**УДК 533.6.013.42**

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

**Кононов Ю. Н.[1], Шевченко В. П.[2], Лимарь А. А.[3]**
[1]*Институт прикладной математики и механики Национальной академии наук Украины*
[2]*Донецкий национальный университет имени Васыля Стуса*
[3]*Николаевский национальный аграрный университет*

**Аннотация:** В линейной постановке рассмотрена плоская гидроупругая задача о колебании защемленной тонкой изотропной прямоугольной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости в прямоугольном канале с жесткими боковыми стенками и жестким верхом и дном. Пластина подвержена растягивающим или сжимающим усилиям в срединной поверхности. Задача о плоских совместных колебаниях пластины и жидкости представлена системой интегро-дифференциальных уравнений с граничными условиями закрепления пластины и условием сохранения объема несжимаемой жидкости. При решении краевой задачи на собственные значения форма прогиба пластины предоставлена суммой фундаментальных решений однородного уравнения для пластины и частного решения неоднородного уравнения в виде разложения по собственным функциям колебаний идеальной жидкости в прямоугольном канале. Получено в виде определителя четвертого порядка частотное уравнение свободных совместных колебаний пластины и жидкости и проведено его упрощение. Показано, что оно распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты свободных колебаний (нечетные и четные частоты) и может быть представлено в единой форме для этих частот в виде бесконечного ряда. С учетом двух членов ряда выписано приближенное частотное уравнение (учет одного члена ряда не содержал уравнения). Из условия положительности квадрата частоты получены приближенные условия устойчивости колебании пластины и жидкости. Эти условия не зависят от глубин заполнения жидкостей и массы пластины. При действии растягивающих усилий условия устойчивости всегда будут выполнены, а в случае сжимающих усилий оценено влияние механических параметров системы на устойчивость колебаний пластины и жидкости. Удалось получить точные условия устойчивости. Показано, что приближенные условия устойчивости с достаточной для практики точностью совпадают с точными.

**Ключевые слова:** гидроупругость, упругая изотропная прямоугольная пластина, идеальная несжимаемая жидкость, прямоугольный канал, плоские колебания, устойчивость.

# ON THE STABILITY OF OSCILLATIONS OF A RECTANGULAR PLATE IN AN IDEAL LIQUID

**Yu. Kononov[1], V. Schevchenko[2], A. Lymar[3]**
[1] *Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine*
[2] *Vasyl' Stus Donetsk National University*
[3] *Mykolayiv National Agrarian University*

**Abstract:** A linear hydroelastic problem of oscillating a clamped thin isotropic rectangular plate separating ideal incompressible fluids in a rectangular channel with rigid side walls and a rigid top and bottom is considered in the linear formulation. The plate is subject to tensile or compressive forces in the middle surface. The problem of plane joint oscillations of a plate and a fluid is represented by a system of integro-differential equations with boundary conditions for fixing the plate and the condition for maintaining the volume of an incompressible fluid. When solving the eigenvalue boundary value problem, the plate deflection form is provided by the sum of the fundamental solutions of the homogeneous equation for the plate and the particular solution of the inhomogeneous equation in the form of expansion in eigenfunctions of oscillations of an ideal fluid in a rectangular channel. The frequency equation of free joint oscillations of a plate and a liquid was obtained in the form of a fourth-order determinant and was simplified. It is shown that it splits into two equations describing asymmetric and symmetric frequencies of free oscillations (odd and even frequencies) and can be represented in a single form for these frequencies in the form of an infinite series. Taking into account the two terms of the series, an approximate frequency equation was written out (accounting for one term of the series did not contain an equation). From the condition of the positivity of the frequency square, approximate conditions for the stability of the plate and fluid oscillations are obtained. These conditions do not depend on the depth of filling of liquids and the mass of the plate. Under the action of tensile forces, the stability conditions will always be fulfilled, and in the case of compressive forces, the influence of the mechanical parameters of the system on the stability of the plate and fluid oscillations is estimated. It was possible to obtain exact conditions of stability. It is shown that the approximate stability conditions with accuracy sufficient for practice coincide with the exact ones.

**Keywords**: hydroelasticity, elastic isotropic rectangular plate, ideal incompressible fluid, rectangular channel, flat oscillations, stability.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Для безопасности транспортировки и хранения жидких грузов большие резервуары разделяют на отсеки. В этой связи возникает задача о влиянии упругих и массовых характеристик пластин, разделяющих жидкости, на частотный спектр и устойчивость колебаний механической системы. Наиболее актуальна эта проблема возникает при работе и охлаждении ядерных реакторов. В статье рассмотрена модельная задача, когда отсек в виде жесткого прямоугольного канала с идеальной несжимаемой жидкостью горизонтально разделяется изотропной прямоугольной пластиной на два отсека.

## 2 АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРНЫХ ДАННЫХ И ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

На основании единого лагранжевого подхода задача о колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале с учетом свободной поверхности у верхней жидкости, по-видимому, впервые была рассмотрена в [1-2]. В работе [3] эта задача была рассмотрена на основании эйлерова подхода. Наиболее полное исследование свободных колебаний мембраны на свободной поверхности жидкости в прямоугольном канале было проведено в статье [4]. В работе [5] эта задача была обобщена на случай упругого дна и двухслойной жидкости с мембранами на свободной и внутренней поверхностях. Приближенные условия устойчивости колебаний прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с одним и с двумя упругими основаниями выведены в [7-8]. В статье [8] удалось получить точные условия устойчивости колебаний пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале. Колебания двухслойной жидкости в упругом прямоугольном канале рассмотрены в [9].

Условия устойчивости колебаний упругих пластин, разделяющих многослойную идеальную жидкость в жестком цилиндрическом резервуаре произвольного поперечного сечения с жестким плоским дном получены в [10].

Большой цикл работ посвящен гидроупругим колебаниям идеальной жидкости в круговых и коаксиальных цилиндрах с жесткими и упругими основаниями. Это работы [11-15] и мн. др. В статье [11] выведено частотное уравнение осесимметричных колебаний тяжелой двухслойной идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре с упругими верхним и нижним основаниями в виде защемленных кольцевых пластин. Работа [12] посвящена исследованию частотных уравнений несимметричных и симметричных собственных колебаний тяжелой идеальной двухслойной жидкости в жестком круговом цилиндрическом резервуаре с упругими основаниями виде круговых защемленных пластин. На примере однородной жидкости со свободной поверхностью и упругим дном в виде мембраны аналитически и численно исследован частотный спектр. Симметричные и несимметричные колебания пластины или мембраны на свободной поверхности идеальной жидкости в круговом резервуаре с абсолютно жестким дном подробно рассмотрены в [13]. Несимметричные колебания круговой пластины на свободной поверхности идеальной жидкости в круговом цилиндре исследованы в [14]. В статье [15] рассмотрены колебания идеальной жидкости в круговом цилиндрическом резервуаре с одинаковыми упругими основами в виде круговых пластин. В ней предложено аналитический метод, основанный на розлажении в ряд Фурье-Бесселя и методе Рэлея-Ритца.

В данной статье продолжены исследования, начатые в работах [1-8]. Выведено частотное уравнение совместных колебаний прямоугольной пластины и идеальной жидкости, показана возможность упрощения этого уравнения, получены приближенные и точные условия устойчивости свободных колебаний пластины и жидкости.

## 3 ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

В линейной постановке рассмотреть модельную гидроупругую задача о плоских колебаниях защемленной изотропной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости в жестком прямоугольном канале. Пластина подвержена растягивающим или сжимающим усилиям в срединной поверхности. Вывести уравнения совместных колебаний пластины и жидкости. Получить и исследовать частотного уравнение свободных колебаний. Выписать приближенные условия устойчивости колебании пластины и жидкости и уточнить их.

## 4 РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Рассмотрим плоские колебания упругой прямоугольной пластины горизонтально разделяющей идеальные несжимаемые жидкости плотности $\rho$ в жестком прямоугольном канале шириной $b$ $(b=2a)$. Пластина обладает постоянной изгибной жесткостью $D$ и подвержена растягивающим $(T>0)$ или сжимающим $(T<0)$ усилиям интенсивности $T$ в срединной поверхности. Контуры пластины защемлены. Верхняя жидкость заполняет сосуд до глубин $h_1$, а нижняя жидкость до глубины $h_2$.

Систему координат $Oxyz$ расположим так, чтобы плоскость $Oxy$ находилась на невозмущённой срединной поверхности пластины, ось $Oy$ была направлена вдоль оси канала, а ось $Oz$ – противоположно вектору ускорения силы тяжести $\vec{g}$. Колебания пластины и жидкости будем рассматривать в линейной постановке, считая совместные колебания пластины и жидкости безотрывными, а движения жидкостей потенциальными.

Уравнения плоских колебаний упругой пластины и жидкости имеют вид, аналогичный [6-8]

$$k_0\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+D\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}-T\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=\rho\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}-\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}\right)+Q \text{ при } z=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2}=0 \quad (i=1,2), \tag{2}$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}=\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \text{ при } z=0; \tag{3}$$

$$W\big|_{\gamma_j}=0, \quad \left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{\gamma_j}=0, \ (j=1,2); \tag{4}$$

$$\int_{-a}^{a} W dx=0; \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right|_{\gamma_i}=0 \quad (i,j=1,2); \tag{6}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}=0 \text{ при } z=h_1, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}=0 \text{ при } z=-h_2. \tag{7}$$


https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-2-6-17

Здесь $k_0 = \rho_0 h_0$; $W(x,t)$, $\rho_0$, $h_0$ – соответственно нормальный прогиб, плотность и толщина пластины; $\Phi_i(x,z,t)$ – потенциал скоростей $i$ -ой жидкости $(i=1,2)$; $Q$ – произвольная функция времени. Для удобства записи введено обозначение контуров пластины через $\gamma_j$ (индекс $j=1$ соответствует контуру $x=-a$, а $j=2$ – $x=a$).

Представим функции $\Phi_i(x,z,t)$ в виде рядов Фурье по собственным функциям $\psi_n(x)$

$$\Phi_i(x,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{in}(t)e^{k_n z} + B_{in}(t)e^{-k_n z}\right]\psi_n(x) \ \ (i=1,2), \tag{9}$$

где функции $\psi_n(x) = \cos k_n(x+a)$, соответствующие им собственные числа $k_n = \pi n/2a$.

Представление функций $\Phi_i(x,z,t)$ в виде (9) позволяет удовлетворить уравнению (2) и граничным условиям (6).

Подставив ряды (9) в (3) и (7) и, воспользовавшись ортогональностью функций $\psi_n$, получаем линейную систему уравнений относительно неизвестных $A_{in}, B_{in}$ и $W_n$, которой имеет решение:

$$A_{1n} = -\frac{\dot{W}_n e^{-\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}}, \quad B_{1n} = -\frac{\dot{W}_n e^{-\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh \kappa_{1n}};$$
$$A_{2n} = \frac{\dot{W}_n \mathrm{e}^{\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}}, \quad B_{2n} = \frac{\dot{W}_n \mathrm{e}^{-\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh \kappa_{2n}} \ . \tag{10}$$

Здесь $\kappa_{in} = h_i k_n$,

$$W_n = \frac{1}{N_n^2}\int_{-a}^{a} W\psi_n dx, \quad N_n^2 = \int_{-a}^{a}\psi_n^2 dx = a \, . \tag{11}$$

С учетом соотношений (9)-(11) уравнение (1) примет вид:

$$k_0\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - T\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n \ddot{W}_n}{k_n}\psi_n + Q, \tag{12}$$

где $a_n = \rho(\coth\kappa_{1n} + \coth\kappa_{2n}) = \rho\sinh\kappa_{1n}/\sinh\kappa_{1n}\sinh\kappa_{2n}$, $\kappa_n = k_n(h_1+h_2)$.

Таким образом, совместные колебания упругой пластины и жидкости находятся из системы интегро-дифференциальных уравнений (11)-(12), граничных условий (4), условий сохранения объема несжимаемой жидкости (5) и заданных начальных условий.

**Собственные частоты совместных колебаний упругой пластины и жидкости.** Для нахождения собственных частот совместных колебаний упругой пластины и жидкости положим

$$W(x,t) = w(x)\mathrm{e}^{iwt}, \quad Q = C_0\mathrm{e}^{iwt}. \tag{13}$$

Подставив (13) в (11) - (12), в граничные условия (4) и условия (5), получим:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - P\frac{d^2 w}{dx^2} - qw = \frac{\omega^2}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n w_n}{k_n}\psi_n + C; \tag{14}$$

$$w_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} w\psi_n dx; \tag{15}$$


https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-2-6-17

$$\int_{-a}^{a} w dx = 0; \tag{16}$$

$$w\big|_{\gamma_i} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{\gamma_i} = 0, \ (j = 1, 2). \tag{17}$$

Здесь $P = T/D$, $q = k_0\omega^2/D$, $C = C_0/D$.

Решение уравнения (14) будем искать в виде общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного

$$w = \sum_{k=1}^{4} A_k^0 w_k^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \psi_n + w_0, \tag{18}$$

где $w_k^0$ $(k = \overline{1,4})$ фундаментальная система решений однородного уравнения

$$\frac{d^4 w_k^0}{dx^4} - P\frac{d^2 w_k^0}{dx^2} - q w_k^0 = 0. \tag{19}$$

Здесь $A_k^0$ и $\tilde{C}_n$ и $w_0$ неизвестные константы.

Подставив (18) в уравнение (14) и, воспользовавшись соотношениями $d^2\psi_n/dx^2 = -k_n^2\psi_n$, $d^4\psi_n/dx^4 = -k_n^4\psi_n$, найдем константу $\tilde{C}_n$

$$\tilde{C}_n = \frac{\omega^2 a_n w_n}{k_n d_n}, \tag{20}$$

где $d_n = (Dk_n^2 + T)k_n^2 - k_0\omega^2$.

Подставив (18) в (15) и, принимая во внимание (20), получим выражение для $w_n$

$$w_n = \frac{k_n d_n}{k_n d_n - \omega^2 a_n} \sum_{k=1}^{4} A_k^0 E_{kn}^0. \tag{21}$$

Здесь

$$E_{kn}^0 = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} w_k^0 \psi_n dx. \tag{22}$$

С учетом (16), (20) и (21) окончательное выражение для формы прогиба пластины $w$ примет вид

$$w = \sum_{k=1}^{4}\left( w_k^0 - \tilde{w}_k^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n E_{kn}^0}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} \psi_n \right) A_k^0, \tag{23}$$

где $\tilde{w}_k^0 = 1/2a \int_{-a}^{a} w_k^0 dx$, $\tilde{a}_n = a_n + k_n k_0$, $\tilde{d}_n = (Dk_n^2 + T)k_n^2$.

Воспользовавшись разложением функций $w_k^0$ в ряд по полной и ортогональной системе функций $\psi_n$, условием $\int_{-a}^{a} w_n dx = 0$ и представлением (22), выражение (23) можно переписать так


https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-2-6-17

$$w = -\sum_{k=1}^{4}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\psi_n\right)A_k^0 . \tag{24}$$

Здесь $\beta_n = k_n d_n / (\omega^2\tilde{a}_n - k_n\tilde{d}_n)$ .

В формулу (24) входит четыре неизвестные константы $A_k^0$. Из граничных условий закрепления пластины (17) имеем четыре линейных однородных уравнений относительно $A_k^0$. Из равенства нулю определителя этой системы следует частотное уравнение собственных совместных колебаний упругой пластины и жидкости

$$\left|\left\|C_{qk}\right\|_{q,k=1}^{4}\right| = 0 , \tag{25}$$

где

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n E_{kn}^0,\ C_{2k} = C_{1k}^0,\ C_{jk}^0 = \left.\frac{dw_k^0}{dx}\right|_{\gamma j},\ C_{3k} = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n E_{kn}^0(-1)^n,\ C_{4k} = C_{2k}^0,\ (k=\overline{1,4}) . \tag{26}$$

Таким образом, рассматриваемая задача имеет бесконечный дискретный спектр собственных значений $\omega_m^2$, являющихся корнями характеристического уравнения (25), а соответствующие им собственные функции $w_m(x)$ образуют полную и ортогональную систему функций на отрезке $[-a, a]$ $(m=\overline{1,\infty})$ [8].

Следует отметить, что при определенных соотношениях параметров механической системы частотное уравнение (25) может не иметь положительных корней, т.е. плоская форма равновесия упругой пластины может быть неустойчивой.

**Упрощение частотного уравнения.** Проведем упрощение частотного уравнения (25). Для этого вычислим коэффициенты $E_{kn}^0$. Так как $q > 0$, то фундаментальная система решений уравнения (19) и коэффициенты $E_{kn}^0$ примут вид:

$$\begin{gathered}
w_k^0 = \{\sinh\tilde{p}_1 x,\ \cosh\tilde{p}_1 x,\ \sinh\tilde{p}_2 x,\ \cosh\tilde{p}_2 x\};\\
E_{1n}^0 = \frac{\tilde{p}_1\cosh\tilde{p}_1^*}{a(k_n^2+\tilde{p}_1^2)}\left[(-1)^n - 1\right],\quad E_{2n}^0 = \frac{\tilde{p}_1\sinh\tilde{p}_1^*}{a(k_n^2+\tilde{p}_1^2)}\left[(-1)^n + 1\right];\\
E_{3n}^0 = \frac{\tilde{p}_2\cosh\tilde{p}_2^*}{a(k_n^2-\tilde{p}_2^2)}\left[(-1)^n - 1\right],\quad E_{4n}^0 = \frac{\tilde{p}_2\sinh\tilde{p}_2^*}{a(k_n^2-\tilde{p}_2^2)}\left[(-1)^n + 1\right],
\end{gathered} \tag{27}$$

где $\tilde{p}_{1,2}^2 = \pm P/2 + \sqrt{P^2/4 + q}$, $\tilde{p}_l^* = a\tilde{p}_l$, $(l = 1,2)$ .

Коэффициенты $C_{qk}$ согласно (26) и (27) запишутся так:

$$\begin{gathered}
C_{11} = \sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E_{1,2m-1}^0,\ C_{12} = \sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E_{2,2m}^0,\ C_{13} = \sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E_{3,2m-1}^0,\ C_{14} = \sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E_{4,2m}^0;\\
C_{21} = \tilde{p}_1\cosh\tilde{p}_1^*,\ C_{22} = -\tilde{p}_1\sinh\tilde{p}_1^*,\ C_{23} = \tilde{p}_2\cosh\tilde{p}_2^*,\ C_{24} = -\tilde{p}_2\sinh\tilde{p}_2^*;\\
C_{31} = -C_{11},\ C_{32} = C_{12},\ C_{33} = -C_{13},\ C_{34} = C_{14};\\
C_{41} = C_{21},\ C_{42} = -C_{22},\ C_{43} = -C_{23},\ C_{44} = -C_{24}.
\end{gathered}$$

Проводя преобразования со строками и столбцами определителя уравнения (25), приводим его к блочному виду с нулевыми двумя блоками. В результате получим уравнение


https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-2-6-17

$$\left(\tilde p_2\cos\tilde p_2^*\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E^0_{1,2m-1}-\tilde p_1\cosh\tilde p_1^*\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E^0_{3,2m-1}\right)\times$$
$$\times\left(\tilde p_1\sinh\tilde p_1^*\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E^0_{4,2m}-\tilde p_2\sin\tilde p_2^*\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E^0_{2,2m}\right)=0. \tag{28}$$

Уравнение (28) распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты.

С учетом соотношений (27) и равенства $(k_n^2+\tilde p_1^2)(k_n^2-\tilde p_2^2)=(1/D)d_n$ выражения $\tilde p_2\cos\tilde p_2^*E^0_{1,2m-1}-\tilde p_1\cosh\tilde p_1^*E^0_{3,2m-1}$ и $-\tilde p_1\sinh\tilde p_1^*E^0_{4,2m}-\tilde p_2\sin\tilde p_2^*E^0_{2,2}$ примут вид:

$$\tilde p_2\cos\tilde p_2^*E^0_{1,2m-1}-\tilde p_1\cosh\tilde p_1^*E^0_{3,2m-1}=-\frac{2}{a}\tilde p_1\tilde p_2\cosh p_1^*\cos p_2^*\frac{\tilde p_2^2-\tilde p_1^2}{d_{2m-1}}D;$$
$$-\tilde p_1\sin\tilde p_1^*E^0_{4,2m}-\tilde p_2\sin\tilde p_2^*E^0_{2,2m}=\frac{2}{a}\tilde p_1\tilde p_2\sinh\tilde p_1^*\sin\tilde p_2^*\frac{\tilde p_1^2-\tilde p_2^2}{d_{2m}}D.$$

Подставив вычисленные выражения в (28) будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n}{\omega^2\tilde a_n-k_n\tilde d_n}=0. \tag{29}$$

Таким образом, частотное уравнение (25) распадается на нечетные и четные частоты и может быть записано в единой форме для этих частот. При $n=2m-1$ уравнение (29) описывает нечетные частоты, а при $n=2m$ – четные частоты.

Левая часть уравнения (29) является монотонно возрастающей функцией параметра $\omega^2$ на интервале $(k_k\tilde d_n/\tilde a_n,\ k_{n+1}\tilde d_{n+1}/\tilde a_{n+1})$ $(n=1,2,\ldots)$, принимающая на нем значения от $-\infty$ до $\infty$. Следовательно, между двумя последовательными значениями $k_n\tilde d_n/\tilde a_n$ лежит только один корень уравнения (29). Этим заранее определяются интервалы, в которых находятся собственные частоты.

**Устойчивость колебаний упругой пластины и жидкости.** Если в ряде уравнения (29) удержать два члена, то из неравенства $\omega^2>0$ следует условие устойчивости плоской формы равновесия пластины: $\tilde d_1+\tilde d_2>0$.

Для нечетных и четных форм колебаний оно соответственно примет вид, аналогичный [8]:

$$2{,}05\pi^2 D/a^2+T>0\ \ (n=1,3), \tag{30}$$
$$3{,}40\pi^2 D/a^2+T>0\ \ (n=2,4). \tag{31}$$

Из неравенств (30)-(31) следует, что при действии растягивающих усилий или при их отсутствии $(T\ge 0)$ они всегда будут выполнены. Неустойчивость может возникнуть только при действии сжимающих усилий $(T<0)$. Условия устойчивости (30)-(31) не зависят от глубин заполнения жидкостей и массы пластины. Из этих условий видно, что для устойчивости несимметричных колебаний нужно значительно большая изгибная жесткость, чем для симметричных. Неравенства (30)-(31) можно уточнить с учетом трех и более членов ряда, но при этом придется воспользоваться условиями положительности корней полиномов $n$-ой степеней, что значительно усложнит аналитические исследования.

Для нахождения критических значений механических параметров при которых происходит потеря устойчивости, по аналогии с работой [8], в частотном уравнении (29) положим $\omega^2=0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(Dk_n^2 + T)k_n^2} = 0. \tag{32}$$

Уравнение (32) можно переписать так

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 - \beta^2 n^2} = 0. \tag{33}$$

Здесь $\beta^2 = 4\tilde{T}a^2 / D\pi^2 > 0,\ \tilde{T} = -T > 0$.

Числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} 1 / \left[ n^2 (n^2 - \beta^2) \right]$ для нечетных и четных значений $n$ имеют представление:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2 \left[ (2m-1)^2 - \beta^2 \right]} = \pi^4 \frac{\tan x - x}{32 x^3}; \tag{34}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^2 \left[ (2m)^2 - \beta^2 \right]} = -\pi^4 \frac{x^2 + 3x \coth x - 3}{96 x^4}, \tag{35}$$

где $x = \pi\beta/2$.

Первый корень уравнения (33) при $n = 2m-1$ с учетом (34) имеет вид $x = 4{,}49341$ из которое следует следующее уточненное условие устойчивости

$$D > 0{,}04953\tilde{T}a^2. \tag{36}$$

Приближенное значение условия устойчивости, выписанное из условия (30), запишется так:

$$D > 0{,}04943\tilde{T}a^2. \tag{37}$$

Следует отметить хорошую близость приближенного значения и точного.

Первый корень уравнения (33) при $n = 2m$ с учетом (35) имеет вид $x = 5{,}76346$ из которое следует следующее уточненное условие устойчивости

$$D > 0{,}03011\tilde{T}a^2. \tag{38}$$

Приближенное значение условия устойчивости, выписанное из условия (31) запишется так:

$$D > 0{,}02980\tilde{T}a^2. \tag{39}$$

Также следует отметить хорошую близость приближенного значения и точного.

Из точных и приближенных условий устойчивости (36)-(37) и (38)-(39) следует, что учет двух членов ряда дает достаточно хорошую для практики точность.

## 5 ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ

Совместные колебания упругой пластины и жидкости находятся из системы интегро-дифференциальных уравнений (11) - (12), граничных условий (4), условий сохранения объема несжимаемости жидкости (5) и заданных начальных условий.

Частотное уравнение собственных совместных колебаний упругой пластины и жидкости (25) представлено в виде определителя четвертого порядка. Проведено упрощение этого уравнения. Показано, что оно распадается на два уравнения, описывающие несимметричные и симметричные колебания (нечетные и четные частоты) и может быть представлено в единой форме (29) для этих частот.


https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-2-6-17

С учетом двух членов ряда в уравнении (29) получено приближенное частотное уравнение. Из неравенства $\omega^2 > 0$ выписано приближенные условия устойчивости колебании пластины и жидкости (30)-(31). Эти условия не зависят от глубин заполнения жидкостей и массы пластины. Из них видно, что для устойчивости несимметричных колебаний нужно значительно большая изгибная жесткость, чем для симметричных. В случае действия растягивающих усилий условия устойчивости (30)-(31) будут всегда выполнены, а в случае сжимающих усилий – оценено влияние механических параметров системы на устойчивость колебаний пластины. Удалось получены точные условия устойчивости. Из сравнения точных и приближенных условий следует, что учет двух членов ряда дает достаточно хорошую для практики точность.

## 6 ВЫВОДЫ

В линейной постановке рассмотрена гидроупругая задача о плоских колебаниях защемленной изотропной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости в жестком прямоугольном канале. Пластина подвержена растягивающим или сжимающим усилиям в срединной поверхности. Выведено интегро-дифференциальное уравнение совместных колебаний пластины и жидкости. Получено и проведено упрощение частотного уравнения свободных колебаний пластины и жидкости. Показано, что оно распадается на два уравнения, описывающие несимметричные и симметричные колебания (нечетные и четные частоты) и может быть представлено в единой форме для этих частот. Выписаны приближенные условия устойчивости колебании пластины и жидкости. Показано, что в случае действия растягивающих усилий они всегда будут выполнены, в случае сжимающих усилий оценено влияние механических параметров системы на устойчивость колебаний пластины и жидкости. Удалось получить точные условия устойчивости. Показано хорошее совпадение приближенных и точных условий устойчивости.

Исследования выполнены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки, проект № 0119U100042.

## Литература

1. Ильгамов М. А. Об устойчивости упругой пластины между жидкостями разной плотности / М. А. Ильгамов, Ж. М. Сахабутдинов. Изб. проблемы прикл. механики. Сб. статей к шестидесятилетию акад. Н. Челомея − М.: Машиностроение, 1974. – С. 341−346.
2. Ильгамов М. А. Введение в нелинейную гидроупругость / М. А. Ильгамов – М.: Наука, 1991. – 200 с.
3. Кононов Ю. Н. Свободные колебания двухслойной жидкости, разделенной упругой пластинкой в прямоугольном канале / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Теор. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 170–176.
4. Троценко В. А. Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности / В.А. Троценко // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, №8. – С.74–80.
5. Кононов Ю. Н. Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Прикл. гідромеханіка. – 2008. – №1. – С. 33–38.
6. Кононов Ю. Н. О колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с одним упругим основанием / Ю. Н. Кононов, А. А. Лимарь // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць. – 2017. – Вип. 26. – С. 79–96.
7. Кононов Ю. Н. Колебания прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с упругими основаними / Ю. Н. Кононов, А. А.

Лимарь // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2017. – №1. – С. 190–204.
8. Kononov Yu. N. On the update of the conditions of the stability of vibrations of the plate separating ideal liquids in a rectangular channel with hard foundations / Yu. N. Kononov, A. A. Lymar // Intern. Journal of Mechanical Engineering and Information Technology. – 2018. – Vol. 06, Issue 1. – P. 1755–1760.
9. Amaouche M. Coupled frequencies of a rectangular hydroelastic system with two fluids / M. Amaouche, B. Meziani // Meccanica. – 2012. – 47. – P. 71–83.
10. Шевченко В. П. Об устойчивости упругих пластинок, разделяющих многослойную идеальную жидкость / В. П. Шевченко, Ю. Н. Кононов // Актуальные аспекты физико-механических исследований. Механика. – 2007. – С. 348–361.
11. Kononov Yu. M. Axially symmetric vibrations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical vessel / Yu. M. Kononov, V. P. Shevchenko, Yu. O. Dzhukha // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – Vol. 240, №.1, July. – P. 98–112.
12. Кононов Ю. М. Коливання двошарової ідеальної рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з пружними основами / Ю. М. Кононов, Ю. О. Джуха // Нелінійні коливання. – 2018. – т. 21, №4. – С.496–513.
13. Bauer H. F. Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover / H. F. Bauer // J. Sound Vib. – 1995. – 180, №5. – P. 689–704.
14. Jeong K.-H. Free vibration of two identical circular plates coupled with bounded fluid / K.-H. Jeong // J. Sound Vib. – 2003. – 260, №4. – P. 653–670.
15. Tariverdilo S. Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid / S. Tariverdilo, M. Shahmardani, J. Mirzapour, R. Shabani // Appl. Math. Model. – 2013. – 37, №1–2. – P. 228–239.

## References

1. Il'gamov, M. A., Sakhabutdinov, Zh. M. (1974). Ob ustoychivosti uprugoy plastiny mezhdu zhidkostyami raznoy plotnosti. M.: Mashynostroenie, 341−346.
2. Il'gamov, M. A. (1991). Vvedenie v nelineynuyu gidrouprugost'. M.: Nauka, 200.
3. Kononov, Yu. N., Tatarenko, E. A. (2002). Svobodnye kolebaniya dvukhsloynoy zhidkosti, razdelennoy uprugoy plastinkoy v pryamougol'nom kanale. Teor. i prikl. mekhanika, 36, 170–176.
4. Trotsenko, V. A. (1995). Svobodnye kolebaniya zhidkosti v pryamougol'nom kanale s uprugoy membranoy na svobodnoy poverkhnosti. Prikl. mekhanika, 31, 8, 74–80.
5. Kononov, Yu. N., Tatarenko, E. A. (2008). Svobodnye kolebaniya uprugikh membran i dvukhsloynoy zhidkosti v pryamougol'nom kanale c uprugim dnom. Prikl. gidromekhanika, 1, 33–38.
6. Kononov, Yu. N., Limar, A. A. (2017). O kolebanii pryamougol'noy plastiny, razdelyayushchey ideal'nye zhidkosti raznoy plotnosti v pryamougol'nom kanale s odnim uprugim osnovaniem. Problemi obchislyuval'noi mekhaniki i mitsnosti konstruktsiy: zbirnik naukovikh prats', 26, 79–96.
7. Kononov, Yu. N., Limar, A. A. (2017). Kolebaniya pryamougol'noy plastiny, razdelyayushchey ideal'nye zhidkosti raznoy plotnosti v pryamougol'nom kanale s uprugimi osnovanimi. Visnik Zaporiz'kogo natsional'nogo universitetu. Fiziko-matematichni nauki, 1, 190–204.
8. Kononov, Yu. N., Lymar, A. A. (2018). On the update of the conditions of the stability of vibrations of the plate separating ideal liquids in a rectangular channel with hard foundations. Intern. Journal of Mechanical Engineering and Information Technology, 06, Issue 1, 1755–1760.
9. Amaouche, M., Meziani, B. (2012). Coupled frequencies of a rectangular hydroelastic system with two fluids. Meccanica, 47, 71–83.
10. Shevchenko, V. P., Kononov, Yu. N. (2007) Ob ustoychivosti uprugikh plastinok, razdelyayushchikh mnogosloynuyu ideal'nuyu zhidkost'. Aktual'nye aspekty fiziko-mekhanicheskikh issledovaniy. Mekhanika. Kiev: Nauk. dumka, 348–361.
11. Kononov, Yu. M., Shevchenko, V. P., Dzhukha, Yu. O. (2019). Axially symmetric vibrations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical vessel. Journal of Mathematical Sciences, 240, №.1, July, 98–112.
12. Kononov, Yu. M., Dzhuha, Yu. O. (2018). Kolivannya dvosharovoï ideal'noï ridini v zhorstkomu tsilindrichnomu rezervuari z pruzhnimi osnovami. Neliniyni kolivannya, 21, №4, 496–513.

13. Bauer, H. F. (1995). Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover. J. Sound Vib., 180, №5, 689–704.
14. Jeong, K.-H. (2003). Free vibration of two identical circular plates coupled with bounded fluid. J. Sound Vib., 260, №4, 653–670.
15. Tariverdilo, S., Shahmardani, M., Mirzapour, J., Shabani, R. (2013). Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid. Appl. Math. Model, 37, №1–2, 228–239.

**Кононов Юрий Никитович**
Институт прикладной математики и механики Национальной академии наук, д.ф.-м.н., профессор
ул. Добровольского, 1 Славянск, Украина 84100
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1609-0253
**Шевченко Владимир Павлович**
Донецкий национальный университет имени Васыля Стуса, д.ф.-м.н., академик НАН Украины, профессор
ул. 600-летия, 21 Винница, Украина 21021
v.shevchenko@donnu.edu.ua
ORCID: 0000-0001-7092-0492
**Лимарь Александр Александрович**
Николаевский национальный аграрный университет, к.ф.-м.н, ассистент,
ул. Георгия Гонгадзе, 9 Николаев, Украина 54020
aleksandr1402a@mail.ua
ORCID: 0000-0002-0301-7313

*Для посилань:*
Кононов Ю. М. Об устойчивости колебаний прямоугольной пластины в идеальной жидкости / Ю. Н. Кононов, В. П. Шевченко, А. А. Лимарь // Механіка та математичні методи. – 2019. – №2. – С. 6-17.

*For references:*
Kononov, Yu., Schevchenko, V., Lymar, A. (2019). On the stability of oscillations of a rectangular plate in an ideal liquid. Mechanics and Mathematical Methods, 2, 6-17.