является реализация принципа дидактики – наглядности, который часто реализуется с помощью информационных технологий [8].

Такая концепция цифровизации дает студентам возможность реализовывать проекты с помощью компьютерного, математического моделирования. Оно позволяет усилить практикоориентированность изучаемых дисциплин.

Проведем обработку интернет-страницы, посвященной цифровой педагогике и выделим наиболее употребляемые существительные и глаголы. Для этого используем встроенные функции WordCounts, TextCases, Count, WordCloud.

1) Посчитаем общее количество слов: `association=WordCounts[text]`.

2) Выберем из них существительные: `nouns=TextCases[Normal@text,"Noun"]`.

3) Посчитаем частоту употребления каждого существительного:

`freqnouns=Counts[nouns]`

4) Визуализируем результат: `WordCloud[freqnouns]`.

Результат выполненной обработки текста представлен на рис. 2. Видим, что использование такого понятия «цифровая педагогика» неразрывно связано с применением существительных: ценности, инструменты, проект, технологии, доступ, моделирование, построение, воздействие.

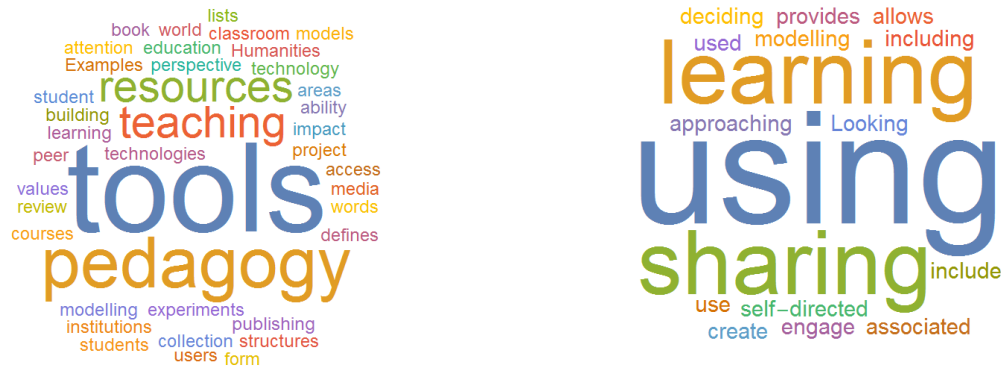


Рис. 2. Наиболее употребляемые существительные и глаголы на странице [https://en.wikipedia.org/wiki/Digital\\_pedagogy](https://en.wikipedia.org/wiki/Digital_pedagogy)

Использование цифровизации предусматривает наличие направленных действий на обучающегося, включение его в образовательный процесс, организацию процесса моделирования и ситуаций творческого поиска решения проблемы.

Так, в технических дисциплинах, используя компьютерные возможности, можно построить образовательный процесс таким образом, чтобы студент наглядно представлял полученную информацию с использованием информационных технологий.

В условиях цифровизации образования предусмотрено формирование у обучающихся цифровой компетенции – навыков эффективного пользования технологиями. Такая компетенция включает в себя:

- поиск информации,
- использование цифровых устройств,
- использование функционала социальных сетей,
- критическое восприятие информации,
- производство мультимедийного контента,
- синхронизация устройств и т.д.

Кроме этого, среди основных качеств, которые формируются в рамках этой компетенции в процессе изучения курсов прикладной механики и математики, можно выделить следующие:

- 1) овладение знаниями о возможностях и ограниченности возможностей экспериментальных методов и средств;
- 2) способность ставить и проводить математические эксперименты с использованием информационных технологий;
- 3) способность рационально сочетать применение экспериментальных и теоретических методов в процессе решения прикладных задач механики;
- 4) способность анализировать и делать адекватные выводы на основе данных, полученных экспериментально.

Математическая компетентность включает составляющие:

- 1) готовность применять полученные знания при решении актуальных прикладных научных проблем, самостоятельно ориентироваться в задаче;
- 2) умение применять знания математических дисциплин при изучении специальных профильных дисциплин, соответствующих специальности;
- 3) внутренняя мотивация, убежденность и уверенность в своих возможностях успешно использовать математические методы и модели при решении научных задач в будущей профессиональной деятельности;
- 4) готовность приобретать самостоятельно необходимые новые знания, выходящие за рамки привычной деятельности;
- 5) умение ставить цель действий в соответствии с объективными условиями;



б) умение определять конкретные средства и методы для задачи в соответствии с ситуацией, целью и наличными возможностями [9].

Например, студентам первых курсов в рамках курсовых проектов рекомендуется предлагать прикладные задачи, направленные на усвоение основ математического моделирования в рамках получаемой ими специальности [10].

В условиях цифровизации к окончанию учебы в вузе у студента происходит когнитивная, поведенческая и эмоциональная трансформация.

С точки зрения когнитивного компонента, происходит концептуализация возможностей в виртуальном мире. К концу обучения у студента сформировано дивергентное мышление о новых способах работы. Выпускник готов быстро принимать решения в условиях недостаточности информации.

С точки зрения поведенческого компонента, произошла адаптация к постоянно изменяющимся условиям взаимодействия. Выпускник готов к сотрудничеству.

С точки зрения эмоционального компонента, у выпускника сформировано толерантное отношение к риску и неопределенности, стрессоустойчивость к изменениям, смелость в принятии решений.

Нами разработан комплекс мероприятий, позволяющий реализовать описанные задачи в рамках дисциплин прикладной механики и математики:

**Таблица 1**

<b>Мероприятия по разработке и мониторингу качества и эффективности реализации образовательных программ</b>
Мониторинг университетского сайта, электронных материалов преподавателей дисциплин «Математика» и «Механика».
Проведение мониторинга эффективности реализуемых программ факультативной деятельности и дополнительного образования.
Мониторинг реализации основных целей программы Университет 3.0.
<b>Приведение базовой инфраструктуры факультетов в соответствие с современными требованиями</b>
Организация мониторинга обеспеченности факультета оборудованием и содействие созданию материально-технических условий, необходимых для обеспечения полной реализации образовательных программ по прикладной математике и механике.
Обеспечение технических ресурсов для внедрения и повышения доступности дистанционного и инклюзивного образования.
Содействие обеспечению факультета современным оборудованием, контроль за эффективным использованием в образовательной деятельности информационных и интернет-технологий.
<b>Развитие кадрового потенциала руководящих и педагогических работников высшего учебного заведения</b>
Повышение профессиональной компетентности педагогов в условиях реализации программы Университет 3.0, в том числе по проблемам управления качеством образования по математическим дисциплинам.
Повышение квалификации педагогических работников на основе результатов диагностики профессиональных затруднений и итоговой аттестации по математике и механике через разные формы повышения квалификации.
Формирование перспективных планов обеспеченности факультета высококвалифицированными педагогическими кадрами
Организация на факультете профориентационной работы по привлечению молодых специалистов на педагогические специальности.
Обеспечение консультационно-методического сопровождения молодых специалистов, работающих в группах с устойчиво низкими результатами. Закрепление наставников к преподавателям-стажерам.
Проведение методических семинаров по технологиям поддержки и развития одаренной молодежи.



Участие в конкурсе профессионального мастерства по выявлению и распространению передовых практик по обучению математике и механике.
Участие в работе совещания кураторов, научно-практических конференций, семинаров, круглых столов, направленных на повышение профессионального мастерства.
Организация работы по стимулированию педагогических работников за качество профессиональной деятельности, позитивную динамику результатов обучающихся.
<b>Сокращение разрыва в результатах обученности студентов между организациями с наиболее высокими и наиболее низкими образовательными результатами</b>
Участие в региональной процедуре проведения оценки качества образования.
Организация и проведение на первом и втором курсе обучения в университете диагностических работ в формате тестов по математике и механике.
Анализ результатов по итогам мониторинга, выявление обучающихся с низкими результатами, с целью индивидуального планирования подготовки к экзамену.
Анализ результатов окончания учебного семестра, учебного года, с целью принятия управленческих решений.
Проведение педагогических советов по вопросам повышения качества образовательных результатов по математическим дисциплинам.
Организация деятельности факультета по вопросам: - повышение качества успеваемости; - осуществление контроля за уровнем преподавания математики и механики.

## 5 ВЫВОДЫ

Данный комплекс мероприятий направлен на улучшение организации образовательного процесса таким образом, чтобы возникала возможность сформировать необходимые компетенции у будущего специалиста.

## Литература

1. Концепция информатизации системы образования Республики Беларусь на период до 2020 года / утв. Министром образования Респ. Беларусь С. А. Маскевич, 24 июня 2013 года. – Минск, 2013. – 18 с.
2. Государственная программа «Образование и молодежная политика» на 2016–2020 годы: утв. Постановлением Совета Министров Респ. Беларусь. – Минск, 2016. – 68 с.
3. Жук О. Л. Компетентностный подход в преподавании психолого-педагогических дисциплин в вузе / О. Л. Жук // Вышэйшая школа. – 2011. – №1. – С. 25–28.
4. Пикулёва О. А. Классификации самопрезентации личности: теоретические основания и проблемные аспекты / О. А. Пикулёва // Вестник Ленинградского государственного университета им. А.С. Пушкина. – 2013. – Т. 5, №. 1. – С. 63–69.
5. Полупанова Е. Г. Термин «инновация» и близкие ему понятия в зарубежной научно-педагогической литературе / Е. Г. Полупанова // Адукацыя і выхаванне. – 2004. – №7. – С. 61–66.
6. Петраков В. Н. Подготовка преподавателя к работе в инновационной среде / В. Н. Петраков // Вышэйшая школа. – 2004. – №2. – С. 37–40.
7. Демчук М. И. Информационное общество, инновационная деятельность и система образования / М. И. Демчук // Вышэйшая школа. – 2005. – №6. – С. 4–6.
8. Кондратьева Н. А. Пути совершенствования математической подготовки студентов технического университета / Н. А. Кондратьева, М. А. Гундина // материалы XII международной научно-методической конференции, Гомель. – Электрон. текст. данные. – 2019. – С.455–457.
9. Гундина М. А. Функционал сформированности качеств математической компетенции / М. А. Гундина, Н. А. Кондратьева // матер. XXII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях», Гомель. – 2019. – С. 132–133.
10. Юхновская О. В. Формирование математических понятий с помощью моделирования физических явлений / О. В. Юхновская, М. А. Гундина // Новые направления развития

приборостроения: материалы 12-й Международной научно-технической конференции молодых ученых и студентов, Минск. – 2019. – С. 360.

## References

1. Konceptija informatizacii sistemy obrazovanija Respubliki Belarus' na period do 2020 goda. Utv. Ministrom obrazovanija Resp. Belarus' S. A. Maskevich (2013). Minsk, 18.
2. Gosudarstvennaja programma "Obrazovanie i molodezhnaja politika" na 2016–2020 gody: utv. Postanovleniem Soveta Ministrov Resp. Belarus' (2016), 68.
3. Zhuk, O. L. (2011). Kompetentnostnyj podhod v prepodavanii psihologo-pedagogicheskikh disciplin v vuze. Vyshhejschaja shkola, 1, 25–28.
4. Pikuljova, O. A. (2013). Klassifikacii samoprezentacii lichnosti: teoreticheskie osnovanija I problemnye aspekty. Vestnik Leningradskogo gosudarstvennogo universiteta im. A.S. Pushkina, V. 5, 1, 63–69.
5. Polupanova, E. G. (2004). Termin "innovacija" i blizkie emu ponjatija v zarubezhnoj nauchno-pedagogicheskoj literature. Adukacija i vyhavanje, 7, 61–66.
6. Petrakov, V. N. (2004). Podgotovka prepodavatelja k rabote v innovacionnoj srede. Vyshhejschaja shkola, 2, 37–40.
7. Demchuk, M. I. (2005) Informacionnoe obshhestvo, innovacionnaja dejatel'nost' i sistema obrazovanija. Vyshhejschaja shkola, 6, 4–6.
8. Kondrat'eva, N. A. (2019). Puti sovershenstvovanija matematicheskoj podgotovki studentov tehničeskogo universiteta. Materialy XII mezhdunarodnoj nauchno-metodicheskoj konferencii. Gomel', 455–457.
9. Hundzina, M. A. (2019). Funkcional sformirovannosti kachestv matematicheskoj kompetencii. Mater. XXII Respublikanskoj nauchnoj konferencii studentov i aspirantov "Novye matematicheskie metody i komp'juternye tehnologii v proektirovanii, proizvodstve i nauchnyh issledovanijah", 132-133.
10. Juhnovskaja, O. V. (2019). Formirovanie matematicheskikh ponjatij s pomoshh'ju modelirovanija fizicheskikh javlenij. Materialy 12-j Mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoj konferencii molodyh uchenyh i studentov. Minsk, 360.

### **Кондратьева Наталья Анатольевна**

Белорусский национальный технический университет, старший преподаватель  
пр.Независимости, 65 Минск, Республика Беларусь 220013  
kondr2908@mail.ru  
ORCID: 0000-0002-2108-4675

### **Гундина Мария Анатольевна**

Белорусский национальный технический университет, к.ф.-м.н., доцент  
пр.Независимости, 65 Минск, Республика Беларусь 220013  
maryanatolevna@mail.ru  
ORCID: 0000-0002-9385-9919

### *Для посилань:*

Кондратьева Н. А. Особенности формирования цифровой компетенции в рамках дисциплин механика и математика / Н. А. Кондратьева, М. А. Гундина // Механіка та математичні методи. – 2019. – №2. – С. 75–83.

### *For references:*

Kandratsyeva, N., Hundzina, M. (2019). Features of formation of digital competence when reading disciplines mechanics and mathematics. Mechanics and Mathematical Methods, 2, 75–83.

Наукове видання

**МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ**  
**MECHANICS AND MATHEMATICAL METHODS**

**Науковий журнал**

*(українською, російською та англійською мовами)*

Відповідальний за випуск: Ковров А. В.

Підписано до друку 20.11.2019 р.  
Формат 60×84/8 Папір офісний Гарнітура Times  
Цифровий друк. Ум.-друк. арк. 9,76.  
Наклад 50 прим. Зам. №19-116Е

Видавець і виготовлювач:  
**Одеська державна академія будівництва та архітектури**  
**Свідоцтво ДК № 4515 від 01.04.2013 р.**  
Україна, 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 4.  
тел.: (048) 729-85-34, e-mail: [rio@ogasa.org.ua](mailto:rio@ogasa.org.ua)

---

Надруковано в авторській редакції з готового оригінал-макету  
в редакційно-видавничому відділі ОДАБА