

ISSN 2618-0650 (Print)
ISSN 2664-1364 (Online)

Механіка



та математичні методи

**Mechanics
and Mathematical Methods**

**Науковий журнал
The scientific journal**

II/2/2020

УДК 531 : 51-7 (05)
M55

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

Науковий журнал



Засновник і видавець:

Одеська державна академія будівництва та архітектури

Том II
№2
2020

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: Серія КВ №23478–13318 Р від 13.07.2018 р.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
Серія ДК №4515 від 01.04.2013 р.

M55 **Механіка та математичні методи** : науковий журнал. — Одеса : ОДАБА, 2020. — Том II. — Вип. №2. — 95 с.

В науковому журналі публікуються статті і огляди за спеціальностями:

- 111 Математика;
- 112 Статистика;
- 113 Прикладна математика;
- 121 Інженерія програмного забезпечення;
- 122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології;
- 124 Системний аналіз;
- 131 Прикладна механіка;
- 192 Будівництво та цивільна інженерія.

Рекомендовано до друку Вченою радою Одеської державної академії будівництва та архітектури, протокол №3 від 29.12.2020 р.

Адреса: редакція журналу «Механіка та математичні методи»
Одеська державна академія будівництва та архітектури
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029

Телефони: (048)723-23-10, (048)7323402, (048)7298626

E-mail: mmm@ogasa.org.ua

Web: mmm-journal.com.ua

УДК 531 : 51-7 (05)
M55

ISSN 2618-0650 (Print)
ISSN 2664-1364 (Online)

Одеська державна академія
будівництва та архітектури, 2020

Склад редакційної колегії:

Головний редактор: Ковров А. В., к.т.н., проф., ректор Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Заступники головного редактора:

Крутії Ю. С., д.т.н., проф., проректор з науково-педагогічної роботи Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Сур'янінов М. Г., д.т.н., проф., завідувач кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Відповідальний секретар: Кіосак В. А., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

- Бербюк В. Є. д.ф.-м.н., проф., професор кафедри механіки та морських наук, Технічний університет Чалмерса, Гетеборг, Швеція;
- Ватуля Г. Л., д.т.н., проф., професор кафедри будівельної механіки та гідравліки Українського державного університету залізничного транспорту, Харків, Україна;
- Горик О. В., д.т.н., проф., завідувач кафедри загальнотехнічних дисциплін Полтавської державної аграрної академії, Полтава, Україна;
- Карпюк В. М., д.т.н., проф., професор кафедри залізобетонних конструкцій та транспортних споруд Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Куріазопоулос А., к.т.н., доц., професор кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Кода Е., д.т.н., проф., декан факультету будівництва та інженерії середовища Варшавського природничого університету, Варшава, Польща;
- Кононов Ю. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач відділу теорії керуючих систем інституту прикладної математики та механіки НАН України, Слав'янск, Україна;
- Кривий О. Ф., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики Національного університету "Одеська морська академія", Одеса, Україна;
- Круглов В. Є., к.ф.-м.н., проф., декан факультету математики, фізики і інформаційних технологій Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна;
- Кучер М. К., д.т.н., проф., завідувач відділу конструкційних матеріалів інституту проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна;
- Лесечко О. В., к.ф.-м.н., доц., завідувач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Лещенко Д. Д., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри теоретичної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Ляшенко Т. В., д.т.н., проф., професорка кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Максимович О. В., д.т.н., проф., професорка кафедри зварювального виробництва, діагностики та відновлення металоконструкцій Національного університету "Львівська політехніка", Львів, Україна;
- Пастернак Я. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна;
- Пневматікос Н., к.т.н., доц., доцент кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Попов В. Г., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри вищої математики Національного університету "Одеська морська академія", Одеса, Україна;
- Савченко О. Г., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, Херсон, Україна;
- Трач В. М., д.т.н., проф., завідувач кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування, Рівне, Україна;
- Шваб'юк В. І., д.т.н., проф., професор кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна.

Технічний редактор: Головата Злата Олександрівна

Лінгвістичний радник з англійської мови: Мар'яно Яніна Георгіївна, к.ф.н, доц.

ІТ підтримка: Вандинський Віктор Юрійович

The composition of the editorial board:

Chief Editor: Kovrov A., Ph.D., Professor, Rector of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

Deputy Chief Editor:

Krutii Yu., Doctor of Technical Science, Professor, Pro-rector for Research of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

Suryaninov M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

Assistant Editor: Kiosak V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Higher Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

- Berbyuk V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor in Mechanical Systems, Division of Dynamics, Department of Mechanics and Maritime Sciences Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden;
- Vatulia G., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Structural Mechanics and Hydraulics Department, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine;
- Goryk O., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Basic Technical Disciplines Department, Poltava State Agrarian Academy, Poltava, Ukraine;
- Karpuyk V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Reinforced Concrete Constructions and Transport Constructions, Odessa, Ukraine;
- Kyriazopoulos A., Ph.D., Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Koda E., Doctor of Technical Science, Professor, Dean of Construction and Environmental Engineering Faculty, University of Life Sciences, Warsaw, Poland;
- Kononov Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Control-system Theory Division, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Slavyansk, Ukraine;
- Kryvyi O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Department of Higher Mathematics Department, National University "Odessa Maritime Academy", Odessa, Ukraine;
- Kruglov V., Ph.D., Professor, Dean of Mathematics, Physics and Information Technology Faculty, Odessa I. I. Mechnikov National University, Odessa, Ukraine;
- Kucher M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Materials Division, G. S. Pisarenko Institute for Problems of Strength, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine;
- Lesechko O., Ph.D., Associate Professor, Head of Higher Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Leshchenko D., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Lyashenko T., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Information Technology and Applied Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Maksymovych O., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Welding Engineering, Diagnostics and Rebuilding of Metal Structures, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine;
- Pasternak Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Applied Mathematics and Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine;
- Pnevmatikos N., Ph.D., Associate Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Popov V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Higher Mathematics Department, National University "Odessa Maritime Academy", Odessa, Ukraine;
- Savchenko O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Algebra, Geometry and Mathematical Analysis Department, Kherson State University, Kherson, Ukraine;
- Trach V., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Bridges and Tunnels, Strength of Materials and Structural Mechanics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine;
- Shvabyuk V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Engineering Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine.

Technical Editor: Holovata Zlata

Linguistic Adviser in English language: Maryanko Yanina, Ph.D., Associate Professor

IT Support: Vandynskyi Viktor

ЗМІСТ

Акуленко Л. Д., Болотнік М. М., Лещенко Д. Д., Палій К. С. Про рух за інерцією абсолютно твердого тіла на триступеновому підвісі з ланками кінцевої довжини.....	6
Кіосак В. А., Каменева А. В. Укорочені відображення просторів афінної зв'язності.....	18
Костенко М. В., Шевельова А. Є., Лобода В. В. Про взаємодію двох тріщин на межі поділу матеріалів	32
Фомін В. М., Фоміна І. П. Побудова зон динамічної нестійкості для висотних будівель у разі сейсмічних дій.....	42
Подоусова Т. Ю., Вашпанова Н. В. Деформації поверхонь зі стаціонарним тензором Річчі.....	51
Карнаухова Г. С., Кіріченко Д. О. Круглі плити на пружній основі зі змінним коефіцієнтом постелі.....	63
Гундина М. А., Кондратьєва Н. А. Разработка интерактивных тестов в <i>Wolfram Mathematica</i> и <i>Delphi</i>	75
Бекшаєв С. Я. Якісні властивості коливань пружно опертого твердого тіла.....	85

CONTENT

L. Akulenko, N. Bolotnik, D. Leshchenko, E. Pali On inertial motion of an absolutely rigid body on a three-degree suspension with links of finite length.....	6
V. Kiosak, A. Kamienieva Shortened mappings of spaces with affine connectivity	18
M. Kostenko, A. Sheveleva, V. Loboda On the interaction of two cracks along the material interface	32
V. Fomin, I. Fomina Construction of dynamic instability zones for high structures under seismic impact.....	42
T. Podousova, N. Vashpanova Deformations of surfaces from stationary Ricci tensor.....	51
G. Karnauhova, D. Kirichenko Round slabs on a resilient base with variable bedding ratio.....	63
M. Hundzina, N. Kandratsyeva Development of interactive tests in <i>Wolfram Mathematica</i> and <i>Delphi</i>	75
S. Bekshaev Qualitative properties of vibrations of elastically supported rigid body.....	85

.

УДК 531.38

ПРО РУХ ЗА ІНЕРЦІЄЮ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА НА ТРИСТУПЕНЕВОМУ ПІДВІСІ З ЛАНКАМИ КІНЦЕВОЇ ДОВЖИНИ

Акуленко Л. Д.¹, Болотнік М. М.¹, Лещенко Д. Д.², Палій К. С.²

¹ *Інститут проблем механіки ім. О.Ю. Ішлінського РАН*

² *Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація: В роботах, присвячених динаміці абсолютно твердого тіла з нерухомою точкою вважається, що розглядувана механічна система має три ступені вільності. Така ситуація реалізується, коли тіло закріплено на нерухомій основі за допомогою кульового шарніра. В технічних системах часто зустрічається випадок кріплення твердого тіла до основи за допомогою двоступеневого шарніра, який складається з нерухомої і рухомої осей, які, як правило, взаємно перпендикулярні. В цьому випадку система має дві ступені вільності, однак множина кінематично можливих рухів залишається достатньо багатогою.

Динамічний аналіз руху твердого тіла з двоступеневим шарнірним закріпленням в силовому полі є складовою частиною опису механічних дій робототехнічних систем. В останні десятиліття все більш значну роль в динаміці систем твердих тіл грають маніпуляційні роботи, що складаються з послідовного ланцюга жорстких ланок, які керовані за допомогою моментних приводів в шарнірних з'єднаннях. До того ж класу об'єктів можна віднести і багато біологічних систем, що імітують, наприклад, рух людини або тварини (ходьбу, біг, стрибки).

Дволанкові системи мають різноманітні практичні застосування і майже настільки ж широкий спектр напрямків теоретичних досліджень. Відзначимо зокрема, аналіз вільного і вимушеного плоскопаралельного руху зв'язки двох твердих тіл, з'єднаних ідеальним циліндричним шарніром, які моделюють складовий супутник в космічному просторі, дволанковий маніпулятор, елемент дробильної машини.

Динамічна поведінка твердого тіла в кардановому підвісі – це система, яка може бути інтерпретована як двоступеневий маніпулятор і використовуватися як елемент більш складних робототехнічних конструкцій.

Лінійна математична модель вільних коливань дволанкового маніпулятора з в'язким тертям в обох його з'єднаннях є системою, що зводиться до розрахункової схеми подвійного маятника і дозволяє побудувати точний аналітичний розв'язок в частковому випадку.

За методикою дослідження запропонована стаття близька до робіт, де вивчався рух за інерцією плоского дволанника (шарнірної зв'язки двох тіл), і присвячених дослідженню руху абсолютно твердого тіла на двоступеневому шарнірі.

Ключові слова: тверде тіло, триступеневий підвіс, рух, ланка.

ON INERTIAL MOTION OF AN ABSOLUTELY RIGID BODY ON A THREE-DEGREE SUSPENSION WITH LINKS OF FINITE LENGTH

L. Akulenko¹, N. Bolotnik¹, D. Leshchenko², E. Palii²

¹ *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences*

² *Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract: Papers on the dynamics of an absolutely rigid body with a fixed point generally assume that the mechanical system has three degrees of freedom. This is the situation when the body is attached to a fixed base by a ball-and-socket joint. On engineering systems one often encounters



rigid bodies attached to a base by a two-degrees-of-freedom joint, consisting of a fixed axis and a movable one, which are mutually perpendicular. Such systems have two degrees of freedom, but the set of kinematically possible motions is quite rich.

Dynamic analysis of the motion of a rigid body with a two-degree hinge in a force field is an integral part of the description of the action of mechanical actions of robotic systems. In recent decades, an increasingly closed role in the dynamics of rigid body systems has been played by manipulation robots consisting of a sequential chain of rigid links and controlled by means of torque drives in articulated joints. The same class of objects can be attributed to many biological systems that imitate, for example, the movements of a person or animal (walking, running, jumping). Two-link systems have a variety of practical applications and an almost equally wide range of areas of theoretical research. We note, in particular, the analysis of free and forced plane-parallel motion of a bundle of two rigid bodies connected by an ideal cylindrical hinge and simulating a composite satellite in outer space, a two-link manipulator, and an element of a crushing machine.

The dynamic behavior of a rigid body in the gimbal suspension is a system, which can be interpreted as two-degree manipulator and used an element of more complex robotic structures.

The linear mathematical model of two-link manipulator free oscillations with viscous friction in both its joints is a system, which reduces to the calculation scheme of double pendulum and allows the construction of exact analytical solution in the partial case.

According to the research methodology, the proposed paper is close to works, where the motion by inertia of a plane two-rigid body hinged system was studied and devoted to the study of the motion of an absolutely rigid body on a power-to-power joint.

Keywords: rigid body, three-degree suspension, motion, link.

1 ВСТУП

Досліджується рух за інерцією абсолютно твердого тіла, зв'язаного з нерухомою основою за допомогою триступеневого підвісу, що складається з двох тонких прямолінійних стрижнів і трьох циліндричних шарнірів.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

В [1] досліджується рух абсолютно твердого тіла, закріпленого на двоступеневому шарнірі, коли зовнішні сили, за виключенням сил реакції в шарнірі, відсутні. В статті [2] якісно розглядається рух абсолютно твердого тіла, зв'язаного з нерухомою основою за допомогою двоступеневого шарніра, в однорідному полі ваги, яке діє паралельно нерухомій осі шарніра.

Досліджується рух абсолютно твердого тіла, зв'язаного з нерухомою основою за допомогою двоступеневого шарніра, рухома та нерухома осі якого складають довільний кут [3].

В [4] розглядається задача про вільний рух шарнірної зв'язки двох тіл.

В [5] з використанням моделей і методів теорії коливань і динаміки твердого тіла проведено аналіз статичних, кінематичних і динамічних властивостей шарнірних конструкцій роботів. В роботі [6] досліджується рух абсолютно твердого тіла, з'єднаного з нерухомою основою двоступеневим шарніром, в однорідному потенціальному полі, силові лінії якого напрямлені паралельно нерухомій осі шарніра.

В статті [7] розглянуті граничні періодичні рухи маятникових дволанкових систем з коченням. В роботі [8] досліджено динамічну поведінку твердого тіла з двома ступенями вільності з вібраційною опорою. В [9] розглядається задача про розгортання в невагомості пари динамічно ідентичних тіл (космічних апаратів у формі гантелі), зв'язаних між собою нерозтяжною і невагомою плівкою, яка намотана в вигляді рулону на циліндричні поверхні тіл.

В статті [10] розглядається динамічна поведінка тіла, закріпленого в кардановому підвісі. В [11] представлений вивід рівнянь руху електромеханічного маніпуляційного робота з дволанковою рукою, що здійснює плоскопаралельні рухи в горизонтальній площині. В [12] досліджуються задачі керування дволанковим маятником з керуванням в межланковому шарнірі або в точці підвісу. В роботі [13] розглядається динаміка подвійного математичного маятника, у якого осі циліндричних шарнірів неколінеарні одна до одної і утворюють між собою деякий гострий кут.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглядається абсолютно тверде тіло G , зв'язане з нерухомою основою за допомогою підвісу, який складається з двох рухомих стрижнів і забезпечує твердому тілу три ступені вільності. Підвіс влаштовано наступним чином (рис. 1). Стрижень OO_1 (перша ланка) з'єднаний з основою так, що він може обертатися навколо нерухомої осі e_1 . Стрижень O_1O_2 (друга ланка) з'єднаний зі стрижнем OO_1 за допомогою циліндричного шарніру, вісь якого e_2 проходить через точку O_1 та перпендикулярна першій ланці та осі e_1 . Тверде тіло G , в свою чергу, зв'язане зі стрижнем O_1O_2 за допомогою циліндричного шарніру, вісь якого e_3 проходить через точку O_2 та перпендикулярна ланці O_1O_2 та осі e_2 . Орієнтація осей обертання e_1, e_2, e_3 вибирається таким чином щоб вектори e_1, e_2, OO_1 та O_1O_2, e_2, e_3 утворювали праві

трійки. Підвіс такої конструкції можна трактувати як неідеальну реалізацію кульового шарніра, що забезпечує три ступені вільності обертання абсолютно твердого тіла відносно нерухомої точки. Розглянутий підвіс перетворюється в кульовий шарнір в разі, коли довжини ланок OO_1 та O_1O_2 дорівнюють нулю. Триступеневої підвіс з кінцевими довжинами ланок, який описано вище, може використовуватися в різних керованих системах, зокрема в маніпуляційних роботах.

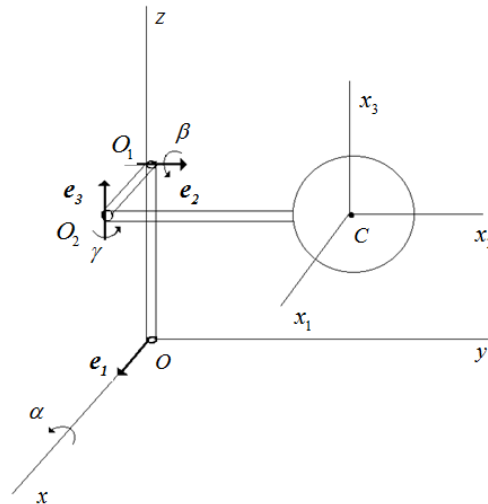


Рис. 1. Тверде тіло на триступеновому підвісі

Для опису руху розглянутої механічної системи вводяться такі праві ортогональні системи координат: нерухома (інерційна) система відліку $OX_1X_2X_3$ вісь X_1 якої колінарна e_1 ; зв'язана з тілом G система координат $Cx_1x_2x_3$, початок якої розташовано в центрі мас тіла, і вісь x_3 колінарна e_3 ; зв'язана з першою ланкою система координат $Ox'_1x'_2x'_3$ вісь x'_1 якої колінарна e_1 , а вісь x'_3 орієнтована уздовж ланки OO_1 ; система координат $Ox''_1x''_2x''_3$, яка зв'язана з другою ланкою, вісь x''_1 якої напрямлена уздовж стрижня O_1O_2 , а вісь x''_2 колінарна e_2 . Прийmemo за узагальнені координати кут α між першою ланкою підвісу та віссю X_3 нерухомої системи відліку, кут β між другою ланкою та віссю X_1 , кут γ між віссю x_2 системи координат, зв'язаної з тілом G і віссю обертання e_2 .

Коли $\alpha = \beta = \gamma = 0$ осі систем координат $OX_1X_2X_3$ та $Cx_1x_2x_3$ відповідно колінарні. Напрямок відліку кутів α, β, γ вибирається таким чином, що обертання навколо осі e_i ($i = 1, 2, 3$) зі збільшенням відповідного кута відбувається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця орта осі e_i . Куты α, β, γ – це куты Кривола першого роду [14], що визначають орієнтацію абсолютно твердого тіла (системи координат $Cx_1x_2x_3$) відносно нерухомої системи відліку.

Матриці переходу від системи координат $OX_1X_2X_3$ до $Ox'_1x'_2x'_3$, від $Ox'_1x'_2x'_3$ до $Ox''_1x''_2x''_3$ і від $Ox''_1x''_2x''_3$ до $Cx_1x_2x_3$ – це матриці повороту навколо осей e_1 (на кут α), e_2 (на кут β) і e_3 (на кут γ) відповідно:

$$\Gamma_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}, \quad \Gamma_\beta = \begin{vmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{vmatrix}, \quad \Gamma_\gamma = \begin{vmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (1)$$



Матриця переходу від нерухої системи відліку $OX_1X_2X_3$ до зв'язаної з тілом G системи координат $Cx_1x_2x_3$ визначається співвідношенням:

$$\Gamma = \Gamma_\gamma \Gamma_\beta \Gamma_\alpha. \quad (2)$$

В даній статті для простоти вважається, що ланки OO_1 та O_1O_2 підвісу – тонкі абсолютно жорсткі, однорідні прямолинійні стрижні.

Введемо такі позначення: a_1 і a_2 – довжини першої і другої ланок підвісу відповідно; ρ_1, ρ_2, ρ_3 – компоненти радіус-вектора центра мас тіла G відносно точки O_2 в системі відліку $Cx_1x_2x_3$; M – маса тіла G ; m_1, m_2 – маси ланок підвісу; I_{ii} ($i=1,2,3$) діагональні компоненти тензора інерції тіла G відносно його центра мас в системі координат $Cx_1x_2x_3$; $-I_{ij} = -I_{ji}$ ($i \neq j, i, j=1,2,3$) – недіагональні компоненти тензора інерції тіла G .

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Запишемо кінетичну енергію розглядуваної механічної системи як суму кінетичних енергій ланок підвісу та тіла G , користуючись для кожного з елементів системи відомою формулою для кінетичної енергії абсолютно твердого тіла:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}) + m(\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}}_c), \quad (3)$$

де \mathbf{R} – радіус-вектор деякої довільної точки P твердого тіла відносно полюса інерціальної системи відліку; \mathbf{r}_c – радіус-вектор центра мас тіла відносно точки P ; m – маса тіла; \mathbf{J} – тензор інерції тіла відносно точки P ; $\boldsymbol{\omega}$ – кутова швидкість тіла. Для кожного елемента механічної системи за точку P прийемо початок системи координат ($Ox_1x_2x_3, O_1x_1x_2x_3$ або $Cx_1x_2x_3$), зв'язаної з даним елементом. Тоді в нерухомій системі координат маємо такі зображення:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \Gamma_\alpha^T = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = a_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{R}_G = \mathbf{R}_2 + \Gamma_\alpha^T \Gamma_\beta^T \begin{Bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \Gamma^T \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_{c_1} = \frac{1}{2} a_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{c_2} = \frac{1}{2} \Gamma_\alpha^T \Gamma_\beta^T \begin{Bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{c_G} = 0.$$

Тут індекси 1, 2 і G вказують на те, що відповідний вектор відноситься до ланок 1 і 2 або до тіла G , верхній індекс T означає транспонування матриці. Кутові швидкості елементів системи, задані в зв'язаних з ними системах координат, визначаються наступними виразами (кінематичними рівняннями):

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{Bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_G = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma \\ -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Кінематичні рівняння (5) можуть бути виведені з матриць переходу (1), (2) за описуваним нижче правилом [15,16]. Нехай Γ_i ($i=1, 2, G$) – матриці переходу від

системи координат $OX_1X_2X_3$ до системи координат, зв'язаної з відповідним елементом. Тоді вектор ω_i кутової швидкості даного елемента відносно нерухомої системи відліку в зв'язаній системі координат має вигляд:

$$\omega_i = \begin{pmatrix} \Omega_{32} \\ \Omega_{43} \\ \Omega_{21} \end{pmatrix}, \quad \Omega = \Gamma_i \dot{\Gamma}_i^T \quad (i = \alpha, \beta, \gamma). \quad (6)$$

Для одержання (5) з (6) необхідно покласти $\Gamma_1 = \Gamma_\alpha$, $\Gamma_2 = \Gamma_\beta \Gamma_\alpha$, $\Gamma_G = \Gamma_\gamma \Gamma_\beta \Gamma_\alpha$. Вирази для кінетичної енергії ланок підвісу, обчислені відповідно до (3) - (5) мають вигляд:

$$T_1 = \frac{1}{6} m_1 a_1^2 \dot{\alpha}^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[\left(a_1^2 + \frac{1}{3} a_2^2 \sin^2 \beta - a_1 a_2 \sin \beta \right) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{3} a_2^2 \beta^2 \right]. \quad (7)$$

Вираз для кінетичної енергії T_G тіла G дуже громіздкий і тут не наводиться. Функція T_G в загальному випадку являє собою квадратичну форму узагальнених швидкостей з коефіцієнтами, що залежать від узагальнених координат β і γ , а також від параметрів $a_1, a_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3, I_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$), M . Відзначимо, що від координати α формули T_1, T_2, T_G не залежать. Надалі буде розглядатися окремий випадок, коли T_G не залежить від γ . Аналіз показує, що для цього необхідно, щоб $\rho_1 = \rho_2 = 0, I_{11} = I_{22}, I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$, тобто тіло G повинно бути динамічно симетричним, а вісь динамічної симетрії повинна збігатися з віссю обертання e_3 підвісу. В цьому випадку кінетична енергія тіла G має вигляд:

$$T_G = \frac{1}{2} \left\{ \left[(C - A + M a_2^2 - M \rho_3^2) \sin^2 \beta - 2M a_1 a_2 \sin \beta + 2M \rho_3 \cos \beta (a_1 - a_2 \sin \beta) + A + M \rho_3^2 + M a_1^2 \right] \dot{\alpha}^2 + \left[A + M (\rho_3^2 + a_2^2) \right] \dot{\beta}^2 + C \dot{\gamma}^2 + 2C \sin \beta \dot{\alpha} \dot{\gamma} \right\}. \quad (8)$$

Тут через A і C позначені відповідно екваторіальний і осьовий моменти інерції тіла ($A = I_{11} = I_{22}, C = I_{33}$). Підсумовуючи (7) і (8), одержуємо вирази для повної кінетичної енергії системи:

$$T = T_1 + T_2 + T_G = \frac{1}{2} \left[a(\beta) \dot{\alpha}^2 + b \dot{\beta}^2 + C \dot{\gamma}^2 + 2C \sin \beta \dot{\alpha} \dot{\gamma} \right], \quad (9)$$

$$a(\beta) = A_1 \sin^2 \beta - A_2 \sin \beta + 2M \rho_3 \cos \beta (a_1 - a_2 \sin \beta) + A_0,$$

$$A_0 = A + M \rho_3^2 + a_1^2 \left(M + m_2 + \frac{m_1}{3} \right), \quad A_1 = C - A - M \rho_3^2 + M a_2^2 + \frac{m_2 a_2^2}{3},$$

$$A_2 = a_1 a_2 (2M + m_2), \quad b = A + M \rho_3^2 + a_2^2 \left(M + \frac{m_2}{3} \right).$$

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо випадок, коли тертя в осях шарнірів відсутнє (ідеальні шарніри) і на систему не діють ніякі зовнішні сили за винятком реакції нерухомої осі e_1 . Тоді лагранжіан системи це її кінетична енергія (9), яка зберігається під час руху. Оскільки T не залежить явно від α і γ (α і γ – циклічні координати), розглядувана система має, крім кінетичної енергії, ще два перших інтеграла:



$$L_\alpha = \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\alpha}} = a(\beta)\dot{\alpha} + C \sin \beta \dot{\gamma},$$

$$L_\gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\gamma}} = C \sin \beta \dot{\alpha} + C \dot{\gamma}.$$
(10)

З (10) $\dot{\alpha}$ і $\dot{\gamma}$ виражаються через координату β , інерційні параметри системи і значення інтегралів руху L_α і L_β :

$$\dot{\alpha} = \frac{L_\alpha - L_\gamma \sin \beta}{D(\beta)};$$

$$\dot{\gamma} = \frac{a(\beta)L_\gamma - CL_\alpha \sin \beta}{CD(\beta)};$$

$$D(\beta) = a(\beta) - C \sin^2 \beta.$$
(11)

Відмітимо, що $D(\beta) > 0$. Дійсно, як випливає з (9), (11), при $C = 0$ і $\beta = 0$ маємо $T = 1/2 D(\beta)\dot{\alpha}^2$, і $D(\beta) > 0$ в силу позитивної визначеності кінетичної енергії. Підставляючи (11) в (9), маємо:

$$\frac{b\dot{\beta}^2 + (L_\alpha - L_\gamma \sin \beta)^2}{D(\beta)} = E_* = 2T - \frac{L_\gamma^2}{C}.$$

Це рівняння еквівалентне наступному:

$$\frac{\mu(\beta)\dot{\beta}^2}{2} + \Pi(\beta) = E;$$

$$\mu(\beta) = 2bD(\beta) > 0; \quad E = E_* A_0 - L_\alpha^2;$$

$$\Pi(\beta) = D_1 \sin^2 \beta - D_2 \sin \beta - 2E_* M \rho_3 \cos \beta (a_1 - a_2 \sin \beta);$$

$$D_1 = E_*(A_1 - C) - L_\gamma^2; \quad D_2 = L_\alpha L_\gamma - \frac{E_* A_2}{2}.$$
(12)

Розв'язування рівнянь (11) і (12) зводиться до обчислення квадратур за стандартною схемою. Спочатку інтегрується рівняння (12), що дає

$$\int_{\beta_0}^{\beta} \left\{ \frac{\mu(\beta)}{2[E - \Pi(\beta)]} \right\}^{\frac{1}{2}} d\beta = \pm(t - t_0),$$
(13)

де t_0 – початковий момент часу, якому відповідають початкові значення координати $\beta = \beta_0$. Знак в правій частині (13) збігається зі знаком швидкості $\dot{\beta}$ в початковий момент часу. Якщо $\dot{\beta}(t_0) = 0$, то зазначений знак протилежний знаку похідної $\Pi(\beta)$ в точці β_0 . Якщо $\dot{\beta}(t_0) = 0$ і $\Pi'(\beta_0) = 0$, то $\beta(t) \equiv \beta_0$.

Розв'язуючи (13) відносно β , отримуємо явну залежність координати β від часу: $\beta = \beta(t)$. Підставляючи потім цю формулу в (11) та інтегруючи відповідні рівняння за часом, знайдемо $\alpha = \alpha(t)$ і $\gamma = \gamma(t)$.

У загальному випадку квадратури, що дають розв'язок рівнянь (11), (13), не виражаються в термінах функцій, зручних для аналітичного дослідження. Тому скористаємося якісними моделями для аналізу руху розглянутої системи.

Рух по куту β описується рівнянням (12), яке не залежить від рівнянь (11). Рівняння (12) за формою збігається з інтегралом енергії консервативної механічної

системи з одним ступенем вільності, кінетична і потенційна енергія якої дорівнюють $\mu(\beta)\beta^2/2$ і $\Pi(\beta)$ відповідно. Найбільш ефективним методом якісного аналізу таких систем є метод фазової площини. Фазовий портрет визначається властивостями функції, див., наприклад, [17]. Дослідимо цю функцію для окремого випадку $\rho_3 = 0$, що відповідає збігу кінця другої ланки підвісу (точки O_2) з центром мас тіла G . В цьому випадку

$$\Pi(\beta) = D_1 \sin^2 \beta - 2D_2 \sin \beta. \quad (14)$$

Функція (14) неперервна і 2π -періодична по β (і, отже, обмежена). Знайдемо стаціонарні точки функції на проміжку $[0, 2\pi]$. Диференціюючи (14), одержуємо

$$\frac{d\Pi}{d\beta} = 2 \cos \beta (D_1 \sin \beta - D_2). \quad (15)$$

З (15) випливає, що при всіх значеннях параметрів механічної системи і інтегралів руху T , L_x , L_y функція $\Pi(\beta)$ має стаціонарні точки

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \beta_2 = \frac{3\pi}{2}, \quad (16)$$

причому якщо $|D_2| > |D_1|$, то інших стаціонарних точок немає.

Аналіз вищих похідних показує, що β_1 - точка максимуму, якщо $D_2 < D_1$ і точка мінімуму, якщо $D_2 \geq D_1$. Аналогічно, β_2 - точка максимуму, якщо $D_1 > -D_2$ і точка мінімуму, якщо $D_1 \leq -D_2$.

Якщо $|D_2| \leq |D_1|$ і $D_1 \neq 0$, то функція $\Pi(\beta)$ окрім точок (16) має стаціонарні точки.

Поведінка функції $\Pi(\beta)$ залежить від співвідношень між параметрами D_1 та D_2 , а саме:

1) якщо $D_2 < -|D_1|$, то $\Pi(\beta)$ має два екстремуми на проміжку $[0, 2\pi]$: максимум, коли $\beta = \beta_1 = \pi/2$, та мінімум, коли $\beta = \beta_2 = 3\pi/2$;

2) якщо $D_2 > |D_1|$, то $\Pi(\beta)$ має два екстремуми: мінімум, коли $\beta = \beta_1$, та максимум, коли $\beta = \beta_2$;

3) якщо $D_1 > -D_2$ та $D_2 < 0$, тоді $\Pi(\beta)$ має чотири екстремуми: максимуми, коли $\beta = \beta_1$ та $\beta = \beta_2$, та мінімуми, коли $\beta = \beta_3$ та $\beta = \beta_4$, абсолютний максимум досягається в точці $\beta = \beta_1$;

4) якщо $D_1 > D_2 > 0$, то $\Pi(\beta)$ має чотири екстремуми: максимуми, коли $\beta = \beta_1$ та $\beta = \beta_2$, та мінімуми, коли $\beta = \beta_3$ та $\beta = \beta_4$, абсолютний максимум досягається в точці $\beta = \beta_2$;

5) якщо $D_1 < D_2 < 0$, то $\Pi(\beta)$ має чотири екстремуми: максимуми, коли $\beta = \beta_3$ та $\beta = \beta_4$, та мінімуми, коли $\beta = \beta_1$ та $\beta = \beta_2$, абсолютний максимум досягається в точці $\beta = \beta_2$;

6) якщо $D_1 < -D_2 < 0$, то $\Pi(\beta)$ має чотири екстремуми: максимуми, коли $\beta = \beta_3$ та $\beta = \beta_4$, та мінімуми, коли $\beta = \beta_1$ та $\beta = \beta_2$, абсолютний максимум досягається в точці $\beta = \beta_1$.

Для прикладу на рис. 2 показаний графік функції $\Pi(\beta)$ у випадку 4). Виходячи з графіка цієї функції, можна визначити всі якісно різні типи руху розглядуваної механічної системи по координаті β , користуючись відомою методикою аналізу консервативних систем з одним ступенем вільності. Нижче наводиться класифікація рухів для випадку 4), що відповідає рис. 2.

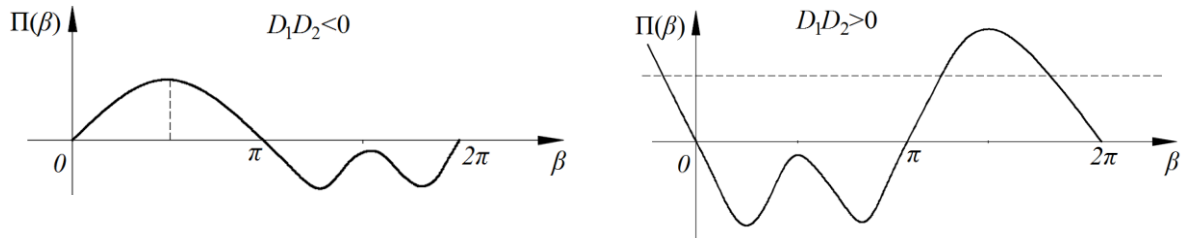


Рис. 2. Графік функції $\Pi(\beta)$ у випадку 4)

Якщо $E > \Pi_{\max} = D_1 + 2D_2$, то система здійснює періодичні обертання по куту β з періодом

$$\tau_r = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\mu(\beta)}{2[E - \Pi(\beta)]} \right\}^{\frac{1}{2}} d\beta. \quad (17)$$

Якщо $E = \Pi_{\max}$, то система або здійснює рухи по сепаратрисі, яка проходить через положення нестійкої рівноваги $\beta = \beta_2 = 3\pi/2$, що відповідає максимуму функції $\Pi(\beta)$, або покоїться в зазначеному положенні рівноваги. Рух по сепаратрисі відповідає в даному випадку повному оберту системи навколо осі e_2 за нескінченний час.

Якщо $D_1 - 2D_2 = \Pi(\beta_1) < E < \Pi_{\max}$, то система здійснює коливання між точками

$$\beta_-^{(0)} = \arcsin \left\{ \frac{D_2 - (D_2^2 + D_1 E)^{\frac{1}{2}}}{D_1} \right\} \text{ і } \beta_+^{(1)} = \pi - \beta_-^{(0)}.$$

Період цих коливань дорівнює

$$\tau_v^{(0)} = 2 \int_{\beta_-^{(0)}}^{\beta_+^{(1)}} \left\{ \frac{\mu(\beta)}{2[E - \Pi(\beta)]} \right\}^{\frac{1}{2}} d\beta. \quad (18)$$

Вирази для $\beta_{\pm}^{(0)}$ одержуються з розв'язання рівняння $\Pi(\beta) = E$, де $\Pi(\beta)$ визначається формулою (14). Якщо $E = \Pi(\beta_1)$, то система або здійснює рух по сепаратрисі, яка проходить через положення нестійкої рівноваги $\beta = \beta_1 = \pi/2$, що відповідає локальному максимуму функції $\Pi(\beta)$, або покоїться в зазначеному положенні рівноваги. Рух по сепаратрисі тут відповідає "коливанням" між точками $\beta = \beta_-^{(1)}$ і $\beta = \pi/2$ або між точками $\beta = \pi/2$ і $\beta = \beta_+^{(1)}$ з нескінченно великим періодом (прихід в положення нестійкої рівноваги $\beta = \pi/2$ з будь-якого стану відбувається за нескінченно великий час).

Якщо $E_{\min} = -D_2^2/D_1 < E < \Pi(\beta_1)$, то система здійснює коливання між точками $\beta_-^{(2)} = \beta_-^{(1)}$ і $\beta_+^{(2)} = \arcsin \left\{ \left[D_2 + (D_2^2 + D_1 E)^{1/2} \right] / D_1 \right\}$ або між точками

$\beta_-^{(2)} = \pi - \arcsin \left\{ \left[D_2 + (D_2^2 + D_1 E)^{1/2} \right] / D_1 \right\}$ і $\beta_+^{(2)} = \beta_+^{(1)}$. Період цих коливань визначається формулою (18) із заміною індексу (1) на (2).

Якщо $E = E_{\min}$, то система може знаходитися в одному з двох стійких положень рівноваги ($\beta = \beta_3$ або $\beta = \beta_4$).

Аналогічну класифікацію рухів можна провести і для решти п'яти випадків співвідношень між параметрами D_1 і D_2 .

Якщо $\beta = const$, тобто по координаті β система знаходиться в одному з положень рівноваги, про які розповідалося в розд.3, то як впливає з (11), по кутах α і γ система рівномірно обертається зі сталими кутовими швидкостями $\dot{\alpha}$ і $\dot{\gamma}$.

Якщо за кутом β відбувається обертання, то за період обертання τ_r (див. (17)) кути α і γ отримують відповідно збільшення

$$\begin{aligned} \Delta_r \alpha &= L_\alpha \Omega_1^r - L_\gamma \Omega_1^r, \quad \Delta_r \gamma = L_\gamma \Omega_3^r - L_\alpha \Omega_2^r, \\ \Omega_1^r &= \int_0^{2\pi} \eta(\beta) D^{-1}(\beta) d\beta, \quad \Omega_2^r = \int_0^{2\pi} \eta(\beta) \sin \beta \cdot D^{-1}(\beta) d\beta, \\ \Omega_3^r &= \int_0^{2\pi} \eta(\beta) a(\beta) [CD(\beta)]^{-1} d\beta, \quad \eta(\beta) = \left\{ \frac{\mu(\beta)}{2[E - \Pi(\beta)]} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Формули (19) знаходяться шляхом інтегрування рівнянь (11) по t в межах від t_0 до $t_0 + \tau_r$ з заміною змінної інтегрування на β відповідно до (13).

Аналогічно в разі коливань по куту β маємо:

$$\begin{aligned} \Delta_v \alpha &= L_\alpha \Omega_1^v - L_\gamma \Omega_2^v, \quad \Delta_v \gamma = L_\gamma \Omega_3^v - L_\alpha \Omega_2^v; \\ \Omega_1^v &= 2 \int_{\beta_-}^{\beta_+} \eta(\beta) D^{-1}(\beta) d\beta, \quad \Omega_2^v = \int_{\beta_-}^{\beta_+} \eta(\beta) \sin \beta \cdot D^{-1}(\beta) d\beta; \\ \Omega_3^v &= 2 \int_{\beta_-}^{\beta_+} \eta(\beta) a(\beta) [CD(\beta)]^{-1} d\beta, \end{aligned} \quad (20)$$

де β_- і β_+ – крайні положення по куту β_+ при коливаннях ($\beta_- < \beta_+$).

З (19) і (20) випливає, що за кожен період обертань (коливань) за кутом β кути α і γ отримують один і той самий приріст.

Якщо $\nu_\alpha^{r,v} = |\Delta_{r,v} \alpha / (2\pi)|$ і $\nu_\gamma^{r,v} = |\Delta_{r,v} \gamma / (2\pi)|$ – раціональні числа, то рух системи в цілому періодичний з періодом $\tau_{r,v}^0 = n\tau_{r,v}$, де n – найменший спільний знаменник чисел $\nu_\alpha^{r,v}$ і $\nu_\gamma^{r,v}$. В інших випадках рух в цілому неперіодичний.

6 ВИСНОВКИ

Досліджено рух за інерцією абсолютно твердого тіла, зв'язаного з нерухомою основою за допомогою триступеневого підвісу, який складається з двох тонких прямолінійних стрижнів і трьох циліндричних шарнірів. Підвіс такої конструкції може використовуватися в різних керованих системах, зокрема в маніпуляційних роботах. Розглядається випадок динамічно симетричного твердого тіла, вісь динамічної симетрії якого збігається з віссю обертання e_3 підвісу. Рух за кутом Крилова першого роду β

описується рівнянням, яке за формою збігається з інтегралом енергії консервативної механічної системи з одним ступенем вільності. Якісний аналіз цієї системи проведено методом фазової площини. Визначені якісно різні типи руху розглядуваної механічної системи за координатою β . Досліджено рух за іншими кутами Крилова α і γ .

Література

1. Bolotnik N. N. Inertial motions of an absolutely rigid body on a two-degrees-of-freedom joint. *J. Appl. Math. Mech.* 1994. № 58. (5). P. 841–848.
2. Bolotnik N. N. The motion of an absolutely rigid body on a two-degrees-of-freedom joint in an uniform gravitational field. *J. Appl. Math. Mech.* 1995. № 59 (6). P. 865–872.
3. Bolotnik N. N. Free motion of a rigid body on a two-degrees-of-freedom joint with nonperpendicular axes. *Mech. Solids.* 2001. № 36 (3). P. 30–41.
4. Akulenko L. D., Leshchenko D. D. Relative oscillations and rotations in a plane two-rigid-body hinged system. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela.* 1991. № 26 (2). P. 8–17.
5. Смольников Б. А. Проблемы механики и оптимизации роботов. Москва : Наука, 1991. 232 с.
6. Makeev N. N. Движение твердого тела с двухстепенным шарниром в потенциальном поле. *Вестник Саратовского государственного технического университета.* 2005. № 1(6). С. 35–54.
7. Лобас Л. Г., Хребет В. Г. О предельных периодических движениях маятниковых двузвенных систем с качением. *Прикл. механика.* 1993. Т. 29. №8. С. 85–93.
8. Ge Z.-M., Tsen P.-C. Non-linear dynamic analysis and control of chaos for a two-degrees-of-freedom rigid body with vibrating support. *J. Sound Vib.* 2001. № 240(2). P. 323–349.
9. Blinov A. P. Problem of unwinding of a rotating cluster of bodies under zero gravity. *Mech. Solids.* 2015. № 50(3). P. 256-259.
10. Леонтьев В. А., Смирнов А. С., Смольников Б. А. Динамика свободных и управляемых движений твердого тела в двухстепенном подвесе. *Робототехника и техническая кибернетика.* 2020. Т. 8. №1. С. 53–60.
11. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г. Манипуляционные роботы. Москва : Наука, 1989. 368 с.
12. Formal'skii A. M. *Stabilization and Motion Control of Unstable Objects.* Berlin/Boston : Walter de Gruyter, 2015. 250 p.
13. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Колебания двойного математического маятника с неколлинеарными шарнирами. *Современное машиностроение. Наука и образование.* 2020. №9. С. 153–165.
14. Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. Москва : Наука, 1976. 670 с.
15. Pars L. A. *A Treatise on Analytical Dynamics.* London : Heynemann, 1968. 641p.
16. Маркеев А. П. Теоретическая механика. Москва/Ижевск : РХД, 2007. 592 с.
17. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Москва : Наука, 1981. 568 с.

References

1. Bolotnik, N. N. (1994). Inertial motions of an absolutely rigid body on a two-degrees-of-freedom joint. *J. Appl. Math. Mech.*, no. 58, 5, 841–848. [in English].
2. Bolotnik, N. N. (1995). The motion of an absolutely rigid body on a two-degrees-of-freedom joint in an uniform gravitational field. *J. Appl. Math. Mech.*, no. 59, 6, 865–872. [in English].
3. Bolotnik, N. N. (2001). Free motion of a rigid body on a two-degrees-of-freedom joint with nonperpendicular axes. *Mech. Solids*, no. 36, 3, 30–41. [in English].
4. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (1991). Relative oscillations and rotations in a plane two-rigid-body hinged system. *Izv. AN SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela*, no. 26, 2, 8–17. [in English].
5. Smolnykov, B. A. *Problemy mekhaniky y opytmzatsyyu robotov* [The problems of mechanics and robotoptimization]. Moskva, Nauka. [in Russian].
6. Makeev, N. N. (2005). Dvyzhenye tverdogo tela s dvukhstepennym sharnyrom v potentsyalnom pole [The movement of a solid body with two-degree articulation joint in a conservative field]. *Vestnyk Saratovskoho hos. tekhn. un-ta* [Proceedings of Saratov State Technical University], no. 1, 6, 35–54. [in Russian].

7. Lobas, L. G., Khrebet, V. G. (1993). O predelnykh peryodycheskykh dvizheniyakh maiatnykovykh dvukhzvennykh system s kachenyem [On limited periodic motions of two-link pendular systems with rolling]. *Prykl. mekhanyka* [Appl. Mech.], no. 29, 8, 85–93. [in Russian].
8. Ge, Z.-M., Tsen, P.-C. (2001). Non-linear dynamic analysis and control of chaos for a two-degrees-of-freedom rigid body with vibrating support. *J. Sound Vib.*, no. 240, 2, 323–349. [in English].
9. Blinov, A. P. (2015). Problem of unwinding of a rotating cluster of bodies under zero gravity. *Mech. Solids*, no. 50, 3, 256–259. [in English].
10. Leontev, V. A., Smirnov, A. S., Smolnikov, B. A. (2020). Dynamika svobodnykh i upravliaemykh dvizheniy tverdogo tela v dvukhstepennom podvese [Dynamics of free and controlled rigid body motions in the two-state suspension]. *Robototekhnika i tekhnicheskaya kybernetika* [Robotics and Technical Cybernetics], no. 8, 1, 53–60. [in Russian].
11. Chernousko, F. L., Bolotnik, N. N., Ggradetsky, V. G. (1989). *Manypuliatyionnye roboty* [Manipulation Robots. Dynamics, Control, Optimization]. Moskva, Nauka. [in Russian].
12. Formal'skii, A. M. (2015). *Stabilization and Motion Control of Unstable Objects*. Berlin/Boston: Walter de Gruyter. [in English].
13. Smirnov, A. S., Smolnikov, B. A. (2020). Kolebaniya dvoynoho matematycheskoho maiatnyka s nekollynearnyimi sharnyramy [Oscillations of a double mathematical pendulum with non-collinear joints]. *Sovremennoe mashynostroeniye. Nauka y obrazovaniye* [Modern mechanical engineering. Science and education], no. 9, 153–165. [in Russian].
14. Ishlinsky, A. Y. (1976). *Oryentatsiya, hyroskopy y unertsyalnaia navyhatsiya* [Orientation, Gyros and Inertial Navigation]. Moskva, Nauka. [in Russian].
15. Pars, L. A. (1968). *A Treatise on Analytical Dynamics*. London: Heynemann. [in English].
16. Markeev, A. P. (2007). *Teoretycheskaya mekhanyka* [Theoretical Mechanics]. Moskva–Izhevsk: RChD. [in Russian].
17. Andronov, A. A., Khaikin, S. E. (1981). *Teoriya kolebaniy* [Theory of Oscillations]. Moskva: Nauka. [in Russian].

Акуленко Леонід Денисович

Інститут проблем механіки ім. О.Ю. Ішлінського РАН, д.ф.-м.н., професор
Проспект Вернадського, д. 101, Москва, Росія 119526
l.akulenko@bk.ru
ORCID: 0000-0003-3209-1472

Болотнік Микола Миколайович

Інститут проблем механіки ім. О.Ю. Ішлінського РАН, член-кореспондент РАН, д.ф.-м.н.,
Проспект Вернадського, д. 101, Москва, Росія 119526
bolotnik@ipmnet.ru
ORCID: 0000-0003-1939-0099

Лещенко Дмитро Давидович

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.ф.-м.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
leshchenko_d@ukr.net
ORCID: 0000-0003-2436-221X

Палій Катерина Сергіївна

Одеська державна академія будівництва та архітектури, асистент
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
ESChernyakova@gmail.com
ORCID: 0000-0002-5553-2405

Для посилань:

Акуленко Л. Д., Про рух за інерцією абсолютно твердого тіла на тріступеневому підвісі з ланками кінцевої довжини/ Л. Д. Акуленко, М. М. Болотніков, Д. Д. Лещенко, К. С. Палій // Механіка та математичні методи. 2020. Том 2, Вип. 2. С. 6–17.

For references:

Akulenko, L., Bolotnik, N., Leshchenko, D., Paliy, E. (2020). On inertial motion of an absolutely rigid body on a three-degree suspension with links of finite length. *Mechanics and Mathematical Methods*, 2 (2), 6–17.

УДК 514.765.1+512.813.4

УКОРОЧЕНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРІВ АФІННОЇ ЗВ'ЯЗНОСТІ

Кіосак В. А.¹, Каменева А. В.²

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

²Національний університет "Одеська морська академія"

Анотація: Маючи довгу історію, теорія відображень отримала нове дихання завдяки тензорним методам дослідження. Введене сто років тому поняття афінної зв'язності, дозволило по новому поглянути на класичні геометричні задачі. В цій роботі, слідуючи загально прийнятій традиції, вводиться поняття відображення простору афінної зв'язності. Модифікуючи методику А. П. Нордена, знайдено формули, яким задовольняють основні тензори: тензор деформації, тензор Рімана, тензор Річчі та їх перші і другі коваріантні похідні для просторів A_n та \bar{A}_n , які пов'язані заданим відображенням. В цих формулах присутні як об'єкти A_n , так і \bar{A}_n з коваріантними похідними по відповідних зв'язностях. Для спрощення, введене поняття укороченого відображення і його спеціального випадку – половинного відображення. Зв'язність, яка виникає при половинному відображенні, названа середньою.

Попередні формули при переході до коваріантних похідних в середній зв'язності значно спрощуються. Це дозволяє отримати ознаки (необхідні умови) того, що при заданих відображеннях зберігається об'єкт простору афінної зв'язності внутрішнього характеру. Об'єктами внутрішнього характеру називаються геометричні об'єкти отримані з афінної зв'язності. До таких об'єктів відносять тензор Рімана, тензор Річчі, тензор Вейля. Для всіх таких відображень отримані диференціальні рівняння в коваріантних похідних, яким за необхідністю задовольняє тензор деформації зв'язності.

Вивчення цих рівнянь, природно, проводити, досліджуючи умови інтегрування. Умови інтегрування мають вид алгебраїчних перевизначених систем, тому виникає потреба в додатковій спеціалізації чи просторів, чи об'єктів цих просторів.

Використовуючи методику Н. С. Синюкова та Й. Мікеша, при виконанні певних алгебраїчних умов, отримано вид тензора деформації зв'язності при заданому відображенні.

Зауважимо, що середня зв'язність вибрана лише з міркувань спрощення виду обчислень. В залежності від потреб моделі, що будується, або з фізичних міркувань, може бути побудована інша, більш придатна для даних умов зв'язність і відповідно відображення.

Особливо зручним такий підхід виглядає в застосуванні до інваріантних перетворень, які пов'язують пари просторів афінної зв'язності через їх тензор деформації зв'язності.

Ключові слова: простори афінної зв'язності; відображення; тензор деформації.

SHORTENED MAPPINGS OF SPACES WITH AFFINE CONNECTIVITY

V. Kiosak¹, A. Kamienieva²

¹Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

²National University "Odessa Maritime Academy"

Abstract: The long history of theory of mappings was revived thanks to the tensor methods of inquiry. The notion of affine connectivity was introduced a hundred years ago. It enabled us to look at classic geometric problems from a different angle.

Following the common tradition, this paper introduces a notion of a mapping for a space of affine connectivity. Modifying the method of A. P. Norden, we found the formulae for the main tensors: deformation tensor, Riemann tensor, Ricci tensor and their first and second covariant derivatives for

spaces A_n and \bar{A}_n , which are connected by a given mapping. These formulae contain both objects of A_n and \bar{A}_n with covariant derivatives in respect to relevant connectivities. In order to simplify the expression, we introduced the notion of shortened mapping and its particular case: a half-mapping. The connectivity that appears in the case of a half-mapping is called a medium connectivity.

The above mentioned formulae can be notably simplified in the case of transition to covariant derivatives in the medium connectivity. This fact permits us to obtain characteristics (the necessary conditions) for the estimates whether an object of inner character from the space of affine connectivity is preserved under a given type of mappings. Objects of the inner character are geometric objects implied by an affine connectivity. They include Riemann tensor, Ricci tensor, Weyl tensor. Every type of mapping received its own set of differential equations in covariant derivatives, which define a deformation tensor of connectivity with a necessity.

The study of these equations can proceed by a research on integrability conditions. Integrability conditions are algebraic over-defined systems. That's why there is a constant need in introduction of additionally specialized spaces or certain objects of these spaces.

Applying the method of N. S. Sinyukov and J. Mikes, in the case of certain algebraic conditions, we obtained a form of a deformation tensor for a given mapping.

Let us note that the medium connectivity was selected in order to simplify the calculations. Depending on the type of a model under consideration or on the physical limitations, we can construct any other connectivity (and mappings), which would be better suited for the given conditions.

This approach is particularly fruitful when applied for invariant transformations connecting pairs of spaces of affine connectivity via their deformation tensor of connectivity.

Keywords: spaces with affine connectivity; mappings; deformation tensor.

1 ВСТУП

Історія вивчення просторів афінної зв'язності почалась в 1918 році з роботи Вейля. Введення поняття простору афінної зв'язності дозволило узагальнити псевдоріманові простори і по новому поглянути на їх геометричні властивості [6]. В цій роботі будуть, слідуючи загальноприйнятій традиції, досліджуватись простори афінної зв'язності. Методика А. П. Нордена буде модифікована таким чином, щоб отримати формули, що пов'язують основні тензори простору A_n , а саме, тензор Рімана, тензор Річчі, тензор Вейля. Будуть розроблені та застосовані методи та методики для спрощення отриманих рівнянь з міркувань можливих застосувань в геометрії [2] та механіці [1], [18].

Дослідження ведуться локально, в тензорній формі.

2 ДЕФОРМАЦІЯ ЗВ'ЯЗНОСТІ

Простором афінної зв'язності A_n розмірності n , називають такий диференційований многовид, на кожній кривій якого задана афінна зв'язність, що задовольняє умові лінійності, тобто для кожної точки M та для всякого векторного поля в околі даної точки, абсолютний диференціал вектора, що належить цьому полю, обчислений в точці M для всякої кривої, що проходить через цю точку, є лінійна функція вектора елементарного зміщення по кривій.

Якщо не зазначено інше, то розглядаються простори афінної зв'язності A_n без скруту, тобто такі, що

$$\Gamma_{ij}^h(x) = \Gamma_{ji}^h(x).$$

Простір A_n належить класу C^r ($A_n \in C^r$), якщо $\Gamma_{ij}^h(x) \in C^r$.

Розглянемо два простори афінної зв'язності.

Означення 1. Взаємно однозначна відповідність між точками просторів афінної зв'язності A_n та \bar{A}_n називають відображенням, якщо в спільній по відображенню системі координат виконуються умови

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + P_{ij}^h(x). \quad (1)$$

Спільною по відображенню системою координат називають таку систему криволінійних координат, в якій координати відповідних точок співпадають.

Означення 2. Тензор $P_{ij}^h(x)$ – називають тензором деформації зв'язності при даному відображенні.

Якщо $P_{ij}^h(x) \neq 0$, то відображення називають нетривіальним.

Зауважимо, що тензор деформації симетричний по коваріантним індексам, тобто $P_{ij}^h = P_{ji}^h$, для просторів афінної зв'язності без скруту.

В випадку тензорного поля S типу $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ коваріантна похідна по зв'язності A_n , яку ми будемо позначати ∇ , в кожній системі координат x^1, x^2, \dots, x^n визначається слідуючим чином:

$$\begin{aligned} \nabla_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) = & \partial_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) + \Gamma_{k\alpha}^{i_1}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p}(x) + \dots + \Gamma_{k\alpha}^{i_p}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \alpha}(x) - \\ & - \Gamma_{k j_1}^{\beta}(x) S_{\beta j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) - \dots - \Gamma_{k j_q}^{\beta}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_{q-1} \beta}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x), \quad (i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q; k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (2)$$

Для простору \bar{A}_n та коваріантної похідної в ньому $\bar{\nabla}$, будемо мати в спільній системі координат

$$\bar{\nabla}_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) = \partial_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) + \bar{\Gamma}_{k\alpha}^{i_1}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p}(x) + \dots + \bar{\Gamma}_{k\alpha}^{i_p}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \alpha}(x) - \bar{\Gamma}_{k j_1}^{\beta}(x) S_{\beta j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) - \dots - \bar{\Gamma}_{k j_q}^{\beta}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_{q-1} \beta}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x), \quad (i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q; k = 1, 2, \dots, n).$$

Віднімаючи від останнього (2) з урахуванням (1), отримаємо

$$\bar{\nabla}_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) = \nabla_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) + P_{k\alpha}^{i_1}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p}(x) + \dots + P_{k\alpha}^{i_p}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \alpha}(x) - P_{k j_1}^{\beta}(x) S_{\beta j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) - \dots - P_{k j_q}^{\beta}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_{q-1} \beta}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x), \quad (i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q; k = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Останнє справедливе для будь-якого тензора, а для тензора деформації (3) прийме вид

$$\bar{\nabla}_k P_{ij}^h(x) - \nabla_k P_{ij}^h(x) = P_{k\alpha}^h(x) P_{ij}^{\alpha}(x) - P_{ki}^{\alpha}(x) P_{\alpha j}^h(x) - P_{kj}^{\alpha}(x) P_{i\alpha}^h(x). \quad (4)$$

Симетруючи останнє, отримуємо

$$\bar{\nabla}_k P_{ij}^h + \bar{\nabla}_j P_{ik}^h - \nabla_k P_{ij}^h - \nabla_j P_{ik}^h = -2P_{kj}^{\alpha} P_{i\alpha}^h.$$

А альтернуючи

$$\bar{\nabla}_k P_{ij}^h - \bar{\nabla}_j P_{ik}^h - \nabla_k P_{ij}^h + \nabla_j P_{ik}^h = -2(P_{k\alpha}^h P_{ij}^{\alpha} - P_{ki}^{\alpha} P_{\alpha j}^h). \quad (5)$$

Закон зміни тензора кривини, що визначається, як

$$R_{ijk}^h = \partial_j \Gamma_{ik}^h + \Gamma_{ik}^{\alpha} \Gamma_{j\alpha}^h - \partial_k \Gamma_{ij}^h - \Gamma_{ij}^{\alpha} \Gamma_{k\alpha}^h,$$

при відображенні простору A_n на \bar{A}_n запишеться в виді

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \nabla_k P_{ji}^h - \nabla_j P_{ki}^h + P_{\alpha k}^h P_{ji}^{\alpha} - P_{\alpha j}^h P_{ki}^{\alpha}.$$

Або, з урахуванням (5)

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \frac{1}{2}(\nabla_k P_{ji}^h - \nabla_j P_{ki}^h + \bar{\nabla}_k P_{ji}^h - \bar{\nabla}_j P_{ki}^h). \quad (6)$$

Тензор Річчі $R_{ij} = R_{ij}^{\alpha}$ змінюється за законом

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + \frac{1}{2}(\nabla_{\alpha} P_{ji}^{\alpha} - \nabla_j P_{\alpha i}^{\alpha} + \bar{\nabla}_{\alpha} P_{ji}^{\alpha} - \bar{\nabla}_j P_{\alpha i}^{\alpha}). \quad (7)$$

Теорема 1. При відображенні простору афінної зв'язності A_n на простір афінної зв'язності \bar{A}_n тензори Рімана та Річчі просторів A_n та \bar{A}_n в спільній системі координат зв'язані співвідношеннями (6) та (7) відповідно.

Якщо в просторі афінної зв'язності тензор Річчі є симетричним, тобто $R_{ij} = R_{ji}$, то такі простори називають еквафініними просторами.

Для коваріантних похідних тензора Рімана, із формули (3), будемо мати

$$\bar{\nabla}_k R_{ijl}^h - \nabla_k R_{ijl}^h = P_{k\alpha}^h R_{ijl}^{\alpha} - P_{ki}^{\alpha} R_{\alpha jl}^h - P_{kj}^{\alpha} R_{i\alpha l}^h - P_{kl}^{\alpha} R_{ij\alpha}^h. \quad (8)$$

Коваріантна похідна тензора Рімана \bar{A}_n із (3) має вид:

$$\bar{\nabla}_l \bar{R}_{ijk}^h = \bar{\nabla}_l \bar{R}_{ijk}^h + \frac{1}{2}(\bar{\nabla}_l \nabla_k P_{ji}^h - \bar{\nabla}_l \nabla_j P_{ki}^h + \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_k P_{ji}^h - \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_j P_{ki}^h).$$



Враховуючи (8) та переходячи до похідної в A_n , отримаємо:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_l \bar{R}_{ijk}^h &= \nabla_l R_{ijk}^h + P_{la}^h R_{ijk}^a - P_{li}^a R_{ajk}^h - P_{lj}^a R_{iak}^h - P_{kl}^a R_{ija}^h + \frac{1}{2} (\nabla_l \nabla_k P_{ji}^h - \nabla_l \nabla_j P_{ki}^h + \\ &+ \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_k P_{ji}^h - \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_j P_{ki}^h + \nabla_\alpha P_{ji}^h P_{kl}^\alpha + \nabla_k P_{ai}^h P_{jl}^\alpha + \nabla_k P_{ja}^h P_{il}^\alpha + \nabla_k P_{ij}^h P_{al}^\alpha). \end{aligned} \quad (9)$$

Коваріантна похідна тензора Річчі

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_k R_{ij}^\alpha - \nabla_k R_{ij}^\alpha &= -P_{ki}^\alpha R_{\alpha j} - P_{kj}^\alpha R_{\alpha i} \text{ та} \\ \bar{\nabla}_k \bar{R}_{ij}^\alpha &= \nabla_l R_{ij}^\alpha - P_{ki}^\alpha R_{\alpha j} - P_{kj}^\alpha R_{\alpha i} + \frac{1}{2} (\nabla_\beta \nabla_k P_{ji}^\beta - \nabla_\beta \nabla_j P_{ki}^\beta + \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_k P_{ji}^\beta - \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_j P_{ki}^\beta + \\ &+ \nabla_\alpha P_{ji}^\beta P_{k\beta}^\alpha + \nabla_k P_{ai}^\beta P_{j\beta}^\alpha + \nabla_k P_{ja}^\beta P_{i\beta}^\alpha + \nabla_k P_{ij}^\beta P_{\alpha\beta}^\alpha). \end{aligned} \quad (10)$$

Теорема 2. При відображенні просторів A_n та \bar{A}_n коваріантні похідні тензора деформації, тензора Рімана та тензора Річчі задовольняють (4), (9), (10).

Таким чином, нами отримані формули, що зв'язують відповідні об'єкти та їх коваріантні похідні в відповідних по відображенню просторах A_n та \bar{A}_n .

Для тензора S справедлива тотожність Річчі:

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_l S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} (x) - \nabla_l \nabla_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} (x) &= -R_{.akl}^{i_1} (x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p} (x) - \dots - R_{.akl}^{i_p} (x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \alpha} (x) + \\ &+ R_{.j_1 kl}^{\beta} (x) S_{\beta j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} (x) + \dots + R_{.j_q kl}^{\beta} (x) S_{j_1 j_2 \dots j_{q-1} \beta}^{i_1 i_2 \dots i_p} (x), \quad (i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q; k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (11)$$

Для коваріантної похідної в \bar{A}_n

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_k \bar{\nabla}_l S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} (x) - \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} (x) &= -\bar{R}_{.akl}^{i_1} (x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p} (x) - \dots - \bar{R}_{.akl}^{i_p} (x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \alpha} (x) + \\ &+ \bar{R}_{.j_1 kl}^{\beta} (x) S_{\beta j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} (x) + \dots + \bar{R}_{.j_q kl}^{\beta} (x) S_{j_1 j_2 \dots j_{q-1} \beta}^{i_1 i_2 \dots i_p} (x), \quad (i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q; k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (12)$$

Віднімемо (11) від (12)

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_k \bar{\nabla}_l S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} (x) - \nabla_k \nabla_l S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} (x) &+ \nabla_l \nabla_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} (x) - \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} (x) = \frac{1}{2} (\nabla_k P_{l\alpha}^i - \nabla_l P_{k\alpha}^i + \\ &+ \bar{\nabla}_k P_{l\alpha}^i - \bar{\nabla}_l P_{k\alpha}^i) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p} (x) + \dots + \frac{1}{2} (\nabla_k P_{l\alpha}^i - \nabla_l P_{k\alpha}^i + \bar{\nabla}_k P_{l\alpha}^i - \bar{\nabla}_l P_{k\alpha}^i) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \alpha} (x) + \\ &+ \frac{1}{2} (\nabla_l P_{kj_1}^\beta - \nabla_j P_{kj_1}^\beta + \bar{\nabla}_l P_{kj_1}^\beta - \bar{\nabla}_j P_{kj_1}^\beta) S_{\beta j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} (x) + \dots + \frac{1}{2} (\nabla_l P_{kj_q}^\beta - \nabla_k P_{kj_q}^\beta + \bar{\nabla}_l P_{kj_q}^\beta - \bar{\nabla}_k P_{kj_q}^\beta) S_{\beta j_2 \dots j_{q-1} \beta}^{i_1 i_2 \dots i_p} (x). \\ &(i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q; k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Це дозволяє записати тотожність Річчі для тензора деформації

$$\begin{aligned} \nabla_l \nabla_j P_{ki}^h - \nabla_j \nabla_l P_{ki}^h &= P_{ai}^h R_{.kjl}^\alpha - P_{ki}^\alpha R_{.ajl}^h + P_{k\alpha}^h R_{.ijl}^\alpha, \\ \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_j P_{ki}^h - \bar{\nabla}_j \bar{\nabla}_l P_{ki}^h &= P_{ai}^h \bar{R}_{.kjl}^\alpha - P_{ki}^\alpha \bar{R}_{.ajl}^h + P_{k\alpha}^h \bar{R}_{.ijl}^\alpha. \end{aligned}$$

Враховуючи попереднє, отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_k P_{ki}^h - \bar{\nabla}_j \bar{\nabla}_l P_{ki}^h - \nabla_l \nabla_j P_{ki}^h + \nabla_j \nabla_l P_{ki}^h &= \frac{1}{2} P_{ai}^h (\nabla_l P_{jk}^\alpha - \nabla_j P_{lk}^\alpha + \bar{\nabla}_l P_{jk}^\alpha - \bar{\nabla}_j P_{lk}^\alpha) - \\ &- \frac{1}{2} P_{ki}^\alpha (\nabla_l P_{ja}^h - \nabla_j P_{la}^h + \bar{\nabla}_l P_{ja}^h - \bar{\nabla}_j P_{la}^h) + \frac{1}{2} P_{k\alpha}^h (\nabla_l P_{ji}^\alpha - \nabla_j P_{li}^\alpha + \bar{\nabla}_l P_{ji}^\alpha - \bar{\nabla}_j P_{li}^\alpha). \end{aligned} \quad (13)$$

Тотожність Річчі для тензора Рімана має вид:

$$\bar{\nabla}_{[lm]} \bar{R}_{ijk}^h = -\bar{R}_{ijk}^\alpha \bar{R}_{\alpha lm}^h + \bar{R}_{\alpha jk}^h \bar{R}_{ilm}^\alpha + \bar{R}_{iak}^h \bar{R}_{jlm}^\alpha + \bar{R}_{ij\alpha}^h \bar{R}_{klm}^\alpha, \quad (14)$$

$$\nabla_{[lm]} R_{ijk}^h = -R_{ijk}^\alpha R_{\alpha lm}^h + R_{\alpha jk}^h R_{ilm}^\alpha + R_{iak}^h R_{jlm}^\alpha + R_{ij\alpha}^h R_{klm}^\alpha. \quad (15)$$

Віднімаючи з (14), (15) та враховуючи (6), будемо мати

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{[lm]} \bar{R}_{ijk}^h - \nabla_{[lm]} R_{ijk}^h &= \frac{1}{2} (-\bar{R}_{\alpha lm}^h (\nabla_k P_{ji}^\alpha - \nabla_j P_{ki}^\alpha + \bar{\nabla}_k P_{ji}^\alpha - \bar{\nabla}_j P_{ki}^\alpha) - \\ &- \bar{R}_{ijk}^\alpha (\nabla_m P_{l\alpha}^h - \nabla_l P_{m\alpha}^h + \bar{\nabla}_m P_{l\alpha}^h - \bar{\nabla}_l P_{m\alpha}^h) + R_{ilm}^\alpha (\nabla_k P_{j\alpha}^h - \nabla_j P_{k\alpha}^h + \bar{\nabla}_k P_{j\alpha}^h - \bar{\nabla}_j P_{k\alpha}^h) + \\ &+ \bar{R}_{jlk}^\alpha (\nabla_m P_{li}^\alpha - \nabla_l P_{mi}^\alpha + \bar{\nabla}_m P_{li}^\alpha - \bar{\nabla}_l P_{mi}^\alpha) + R_{jlm}^\alpha (\nabla_k P_{\alpha i}^h - \nabla_j P_{ki}^h + \bar{\nabla}_k P_{\alpha i}^h - \bar{\nabla}_j P_{ki}^h) + \\ &+ \bar{R}_{iak}^h (\nabla_m P_{lj}^\alpha - \nabla_l P_{mj}^\alpha + \bar{\nabla}_m P_{lj}^\alpha - \bar{\nabla}_l P_{mj}^\alpha) + R_{klm}^\alpha (\nabla_\alpha P_{ji}^h - \nabla_j P_{\alpha i}^h + \bar{\nabla}_\alpha P_{ji}^h - \bar{\nabla}_j P_{\alpha i}^h) + \\ &+ \bar{R}_{ij\alpha}^h (\nabla_m P_{lk}^\alpha - \nabla_l P_{mk}^\alpha + \bar{\nabla}_m P_{lk}^\alpha - \bar{\nabla}_l P_{mk}^\alpha)). \end{aligned}$$

Групуючи, переконуємось в справедливості

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{[lm]} \bar{R}_{ijk}^h - \nabla_{[lm]} R_{ijk}^h &= \frac{1}{2} (-R_{\alpha lm}^h (\nabla_{[k} P_{j]i}^\alpha + \bar{\nabla}_{[k} P_{j]i}^\alpha) - \bar{R}_{ijk}^\alpha (\nabla_{[m} P_{l]\alpha}^h + \bar{\nabla}_{[m} P_{l]\alpha}^h) + \\ &+ R_{ilm}^\alpha (\nabla_{[k} P_{j]\alpha}^h + \bar{\nabla}_{[k} P_{j]\alpha}^h) - \bar{R}_{\alpha jk}^h (\nabla_{[m} P_{l]i}^\alpha + \bar{\nabla}_{[m} P_{l]i}^\alpha) + R_{jlm}^\alpha (\nabla_{[k} P_{\alpha]i}^h + \bar{\nabla}_{[k} P_{\alpha]i}^h) + \\ &+ \bar{R}_{iak}^h (\nabla_{[m} P_{l]j}^\alpha + \bar{\nabla}_{[m} P_{l]j}^\alpha) + R_{klm}^\alpha (\nabla_{[\alpha} P_{j]i}^h + \bar{\nabla}_{[\alpha} P_{j]i}^h) + \bar{R}_{ij\alpha}^h (\nabla_{[m} P_{l]k}^\alpha + \bar{\nabla}_{[m} P_{l]k}^\alpha)). \end{aligned} \quad (16)$$

Для тензорів Річчі, аналогічно, отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{[lm]} \bar{R}_{ij} - \nabla_{[lm]} R_{ij} &= \frac{1}{2} (-R_{\alpha lm}^\beta (\nabla_{[\beta} P_{j]i}^\alpha + \bar{\nabla}_{[\beta} P_{j]i}^\alpha) - \bar{R}_{ij\beta}^\alpha (\nabla_{[m} P_{l]\alpha}^\beta + \bar{\nabla}_{[m} P_{l]\alpha}^\beta) + \\ &+ R_{ilm}^\alpha (\nabla_{[\beta} P_{j]\alpha}^\beta + \bar{\nabla}_{[\beta} P_{j]\alpha}^\beta) - \bar{R}_{\alpha j}^\beta (\nabla_{[m} P_{l]i}^\alpha + \bar{\nabla}_{[m} P_{l]i}^\alpha) + R_{jlm}^\alpha (\nabla_{[\beta} P_{\alpha]i}^\beta + \bar{\nabla}_{[\beta} P_{\alpha]i}^\beta) + \\ &+ \bar{R}_{i\alpha}^\beta (\nabla_{[m} P_{l]j}^\alpha + \bar{\nabla}_{[m} P_{l]j}^\alpha) + R_{\beta lm}^\alpha (\nabla_{[\alpha} P_{j]i}^\beta + \bar{\nabla}_{[\alpha} P_{j]i}^\beta) + \bar{R}_{ij\alpha}^\beta (\nabla_{[m} P_{l]\beta}^\alpha + \bar{\nabla}_{[m} P_{l]\beta}^\alpha)). \end{aligned} \quad (17)$$

Теорема 3. При відображенні простору A_n на простір \bar{A}_n для других коваріантних похідних тензора деформації, тензора Рімана та тензора Річчі виконуються відповідно умови (13), (16), (17).

Зауважимо, що зазначені в приведених теоремах умови носять лише необхідний характер.

Позначимо різницю тензорів Рімана просторів A_n та \bar{A}_n , пов'язаних відображенням, через P_{ijk}^h , тобто P_{ijk}^h – деформація тензорів Рімана при відображенні:

$$\bar{R}_{ijk}^h - R_{ijk}^h = P_{ijk}^h,$$

або, враховуючи попереднє,

$$P_{ijk}^h = \frac{1}{2} (\bar{\nabla}_k P_{ij}^h - \bar{\nabla}_j P_{ik}^h + \nabla_k P_{ij}^h - \nabla_j P_{ik}^h).$$

Тензор P_{ijk}^h задовольняє умовам

$$P_{ijk}^h + P_{ikj}^h = 0 \text{ та } P_{ijk}^h + P_{jki}^h + P_{kij}^h = 0.$$

Ці умови аналогічні тим, що виконуються для тензора Рімана і тому дозволяють таку ж спеціалізацію [5], [15]. Розглянемо спеціальні відображення.

3 УКОРОЧЕНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРІВ АФІННОЇ ЗВ'ЯЗНОСТІ

Хоча при визначенні відображення ми говоримо про взаємно однозначну відповідність, вибором знаку тензора деформації ми впорядковуємо задану пару просторів афінної зв'язності A_n та \bar{A}_n . Між кожною парою просторів A_n та \bar{A}_n можливо встановити відповідність, яка задається об'єктами зв'язності цих просторів. З іншого боку, об'єкт зв'язності A_n та тензор деформації задають зв'язність простору \bar{A}_n . Це дозволяє ввести в розгляд відображення, які називатимемо укороченими відносно заданого відображення.

Об'єкт $\overset{\lambda}{\Gamma}_{ij}^h$, побудований за правилом

$$\overset{\lambda}{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h(x) + \frac{\lambda}{1+\lambda} P_{ij}^h(x), \quad (18)$$

$$\lambda = const > 0,$$

задає зв'язність деякого простору афінної зв'язності \bar{A}_n .

Означення 3. Відображення простору афінної зв'язності A_n на простір афінної зв'язності \bar{A}_n називають укороченим відображенням, якщо в спільній по відображенню системі координат, має місце рівняння (18).

Враховуючи (18), отримаємо

$$\overset{\lambda}{\Gamma}_{ij}^h = \frac{\Gamma_{ij}^h + \lambda \bar{\Gamma}_{ij}^h}{1+\lambda}. \quad (19)$$

Рівняння (19) можна записати в виді:

$$\overset{\lambda}{\nabla}_k P_{ij}^h(x) - \nabla_k P_{ij}^h(x) = \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} (P_{k\alpha}^h(x) P_{ij}^\alpha(x) - P_{ki}^\alpha(x) P_{\alpha j}^h(x) - P_{kj}^\alpha(x) P_{i\alpha}^h(x)).$$

Для першої коваріантної похідної тензора деформації та для другої

$$\begin{aligned} \overset{\lambda}{\nabla}_l \overset{\lambda}{\nabla}_j P_{ki}^h - \overset{\lambda}{\nabla}_j \overset{\lambda}{\nabla}_l P_{ki}^h - \nabla_l \nabla_j P_{ki}^h + \nabla_j \nabla_l P_{ki}^h &= \frac{\lambda^2}{2(1+\lambda)^2} (P_{\alpha i}^h (\nabla_l P_{jk}^\alpha - \nabla_j P_{lk}^\alpha + \\ &+ \overset{\lambda}{\nabla}_l P_{jk}^\alpha - \overset{\lambda}{\nabla}_j P_{lk}^\alpha) - P_{ki}^\alpha (\nabla_l P_{j\alpha}^h - \nabla_j P_{l\alpha}^h + \overset{\lambda}{\nabla}_l P_{j\alpha}^h - \overset{\lambda}{\nabla}_j P_{l\alpha}^h) + \\ &+ P_{k\alpha}^h (\nabla_l P_{ji}^\alpha - \nabla_j P_{li}^\alpha + \overset{\lambda}{\nabla}_l P_{ji}^\alpha - \overset{\lambda}{\nabla}_j P_{li}^\alpha)). \end{aligned} \quad (20)$$

Для тензорів Рімана

$$\overset{\lambda}{R}_{.ijk}^h = R_{.ijk}^h + \frac{\lambda}{1+\lambda} (\nabla_k P_{ji}^h - \nabla_j P_{ki}^h + \overset{\lambda}{\nabla}_k P_{ji}^h - \overset{\lambda}{\nabla}_j P_{ki}^h), \quad (21)$$

та їх коваріантних похідних

$$\begin{aligned} \overset{\lambda}{\nabla}_l \overset{\lambda}{R}_{.ijk}^h &= \nabla_l R_{.ijk}^h + \frac{\lambda}{1+\lambda} (P_{l\alpha}^h R_{.ijk}^\alpha - P_{li}^\alpha R_{.ajk}^h - P_{lj}^\alpha R_{.iak}^h - P_{kl}^\alpha R_{.ija}^h + \\ &+ \frac{1}{2} (\nabla_l \nabla_k P_{ji}^h - \nabla_l \nabla_j P_{ki}^h + \overset{\lambda}{\nabla}_l \overset{\lambda}{\nabla}_j P_{ji}^h - \overset{\lambda}{\nabla}_l \overset{\lambda}{\nabla}_j P_{ji}^h - \overset{\lambda}{\nabla}_l \overset{\lambda}{\nabla}_j P_{ki}^h)) + \\ &+ \frac{\lambda}{2(1+\lambda)^2} (\nabla_\alpha P_{ji}^h P_{kl}^\alpha + \nabla_k P_{\alpha i}^h P_{jl}^\alpha + \nabla_k P_{j\alpha}^h P_{il}^\alpha + \nabla_k P_{ij}^\alpha P_{\alpha l}^h). \end{aligned} \quad (22)$$

Друга похідна з урахуванням тотожності Річчі приведе до

$$\begin{aligned} \nabla_{[lm]}^{\lambda} R_{ij}^h - \nabla_{[lm]} R_{ijk}^h &= \frac{\lambda}{2(\lambda+1)} (-R_{\alpha lm}^h (\nabla_{[k} P_{j]i}^{\alpha} + \nabla_{[k}^{\lambda} P_{j]i}^{\alpha}) - R_{ijk}^{\alpha} (\nabla_{[m} P_{l]\alpha}^h + \nabla_{[m}^{\lambda} P_{l]\alpha}^h) + \\ &+ R_{ilm}^{\alpha} (\nabla_{[k} P_{j]\alpha}^h + \nabla_{[k}^{\lambda} P_{j]\alpha}^h) - R_{\alpha jk}^h (\nabla_{[m} P_{l]i}^{\alpha} + \nabla_{[m}^{\lambda} P_{l]i}^{\alpha}) + R_{jlm}^{\alpha} (\nabla_{[k} P_{\alpha]i}^h + \nabla_{[k}^{\lambda} P_{\alpha]i}^h) + \\ &+ R_{iak}^h (\nabla_{[m} P_{l]j}^{\alpha} + \nabla_{[m}^{\lambda} P_{l]j}^{\alpha}) + R_{klm}^{\alpha} (\nabla_{[\alpha} P_{j]i}^h + \nabla_{[\alpha}^{\lambda} P_{j]i}^h) + R_{ij\alpha}^h (\nabla_{[m} P_{l]k}^{\alpha} + \nabla_{[m}^{\lambda} P_{l]k}^{\alpha}). \end{aligned} \quad (23)$$

Отримаємо аналогічні формули для тензора Річчі

$$R_{ij}^{\lambda} = R_{ij} + \frac{\lambda}{2(\lambda+1)} (\nabla_{\alpha} P_{ji}^{\alpha} - \nabla_j P_{\alpha i}^{\alpha} + \nabla_{\alpha}^{\lambda} P_{ji}^{\alpha} - \nabla_j^{\lambda} P_{\alpha i}^{\alpha}), \quad (24)$$

коваріантних похідних тензора Річчі в просторах A_n та \bar{A}_n відповідно

$$\begin{aligned} \nabla_k^{\lambda} R_{ij}^{\lambda} &= \nabla_l R_{ij}^{\lambda} - P_{ki}^{\alpha} R_{\alpha j} - P_{kj}^{\alpha} R_{\alpha i} + \frac{\lambda}{2(\lambda+1)} (\nabla_{\beta} \nabla_k P_{ji}^{\beta} - \nabla_{\beta} \nabla_j P_{ki}^{\beta} + \nabla_{\beta}^{\lambda} \nabla_k P_{ji}^{\beta} - \\ &- \nabla_{\beta}^{\lambda} \nabla_j P_{ki}^{\beta}) + \frac{\lambda^2}{2(\lambda+1)^2} (\nabla_{\alpha} P_{ji}^{\beta} P_{k\beta}^{\alpha} + \nabla_k P_{\alpha i}^{\beta} P_{j\beta}^{\alpha} + \nabla_k P_{j\alpha}^{\beta} P_{i\beta}^{\alpha} + \nabla_k P_{ij}^{\alpha} P_{\alpha\beta}^{\beta}). \end{aligned} \quad (25)$$

З урахуванням тотожності Річчі, одержимо

$$\begin{aligned} \nabla_{[lm]}^{\lambda} R_{ij}^{\lambda} - \nabla_{[lm]} R_{ij}^{\lambda} &= \frac{\lambda}{2(\lambda+1)} (-R_{\alpha lm}^{\beta} (\nabla_{[\beta} P_{j]i}^{\alpha} + \nabla_{[\beta}^{\lambda} P_{j]i}^{\alpha}) - R_{ij\beta}^{\alpha} (\nabla_{[m} P_{l]\alpha}^{\beta} + \nabla_{[m}^{\lambda} P_{l]\alpha}^{\beta}) + \\ &+ R_{ilm}^{\alpha} (\nabla_{[\beta} P_{j]\alpha}^{\beta} + \nabla_{[\beta}^{\lambda} P_{j]\alpha}^{\beta}) + R_{\alpha j}^{\lambda} (\nabla_{[m} P_{l]i}^{\alpha} + \nabla_{[m}^{\lambda} P_{l]i}^{\alpha}) + R_{jlm}^{\alpha} (\nabla_{[\beta} P_{\alpha]i}^{\beta} + \nabla_{[\beta}^{\lambda} P_{\alpha]i}^{\beta}) + \\ &+ R_{i\alpha}^{\lambda} (\nabla_{[m} P_{l]j}^{\alpha} + \nabla_{[m}^{\lambda} P_{l]j}^{\alpha}) + R_{\beta lm}^{\alpha} (\nabla_{[\alpha} P_{j]i}^{\beta} + \nabla_{[\alpha}^{\lambda} P_{j]i}^{\beta}) + R_{ij\alpha}^{\beta} (\nabla_{[m} P_{l]\beta}^{\alpha} + \nabla_{[m}^{\lambda} P_{l]\beta}^{\alpha})). \end{aligned} \quad (26)$$

Теорема 4. Якщо простори A_n та \bar{A}_n допускають відображення, що відповідає тензору деформації P_{ij}^h , тоді існує укорочене відображення, при якому тензори деформації, Рімана, Річчі та їх коваріантні похідні задовольняють умовам (20) – (26).

Розглянемо можливість спрощення отриманих рівнянь.

4 СЕРЕДНЯ ЗВ'ЯЗНІСТЬ

Якщо $\lambda = 1$, то таке відображення називається укороченим навіпіл, а сама зв'язність середньою.

Для середньої зв'язності тензор деформації задовольняє умовам

$$\nabla_k^c P_{ij}^h(x) - \nabla_k P_{ij}^h(x) = \frac{1}{4} (P_{k\alpha}^h(x) P_{ij}^{\alpha}(x) - P_{ki}^{\alpha}(x) P_{\alpha j}^h(x) - P_{kj}^{\alpha}(x) P_{i\alpha}^h(x)). \quad (27)$$

Тут ∇_k^c – коваріантна похідна по середній зв'язності.

Для других коваріантних похідних

$$\begin{aligned} \nabla_l^c \nabla_j^c P_{ki}^h - \nabla_j^c \nabla_l^c P_{ki}^h - \nabla_l \nabla_j P_{ki}^h + \nabla_j \nabla_l P_{ki}^h &= \frac{1}{8} (P_{\alpha i}^h (\nabla_l P_{jk}^{\alpha} - \nabla_j P_{lk}^{\alpha} + \nabla_l^c P_{jk}^{\alpha} - \nabla_j^c P_{lk}^{\alpha}) - \\ &- P_{ki}^{\alpha} (\nabla_l P_{j\alpha}^h - \nabla_j P_{l\alpha}^h + \nabla_l^c P_{j\alpha}^h - \nabla_j^c P_{l\alpha}^h) + P_{k\alpha}^h (\nabla_l P_{ji}^{\alpha} - \nabla_j P_{li}^{\alpha} + \nabla_l^c P_{ji}^{\alpha} - \nabla_j^c P_{li}^{\alpha})). \end{aligned} \quad (28)$$



Це дає можливість для тензорів Рімана рівняння (28) записати в виді :

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \overset{c}{\nabla}_k P_{ji}^h - \overset{c}{\nabla}_j P_{ki}^h. \quad (29)$$

Для похідної тензора Рімана

$$\begin{aligned} \overset{c}{\nabla}_j R_{ijk}^h &= \overset{c}{\nabla}_l R_{ijk}^h + \frac{1}{2} (P_{l\alpha}^h R_{ijk}^\alpha - P_{li}^\alpha R_{.ajk}^h - P_{lj}^\alpha R_{.iak}^h - P_{kl}^\alpha R_{.ija}^h + \\ &+ \frac{1}{2} (\overset{c}{\nabla}_l \overset{c}{\nabla}_k P_{ji}^h - \overset{c}{\nabla}_l \overset{c}{\nabla}_j P_{ki}^h + \overset{c}{\nabla}_l \overset{c}{\nabla}_k P_{ji}^h - \overset{c}{\nabla}_l \overset{c}{\nabla}_j P_{ki}^h)) + \\ &+ \frac{1}{2} (\overset{c}{\nabla}_\alpha P_{ji}^h P_{kl}^\alpha + \overset{c}{\nabla}_k P_{ai}^h P_{jl}^\alpha + \overset{c}{\nabla}_k P_{ja}^h P_{il}^\alpha + \overset{c}{\nabla}_k P_{ij}^h P_{al}^\alpha). \end{aligned} \quad (30)$$

З урахуванням тотожності Річчі можемо записати

$$\begin{aligned} \overset{c}{\nabla}_{[lm]} \overset{c}{R}_{ijk}^h - \overset{c}{\nabla}_{[lm]} R_{ijk}^h &= \frac{1}{4} (-R_{alm}^h (\overset{c}{\nabla}_{[k} P_{j]i}^\alpha + \overset{c}{\nabla}_{[k} P_{j]i}^\alpha) - R_{ijk}^\alpha (\overset{c}{\nabla}_{[m} P_{l]\alpha}^h + \overset{c}{\nabla}_{[m} P_{l]\alpha}^h) + \\ &+ R_{ilm}^\alpha (\overset{c}{\nabla}_{[k} P_{j]\alpha}^h + \overset{c}{\nabla}_{[k} P_{j]\alpha}^h) + R_{ajk}^h (\overset{c}{\nabla}_{[m} P_{l]i}^\alpha + \overset{c}{\nabla}_{[m} P_{l]i}^\alpha) + R_{jlm}^\alpha (\overset{c}{\nabla}_{[k} P_{\alpha]i}^h + \overset{c}{\nabla}_{[k} P_{\alpha]i}^h) + \\ &+ R_{iak}^h (\overset{c}{\nabla}_{[m} P_{l]j}^\alpha + \overset{c}{\nabla}_{[m} P_{l]j}^\alpha) + R_{klm}^\alpha (\overset{c}{\nabla}_{[\alpha} P_{j]i}^h + \overset{c}{\nabla}_{[\alpha} P_{j]i}^h) + R_{ija}^h (\overset{c}{\nabla}_{[m} P_{l]k}^\alpha + \overset{c}{\nabla}_{[m} P_{l]k}^\alpha)). \end{aligned} \quad (31)$$

Згортаючи (29), для тензорів Річчі будемо мати

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + \overset{c}{\nabla}_\alpha P_{ji}^\alpha - \overset{c}{\nabla}_j P_{ai}^\alpha. \quad (32)$$

Для коваріантних похідних тензора Річчі

$$\begin{aligned} \overset{c}{\nabla}_k R_{ij}^c &= \overset{c}{\nabla}_l R_{ij}^c - P_{ki}^\alpha R_{\alpha j}^c - P_{kj}^\alpha R_{\alpha i}^c + \frac{1}{4} (\overset{c}{\nabla}_\beta \overset{c}{\nabla}_k P_{ji}^\beta - \overset{c}{\nabla}_\beta \overset{c}{\nabla}_j P_{ki}^\beta + \\ &+ \overset{c}{\nabla}_\beta \overset{c}{\nabla}_k P_{ki}^\beta) + \frac{1}{8} (\overset{c}{\nabla}_\alpha P_{ji}^\beta P_{k\beta}^\alpha + \overset{c}{\nabla}_k P_{ai}^\beta P_{j\beta}^\alpha + \overset{c}{\nabla}_k P_{ja}^\beta P_{i\beta}^\alpha + \overset{c}{\nabla}_k P_{ij}^\beta P_{\alpha\beta}^\alpha). \end{aligned} \quad (33)$$

Для тензора Річчі з урахуванням тотожності Річчі

$$\begin{aligned} \overset{c}{\nabla}_{[lm]} \overset{c}{R}_{ij}^c - \overset{c}{\nabla}_{[lm]} R_{ij}^c &= \frac{1}{4} (-R_{alm}^\beta \overset{c}{\nabla}_{[\beta} P_{j]i}^\alpha + \overset{c}{\nabla}_{[\beta} P_{j]i}^\alpha) - R_{ij\beta}^\alpha (\overset{c}{\nabla}_{[m} P_{l]\alpha}^\beta + \overset{c}{\nabla}_{[m} P_{l]\alpha}^\beta) + \\ &+ R_{ilm}^\alpha (\overset{c}{\nabla}_{[\beta} P_{j]\alpha}^\beta + \overset{c}{\nabla}_{[\beta} P_{j]\alpha}^\beta) + R_{\alpha j}^c (\overset{c}{\nabla}_{[m} P_{l]i}^\alpha + \overset{c}{\nabla}_{[m} P_{l]i}^\alpha) + R_{jlm}^\alpha (\overset{c}{\nabla}_{[\beta} P_{\alpha]i}^\beta + \overset{c}{\nabla}_{[\beta} P_{\alpha]i}^\beta) + \\ &+ R_{i\alpha}^c (\overset{c}{\nabla}_{[m} P_{l]j}^\alpha + \overset{c}{\nabla}_{[m} P_{l]j}^\alpha) + R_{\beta lm}^\alpha (\overset{c}{\nabla}_{[\alpha} P_{j]i}^\beta + \overset{c}{\nabla}_{[\alpha} P_{j]i}^\beta) + R_{ij\alpha}^\beta (\overset{c}{\nabla}_{[m} P_{l]\beta}^\alpha + \overset{c}{\nabla}_{[m} P_{l]\beta}^\alpha). \end{aligned} \quad (34)$$

Теорема 5. Якщо простори A_n та \bar{A}_n допускають відображення, що відповідає

тензору деформації P_{ij}^h , тоді існує половинне відображення, при якому тензори деформації, Рімана, Річчі та їх коваріантні похідні задовольняють умовам (27) – (34).

Доведені теореми дозволяють відповідати на питання, що виникає при відображеннях із збереженням об'єктів – тензора Рімана, Річчі, їх коваріантних похідних, а також при завданні умов на тензор деформації. Для прикладу розглянемо тензор Вейля W_{ijk}^h , пригадавши, як він визначається:

$$W_{ijk}^h \stackrel{def}{=} R_{ijk}^h - \frac{1}{n-1} (\delta_k^h R_{ij} - \delta_j^h R_{ik}) + \frac{1}{n+1} \left(\delta_i^h R_{[jk]} - \frac{1}{n-1} (\delta_k^h R_{[ji]} - \delta_j^h R_{[ki]}) \right).$$

Для еквафірних просторів останнє рівняння приймає вид:

$$W_{ijk}^{h \text{ def}} = R_{ijk}^h - \frac{1}{n-1} (\delta_k^h R_{ij} - \delta_j^h R_{ik}).$$

При відображеннях, тензори Вейля A_n та \bar{A}_n пов'язані співвідношеннями

$$\begin{aligned} \bar{W}_{ijk}^h = & W_{ijk}^h + \nabla_k^c P_{ji}^h - \nabla_j^c P_{ki}^h - \frac{1}{n-1} (\delta_k^h (\nabla_\alpha^c P_{ji}^\alpha - \nabla_j^c P_{\alpha i}^\alpha) - \delta_j^h (\nabla_\alpha^c P_{ki}^\alpha - \nabla_k^c P_{\alpha i}^\alpha)) + \\ & + \frac{1}{n+1} (\delta_i^h (\nabla_j^c P_{\alpha k}^\alpha - \nabla_k^c P_{\alpha j}^\alpha) - \frac{1}{n-1} (\delta_k^h (\nabla_j^c P_{\alpha i}^\alpha - \nabla_i^c P_{\alpha j}^\alpha) - \delta_j^h (\nabla_k^c P_{\alpha i}^\alpha - \nabla_i^c P_{\alpha k}^\alpha))), \end{aligned}$$

або, для еквафірних просторів

$$\bar{W}_{ijk}^h = W_{ijk}^h + \nabla_k^c P_{ji}^h - \nabla_j^c P_{ki}^h - \frac{1}{n-1} (\delta_k^h (\nabla_\alpha^c P_{ji}^\alpha - \nabla_j^c P_{\alpha i}^\alpha) - \delta_j^h (\nabla_\alpha^c P_{ki}^\alpha - \nabla_k^c P_{\alpha i}^\alpha)).$$

Має місце теорема.

Теорема 6. Якщо при відображенні просторів афінної зв'язності зберігається тензор Вейля, то тензор деформації задовольняє умовам

$$\begin{aligned} \nabla_k^c P_{ji}^h - \nabla_j^c P_{ki}^h = & \frac{1}{n-1} (\delta_k^h (\nabla_\alpha^c P_{ji}^\alpha - \nabla_j^c P_{\alpha i}^\alpha) - \delta_j^h (\nabla_\alpha^c P_{ki}^\alpha - \nabla_k^c P_{\alpha i}^\alpha)) - \\ & - \frac{1}{n+1} \left(\delta_i^h (\nabla_j^c P_{\alpha k}^\alpha - \nabla_k^c P_{\alpha j}^\alpha) - \frac{1}{n-1} (\delta_k^h (\nabla_j^c P_{\alpha i}^\alpha - \nabla_i^c P_{\alpha j}^\alpha) - \delta_j^h (\nabla_k^c P_{\alpha i}^\alpha - \nabla_i^c P_{\alpha k}^\alpha)) \right), \end{aligned}$$

а для еквафірних просторів

$$\nabla_k^c P_{ji}^h - \nabla_j^c P_{ki}^h = \frac{1}{n-1} (\delta_k^h (\nabla_\alpha^c P_{ji}^\alpha - \nabla_j^c P_{\alpha i}^\alpha) - \delta_j^h (\nabla_\alpha^c P_{ki}^\alpha - \nabla_k^c P_{\alpha i}^\alpha)).$$

Таким чином, задача про спеціальні відображення або про відображення спеціальних просторів зводиться до вивчення диференціальних рівнянь в коваріантних похідних [3], [13].

Вивчення цих рівнянь дає можливість як якісного аналізу, тобто відповіді на питання: існує чи не існує розв'язок, так і більш глибоких результатів в разі існування розв'язків.

Йдучи по шляху спеціалізації відображень вивчимо можливості спрощення виду тензора деформації, а саме доведемо теорему [7], [16]:

Теорема 7. Умови

$$P_{\alpha\beta}^h u^\alpha u^\beta = a(u) u^h + b(u) F_\alpha^h u^\alpha \tag{35}$$

та

$$P_{\alpha\beta}^h u^\alpha u^\beta = a(u) u^h + b(u) v^h \tag{36}$$

виконуються тотожно відносно довільного вектора u^i тоді і тільки тоді, коли відповідно

$$P_{ij}^h = \psi_{(i} \delta_{j)}^h + \varphi_{(i} F_{j)}^h \tag{37}$$

та

$$P_{ij}^h = \psi_{(i} \delta_{j)}^h + v^h a_{ij}, \tag{38}$$

причому

$$a(u) = 2\psi_\alpha u^\alpha; \quad b^1(u) = 2\varphi_\alpha u^\alpha; \quad b^2(u) = a_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta.$$

Тут P_{ij}^h – тензор деформації, u^i, v^i – компоненти деякого вектора, $a(u), b^1(u), b^2(u)$ – деякі функції, a_{ij} – тензор, F_i^h – афінор.

Для випадку $b^1 = b^2 = 0$, ця теорема доведена Т. Леві–Чевітою [8], суттєвою є вимога, що $n > 2$.

Для випадку $n = 2$, ця теорема не вірна. Ми скористаємось для доведення методикою, запропонованою М. С. Синюковим та Й. Мікешем [16].

Нехай тотожно виконуються умови (35) відносно довільного вектора u . Домножуючи (35) на $u^i F_\alpha^j u^\alpha$, а потім альтернуючи по індексам h, i та j , отримаємо однорідний поліном 4-го порядку відносно компонентів вектора u . Через довільність u , із отриманого витікає

$$P_{(\alpha\beta}^h \delta_j^i F_\delta^j) = 0. \quad (39)$$

Нехай ϵ^h – власний вектор матриці F_i^h , що відповідає власному значенню ρ , тобто

$$\epsilon^\alpha F_\alpha^h = \rho \epsilon^h, \quad (40)$$

тут ϵ^h та ρ можуть приймати і комплексні значення. Тоді $\epsilon^\alpha G_\alpha^h = 0$, якщо $G_i^h \stackrel{\text{def}}{=} F_i^h - \rho \delta_i^h$.

Розглянемо випадок, коли ранг матриці $\|G_i^h - \epsilon^h a_i\|$ більше одиниці.

Згортаючи (39) з $\epsilon^\beta \epsilon^\gamma \epsilon^\delta$ при умові, що $n \geq 3$ переконаємось в справедливості $P_{\alpha\beta}^h \epsilon^\alpha \epsilon^\beta \neq k \epsilon^h$. Тут k – деякий інваріант.

Згортаючи після цього (39) з $\epsilon^\gamma \epsilon^\delta$, знайдемо

$$P_{i\alpha}^h \epsilon^\alpha = \beta G_i^h + \epsilon^h b_i^1. \quad (41)$$

Згортаючи (39) з ϵ^δ , отримаємо рівняння (37).

Тепер розглянемо випадок, коли не виконуються обмеження на ранг матриці, тобто має місце

$$F_i^h = \rho \delta_i^h + a_i \epsilon^h + b_i^1 c^h, \quad (42)$$

причому $a_i, b_i, \epsilon^h, c^h$ – не колінеарні, бо інакше порушувалась би умова (35).

Так як $\epsilon^\alpha a_\alpha = \epsilon^\alpha b_\alpha^1 = 0$, то згортаючи (39) з $\epsilon^\beta \epsilon^\gamma \epsilon^\delta$, переконаємось, що $A_{\alpha\beta}^h \epsilon^\alpha \epsilon^\beta$ компланарний з ϵ^h та c^h . Після цього, згортаючи (39) з $\epsilon^\gamma \epsilon^\delta$ знайдемо, що

$$P_{i\alpha}^h \epsilon^\alpha = a_i \epsilon^h + \beta c^h.$$

Згортаючи (39) з ϵ^δ , знайдемо

$$P_{ij}^h = a_{ij} \epsilon^h + b_{ij} c^h. \quad (43)$$

Із цього та (39), випливає

$$a_{(ij)}^1 b_k = b_{(ij)} a_k. \quad (44)$$

Так як a_i, b_i – не колінеарні, то з (44) отримаємо

$$a_{ij} = a_{(i}\varphi_j), \quad b_{ij} = b_{(i}\varphi_j).$$

Тоді (43) приймає вид, який вимагався умовами теореми.

Необхідність очевидна, а те, що з (36) будемо мати (38), доводиться аналогічно.

Таким чином, теорема доведена.

5 ВИСНОВКИ

Використання модернізованої методики А. П. Нордена [6], [10], [12] дозволило отримати формулу зв'язку між відповідними внутрішніми об'єктами просторів A_n та \bar{A}_n . Ці формули дозволяють розв'язати задачі збереження геометричних властивостей чи характеристик алгебраїчного чи диференціального типу при відображеннях. Тобто, безпосередньо визначають тензор деформації зв'язності при відображенні. Робити це можливо вивчаючи умови інтегрування відповідних рівнянь. Ці умови – перевизначені алгебраїчні рівняння, при дослідженні яких виникають значні технічні складнощі [4].

Для спрощення введено поняття укороченого відображення та середньої зв'язності. Застосування нововведень продемонстровано на прикладі просторів, в яких тензор деформації зв'язності задовольняє деяким алгебраїчним умовам. Отримані результати можуть бути застосовані при вивченні геодезичних відображень псевдоріманових просторів [8], [17], голоморфно-проективних відображень келерових просторів [14], [16]. Особливий науковий інтерес викликає їх застосування при вивченні інваріантних перетворень.

Література

1. Вашпанова Н. В., Подоусова Т. Ю., Шевченко Т. І. Умови Сен-Венана для псевдоріманових просторів. Механіка та математичні методи. 2019. Т.1. №2. С. 62–74.
2. Егоров И. П. Автоморфизмы в обобщенных пространствах. Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1978. С. 147–191.
3. Кіосак В. А., Лесечко О. В. Моделі механічних систем, що зберігають тензор Вейля. Механіка та математичні методи. 2019. Т.1. №1. С. 25–34.
4. Кіосак В., Чепурная Е. Диффеоморфизмы с сохранением тензора Эйнштейна: Тензорные методы. Lap Lambert Academic Publishing. 2012. 108 с.
5. Кручкович Г. И. Римановы и псевдоримановы пространства. Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. 1966, 1968. С. 191–220.
6. Норден А. П. Пространства аффинной связности. М. : Наука, 1976. 432 с.
7. Микеш Й. Проективно симметрические и проективно рекуррентные пространства аффинной связности. Тр. геом. семин. Казань : Казанск. ун-т. 1981. №13. С. 61–62.
8. Синюков Н. С. Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств. Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1982. №13. С. 3–26.
9. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. М. : Наука, 1979. 255 с.
10. Широков А. П. Пространства аффинной связности (некоторые аспекты метода нормализации А. П. Нордена). Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1985. С. 131–151.
11. Kiosak V., Lesechko O. Geodesic mappings of spaces with special vector fields. Mechanics and mathematical methods. 2020. №. 2. (1). P. 45–54.
12. Kiosak V., Lesechko O., Savchenko O. Mappings of Spaces with Affine Connection. 17th Conference on Applied Mathematics. APLIMAT 2018. Proceedings, Bratislava. 2018. P. 563–569.

13. Lesechko O., Latysh O., Kamienieva A. Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor. *AIP Conference Proceedings*. 2019. 2164. 040002. <https://doi.org/10.1063/1.5130794>.
14. Lesechko O., Latysh O., Spychak T. Conformally flat kähler spaces. *AIP Conference Proceedings*. 2020. 2302. 04000. <https://doi.org/10.1063/5.0034024>.
15. Lesechko O., Makarenko L., Sokolova L. On the Pseudo-Riemannian spaces with a special structure of a curvature tensor. *AIP Conference Proceedings*. 2020. 2302. 040005. <https://doi.org/10.1063/5.0034022>.
16. Mikes J., Kiosak V., Vanzurova O. Geodesic mappings of manifolds with affine connection. Palacky University Press. Olomouc. 2008, 221 p.
17. Vashpanov Y., Olshevska O., Lesechko O. Geodesic mappings of spaces with $\varphi(\text{Ric})$ vector fields. *AIP Conference Proceedings*. 2020. 2302. 040010. <https://doi.org/10.1063/5.0033965>.
18. Vasilenko A. T., Lesechko A. V. Nonlinear nonaxisymmetric deformation of composite shells of revolution. *Journal of Mathematical Sciences*. 1996. № 79 (6). P. 1458–1461, <https://doi.org/10.1007/BF02362805>.

References

1. Vashpanova, N., Podousova, T., Shevchenko, T. (2019). Umovy Sen-Venana dlia psevdorimanovykh prostoriv [Saint-Venant's conditions for pseudo-Riemannian spaces]. *Mekhanika ta matematychni metody* [Mechanics and mathematical methods], no. 1 (2), 62–74. [in Russian].
2. Ehorov, I. P. (1978). Avtomorfizmy v obobshchennykh prostranstvakh [Automorphisms in generalized spaces]. *Ytohy nauky y tekhniky. Problemy heometryy* [Results of science and technology. Probl. Geom], no. 10, 147–191. [in Ukrainian].
3. Kiosak, V. A., Lesechko, A. V. (2019). Modeli mekhanichnykh system, shcho zberihaiut tenzor Veilia [Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor]. *Mekhanika ta matematychni metody* [Mechanics and mathematical methods], no. 1 (1), 25–34. [in Ukrainian].
4. Kiosak, V., Chepurnaya, O. (2012). *Dyffeomorfizmy s sokhranenyem tenzora Einšteina: Tenzornye metody* [Diffeomorphisms with preservation of the Einstein tensor: Tensor methods]. Lap Lambert Academic Publishing [in Russian].
5. Kruchkovich, G. I. (1966, 1968). Rymanovy y psevdorymanovy prostranstva [Riemannian and pseudo-Riemannian spaces]. *Ytohy nauky y tekhn. Algebra. Topolohyia. Heometryia* [Results of science and technology. Mat. Algebra. Topol. Geom.], 191–220. [in Russian].
6. Norden, A. P. (1976). *Prostranstva Affynnoi Sviaznosti* [Affinely connected spaces]. Moskva, Nauka [in Russian].
7. Mikes, J. (1981). Proektyvno symmetrycheskye y proektyvno rekurrentnye prostranstva affynnoi sviaznosti [Projective-symmetric and projective-recurrent affinely connected spaces]. *Tr. heom. semyn* [Tr. Geom. Semin], no. 13, 61–62. [in Russian].
8. Sinyukov, N. S. (1982). Pochty heodezycheskye otobrazheniya affynnosviyaznykh y rymanovykh prostranstv [Almost geodesic mappings of affinely connected and Riemannian spaces]. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Probl. Geom.* [Results of science and technology. Probl. Geom], no. 13, 3–26. [in Russian].
9. Sinyukov, N. S. (1979). *Heodezycheskye otobrazheniya rymanovykh prostranstv* [Geodesic mappings of Riemannian spaces]. Moskva, Nauka, [in Russian].
10. Shirokov, A. P. (1985). Prostranstva affynnoi sviaznosti (nekotorye aspekty metoda normalyzatsyy A. P. Nordena) [Spaces with affine connection (some aspects of A. P. Norden's normalization method)], *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Probl. Geom.* [Results of science and technology. Probl. Geom], no. 17, 131–151. [in Russian].
11. Kiosak V., Lesechko O. (2020). Geodesic Mappings of Spaces with Special Vector Fields. *Mechanics and mathematical methods*, no. 2 (1), 45–54. [in English].
12. Kiosak, V., Lesechko, O., Savchenko, O. (2018). Mappings of Spaces with Affine Connection. *17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT 2018*, 563–569. [in English].
13. Lesechko, O., Latysh, O., Kamienieva, A. (2019). Models of Mechanical Systems Preserving the Weyl Tensor. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040002, <https://doi.org/10.1063/1.5130794>. [in English].

14. Lesechko, O., Latysh, O., Spychak T. (2020). Conformally Flat Kähler Spaces. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040004, <https://doi.org/10.1063/5.0034024>. [in English].
15. Lesechko, O., Makarenko, L., Sokolova, L. (2020). On the Pseudo-Riemannian Spaces with a Special Structure of a Curvature Tensor. *AIP Conference Proceedings*. 2302, 040005, <https://doi.org/10.1063/5.0034022>. [in English].
16. Mikes, J., Kiosak, V., Vanzurova, O. (2008). *Geodesic Mappings of Manifolds with Affine Connection*. Olomouc: Palacky University. [in English].
17. Vashpanov, Y., Olshevska, O., Lesechko, O. (2020). Geodesic Mappings of Spaces with $\varphi(\text{Ric})$ Vector Fields. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040010, <https://doi.org/10.1063/5.0033965>. [in English].
18. Vasilenko, A. T., Lesechko, A. V. (1996). Nonlinear Nonaxisymmetric Deformation of Composite Shells of Revolution. *Journal of Mathematical Sciences*, no. 79 (6), 1458–1461, <https://doi.org/10.1007/BF02362805>. [in English].

Кіосак Володимир Анатолійович

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.ф.-м.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
kiosakv@ukr.net
ORCID: 0000-0002-7433-6709

Каменева Алла Вікторівна

Національний університет «Одеська морська академія», к.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона, 8, Одеса, Україна 65029
kamienieva@ukr.net
ORCID: 0000-0002-9970-9081

Для посилань:

Кіосак В. А. Укорочені відображення просторів афінної зв'язності / В. А. Кіосак, А. В. Каменева // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 2.– С. 18-31.

For references:

Kiosak, V., Kamienieva, A. (2020). Shortened mappings of spaces with affine connectivity. *Mechanics and Mathematical Methods*, 2 (2), 18-31

УДК 539.3

ПРО ВЗАЄМОДІЮ ДВОХ ТРІЩИН НА МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

Костенко М. В.¹, Шевельова А. Є.¹, Лобода В. В.¹

¹Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Анотація: Розглянута задача плоскої деформації про взаємодію двох колінеарних тріщин між ізотропними різнорідними півпросторами, навантаженими на нескінченності нормальними та дотичними напруженнями. Для побудови розв'язку використано представлення напружень та переміщень через функцію, яка аналітична у всій комплексній площині за виключенням областей тріщин. За допомогою цих представлень проблема зведена до задачі Рімана-Гільберта, для вказаної кусково-аналітичної функції зі стрибками по відрізкам тріщин. Виписано аналітичне представлення розв'язку з невідомими коефіцієнтами, що визначаються з умов на нескінченності та умов однозначності переміщень при обході контурів тріщин. Реалізація останніх приводить до необхідності обчислення інтегралів від функцій з осцилюючими кореневими особливостями. На основі отриманого розв'язку виписані аналітичні вирази для напружень на різних відрізках поза тріщиною та стрибків переміщень на берегах тріщин. Встановлено характер поведінки напружень та похідних від стрибків переміщень на різних частинах межі поділу матеріалів. Знайдені комплексні коефіцієнти інтенсивності напружень та швидкості звільнення енергії біля вершин правої тріщини. Проаналізовано залежності вказаних факторів від механічних характеристик матеріалів, розміру та взаємного розташування тріщин, а також від інтенсивностей віддалених нормального та дотичного напружень. Результати представлено у вигляді таблиці та графіків. Зокрема, показаний ріст швидкості звільнення енергії для вершини тріщини при наближенні до неї іншої тріщини. Продемонстровані також графіки зміни стрибка переміщень для різних співвідношень модулів пружності верхнього та нижнього матеріалів і різних відношеннях інтенсивностей зовнішніх нормального та дотичного напружень. Виявлено, зокрема, що при значній різниці у модулях пружності та при суттєвому зсувному полю напружень стає помітним взаємопроникнення матеріалів, пов'язане із осцилюючою особливістю, що має місце біля вершин тріщини.

Ключові слова: тріщини, взаємодія, коефіцієнт інтенсивності напружень, осцилююча особливість

ON THE INTERACTION OF TWO CRACKS ALONG THE MATERIAL INTERFACE

M. Kostenko¹, A. Sheveleva¹, V. Loboda¹

¹Oles Honchar Dnipro National University

Abstract: Plane deformation problem of the interaction of two collinear cracks between isotropic heterogeneous half-spaces loaded at infinity by normal and tangential stresses is considered. To find the solution, the representation of stresses and displacements through a function that is analytical in the entire complex plane except of the crack regions is used. With the help of these representations, the problem is reduced to the Riemann-Hilbert problem, for the specified piecewise analytical function with jumps along the segments of cracks. An analytical representation of the solution with unknown coefficients, which is determined from the conditions at infinity and the conditions of unambiguous displacements when traversing the contours of cracks, is written. The implementation of the latter leads to the need of calculation on the integrals from the functions with oscillating root singularities. Based on the obtained solution, analytical expressions are written for stresses at different segments outside the crack and jumps of displacements on the cracks. The behavior of stresses and derivatives of the displacements jumps at different parts of the material interface are established. Complex



coefficients of stress intensity and energy release rate near the vertices of the right crack are found. The dependences of these factors on the mechanical characteristics of materials, size and mutual location of cracks, as well as on the intensities of the remote normal and tangential stresses are analyzed. The results are presented in the form of tables and graphs. In particular, an increase of the energy release rate for the crack tip when another crack approaches is shown. Graphs of changes in the jump of displacements for different ratios of modulus of elasticity of the upper and lower materials and different ratios of intensities of external normal and tangential stresses are also shown. It was found, in particular, that with a significant difference in the modulus of elasticity and with a significant shear stress field, the interpenetration of materials occurring because of the oscillating singularity near the crack vertices becomes noticeable.

Keywords: cracks, interaction, stress intensity factor, oscillating singularity

1 ВСТУП

Дослідження тріщин між двома матеріалами (міжфазних тріщин) має важливе значення для практики, оскільки такого роду дефекти є найчастіше основною причиною руйнування композитних конструкцій. Задача для тріщини, яка розташована на межі поділу двох різних пружних ізотропних матеріалів, була поставлена в [1] в припущенні, що тріщина повністю відкрита. В результаті було встановлено, що в рамках цієї моделі біля вершин тріщини має місце осцилююча особливість напружень. У подальшому, міжфазна тріщина в рамках цієї моделі розглядалася в [2-4] та інших роботах. Взаємодія періодичної системи відкритих міжфазних тріщин вивчалась в роботах [5, 6]. Розв'язок для довільної системи тріщин між двома ізотропними матеріалами представлений в [7]. Для його знаходження застосований метод сингулярних інтегральних рівнянь.

В даній роботі з використанням комплексних представлень компонент пружно-деформівного стану розглянуто задачу про взаємодію двох відкритих тріщин на межі поділу матеріалів. Проблему зведено до крайової задачі Гільберта, для якої виписано аналітичний розв'язок. Одержано досить прості аналітичні формули для всіх необхідних факторів на межі поділу матеріалів.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо дві відкриті $c \leq x_1 \leq a$, $b < x_1 < d$ тріщини на межі поділу $x_2 = 0$ двох пружних матеріалів (рис. 1).

Будемо вважати, що вектор $\mathbf{P}^\infty = [\sigma^\infty, \tau^\infty]^T$ задає умови на нескінченності. Вважається також відсутність напружень на берегах тріщин і умови неперервності на іншій частині межі поділу матеріалів (біматеріального інтерфейсу). Отже, граничні умови на різних частинах інтерфейсу мають вигляд

$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = 0 \quad \text{для } x_1 \in [c, a] \cup [b, d], \quad x_1 \in [b, d], \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \langle u_1(x_1, 0) \rangle &= 0, \quad \langle u_2(x_1, 0) \rangle = 0, \\ \langle \sigma_{12}(x_1, 0) \rangle &= 0, \quad \langle \sigma_{22}(x_1, 0) \rangle = 0 \quad \text{для } x_1 \notin \{[c, a] \cup [b, d]\}, \end{aligned} \quad (2)$$

де вважається, що $c < a < b < d$, $\langle \cdot \rangle$ означає стрибок відповідної функції при переході через інтерфейс.

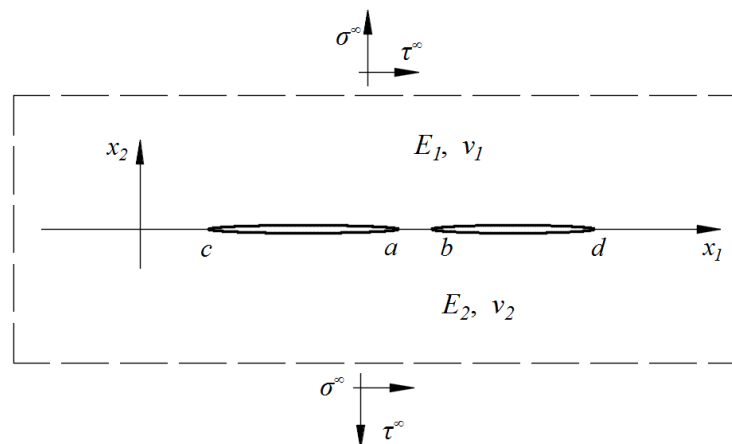


Рис. 1. Відкриті $c \leq x_1 \leq a$, $b < x_1 < d$ тріщини на межі поділу $x_2 = 0$ двох пружних матеріалів

В роботі [9] отримані представлення

$$\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) = g [F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1)], \quad (4)$$

$$\langle u_1'(x_1, 0) \rangle + i \langle u_2'(x_1, 0) \rangle = F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1), \quad (5)$$

де

$$g = \frac{2\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}, \quad \gamma_1 = \frac{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}{\mu_2 + \kappa_2 \mu_1},$$

функція $F_1(z)$ аналітична у всій площині комплексної змінної $z = x_1 + ix_2$ за виключенням відрізків $[c, a]$ і $[b, d]$ межі поділу матеріалів. При цьому рівняння (4), (5) забезпечують виконання умов неперервності напружень уздовж усього інтерфейсу.

3 АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОБЛЕМИ

Співвідношення (4), (5) задовольняють третю і четверту умови (2), що витікає із виконання рівняння $P^{(1)}(x_1, 0) = P^{(2)}(x_1, 0)$ ($P^{(m)} = [\sigma_{22}^{(m)}, \sigma_{12}^{(m)}]^T$) для всього інтерфейсу. Подальше врахування першої і другої умов (3) забезпечує аналітичність функції для всієї площини з розрізом уздовж відрізків $x_1 \in [c, a]$ і $x_1 \in [b, d]$ інтерфейсу.

Задовольняючи граничні умови (1) з використанням (4), отримуємо таке рівняння:

$$F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in [c, a] \cup [b, d]. \quad (6)$$

Беручи до уваги, що для $x_1 \notin [c, a]$ і $x_1 \notin [b, d]$ співвідношення

$$F_1^+(x_1) = F_1^-(x_1) = F_1(x_1) \quad \text{є справедливим, маємо з (4):}$$

$$(1 + \gamma_1)F_1(x_1) = \sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) \quad \text{для } x_1 \rightarrow \infty.$$

Використовуючи той факт, що функція $F_1(z)$ є аналітичною у всій площині, яка розрізана вздовж $x_1 \in \{[c, a] \cup [b, d]\}$ і застосовуючи умови на нескінченності, приходимо з останнього рівняння до такої умови на нескінченності

$$F_1(z)|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}^\infty - i\tilde{\tau}^\infty, \quad (7)$$

де $\tilde{\sigma}^\infty = \sigma^\infty / g(1 + \gamma_1)$, $\tilde{\tau}^\infty = \tau^\infty / g(1 + \gamma_1)$, σ^∞ і τ^∞ – напруження, задані на нескінченності.

Співвідношення (6) з умовою на нескінченності (7) є задача Гільберта-Рімана. Враховуючи відсутність навантаження на берегах тріщини її розв'язок будемо розшукувати у вигляді [9]:

$$F_1(z) = P_2(z)X(z) = \frac{c_0 z^2 + c_1 z + c_2}{\sqrt{(z-c)(z-a)(z-b)(z-d)}} \left(\frac{z-c}{z-a} \cdot \frac{z-b}{z-d} \right)^{i\varepsilon_1}, \quad (8)$$

де $\varepsilon_1 = (1/2\pi) \ln \gamma_1$; $P_2(z) = c_0 z^2 + c_1 z + c_2$; c_0, c_1, c_2 – довільні константи, що визначаються з рівняння (7) та з умов однозначності переміщень при обході контурів тріщин.

На основі [9] умови однозначності переміщень при обході контурів тріщин мають вигляд

$$\int_c^a \frac{c_0 t^2 + c_1 t + c_2}{\sqrt{(t-c)(t-a)(t-b)(t-d)}} \left(\frac{(t-c)(t-b)}{(t-d)(t-a)} \right)^{i\epsilon_1} dt = 0, \quad (9)$$

$$\int_b^d \frac{c_0 t^2 + c_1 t + c_2}{\sqrt{(t-c)(t-a)(t-b)(t-d)}} \left(\frac{(t-c)(t-b)}{(t-d)(t-a)} \right)^{i\epsilon_1} dt = 0. \quad (10)$$

Ці співвідношення можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} c_0 I_2 + c_1 I_1 + c_2 I_0 &= 0, \\ c_0 \tilde{I}_2 + c_1 \tilde{I}_1 + c_2 \tilde{I}_0 &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$I_k = \int_c^a R(t) dt, \quad \tilde{I}_k = \int_b^d R(t) dt, \quad (12)$$

$$R(t) = \frac{t^k}{\sqrt{(t-c)(t-a)(t-b)(t-d)}} \left(\frac{(t-c)(t-b)}{(t-d)(t-a)} \right)^{i\epsilon_1}.$$

Розкладаючи функцію $F_1(z)$ в ряд при $z \rightarrow \infty$ і розглядаючи коефіцієнт цього розкладення при z^0 , з рівняння (7) одержуємо:

$$c_0 = \tilde{\sigma}^\infty - i\tilde{\tau}^\infty. \quad (13)$$

Із системи (11) знаходимо

$$c_1 = \frac{c_0(I_2 \tilde{I}_0 - \tilde{I}_2 I_0)}{D}, \quad c_2 = \frac{c_0(I_1 \tilde{I}_2 + \tilde{I}_1 I_2)}{D}, \quad (14)$$

де $D = -(I_1 \tilde{I}_0 + \tilde{I}_1 I_0)$.

Якщо тріщини однакові і розташовані симетрично відносно початку координат, тобто $c = -d, a = -b$, то

$$F_1(z) = P_2(z)X(z) = \frac{c_0 z^2 + c_1 z + c_2}{\sqrt{(z^2 - b^2)(z^2 - d^2)}} \left(\frac{(z+d)(z-b)}{(z-d)(z+b)} \right)^{i\epsilon_1}, \quad (15)$$

У цьому випадку c_0 не змінюється, а формули для c_1, c_2 , можна подати у наступному більш простому вигляді:

$$c_1 = \frac{c_0(I_2^+ I_0^- - I_2^- I_0^+)}{D_s}, \quad c_2 = \frac{c_0(I_1^+ I_2^- + I_1^- I_2^+)}{D_s}, \quad (16)$$

де

$$D_s = -(I_1^+ I_0^- + I_1^- I_0^+), \quad I_k^\pm = \int_b^d \frac{t^k}{\sqrt{(t^2 - b^2)(t^2 - d^2)}} \left(\frac{(t+d)(t-b)}{(t-d)(t+b)} \right)^{\pm i\epsilon_1} dt. \quad (17)$$

У частковому випадку однакових матеріалів інтеграли у формулах (12), (17) зводяться до еліптичних інтегралів. Зокрема, для випадку симетрично розташованих тріщин відносно початку координат формула (15) приймає вигляд:

$$F_1(z) = \frac{\tilde{\sigma}^\infty - i\tilde{\tau}^\infty}{2g} \left\{ \frac{z^2 - d^2 E(q) / K(q)}{\sqrt{(z^2 - c^2)(z^2 - d^2)}} \right\}, \quad (18)$$

де $q = d^2 - c^2/d^2$, $K(q)$, і $E(q)$ – повні еліптичні інтеграли першого і другого роду, відповідно. Коефіцієнт g у цьому випадку приймає вигляд $g = 2\mu/1 + \kappa$.

4 НАПРУЖЕННЯ ТА ЇХ КОЕФІЦІЄНТИ ІНТЕНСИВНОСТІ

Враховуючи, що $F_1^+(x_1) = F_1^-(x_1) = F_1(x_1)$ для $x_1 \notin [c, a]$ і $x_1 \notin [b, d]$, на основі формули (4) одержуємо

$$\begin{aligned} & \sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) = \\ & = g(1 + \gamma_1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{c_0x^2 + c_1x + c_2}{\sqrt{(x-c)(x-a)(x-b)(x-d)}} \left(\frac{(x-c)(x-b)}{(x-d)(x-a)} \right)^{i\varepsilon_1}, \quad x_1 > d \\ - \frac{c_0x^2 + c_1x + c_2}{\sqrt{(x-c)(x-a)(b-x)(d-x)}} \left(\frac{(x-c)(b-x)}{(d-x)(x-a)} \right)^{i\varepsilon_1}, \quad a < x_1 < b \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Комплексні коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) біля вершин правої тріщини вводимо наступними формулами

$$\begin{aligned} K_1^b - iK_2^b &= \lim_{x_1 \rightarrow b-0} \sqrt{2\pi(b-x_1)}(b-x_1)^{-i\varepsilon_1} \left[\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) \right], \\ K_1^d - iK_2^d &= \lim_{x_1 \rightarrow d+0} \sqrt{2\pi(x_1-d)}(x_1-d)^{i\varepsilon_1} \left[\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) \right]. \end{aligned}$$

На основі формул (19) отримуємо:

$$K_1^b - iK_2^b = -g\sqrt{2\pi}(1 + \gamma_1) \frac{c_0b^2 + c_1b + c_2}{\sqrt{(b-c)(b-a)(d-b)}} \left(\frac{(b-c)}{(d-b)(b-a)} \right)^{i\varepsilon_1}, \quad (20)$$

$$K_1^d - iK_2^d = \sqrt{2\pi}g(1 + \gamma_1) \frac{c_0d^2 + c_1d + c_2}{\sqrt{(d-c)(d-a)(d-b)}} \left(\frac{(d-c)(d-b)}{(d-a)} \right)^{i\varepsilon_1}. \quad (21)$$

Відомо, що швидкість звільнення енергії (ШЗЕ) для тріщини між двома матеріалами наступним чином виражається через коефіцієнти інтенсивності напружень:

$$G = \Omega(K_1^2 + K_2^2), \quad (22)$$

де

$$\Omega = \frac{1}{16\text{ch}^2(\pi\varepsilon)} \left(\frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right) \text{ або } \Omega = \frac{\gamma}{4(\gamma + 1)^2} \left(\frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right). \quad (23)$$

На основі цієї формули ШЗЕ для вершин тріщини b і d , відповідно, виражаються формулами:

$$G_b = \Omega(K_1^b + iK_2^b)(K_1^b - iK_2^b) = 2\pi\Omega g^2(1 + \gamma_1)^2 \frac{(c_0b^2 + c_1b + c_2)(\bar{c}_0b^2 + \bar{c}_1b + \bar{c}_2)}{(b-c)(b-ab-a)(d-b)}, \quad (24)$$

$$G_d = 2\pi\Omega g^2(1 + \gamma_1)^2 \frac{(c_0d^2 + c_1d + c_2)(\bar{c}_0d^2 + \bar{c}_1d + \bar{c}_2)}{(d-c)(d-a)(d-b)}, \quad (25)$$

де рисочки зверху означають комплексне спряження.

5 РОЗКРИТТЯ ТРІЩИН

З урахуванням співвідношення $F_1^-(x_1) = (-1/\gamma_1)F_1^+(x_1)$ для $x_1 \in [c, a] \cup [b, d]$, яке витікає з (6), на основі формули (5) отримуємо

$$\begin{aligned} & \langle u_1'(x_1, 0) \rangle + i \langle u_2'(x_1, 0) \rangle = \\ & = i \frac{1 + \gamma_1}{\sqrt{\gamma_1}} \begin{cases} \frac{c_0 x_1^2 + c_1 x_1 + c_2}{\sqrt{(x_1 - c)(a - x_1)(b - x_1)(d - x_1)}} \left(\frac{(x_1 - c)(b - x_1)}{(d - x_1)(a - x_1)} \right)^{i\epsilon_1} & x_1 \in (c, a) \\ \frac{-(c_0 x_1^2 + c_1 x_1 + c_2)}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)(x_1 - b)(d - x_1)}} \left(\frac{(x_1 - c)(x_1 - b)}{(d - x_1)(x_1 - a)} \right)^{i\epsilon_1} & x_1 \in (b, d). \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

При отриманні останньої формули враховано, що $(-1)^{i\epsilon_1} = \sqrt{\gamma_1}$.

6 ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Чисельний аналіз проводився для різних варіантів розташування тріщин, різних механічних характеристик верхнього та нижнього матеріалів і різних зовнішніх навантажень.

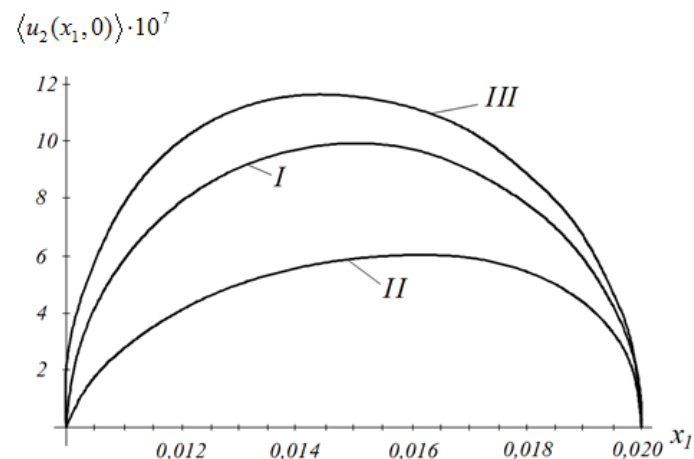


Рис. 2. Стрибки переміщень правої тріщини при $E_1 = 10 \text{ ГПа}$, $E_2 = 100 \text{ ГПа}$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $b = 10 \text{ мм}$, $d = 20 \text{ мм}$ та різних положеннях лівої тріщини

На рис. 2 показані графіки відкриття (стрибків переміщень) правої тріщини при $E_1 = 10 \text{ ГПа}$, $E_2 = 100 \text{ ГПа}$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $b = 10 \text{ мм}$, $d = 20 \text{ мм}$, різних положеннях лівої тріщини. Крива I побудована для $c = -20 \text{ мм}$, $a = -10 \text{ мм}$, $\sigma^\infty = 1 \text{ МПа}$, $\tau^\infty = 0$. Крива II побудована для того ж положення лівої тріщини, але при наявності зсувного поля ($\sigma^\infty = 0,6 \text{ МПа}$, $\tau^\infty = 0,8 \text{ МПа}$), а крива III відповідає $c = -1 \text{ мм}$, $a = 9 \text{ мм}$, $\sigma^\infty = 1 \text{ МПа}$, $\tau^\infty = 0$, тобто випадку суттєвого наближення лівої тріщини до правої. Видно, що таке наближення при збереженні усіх інших зовнішніх чинників призводить до помітного росту розкриття тріщини.

Відповідні зміни ШЗЕ, отримані за формулами (24), (25), наведені в таблиці 1.

Таблиця 1.

Швидкість звільнення енергії (ШЗЕ) при зближенні тріщин

$b-a$, мм	100	20	10	5	2	1	0,5
G_b	0,772	0,788	0,837	0,944	1,254	1,703	2,467
G_d	0,771	0,780	0,804	0,843	0,908	0,960	1,011

Видно ріст вказаного фактору для обох вершин тріщини, але більш швидкий ріст спостерігається для внутрішньої вершини тріщини.

На рис. 3 показана варіація напруження $\sigma_{22}(x_1, 0)$ на проміжку (a, b) між тріщинами при $b = 10$ мм, $d = 20$ мм і $a = -10$ мм (крива I), $a = 0$ (II), $a = 5$ мм (III), $a - c = 10$ мм під дією нормального напруження $\sigma^\infty = 1$ МПа. Крива IV побудована для змішаного навантаження $\sigma^\infty = \tau^\infty = 1$ МПа при тих же значеннях b і d , та $c = -15$ мм, $a = -5$ мм. Характеристики матеріалів вибирались такі ж, як і для рис. 2.

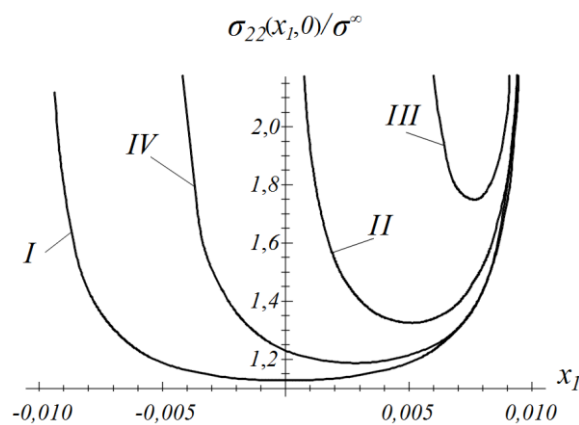


Рис. 3. Варіація напруження $\sigma_{22}(x_1, 0)$ на проміжку (a, b) між тріщинами

На рис. 4 показна поведінка стрибків переміщень в околі лівої вершини правої тріщини при $c = -20$ мм, $a = -10$ мм, $b = 10$ мм, $d = 20$ мм, $\sigma^\infty = 1$ МПа, $\tau^\infty = 5$ МПа, $E_1 = 10$ ГПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ і різних значеннях модуля пружності нижнього матеріалу, а саме $E_2 / E_1 = 1$ (крива I), $E_2 / E_1 = 2$ (II) і $E_2 / E_1 = 10$ (III). Слід відзначити, що крива I побудована для однорідного матеріалу і в цьому випадку результати повністю узгоджуються з відповідними значеннями, отриманими на основі формули (18). Ця обставина підтверджує правильність результатів, отриманих для загального випадку характеристик біматеріалу. Ріст модуля Юнга нижнього матеріалу приводить до падіння величини стрибка переміщень. Для достатньо великих значень відношення E_2 / E_1 візуально стає помітним взаємопроникнення берегів тріщини, яке має місце для відкритої моделі тріщини між двома різними матеріалами [1-4]. Але така ситуація суттєво проявляється лише для великих значень зовнішнього зсувного поля та значної різниці в механічних характеристиках матеріалів. У більшості ж випадків зони взаємопроникнення берегів тріщини є вкрай малими і вони суттєво не впливають на основні результати розрахунків.

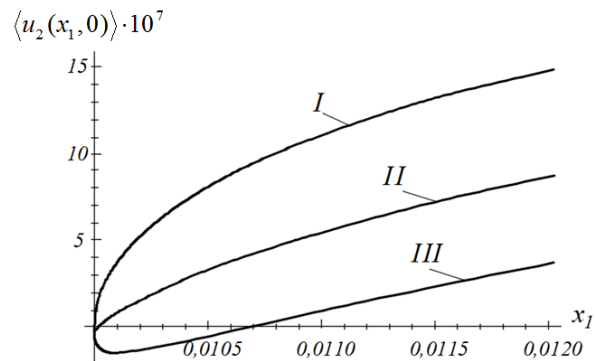


Рис. 4. Поведінка стрибків переміщень в околі лівої вершини правої тріщини

7 ВИСНОВКИ

В результаті розв'язання задачі про дослідження пружно-деформівного стану ізотропного біматеріального тіла з двома колінеарними тріщинами на межі поділу матеріалів отримані аналітичні вирази для напружень на різних частинах інтерфейсу та знайдені стрибки переміщень на берегах тріщин, тобто їх розкриття. Підтверджено існування осцилюючої кореневої особливості в вершинах тріщини та знайдені комплексні коефіцієнти інтенсивності напружень і швидкості звільнення енергії у вказаних вершинах. Проаналізовано залежності вказаних факторів від механічних характеристик матеріалів, розміру та взаємного розташування тріщин, а також від інтенсивностей віддалених нормального та дотичного напружень. Показано, що при досить великому значенні відношення модулів пружності верхнього і нижнього матеріалів і значному зсувному полю стає візуально помітним взаємопроникнення берегів тріщини, що вказує на необхідність використання у таких випадках контактної моделі тріщини. Проаналізована поведінка швидкості звільнення енергії правої тріщини при наближенні до неї лівої тріщини. Встановлено ріст вказаного фактору для обох вершин тріщини, але більш швидкий ріст спостерігався для внутрішньої вершини тріщини.

Література

1. Williams M. L. The stresses around a fault or cracks in dissimilar media. Bulletin of the Seismological Society of America. 1959. № 49. P. 199–204.
2. Моссаковский В. И., Рыбка М. Т. Обобщение критерия Гриффитса-Снеддона на случай неоднородного тела. Прикладная математика и механика. 1964. № 6. С. 1061–1069.
3. Черепанов Г. П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 1. С. 131–137.
4. England A. N. A crack between dissimilar media. Journal of Applied Mechanics. 1965. № 32. P. 400–402.
5. Rice J. R., Sih G. C. Plane problem of cracks in dissimilar media. Journal of Applied Mechanics. 1965. № 32. P. 418–423.
6. Parihar K. S., Garg A. C. An infinite row of collinear cracks at the interface of two bonded dissimilar elastic half planes. Eng. Fract. Mech. 1975. № 7 (4). P. 751–759.
7. Noda N. A., Oda K. Interaction effect of stress intensity factors for any number of collinear interface cracks. International Journal of Fracture. 1997. № 84. P. 117–128.
8. Лобода В. В., Харун І. В. Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил та моментів. Мат. методи та фізико-механічні поля. 2002. № 45 (2). С. 103–113.
9. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва : Наука, 1966. 707 с.

References

1. Williams, M. L. (1959). The stresses around a fault or cracks in dissimilar media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, no. 49, 199–204. [in English].
2. Mossakovsky, V. I., Rybka, M. T. (1964). Obobshchenye kryteryya Hryffytza-Sneddona na sluchay neodnorodnoho tela [Generalization of the Griffiths-Sneddon criterion to the case of an inhomogeneous body]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], no. 6, 1061-1069. [in Russian].
3. Cherepanov, G. P. (1962). O napryazhenom sostoyany v neodnorodnoy plastynke s razrezamy [On the stress state in an inhomogeneous plate with cuts]. *Yzv. AN SSSR. OTN. Mekhanyka y mashynostroenye* [News USSR Academy of Sciences. DTSc. Mechanics and mechanical engineering], no. 1, 131–137. [in Russian].
4. England, A. N. (1965). A crack between dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*, no. 32, 400–402. [in English].
5. Rice, J. R., Sih, G. C. (1965). Plane problem of cracks in dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*, no. 32, 418–423. [in English].
6. Parihar, K. S., Garg, A. C. (1975). An infinite row of collinear cracks at the interface of two bonded dissimilar elastic half planes. *Eng. Fract. Mech.*, no. 7, 4, 751–759. [in English].
7. Noda, N., Oda, K. (1997). Interaction effect of stress intensity factors for any number of collinear interface cracks. *International Journal of Fracture*, no. 84, 117–128. [in English].
8. Loboda, V. V., Kharun, I. V. (2002). Mizhfazni trishchyny z zonamy kontaktu v poli zoseredzhenykh syl ta momentiv. [Interface cracks with contact zones in the field of concentrated forces and moments]. *Mat. metody ta fizyko-mekhanichni polya* [Mat. methods and physical-mechanical fields], no. 45, 2, 103–113. [in Ukrainian].
9. Muskhelishvili, N. I. (1977). *Nekotorye osnovnye zadachy matematicheskoy teoryi uprugosti*. [Some basic problems of mathematical theory of elasticity]. Moskva : Nauka. [in Russian].

Костенко Микита Вікторович

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, аспірант
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, Україна 49050
neutralunit1187@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1644-7857

Шевельова Алла Євгенівна

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, д.ф.-м.н., професор
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, Україна 49050
sheveleva@dnua.dp.ua
ORCID: 0000-0001-6688-0942

Лобода Володимир Васильович

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, д.ф.-м.н., професор
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, Україна 49050
loboda@dnua.dp.ua
ORCID: 0000-0002-0432-629X

Для посилань:

Костенко М. В. Про взаємодію двох тріщин на межі поділу матеріалів / М. В. Костенко, А. Є. Шевелева, В. В. Лобода // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 2. – С. 32–41.

For references:

Kostenko, M., Sheveleva, A., Loboda, V. (2020). On the interaction of two cracks along the material interface. *Mechanics and Mathematical Methods*, 2 (2), 32–41.

УДК 539.3

ПОБУДОВА ЗОН ДИНАМІЧНОЇ НЕСТІЙКОСТІ ДЛЯ ВИСОТНИХ БУДІВЕЛЬ У РАЗІ СЕЙСМІЧНИХ ДІЙ

Фомін В. М.¹, Фоміна І. П.¹

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: Сейсмічні дії створюють можливість виникнення параметричних резонансів, тобто можливість появи інтенсивних поперечних коливань елементів конструкторів (зокрема, висотних) від дії періодичних поздовжніх сил. В якості розрахункової моделі висотної споруди використовується модель, прийнята при розрахунку висотних споруд на сейсмічні впливи, - невагомий жорстко затиснений в основі вертикальний стержень (колона) з системою зосереджених мас (вантажів), розташованих на ньому (рис. 1).

За допомогою вирішення диференціального рівняння зігнутої осі проводиться побудова функції впливу стержня, із застосуванням якої визначаються коефіцієнти впливу для точок стержня, в яких знаходяться зосереджені маси. Ці коефіцієнти є елементами матриці податливості V . Далі визначаються елементи матриці жесткостей H шляхом звернення матриці V . Із застосуванням діагональної матриці мас вантажів M і матриці H відбувається побудова системи диференціальних рівнянь коливань механічної системи, що складається з зосереджених мас, визначаються частоти і форми цих коливань. З вертикальної складової сейсмічного впливу проводиться виділення найбільш суттєвої її частини у вигляді гармонійних коливань з переважною частотою впливу.

Колівання колони розглядаються в рухомій системі координат, початок якої знаходиться в підставі колони. До сил, що діють на точки механічної системи, додаються сили інерції мас, пов'язані з переносним рухом системи координат. Сили ваги вантажів і сили інерції створюють в колоні поздовжні зусилля, які періодично залежать від часу. Далі записується інтегро-диференціальне рівняння динамічної стійкості стержня, запропоноване В. В. Болотініним в [8]. Рішення цього рівняння розшукується у вигляді лінійної комбінації форм власних коливань з множниками, залежними від часу. Підстановка цього рішення в інтегро-диференціальне рівняння динамічної стійкості дозволяє звести його до системи диференціальних рівнянь щодо зазначених множників з коефіцієнтами, періодично залежними від часу. При деяких значеннях параметрів вертикальної складової сейсмічного впливу, а саме частоти і амплітуди, рішення цих рівнянь є необмежено зростаючою функцією, тобто при цих значеннях зазначених параметрів виникає параметричний резонанс. Ці значення утворюють області в площині параметрів, іменовані областями динамічної нестійкості. Далі проводиться побудова цих областей. Розглянуто конкретний приклад.

Ключові слова: сейсмічні впливи, динамічна стійкість споруд, параметричний резонанс.

CONSTRUCTION OF DYNAMIC INSTABILITY ZONES FOR HIGH STRUCTURES UNDER SEISMIC IMPACT

V. Fomin¹, I. Fomina¹

¹Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: Seismic impacts create the possibility of parametric resonances, i.e. the possibility of the appearance of intense transverse vibrations of structure elements (in particular, of high-rise structures) from the action of periodic longitudinal forces. As a design model of a high-rise structure, a model is used which adopted in the calculation of high-rise structures for seismic effects, - a weightless vertical rod (column) rigidly restrained at the base with a system of concentrated masses (loads) located on it (Fig. 1).



By solving the differential equation of the curved axis influence function for a rod is constructed by means of which influence coefficients are determined for the rod points, in which the concentrated masses are situated. These coefficients are elements of the compliance matrix \mathbf{V} . Next, the elements of the stiffness matrix \mathbf{H} are determined by inverting the matrix \mathbf{V} . Using a diagonal matrix of the load masses \mathbf{M} and matrix \mathbf{H} a system of differential equations of free vibrations of a mechanical system, consisting of concentrated masses, is constructed, and the frequencies and forms of these vibrations are determined. From the vertical component of the seismic impact, its most significant part is picked out in the form of harmonic vibrations with the predominant frequency of the impact.

Column vibrations are considered in a moving coordinate system, the origin of which is at the base of the column. The forces acting on the points of the mechanical system (concentrated masses) are added by the forces of inertia of their masses associated with the translational motion of the coordinate system. The forces of the load weights and forces of inertia create longitudinal forces in the column, periodically depending on time. Further, the integro-differential equation of the dynamic stability of the rod, proposed by V. V. Bolotin in [8], is written. The solution to this equation is sought in the form of a linear combination of free vibration forms with time-dependent factors. Substitution of this solution into the integro-differential equation of dynamic stability allows it to be reduced to a system of differential equations with respect to the mentioned above factors with coefficients that periodically depend on time. For some values of the vertical component parameters of the seismic action, namely the frequency and amplitude, the solutions of these equations are infinitely increasing functions, i.e. at these values of the indicated parameters, a parametric resonance arises. These values form regions in the parameter plane called regions of dynamic instability. Next, these regions are being constructed. A concrete example is considered.

Keywords: seismic impacts, dynamic stability of structures, parametric resonance

1 ВСТУП

У нормативних розрахунках будівельних конструкцій на сейсмічні впливи можливість виникнення параметричних резонансів, тобто можливість появи інтенсивних поперечних коливань елементів конструкцій від дії періодичних поздовжніх сил не розглядається. При розрахунках висотних споруд, розміри яких в плані не перевищують 20 м, на сейсмічні впливи вертикальні складові землетрусів не враховуються. Для висотних споруд, у яких розміри в плані багаторазово менше висоти, джерелом виникнення періодичних поздовжніх сил є саме вертикальні складові сейсмічних впливів. У даній роботі показано, що у таких споруд, при сейсмічних впливах існує можливість появи параметричних резонансів.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Перша робота в області дослідження динамічної стійкості конструкцій була опублікована Н. М. Беляєвим в 1924 р [1]. У ній була поставлена і вирішена проблема динамічної стійкості стержня, шарнірно опертого по кінцях, тобто були досліджені умови появи і розгойдування поперечних коливань стержня при дії періодичної поздовжньої сили. Було показано, що значення частоти і амплітуди поздовжньої сили, при яких спостерігається необмежене зростання амплітуди поперечних коливань стержня, утворюють суцільні області в просторі цих параметрів, які іменуються областями нестійкості. У 1935 р Н. М. Крилов і М. М. Боголюбов [2] продовжили дослідження Н.М. Беляєва, дослідивши проблему динамічної стійкості стержня при довільному закріпленні його кінців. У книзі В. Н. Челомея [3], що вийшла в 1939 р. були розглянуті проблеми динамічної стійкості для стержнів змінного перерізу, для стержнів, що мають початковий вигин, а також для багатопрогових стержнів. За кордоном перші роботи по динамічній стійкості стержнів з'явилися на початку сорокових років [4]. Згодом В. В. Болотіним був опублікований ряд фундаментальних робіт [5-10], присвячених динамічній стійкості стержнів, балок, рам, пластин і оболонки.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

У цій статті в якості розрахункової моделі використовується модель, прийнята при розрахунку висотних споруд на сейсмічні впливи – невагомий жорстко затиснений в основі вертикальний стержень з системою зосереджених мас (вантажів), розташованих на ньому (рис. 1). Надалі цей стержень будемо називати колоною.

Використовуючи диференціальне рівняння зігнутої осі стержня, неважко побудувати функцію впливу $K(x, s)$ колони:

$$K(x, s) = \begin{cases} \frac{x^2}{2EJ} (s - \frac{x}{3}) & \text{при } x \leq s, \\ \frac{s^2}{2EJ} (x - \frac{s}{3}) & \text{при } x > s. \end{cases} \quad (1)$$

Використовуючи (1) визначаємо коефіцієнти впливу, які є елементами матриці податливості V :

$$V_{i,j} = K(x_i, x_j) = \begin{cases} \frac{x_i^2}{2EJ} (x_j - \frac{x_i}{3}) & (i \leq j), \\ \frac{x_j^2}{2EJ} (x_i - \frac{x_j}{3}) & (i > j). \end{cases} \quad (2)$$

(x_i и x_j – абсциси точок M_i і M_j ; $i, j = 1, 2, \dots, n$).

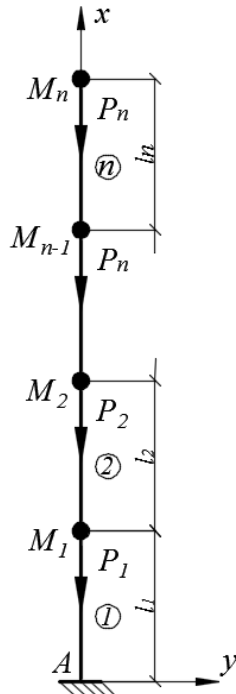


Рис. 1. Розрахункова модель конструкції

Система диференціальних рівнянь вільних коливань механічної системи, що складається з точок M_k ($k=1, 2, \dots, n$), має наступний вигляд:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{H}\mathbf{y} = 0, \quad (3)$$

тут \mathbf{y} – вектор-стовпець переміщень точок системи,

$\mathbf{H} = \mathbf{V}^{-1}$ – матриця жорсткості, \mathbf{M} – матриця мас:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}.$$

Помноживши (2) на \mathbf{M}^{-1} , записуємо рівняння вільних коливань таким чином:

$$\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{U}\mathbf{y} = 0, \quad (4)$$

Тут $\mathbf{U} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{H}$.

Рішення системи (3) будемо розшукувати у наступному вигляді:

$$\mathbf{y} = \mathbf{u} \cdot \cos \omega t, \quad (5)$$

\mathbf{u} – вектор-стовпець порядку n .

Вільні коливання, описувані рівністю (5), називаються власними, при цьому вектор \mathbf{u} визначає форму коливання, а ω є його частотою.

Після підстановки виразу (5) в векторну рівність (4) і елементарних перетворень отримуємо:

$$\mathbf{U}\mathbf{u} - \omega^2\mathbf{u} = 0.$$

Звідси випливає, що для того щоб у системи рівнянь (4) існувало рішення виду (5) необхідно, щоб ω^2 було власним числом матриці \mathbf{U} , а вектор \mathbf{u} – відповідним власним вектором цієї матриці. Для даної конструкції існує n частот (з урахуванням кратності) ω_j ($j = 1, 2, \dots, n$) і n власних векторів $\mathbf{u}^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) матриці \mathbf{U} , що визначають форми власних коливань конструкції.

Будемо вважати, що вертикальна складова сейсмічного впливу (тобто вертикальні коливання основи A колони) представляють собою гармонійні коливання з переважною частотою впливу θ [11]. Тоді прискорення $\mathbf{a}(t)$ основи теж буде змінюватися за гармонійним законом:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0 \cos(\theta t). \quad (6)$$

Якщо розглядати рух колони щодо рухомої системи координат, початок якої знаходиться в точці A , а осі x і y зберігають свої початкові напрямки, то необхідно до

сил, що діють на точки механічної системи, додати сили інерції $J_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) (рис. 2), пов'язані з переносним рухом системи координат:

$$J_k(t) = -m_k a(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Сили P_k і $J_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) створюють в колоні поздовжні зусилля $N(x, t)$. Запишемо інтегро-диференціальне рівняння динамічної стійкості колони [1]:

$$y(x, t) + \int_0^L m(s) K(x, s) \frac{\partial^2 y(s, t)}{\partial t^2} ds - \int_0^L N(s, t) \frac{\partial K(x, s)}{\partial s} \frac{\partial y(s, t)}{\partial s} ds = 0 \quad (L = \sum_{k=1}^n l_k).$$

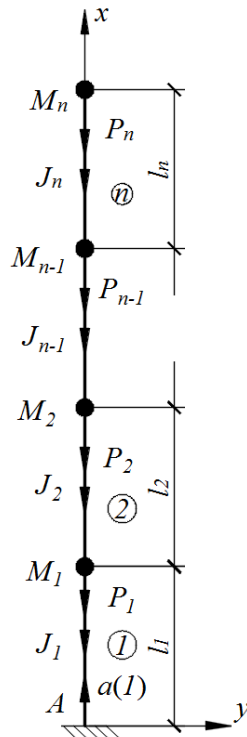


Рис. 2. Активні сили, які діють на конструкцію

У розглянутій задачі $m(x) = \sum_{k=1}^n \delta(x - x_k) m_k$ (x_k – абсциса

маси m_k , $x_k = \sum_{j=1}^k l_j$, $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака),

поздовжнє зусилля $N(x, t)$ визначається наступним чином:

$$N(x, t) = N_0(x) + N_1(x) \cos(\theta t),$$

причому $N_0(x)$ і $N_1(x)$ являють собою кусково-постійні функції. На ділянці колони з номером k (номера ділянок проставлені в гуртках) $N_0(x)$ і $N_1(x)$ приймають постійні значення $N_{0,k}$ і $N_{1,k}$:

$$N_{0,k} = \sum_{j=k}^n P_j, \quad N_{1,k} = \sum_{j=k}^n J_j = a_0 \sum_{j=k}^n m_j = \frac{a_0}{g} N_{0,k}, \quad (7)$$

g – прискорення вільного падіння. Таким чином, на ділянці з номером k $N(x, t)$ є функцією однієї змінної t :

$$N_k(t) = N_{0,k} + N_{1,k} \cos(\theta t) = \left(1 + \frac{a_0}{g} \cos \theta t\right) N_{0,k}. \quad (8)$$

Після підстановки виразів для $m(x)$, $N_0(x)$ і $N_1(x)$ рівняння динамічної стійкості колони приймає наступний вигляд:

$$y(x, t) + \sum_{k=1}^n m_k K(x, x_k) \ddot{y}(x_k, t) - \sum_{k=1}^n N_k(t) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\partial K(x, s)}{\partial s} \frac{\partial y(s, t)}{\partial s} ds = 0, \quad (9)$$

точка означає похідну за часом.

Будемо шукати рішення рівняння (9) у вигляді суми

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^n f_j(t) \phi_j(x), \quad (10)$$

де $f_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) – шукані функції часу, $\phi_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) – форми власних коливань, тобто $\phi_j(x_i) = u_i^{(j)}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) ($u^{(j)}$ – власні вектори матриці U). Підставляя сумму (10) в рівняння (9) і враховуючи співвідношення (8), отримуємо при $x = x_i$

$$\sum_{j=1}^n \Phi_{i,j} f_j(t) + \sum_{j=1}^n R_{i,j} \ddot{f}_j(t) - (1 + \beta \cos \theta t) \sum_{j=1}^n S_{i,j} f_j(t) = 0, \quad (11)$$

де

$$\beta = \frac{a_0}{g}, \quad \Phi_{i,j} = \phi_j(x_i), \quad R_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_k K(x_i, x_k) \phi_j(x_k), \quad S_{i,j} = \sum_{k=1}^n N_{0,k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\partial K(x_i, s)}{\partial s} \frac{\partial \phi_j(s, t)}{\partial s} ds.$$

Зауважимо, що (11) можна розглядати як систему рівнянь вважаючи, що i змінюється від 1 до n . Ця система може бути записана в матричному вигляді:

$$\Phi \mathbf{f} + \mathbf{R} \ddot{\mathbf{f}} - (1 + \beta \cos \theta t) \mathbf{S} \mathbf{f} = 0. \quad (12)$$

Зауважимо, що

$$\Phi_{i,j} = u_i^{(j)}, \quad R_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_k V_{i,k} u_k^{(j)}, \quad (13)$$

тобто j -й стовпець матриці Φ дорівнює вектору $\mathbf{u}^{(j)}$, а матриці \mathbf{R} – вектору $\mathbf{V} \mathbf{M} \mathbf{u}^{(j)} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{u}^{(j)} = \dots = (1/\omega_j^2) \mathbf{u}^{(j)}$, тому що $\mathbf{u}^{(j)}$ є власним вектором матриці \mathbf{U} з власним числом ω_j^2 .

Тому

$$\mathbf{R} = \Phi \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \omega_1^{-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_n^{-2} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Помноживши матричну рівність (12) на Φ^{-1} , отримуємо

$$\mathbf{C} \ddot{\mathbf{f}} + [\mathbf{E} - (1 + \beta \cos \theta t) \mathbf{A}] \mathbf{f} = 0. \quad (15)$$

Тут \mathbf{E} – одинична матриця порядку n , $\mathbf{A} = \Phi^{-1} \mathbf{S}$

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Матрична рівність (15) являє собою систему диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами щодо функцій $f_i(t)$ ($i=1,2,\dots,n$). Відомо [1], що при деяких значеннях параметрів β і θ рішення цих рівнянь є необмежено зростаючі функції, тобто при цих значеннях зазначених параметрів виникає параметричний резонанс. Ці значення утворюють області в площині параметрів β і θ , іменовані областями динамічної нестійкості. Проблема полягає в побудові меж цих областей. При прагненні β до нуля ці області звужуються до точок [8]:

$$\theta_{i,k}^* = \frac{2\Omega_i}{k} \quad (i=1,2,\dots,n; \quad k=1,2,\dots), \quad (16)$$

розташованих на осі Θ . У формулі (16) Ω_i – частоти колони з урахуванням поздовжніх сил, створюваних вагою вантажів, розташованих на ній. Вони є корінням багаточлена

$$Q(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n) = |\mathbf{E} - \mathbf{A} - \Omega^2 \mathbf{C}|, \quad (17)$$

де Ω – вектор $[\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n]$.

Головними називаються ті області динамічної нестійкості, яким у формулі (16) відповідає $k=1$. У першому наближенні кордону цих областей визначаються рівняннями [8]

$$\left| E - \left(1 \pm \frac{1}{4} \beta \right) A - \frac{1}{4} \theta^2 C \right| = 0, \quad (18)$$

причому знак плюс в дужках \pm відповідає нижнім межах областей, а знак мінус - верхнім.

Приклад. Досліджується динамічна стійкість висотної будівлі (вежі) при наступних значеннях параметрів розрахункової моделі (колони): $n=4$, $l_i=4\text{м}$, $m_i=3\text{Т}$ ($i=1,2,3,4$), $EJ=23400\text{кНм}^2$.

Циклічні частоти вільних коливань колони з урахуванням поздовжніх постійних стискають сил, викликаних силами тяжіння зосереджених мас, $\Omega_1=1,06\text{с}^{-1}$, $\Omega_2=11,347\text{с}^{-1}$, $\Omega_3=34,302\text{с}^{-1}$, $\Omega_4=62,809\text{с}^{-1}$. Найбільша вірогідність виникнення резонансів як звичайних, так і параметричних, при сейсмічних впливах пов'язана з частотами Ω_1 і Ω_2 . Тому на рис. 3 представлені головні області динамічної нестійкості, пов'язані саме з цими частотами.

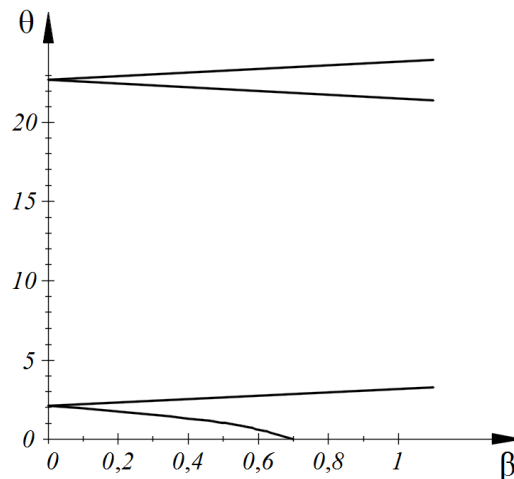


Рис. 3. Головні області динамічної нестійкості

При попаданні точки з координатами, рівними значенням параметрів β і θ для однієї з переважаючих частот землетрусу, в область нестійкості виникають інтенсивно наростаючі поперечні коливання споруди.

5 ВИСНОВКИ

При розрахунку висотних споруд на сейсмічні дії необхідно враховувати не тільки можливість виникнення звичайних резонансів, але й параметричних, тобто досліджувати динамічну стійкість споруд. Для побудови областей динамічної нестійкості висотних споруд необхідно обов'язково враховувати вертикальну компоненту землетрусів.

Література

1. Беляев Н. М. Устойчивость призматических стержней под действием переменных продольных сил. Инженерные сооружения и строительная механика. 1924. С. 149–167.

2. Крылов Н. Н., Боголюбов Н. Н. Исследование явления резонанса при поперечных колебаниях под воздействием периодических нормальных сил, приложенных к одному из концов стержня. Исследование колебаний конструкции. 1935. С. 25–42.
3. Челомей В. Н. Динамическая устойчивость элементов авиационных конструкций. Москва : Изд. Аэрофлота, 1939. 80 с.
4. Mettler E. Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Axiallast. Mitt.Forschungsabt Anst.GHH-Konzern, 1940. 8 p.
5. Болотин В. В. О параметрическом возбуждении поперечных колебаний. Поперечные колебания и критические скорости. Изд. АН СССР. 1953. № 2. С. 5–44.
6. Болотин В. В. Определение амплитуд поперечных колебаний, вызываемых периодическими продольными силами. Поперечные колебания и критические скорости. Изд. АН СССР. 1953. № 2. С. 45–64.
7. Болотин В. В. О взаимодействии вынужденных и параметрически возбуждаемых колебаний. Известия АН СССР. ОТН. 1954. № 4. С. 3–15.
8. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Москва : Гостехиздат, 1956. 500 с.
9. Болотин В. В. Вопросы общей теории упругой устойчивости. Прикладная математика и механика, 1956. Т. 20 № 5. С. 561–577.
10. Болотин В. В. К устойчивости параметрически возбуждаемых систем. Изв. АН СССР. МТТ. 1974. №5, С. 83–88.
11. Егупов К. В., Бондаренко А. С., Егупов В. К. Инструментальные записи для оценки сейсмической опасности Одесского региона. Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. 2013. №.49. С.143–149.

References

1. Beliaev, N. M. (1924). Ustoichyvost pryzmatycheskykh sterzhnei pod deistvyem peremennykh prodolnykh syl [Stability of prismatic rods under the action of variable longitudinal forces]. *Ynzhenernyye sooruzheniya y stroytelnaia mekhanika* [Engineering structures and structural mechanics], 149–167. [in Russian].
2. Krylov, N. N., Bogolubov, N. N. (1935). Yssledovanye yavleniya rezonansa pry poperechnykh kolebaniyakh pod vozdeistvyem peryodycheskykh normalnykh syl, prylozhennykh k odnomu yz kontsov sterzhnia. [Investigation of the phenomenon of resonance in transverse vibrations under the impact of periodic normal forces applied to one of the ends of the rod]. *Yssledovanye kolebaniy konstruksyy* [Investigation of design vibrations], 25–42. [in Russian].
3. Chelomei, V. N. (1939). *Dynamycheskaia ustoichyvost elementov avyatsyonnykh konstruksiy* [Dynamic stability of elements of aircraft structures]. Moskva : Yzd. Aeroflota. [in Russian].
4. Mettler, E. (1940). *Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Axiallast*. Mitt.Forsch., Anst.Gffii-Konzern. [in Deutsch].
5. Bolotyn, V. V. (1953). O parametrycheskom vobuzhdenyy poperechnykh kolebaniy [On the parametric excitation of transverse vibrations]. *Poperechnye kolebaniya y krytycheskiye skorosty Yzd AN SSSR* [Transverse vibrations and critical velocities. Ed. USSR Academy of Sciences], no. 2, 5–44. [in Russian].
6. Bolotyn, V. V. (1953). Opredelenye amplytud poperechnykh kolebaniy, vyzyvayemykh peryodycheskymu prodolnyму sylamy [Determination of the amplitudes of transverse oscillations caused by periodic longitudinal forces]. *Poperechnye kolebaniya y krytycheskiye skorosty. Yzd. AN SSSR* [Transverse vibrations and critical velocities. Ed. USSR Academy of Sciences], no. 2, 45–64. [in Russian].
7. Bolotyn, V. V. (1954). O vzaymodeistvyu vynuzhdennykh y parametrychesky vobuzhdaemykh kolebaniy. [On the interaction of forced and parametrically excited vibrations]. *Yzvestiya AN SSSR. OTN* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences. OTN], no. 4, 3–15. [in Russian].
8. Bolotyn, V. V. (1956). *Dynamycheskaia ustoichyvost upruhykh system* [Dynamic stability of elastic systems]. Moscow : Hostekhyzdat. [in Russian].
9. Bolotyn, V. V. (1956). *Voprosy obshchei teoryy upruhoi ustoichyvosty*. [Questions of the general theory of elastic stability]. Moskva : App. mathematics and mechanics., no. 20, 5, 561–577. [in Russian].



10. Bolotyn, V. V. (1974). K ustoychivosty parametrychesky vzbuzhdaemykh system. [Stability of parametrically excited systems]. *Yzv. AN SSSR. MTT* [Izv. Academy of Sciences of the USSR. MTT], no. 5, 83–88. [in Russian].
11. Ehupov, K. V., Bondarenko, A. S., Ehupov, V. K. Ynstrumentalnye zapysy dlia otsenky seismycheskoi opasnosti Odesskoho rehyona. [Instrumental records for the assessment of seismic hazard in the Odessa region]. *Visnyk Odeskoi derzhavnoi akademii budivnytstva ta arkhitektury* [Bulletin of the Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture], no. 49, 143–149. [in Russian].

Фомін Володимир Михайлович

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.т.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
vmfomin39@gmail.com
ORCID: 0000-0003-4814-6415

Фоміна Інна Петрівна

Одеська державна академія будівництва та архітектури, старший викладач
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
fomina@ogasa.org.ua
ORCID: 0000-0001-7366-1537

Для посилань:

Фомін В. М. Побудова зон динамічної нестійкості для висотних будівель у разі сейсмічних дій / В. М. Фомін, І. П. Фоміна // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 2. – С. 42–50.

For references:

Fomin, V., Fomina, I. (2020). Construction of dynamic instability zones for high structures under seismic impact. *Mechanics and Mathematical Methods*, 2 (2), 42 – 50

УДК 539.3

ДЕФОРМАЦІЇ ПОВЕРХОНЬ ЗІ СТАЦІОНАРНИМ ТЕНЗОРОМ РІЧЧІ

Подоусова Т. Ю.¹, Вашпанова Н. В.¹

¹ *Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація: У даній роботі розглядаються нескінченно малі (н.м.) деформації першого порядку однозв'язних регулярних поверхонь у тривимірному евклідовому просторі. Пошук векторного поля цієї деформації в загальному випадку зводиться до дослідження та розв'язування системи чотирьох рівнянь (серед них є і диференціальні рівняння) відносно семи невідомих функцій.

Для уникнення невизначеності на задану поверхню накладено наступне обмеження: на поверхні всюди зберігається (в головному) тензор Річчі. Створена математична модель поставленої задачі: система семи рівнянь відносно семи невідомих функцій. Встановлено її механічний зміст. Показано, що кожний розв'язок отриманої системи рівнянь визначатиме поле зсуву зсуву н.м. деформації першого порядку поверхні ненульової гауссової кривини, яке буде однозначною функцією (з точністю до постійного вектора).

Доведено, що кожна регулярна поверхня ненульової гауссової та середньої кривин допускає н.м. деформацію першого порядку зі стаціонарним тензором Річчі. Тензорні поля при цьому знайдені в явному вигляді і залежать від двох функцій, які є розв'язками лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними. Виділено клас жорстких поверхонь по відношенню до вказаних н.м. деформацій.

Припустивши, що одна із функцій заздалегідь задана, отримане диференціальне рівняння в загальному випадку буде неоднорідним диференціальним рівнянням Вейнгартена, причому рівнянням еліптичного типу. Знайдено геометричний та механічний зміст функції, яка є розв'язком цього рівняння. Отримано наступний результат: будь-яка поверхня додатної гауссової та ненульової середньої кривин допускає н.м. деформації першого порядку зі стаціонарним тензором Річчі в області достатньо малої міри. Тензорні поля при цьому матимуть представлення через заздалегідь задану та деяку довільну регулярні функції.

Розглянувши задачу Діріхле, доведено, що однозв'язна регулярна поверхня додатної гауссової та ненульової середньої кривин при певній граничній умові допускає єдину н.м. деформацію першого порядку зі стаціонарним тензором Річчі. Тензори деформації при цьому визначені однозначно.

Ключові слова: деформація, поверхня, тензор Річчі, кривина, диференціальне рівняння.

DEFORMATIONS OF SURFACES FROM STATIONARY RICCI TENSOR

T. Podousova¹, N. Vashpanova¹

¹ *Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract: In this paper, we consider infinitesimal (n. m.) first-order deformations of single-connected regular surfaces in three-dimensional Euclidean space. The search for the vector field of this deformation is generally reduced to the study and solution of a system of four equations (among them there are differential equations) with respect to seven unknown functions.

To avoid uncertainty, the following restriction is imposed on a given surface: the Ricci tensor is stored (mainly) on the surface. A mathematical model of the problem is created: a system of seven equations with respect to seven unknown functions. Its mechanical content is established. It is shown that each solution of the obtained system of equations will determine the field of displacement n. m. deformation of the first order of the surface of nonzero Gaussian curvature, which will be an



unambiguous function (up to a constant vector).

It is proved that each regular surface of nonzero Gaussian and mean curvatures allows first-order n . m . deformation with a stationary Ricci tensor. The tensor fields are found explicitly and depend on two functions, which are the solution of a linear inhomogeneous second-order differential equation with partial derivatives. The class of rigid surfaces in relation to the specified n . m . deformations.

Assuming that one of the functions is predetermined, the obtained differential equation in the General case will be a inhomogeneous differential Weingarten equation, and an equation of elliptical type. The geometric and mechanical meaning of the function that is the solution of this equation is found. The following result was obtained: any surface of positive Gaussian and nonzero mean curvatures admits n . m of first-order deformation with a stationary Ricci tensor in the region of a rather small degree. Tensor fields will be represented by a predefined function and some arbitrary regular functions.

Considering the Dirichlet problem, it is proved that the simply connected regular surface of a positive Gaussian and nonzero mean curvatures under a certain boundary condition admits a single first-order deformation with a stationary Ricci tensor. The strain tensors are uniquely defined.

Keywords: deformation, surface, Ricci tensor, curvature, differential equation.

1 ВСТУП

У повсякденному житті ми нерідко маємо справу з поверхнями. Під поверхнею, зазвичай, розуміють границю або частину границі тіла у просторі. Життєвий досвід показує, що найбільше застосування мають гладкі поверхні. Багато металевих, кам'яних, дерев'яних виробів шліфують та полірують для надання їхнім поверхням різного ступеню гладкості. Якщо із зміною часу форма і положення поверхні у просторі змінюються, то будемо говорити про деформацію поверхні. Як правило, на практиці розглядають, так звані, неперервні деформації, які із зміною часу не допускають розривів та відіграють чималу роль при вирішенні певних проблем. Вивчення н.м. деформацій поверхонь є важливим етапом при дослідженні їхніх неперервних деформацій. Адже саме міцність або гнучкість будь-якої конструкції в авіабудуванні, машинобудуванні тощо, визначається наявністю або відсутністю н.м. деформацій, які описують ту чи іншу конструкцію.

Поняття н.м. деформацій поверхонь з'явилося в роботах Г. Дарбу, Н. Вейля, Е. Рембса. Там були введені різні типи н.м. деформацій та складені відповідні для них рівняння. Серед них достатньо повно вивчені н.м. згинання, які займають важливе місце в диференціальній геометрії. Їм присвячена велика кількість досліджень, з результатами яких можна ознайомитись, наприклад, в роботах С. Е. Кон-Фоссена, О. Д. Александрова, О. В. Погорелова, М. В. Єфімова, І. Н. Векуа, В. Т. Фоменка. Такий інтерес до н.м. згинань пояснюється як самостійним їхнім розвитком з чисто геометричної точки зору, так і тими важливими застосуваннями, які вони отримали в теорії пружних оболонок, оскільки встановлено, що кожне н.м. згинання серединної поверхні оболонки описує безмоментний напружений стан цієї оболонки без поверхневого навантаження, і, навпаки.

У теперішній час активно вивчаються більш загальні н.м. деформації: зі збереженням елемента площі [1]-[3], геодезичних ліній [5], [8], LGT-ліній [6], [12], спеціальних векторних полів [7] та інших геометричних об'єктів [4], [9]-[11].

2 МЕТА РОБОТИ

Дослідити питання про існування н.м. деформацій поверхонь зі стаціонарним тензором Річчі та з'ясувати їхню механічну інтерпретацію. Для розв'язування сформульованих задач застосовуються методи тензорного аналізу, теорії диференціальних рівнянь та граничних задач для них.

3 СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПОСТАВЛЕНОЇ ЗАДАЧІ ТА ЇЇ МЕХАНІЧНИЙ СЕНС

Нехай S – регулярна поверхня класу C^3 , гомеоморфна області G площини та задана в тривимірному евклідовому просторі векторно-параметричним рівнянням:

$$\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2), \quad (1)$$

де \bar{r} – радіус – вектор точки поверхні $(x^1, x^2) \in G$.

Регулярна сімейність поверхонь S_t , яка залежить від малого параметра t

$$\tilde{r}(x^1, x^2, t) = \bar{r}(x^1, x^2) + t \bar{y}(x^1, x^2),$$

називається н.м. *деформацією першого порядку* (при $t = 0$ отримуємо S), а $\bar{y}(x^1, x^2)$ – *вектором (полем) зміщення*.



Кожна геометрична величина $P(x^1, x^2)$, яка характеризує ту чи іншу властивість S , для деформованої поверхні набуває взагалі нового залежного від t значення $P(x^1, x^2, t)$.

Нехай приріст $\Delta P = P(x^1, x^2, t) - P(x^1, x^2)$ в регулярному випадку можна розвинути за степенями t :

$$\Delta P = t \left. \frac{\partial P(x^1, x^2, t)}{\partial t} \right|_{t=0} + \frac{t^2}{2} \left. \frac{\partial^2 P(x^1, x^2, t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} + \dots$$

Коефіцієнти цього розкладу $\delta P, \delta^2 P, \dots$, називають відповідно першою, другою і так далі варіаціями величини $P(x^1, x^2)$:

$$\delta^k P = \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k P(x^1, x^2, t)}{\partial t^k} \right|_{t=0}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Оскільки в подальшому будемо розглядати виключно н.м. деформації першого порядку, то будемо рахувати, що геометрична величина *стаціонарна* або *зберігається* при н.м. деформації першого порядку, якщо її приріст є величина не менш, ніж другого порядку відносно t (чим нехтуємо).

Отже, стаціонарна величина характеризується тим, що її перша варіація тотожно дорівнює нулю.

Н.м. деформацію поверхонь без жодних обмежень називають загальною (з.н.м.) деформацією.

Розглянемо з.н.м. деформацію першого порядку з вектором зсуву $\bar{y}(x^1, x^2) \in C^3$, частинні похідні якого мають вид:

$$\bar{y}_i = (c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} - \mu \delta_i^\beta) \bar{r}_\beta + c_{i\alpha} T^\alpha \bar{n}, \quad (2)$$

де $c_{i\alpha}$ – дискримінантний тензор ($c_{11} = c_{22} = 0, c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g}, g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2$), g_{ij} – метричний тензор, $\bar{r}_\alpha = \partial \bar{r} / \partial x^\alpha$, \bar{n} (орт нормалі S) – базисні вектори,

$$\delta_i^\beta = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = \beta \\ 0, & \text{якщо } i \neq \beta. \end{cases}$$

Функції $T^{\alpha\beta}, T^\alpha, \mu(x^1, x^2)$ є розв'язком наступної системи рівнянь [2]:

$$\begin{cases} T_{,\alpha}^{\alpha\beta} = b_\alpha^\beta T^\alpha + \mu_{,\alpha} c^{\beta\alpha} \\ b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + T_{,\alpha}^\alpha = 0 \\ c_{\beta\alpha} T^{\alpha\beta} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Тут $b_\alpha^\beta = g^{\beta i} b_{i\alpha}$, $b_{i\alpha}$ – коефіцієнти другої квадратичної форми S , g^{ij} – елементи матриці, оберненої до матриці $\|g_{ij}\|$. Комою позначено коваріантне диференціювання на базі g_{ij} . Індeksi всюди набувають значень 1,2.

Систему рівнянь (3) називають *основними рівняннями* з.н.м. деформації першого порядку S . Вона містить чотири рівняння відносно семи невідомих функцій $T^{\alpha\beta}, T^\alpha, \mu$.

Будемо вимагати, щоб при цій деформації тензор Річчі був стаціонарним, тобто, щоб перша варіація тензора Річчі дорівнювала нулю: $\delta R_{ij} = 0$.

Справедлива наступна

теорема 1. Необхідною і достатньою умовою того, щоб при н.м. деформації першого порядку поверхонь ненульової гауссової кривини ($K \neq 0$) зберігався тензор Річчі є справедливості рівностей

$$(c_{i\alpha}g_{j\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta})T^{\alpha\beta} + g_{ij}c_{\gamma\alpha}d^{\gamma\beta}T^{\alpha}_{,\beta} = 0 \quad (4)$$

де $d^{\alpha\beta} = (1/K)c^{ai}c^{\beta j}b_{\alpha\beta}$ – елементи матриці, оберненої до матриці $\|b_{ij}\|$.

Доведення. Необхідність. Оскільки $R_{ij} = -Kg_{ij}$, то шляхом варіювання цих рівностей, дістанемо варіацію тензора Річчі

$$\delta R_{ij} = -g_{ij}\delta K - 2K\varepsilon_{ij}. \quad (5)$$

Скориставшись виразами варіацій δg_{ij} , δK через тензорні поля $T^{\alpha\beta}$, T^{α} та функцію μ із [2]:

$$2\varepsilon_{ij} = \delta g_{ij} = (c_{i\alpha}g_{j\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta})T^{\alpha\beta} - 2\mu g_{ij},$$

$$\delta K = Kc_{i\alpha}d^{i\beta}T^{\alpha}_{,\beta} + 2K\mu.$$

Попередні рівності (5) матимуть наступне представлення:

$$\delta R_{ij} = -K(c_{i\alpha}g_{j\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta})T^{\alpha\beta} - Kg_{ij}c_{\gamma\alpha}d^{\gamma\beta}T^{\alpha}_{,\beta}. \quad (6)$$

Враховуючи стаціонарність тензора Річчі із (6) дістанемо рівності (4).

Достатність. Очевидно, із виконання рівностей (4) випливає, що варіація тензора Річчі із (6) буде дорівнювати нулю.

Наслідок 1. При н.м. деформації першого порядку ненульової гауссової кривини зі стаціонарним тензором Річчі справджується рівність

$$c_{\gamma\alpha}d^{\gamma\beta}T^{\alpha}_{,\beta} = 0. \quad (7)$$

Доведення. Згорнемо (4) з g^{ij} . Оскільки $T^{\alpha\beta}$ – симетричний тензор, а $g_{ij}g^{ij} = 2$, то матимемо (7).

Наслідок 2. При н.м. деформації першого порядку ненульової гауссової кривини зі стаціонарним тензором Річчі повна кривина поверхні задовольняє наступну умову

$$\delta K = 2K\mu. \quad (8)$$

Доведення. Прирівняємо (5) до нуля та помножимо на g^{ij} . Врахувавши, що $g^{ij}\varepsilon_{ij} = -2\mu$, отримаємо (8).

Примітка. Слід зазначити, що у випадку нульової гауссової кривини ($K = 0$) н.м. деформації, при яких зберігається тензор Річчі можуть допускати тільки розгорнуті поверхні, які після деформації в головному залишаються розгорнутими.

Отже, математичною моделлю поставленої задачі буде система рівнянь (3), (4), яка містить сім рівнянь відносно семи невідомих: симетричного тензора $T^{\alpha\beta}$, контраваріантного вектора T^{α} та функції $\mu(x^1, x^2) \in C^2$. Через будь-який набір її розв'язку вектор зміщення $\bar{y}(x^1, x^2)$ згідно (2) матиме вид:

$$\bar{y}(M) = \int_{M_0M} c_{i\alpha} \left((T^{\alpha\beta} + \mu c^{\alpha\beta}) \bar{r}_{\beta} + T^{\alpha} \bar{n} \right) dx^i + \bar{y}_0, \quad (9)$$

де інтеграл обчислюється вздовж будь-якої спрямної кривої, яка належить S і з'єднує довільну фіксовану точку M_0 із змінною точкою M , \bar{y}_0 – постійний вектор. Оскільки



S – однозв’язна поверхня, то криволінійний інтеграл (9) не залежить від шляху інтегрування [16, розд.4]. Отже, векторне поле $\bar{y}(x^1, x^2)$ є однозначною функцією (з точністю до сталого вектора).

Якщо $\bar{y} = const$, то поверхню S будемо називати жорсткою по відношенню до даної н.м. деформації.

Порівнюючи основну систему рівнянь рівноваги навантаженої оболонки у безмоментному напруженому стані [13, с.451]:

$$T^{\alpha\beta} + X^\beta = 0, b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + Z = 0, c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0$$

із системою рівнянь (3), (4), очевидно, за умов

$$T^{\alpha i} = T^{\alpha i}, X^i = -b_\alpha^i T^\alpha + \mu_\alpha c^{\alpha i}, Z = T_{,\alpha}^\alpha \quad (10)$$

вони збігаються.

Це свідчить про те, що будь-яку н.м. деформацію S ($K \neq 0$) можна інтерпретувати як деякий безмоментний напружений стан рівноваги навантаженої оболонки з тензором зусиль $T^{\alpha\beta}$ та поверхневим навантаженням

$$X = (\mu_\alpha c^{\alpha i} - b_\alpha^i T^\alpha) \bar{r}_i + Z \bar{n},$$

де Z – його нормальна складова, T^α – перерізуюча сила.

4 ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ (3), (4)

Задача про існування н.м. деформацій поверхонь ненульової гауссової кривини зі стаціонарним тензором Річчі звалась до пошуку розв’язків системи рівнянь (3), (4).

Має місце

теорема 2. Будь-яка поверхня $S \in C^4$ ненульових повної та середньої ($H \neq 0$) кривин допускає н.м. деформацію зі стаціонарним тензором Річчі. Тензорні поля при цьому матимуть наступні представлення:

$$T^{\alpha\beta} = \varphi g^{\alpha\beta}; \quad (11)$$

$$T^k = \varphi_\alpha d^{\alpha k} + \mu_\alpha c^{\alpha\beta} d_\beta^k, \quad (12)$$

де функції $\mu(x^1, x^2)$ та $\varphi(x^1, x^2)$ класу C^3 задовольняють рівняння

$$(d^{\alpha\beta} \varphi_\alpha)_{,\beta} + 2H\varphi = \mu_{\alpha,k} c^{\alpha\beta} d_\beta^k + \mu_\alpha c^{\alpha\beta} (d_\beta^k)_{,\alpha}. \quad (13)$$

Поверхня S буде жорсткою тільки у випадку, коли функції $\mu(x^1, x^2)$ та $\varphi(x^1, x^2)$ дорівнюють нулю.

Доведення. Нехай поверхня S ($K \neq 0, H \neq 0$) допускає н.м. деформацію, при якій зберігається тензор Річчі, з полем зміщення $\bar{y}(x^1, x^2)$, частинні похідні якого мають вид (2). Віднесемо поверхню S до ліній кривини ($b_{12} = g_{12} = 0$). Тоді система рівнянь (3), (4) з урахуванням (7), запишеться так:

$$\begin{cases} g_{11} T^{11} - g_{22} T^{22} = 0 \\ b_{11} T^{11} + b_{22} T_{,2}^2 = -T_{,\alpha}^\alpha \\ T^{12} = T^{21} = 0. \end{cases}$$

За правилом Крамера знайдемо її розв'язок, який у тензорному виді матиме представлення:

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{T^{\alpha}_{,\alpha}}{2H} g^{\alpha\beta}.$$

Введемо до розгляду функцію

$$\varphi = -\frac{T^{\alpha}_{,\alpha}}{2H}. \quad (14)$$

Тоді тензор деформації $T^{\alpha\beta}$ набуде виду (11). Очевидно, що $T^{\alpha\beta}$ повинен задовольняти перше рівняння системи (3). Із (11) знайдемо коваріантну похідну $T^{\alpha\beta}_{,\alpha}$ [14, с.130] та підставимо її в (3):

$$g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} = b^{\beta}_{\alpha} T^{\alpha} + \mu_{\alpha} c^{\beta\alpha}.$$

Помножимо ці рівності на d^k_{β} . Внаслідок того, що $b^{\beta}_{\alpha} d^k_{\beta} = \delta^k_{\alpha}$, $g^{\alpha\beta} d^k_{\beta} = d^{ak}$ із останніх рівностей отримаємо вираз для T^{α} виду (12).

Знайдемо із (12) $T^{\alpha}_{,\alpha}$ і підставимо в (14). Отримаємо одне диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними виду (13) відносно невідомих функцій $\mu(x^1, x^2)$ та $\varphi(x^1, x^2)$.

Нехай функції $\mu = 0$ і $\varphi = 0$. Тоді згідно (11), (12) із (2) випливає, що поле зміщення $\bar{y} = const$. Це означає, що в цьому випадку поверхня буде жорсткою по відношенню до вказаних н.м. деформацій.

Теорема доведена.

Зокрема, зазначимо, що у випадку $\mu = const$ із (13) отримаємо рівняння Вейнгартена, яке називається характеристичним рівнянням поля обертання при н.м. згинаннях поверхні, а його розв'язки - характеристичними функціями [13, с.334].

Отже, пошук розв'язків системи рівнянь (3), (4) зводиться до дослідження та розв'язування одного диференціального рівняння виду (13).

5 АНАЛІЗ НЕОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ ВЕЙНГАРТЕНА ТА ГЕОМЕТРИЧНИЙ І МЕХАНІЧНИЙ ЗМІСТ ЙОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Нехай $S \in C^{4,\alpha}$ – поверхня додатної гаусової та ненульової середньої кривин, гомеоморфна області G площини $x^1 O x^2$, яка обмежена кривою $\partial G \in C^{1,\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$) та задана рівнянням (1). (Позначення класів функцій запозичені в [13]).

Припустимо, що $\mu(x^1, x^2) \in C^{3,\alpha}$ є заздалегідь заданою функцією, причому $\mu \neq const$. Тоді (13) в загальному виді є неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними відносно функції $\varphi(x^1, x^2)$:

$$d^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta} + l^k \varphi_{,k} + 2H\varphi = F(\mu), \quad (15)$$

де

$$F(\mu) = \mu_{\alpha,k} c^{\beta\alpha} d^k_{\beta} + \mu_{\alpha} c^{\beta\alpha} (d^k_{\beta})_{,k}, \quad l^k = d^{k\alpha}_{,\alpha} - \Gamma^k_{s\alpha} d^{s\alpha},$$

$\Gamma^k_{s\alpha}$ – символи Кристоффеля другого роду, $\varphi_{\alpha\beta} = \partial^2 \varphi / \partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}$.

Тоді $l^k, d^{\alpha\beta}, H \in C^{2,\alpha}(\bar{G})$ і вільний член $F(\mu) \in C^{1,\alpha}(\bar{G})$ є відомими функціями

точки поверхні S . Неважко впевнитись в тому, що дискримінант рівняння (15)

$$\Delta = \frac{1}{gK}.$$

Отже, у випадку $K > 0$ в області $\bar{G} = G + \partial G$ рівняння (15) задовольняє умові рівномірної еліптичності ($\Delta > \Delta_0 > 0, \Delta_0 = const$). Тоді на S існує ізометрична параметризація [13, с.93], відносно якої (15) набуде канонічного виду в G :

$$\varphi_{11} + \varphi_{22} + m\varphi_1 + l\varphi_2 + p\varphi = f(\mu). \quad (16)$$

Тут

$$f(\mu) = \frac{Kg}{b_{22}} F(\mu), \quad m = \frac{Kg}{b_{22}} (d_{,\alpha}^{1\alpha} - \Gamma_{s\alpha}^1 d^{s\alpha}), \quad l = \frac{Kg}{b_{22}} (d_{,\alpha}^{2\alpha} - \Gamma_{s\alpha}^2 d^{s\alpha}), \quad p = 2Hb_{22}.$$

Справедлива наступна

теорема 3. Будь-яка поверхня $S \in C^{4,\alpha}$ додатньої гауссової та ненульової середньої кривин допускає н.м. деформації зі стаціонарним тензором Річчі в області достатньо малої міри. Тензорні поля при цьому виражаються через довільну функцію $\omega(x^1, x^2) \in C^3(\bar{G})$ та заздалегідь задану функцію $\mu(x^1, x^2) \in C^{3,\alpha} (\mu \neq const)$.

Доведення. оскільки $S \in C^{4,\alpha}$, то коефіцієнти рівняння (16) m, l, p та права частина $f(\mu)$ належать класу $C^{1,\alpha}(\bar{G})$. Це означає, що рівняння (16) в області достатньо малої міри, що входить в \bar{G} , має розв'язок [19, с.77], який залежатиме від довільної функції $\omega(x^1, x^2) \in C^{3,\alpha}$.

Теорема доведена.

Відомо [2], що при з.н.м. деформації першого порядку варіація орта нормалі однозв'язної регулярної поверхні s має вид:

$$\delta \bar{n} = c_{\alpha\beta} T^\alpha \bar{r}^\beta.$$

Звідси знайдемо $T_{,\alpha}^\alpha$ і підставимо в рівність (14). Для функції $\varphi(x^1, x^2)$ отримаємо вираз

$$\varphi = \frac{c^{\beta\alpha} \bar{r}_\alpha (\delta \bar{n})_{,\beta}}{2H}, \quad (17)$$

який і визначатиме її геометричний сенс.

З іншого боку, інваріант φ можна інтерпретувати як нормальну складову Z поверхневого навантаження. Дійсно, згідно (1), із (14) матимемо наступне представлення функції

$$\varphi = -\frac{Z}{2H},$$

що і розкриває її механічний зміст.

6 ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ОДНОЗВ'ЯЗНОЇ ПОВЕРХНІ

Будемо шукати регулярний в G та неперервний в \bar{G} розв'язок $\varphi(x^1, x^2) \in C^{3,\alpha}(\bar{G})$ рівняння (15), який задовольняє наступній граничній умові

$$\varphi(x^1, x^2) = \eta(x^1, x^2) \text{ на } \partial G, \quad (18)$$

де $\eta(x^1, x^2)$ – задана функція класу $C^{1,\alpha}$ точки граничної кривої ∂G .

Відомо [15, с.157], що неоднорідна задача (15), (18) завжди має розв’язок, причому єдиний в \bar{G} , якщо відповідна однорідна задача

$$\begin{cases} (d^{\alpha\beta} \varphi_\alpha)_{,\beta} + 2H\varphi = 0 & (\text{в } G) \\ \varphi(x^1, x^2) = 0 & (\text{на } \partial G) \end{cases} \quad (19)$$

має тільки нульовий розв’язок.

Однією із достатніх ознак цього є існування регулярного в G розв’язку рівняння неперервного та відмінного від нуля всюди в \bar{G} .

Покажемо, що для довільної поверхні такої розв’язок завжди існує в достатньо малій області (області Рімана), де функція Рімана відмінна від нуля.

Нехай функція

$$\varphi = \bar{n} \cdot \bar{c}, \quad (20)$$

де $c = const(c \neq 0)$ – сталий вектор.

Очевидно, ненульовий вектор \bar{c} завжди можна вибрати так, щоб функція $\varphi(x^1, x^2) > 0 (\varphi < 0)$ всюди в деякій області $\bar{T} \subset G$. Розміри області \bar{T} залежать від сферичного відображення S . В області T вектори \bar{n} і \bar{c} утворюють всюди гострий (тупий) кут.

Скористаємось дериваційними рівняннями теорії поверхонь:

$$\bar{r}_{,\alpha}^\beta = b_\alpha^\beta \bar{n}, \quad \bar{n}_k = -b_k^\alpha \bar{r}_\alpha.$$

Тоді

$$(d^{\alpha\beta} \varphi_\beta)_{,\alpha} = (d^{\alpha\beta} \bar{n}_\beta \bar{c})_{,\alpha} = -(g^{\alpha s} \bar{r}_s \bar{c})_{,\alpha} = -g^{\alpha s} b_{\alpha s} \bar{n} \bar{c} = -2H \bar{n} \bar{c} = -2H \varphi.$$

Отже, із першого рівняння системи (19) випливає, що функція $\varphi(x^1, x^2)$ виду (20) є його ненульовим розв’язком.

Має місце наступна

теорема 4. Нехай F – однозв’язна поверхня класу $C^{4,\alpha}$ додатньої гауссової та ненульової середньої кривин. Тоді при граничній умові

$$c^{\alpha\beta} \bar{r}_\alpha (\delta \bar{n})_\beta = 2H \eta \quad (\text{на } \Gamma) \quad (21)$$

вона допускає єдину н.м. деформацію першого порядку зі стаціонарним тензором Річчі в класі $C^{2,\alpha}(\bar{G})$ – поверхонь. При цьому тензорні поля будуть однозначно визначені.

Доведення. Позначимо через F частину поверхні S , гомеоморфну області T , причому $F \subset S$. Границю поверхні F позначимо через L , а її образ на площині – через Γ .

Враховуючи геометричний зміст функції φ (17), граничну умову запишемо через варіацію орта нормалі у виді (21).

Очевидно, оскільки в області T існує ненульовий розв’язок рівняння (19) виду (20), тоді гранична задача (15), (21) для заданих функцій $\mu (\mu \neq const)$ та η має єдиний розв’язок [17, с.119]. Згідно (11), (12) отримаємо

$$T^{\alpha\beta} \in C^{2,\alpha}(\bar{G}), \quad T^\alpha \in C^{1,\alpha}(\bar{G}).$$

Тоді частинні похідні вектора зміщення із (2) $\bar{y}_i \in C^{1,\alpha}(\bar{G})$.

Звідси випливає, що векторне поле $\bar{y} \in C^{2,\alpha}(\bar{G})$.

Теорема доведена.

7 ВИСНОВКИ

В даній роботі доведено, що:

- однозв'язна регулярна поверхня додатної гауссової та ненульової середньої кривин допускає н.м. деформації першого порядку зі стаціонарним тензором Річчі в області достатньо малої міри;
- однозв'язна регулярна поверхня додатної гауссової та ненульової середньої кривин при певних граничних умовах допускає єдину н.м. деформацію першого порядку зі стаціонарним тензором Річчі;
- знайдено зв'язок таких н.м. деформацій з теорією оболонок.

Отримані результати можуть бути використані як в подальших наукових дослідженнях, так і в безмоментній теорії тонких пружних оболонок при розрахунках їх рівноваги. Розроблені методи можуть бути застосовані при вивченні деформацій інших поверхонь.

Література

1. Bezkorovaina L. L., Vashpanova T. Y. A-deformations of a surface with stationary lengths of LGT-lines. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2010. № 62(7). P. 878-884.
2. Podousova T., Vashpanova N. On the existence deformations of ovaloids. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2020. № 13(1). P. 23-34.
<https://doi.org/10.15673/2072-9812.3/2014.40572>
3. Подоусова Т, Вашпанова Н. О продолжении А-деформаций поверхностей положительной кривизны с краем. *Proceed. Of Internat. Geomet. Cent.* 2014. № 7 (3). P. 38-48.
<https://doi.org/10.15673/2072-9812.3/2014.40572>
4. Vashpanova N., Podousova T., Fedchenko Yu. Canonical Deformations of Pseudo-Riemannian Spaces. *Application Of Mathematics In Technical And Natural Sciences*. 2019. № 2164 (1) 040005. <https://doi.org/10.1063/1.5130797>
5. Podousova T., Ugol'nikov A., Dumanska V. Infinitesimaly small deformatian which preserves geodesiclines. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*. 2020. № 2302 (1). 040007. <https://doi.org/10.1063/5.0033749>
6. Безкоровайна Л. Л., Вашпанова Т. Ю. LGT- сеть и ее деформации. *Соврем. пробл. матем.и мех.* 2011. Том 4. Математика. № 2. С. 157-163.
7. Hinterleitner I., Kiosak V. φ (ric)-vector fields on conformally flat spaces. *Proceedings of American Institute of Physics*. 2009. №1191 (1). P. 98–103. <https://doi.org/10.1063/1.3275604>
8. Kiosak V., Matveev V. There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor. *Journal of Geometry and Physics*. 2014. № 78. P. 1–11.
<https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.01.002>
9. Vashpanov Yu., Son Jung-Young, Heo Gwanghee, Podousova T., Yong Suk Kim. Determination of geometric parameters of cracks in concrete by image processing. *Advances in Civil Engineering*. 2019. 2398124. 1–14. <https://doi.org/10.1155/2019/2398124>
10. Потапенко І. В. Про відновлення варіації метричного тензора поверхні за заданою варіацією символів Крістоффеля другого порядку при інфінітезимальних деформаціях поверхонь в евклідовому просторі E3. *Укр. мат. журн.* 2011. Т. 63. №4. С. 523-530.
11. Вашпанова Н. В., Подоусова Т. Ю., Шевченко Т. І. Умови Сен-Венана для псевдо ріманових просторів. *Механіка та математичні методи*. 2019. №1 (2). С. 64-74.
12. Вашпанова Т. Ю. Про властивості інваріантів тензора LGT-сітки і деформації поверхонь. *Збірник праць міжнародного геометричного центру*. 2010. Том 3. № 3. С. 15-22.
13. Векуа И. Н. *Обобщенные аналитические функции*. Москва : Наука, 1988. 509 с.
14. Векуа И. Н. *Основы тензорного анализа и теории ковариантов*. Москва : Наука, 1978. 296с.

15. Ладыженская О. А., Уральцева Н. В. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Москва : Наука, 1976. 576с.
16. Будак Б. М., Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды. Москва : Наука, 1967. 607 с.
17. Веква И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.-Л.: Государственное издание технико-технической литературы. 1948. 296 с.
18. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Москва : Наука, 1966. 203 с.
19. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. Москва : ИЛ., 1956, - 256с.

References

1. Bezkorovaina, L. L., Vashpanova, T. Y. (2010). A-deformations of a surface with stationary lengths of LGT-lines. *Ukrainian Mathematical Journal*, no. 62, 7, 878-884. [in English].
2. Podousova, T., Vashpanova, N. (2020). On the existence deformations of ovaloids. *Proceedings of the International Geometry Center*, no. 13, 1, 23-34.
<https://doi.org/10.15673/2072-9812.3/2014.40572>. [in English].
3. Podousova, T., Vashpanova, N. (2014). О продолжении A-деформации поверхности положительной кривизны с краем [On the continuation of A-deformations of surfaces of positive curvature with boundary]. *Proceed. Of Internat. Geomet. Cent.*, no.7, 3, 38-48.
<https://doi.org/10.15673/2072-9812.3/2014.40572> [in Russian].
4. Vashpanova, N., Podousova, T., Fedchenko, Yu. (2019). Canonical Deformations of Pseudo-Riemannian Spaces. *Application Of Mathematics In Technical And Natural Sciences*, no. 2164, 1, 040005. <https://doi.org/10.1063/1.5130797> [in English].
5. Podousova, T., Ugolnikov, A., Dumanska, V. (2020). Infinitesimal small deformation which preserves geodesic lines. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*. no. 2302, 1. 040007 <https://doi.org/10.1063/5.0033749> [in English].
6. Bezkorovaina, L. L., Vashpanova, T. Yu. (2011). LGT- сет и ее деформации. [LGT- network and its deformations]. *Sovrem. probl. matem.y mekh* [Modern. probl. mathematics and fur], no. 4, *Matematyka*, 2, 157-163. [in Russian].
7. Hinterleitner, I., Kiosak, V. (2009). φ (ric)-vector fields on conformally flat spaces. *Proceedings of American Institute of Physics*, no. 1191, 98–103. <https://doi.org/10.1063/1.3275604> [in English].
8. Kiosak, V., Matveev, V. (2014). There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor. *Journal of Geometry and Physics*, no. 78, 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.01.002> [in English].
9. Vashpanov, Yu., Son, Jung-Young, Heo, Gwanghee, Podousova, T., Suk Kim, Y. (2019). Determination of geometric parameters of cracks in concrete by image processing. *Advances in Civil Engineering*, no. 2398124, 1–14. <https://doi.org/10.1155/2019/2398124> [in English].
10. Potapenko, I. (2011). Про відновлення варіації метричного тензора поверхні за заданою варіацією символів Крістоффеля другого порядку при нескінченно малих деформаціях поверхонь в евклідовому просторі E3. [V On the restoration of variation of the metric surface tensor for a given variation of Christoffel symbols of the second order in infinitesimal deformations of surfaces in Euclidean space E3]. *Ukr. mat. zhurn* [Ukr. Mate. Journal], no. 63, 4, 523-530. [in Ukrainian].
11. Vashpanova, N. V., Podousova, T. Yu., Shevchenko, T. I. (2019). Умови Сен-Венана для псевдо-риманових просторів [Conditions of Saint-Venant for pseudo-Riemannian spaces]. *Mekhanika ta matematychni metody* [Mechanics and Mathematical Methods], no. 1, 2, 64-74. [in Ukrainian].
12. Vashpanova, T. Yu. (2010). Про властивості інваріантів тензора LGT-сітки і деформації поверхонь. [On the properties of invariants of the LGT-grid tensor and deformation of surfaces]. *Zbirnyk prats mizhnarodnoho heometrychnoho tsentru* [Geometr.centri], no. 3, 3, 15-22. [in Ukrainian].
13. Веква, И. Н. (1988). *Обобщенные аналитические функции* [Generalized analytical functions]. Москва : Наука. [in Russian].
14. Веква, И. Н. (1978). *Основы тензорного анализа и теории ковариантной теории*. Москва : Наука. [in Russian].

15. Ladyzhenskaya, O. A., Uraltzeva, N. V. (1976). *Lyneiye y vkazylyneinye uravneniya ellypticheskoho tipa* [Linear and quasilinear equations of elliptic type]. Moskva : Nauka. [in Russian].
16. Budak, B. M., Fomin, S. V. (1967). *Kratnye yntehraly y riady* [Multiple integrals and series]. Moskva : Nauka. [in Russian].
17. Vekua, I. N. (1948). *Novye metody resheniya ellypticheskikh uravneniy* [New methods for solving elliptic equations]. M.-L.: Gosudarstvennoe yzdanye tekhniko-tekhnicheskoi lyteratury. [in Russian].
18. Bitsadze, A. V. (1966). *Kraevye zadachy dlia yellypticheskikh uravneniy vtoroho poriadka* [Boundary value problems for second-order elliptic equations]. Moskva: Nauka. [in Russian].
19. Miranda, K. (1956). *Uravneniya s chastnymi proyzvodnymi ellypticheskoho tipa*. [Equations with partial derivatives of elliptical type]. Moskva : YL. [in Russian].

Подоусова Тетяна Юрїївна

Одеська державна академія будівництва та архітектури, к.ф.-м. н
Вул.Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029
Podousova_tatyana@ukr.net,
ORCID: 0000-0002-9492-126X

Вашпанова Ніна Володимирівна

Одеська державна академія будівництва та архітектури, к.ф.-м. н, доцент
Вул.Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
vasha_nina@ukr.net,
ORCID: 0000-0002-8639-836

Для посилань:

Подоусова Т. Ю. Деформації поверхонь зі стаціонарним тензором Річчі / Т. Ю. Подоусова, Н. В. Вашпанова // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 2. – С. 51–62.

For references:

Podousova, T., Vashpanova N. (2020). Deformations of surfaces from stationary Ricci tensor. Mechanics and Mathematical Methods, 2 (2), 51–62

УДК 539.3

КРУГЛІ ПЛИТИ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ЗІ ЗМІННИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ПОСТЕЛІ

Карнаухова Г. С.¹, Кіріченко Д. О.¹

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: В роботі розглядається застосування аналітичного методу - методу прямого інтегрування - до розрахунку будівельних конструкцій у формі круглих і кільцевих пластин і плит, що лежать на безперервній змінній пружній основі. Застосування запропонованого підходу дозволило отримати рішення широкого класу задач, математичним резюме яких являються диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами або системи таких рівнянь, та одночасно оцінити можливості та точність розрахунку розглянутих задач методом скінчених елементів. Реакція основи описується моделлю Вінклера зі змінним коефіцієнтом постелі. Стосовно до вигину круглих і кільцевих плит отримані формули для функції прогинів та її похідних, поперечної сили і згинальних моментів. Метод застосуємо при будь-яких заданих граничних умовах на контурах. Розрахунок зводиться до визначення із заданих граничних умов невідомих констант інтегрування й чисельної реалізації отриманих розв'язків. Знайдені формули загального виду перетворені для практично важливого випадку, коли коефіцієнт постелі й навантаження мають вигляд многочленів. Показане, що в такому випадку безрозмірні фундаментальні функції представляються статечними рядами. Для обчислення коефіцієнтів статечних рядів виведені відповідні рекурентні співвідношення.

Виконані розрахунки показують, що розбіжність в результатах обчислення прогинів МСЕ і авторським методом (АМ) незначна (не перевищує 1 %), а результати обчислення радіальних і окружних моментів відрізняються істотно, і ця відмінність іноді досягає 12-14 %. Однак при згущенні сітки в окружному напрямку картина змінюється, відбувається зближення результатів, отриманих двома методами. Це свідчить про неточність скінчено-елементного аналізу, виконаного на основі автоматичного розбиття скінчено-елементної сітки. А це, в свою чергу, веде до "сліпого" армування залізобетонних плит, при якому можливо, як переармування конструкції, так і її недостатнє армування.

Ключові слова: метод прямого інтегрування, плита на пружній основі, модель Вінклера, змінний коефіцієнт постелі, метод скінчених елементів, ПК ЛІРА-САПР.

ROUND SLABS ON A RESILIENT BASE WITH VARIABLE BEDDING RATIO

G. Karnauhova¹, D. Kirichenko¹

¹Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: The paper considers the application of the analytical method - the method of direct integration - to the calculation of building structures in the form of round and annular plates and slabs lying on a continuous variable elastic basis. The application of the proposed approach allowed to obtain solutions of a wide class of problems, the mathematical summary of which are differential equations with variable coefficients or systems of such equations, and at the same time to evaluate the possibilities and accuracy of calculation of finite elements. The base reaction is described by the Winkler model with a variable bed ratio. With respect to the bending of round and annular plates, formulas for the function of deflections and its derivatives, transverse force and bending moments are obtained. The method is applicable under any given boundary conditions on the contours. The calculation is reduced to determining from the given boundary conditions of the unknown constants of integration and numerical realization of the obtained solutions. The found formulas of the general form are transformed for practically important case when the factor of a bed and loading have



the form of polynomials. It is shown that in this case dimensionless fundamental functions are represented by static series. To calculate the coefficients of static series, the corresponding recurrent relations are derived.

The calculations show that the discrepancy in the results of the calculation of the deflections of the FEA and the author's method (AM) is insignificant (not more than 1%), and the results of the calculation of radial and circumferential moments differ significantly, and this difference sometimes reaches 12-14%. However, when the grid is condensed in the circumferential direction, the picture changes, there is a convergence of the results obtained by two methods. This indicates the inaccuracy of the finite element analysis performed on the basis of automatic partitioning of the finite element grid. And this, in turn, leads to "blind" reinforcement of reinforced concrete slabs, in which it is possible, both re-reinforcement of the structure and its insufficient reinforcement.

Keywords: direct integration method, elastic base plate, Winkler model, variable bed coefficient, finite element method, PC LIRA-CAD.

1 ВСТУП

Дослідження конструкцій, що лежать на пружній основі, являють собою одну з актуальних і найбільш складних проблем, пов'язаних з розрахунком будівельних конструкцій, оскільки з математичної точки зору її розв'язання зводиться до диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

До цих завдань останнім часом інтерес все більше зростає в зв'язку з переходом до будівництва споруд підвищеної поверховості. У практиці проектування доводиться стикатися з випадками, коли конструкція з тих чи інших причин не повністю спирається на пружну основу. Наприклад, наявність підземних комунікацій, розмивів ґрунту в результаті аварій трубопроводів або природних явищ, карстових утворень в зоні зведення об'єкта. У цих випадках використовується модель пружної основи зі змінним коефіцієнтом постелі. Існують різні моделі пружної основи. Найпростішою є модель Вінклера, або пружинна модель. Для балок на постійній пружній основі ця модель дозволяє отримати точне рішення, а для плит – ні. Коли ж пружна основа є змінною, завдання ускладнюється ще більше. Не існує єдиного підходу для побудови універсального аналітичного рішення. Тому застосовуються наближені методи розрахунку, засновані на дискретизації систем, в основному, метод скінчених елементів. Однак результати, отримані цим методом, вимагають перевірки, і найкращим варіантом такої перевірки є аналітичне рішення.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Багато досліджень проводилося з теорії та розрахунку круглих і кільцевих пластин на різних моделях пружної основи. Рішенням задачі для круглої плити займався академік А. Н. Динник. Відомі аналітичні рішення круглих пластин і оболонки обертання належать Е. Рейсснеру [1], Е. Мейсснеру [2], І. Я. Штайерману [3], Б. Н. Жемочкіну [4].

В роботі В. І. Дудинського [5] методом парних інтегральних рівнянь отримано рішення осесиметричної задачі про згин круглої пластини на пружній неоднорідній основі при неповному контакті, що дозволяє враховувати зміну по глибині коефіцієнта Пуассона матеріалу основи.

Е. Н. Шпітюк [6] вирішує задачу про взаємодію фундаментних плит з пружною двопараметричною основою. Розроблено алгоритм на основі авторського методу скінчено-елементного рішення. Ю. В. Немировським і Т. П. Романовою [7] отримане загальне рішення задачі про динамічний згин ідеальної жорстко-пластичної пластини змінної товщини з шарнірно-опертим або затисненим криволінійним контуром. Виведено рівняння динамічного деформування та проаналізовано умови реалізації.

Розробці аналітичних методів розрахунку пластин змінної товщини присвячені численні роботи Є. Б. Кореневої [8–10].

Якщо взагалі казати про сучасний стан проблеми, то він найкраще відбитий у досить великому огляді [11], автори якого розглядають стан справ в цій галузі, виділяють ключові аспекти розвитку, включаючи моделювання ґрунтових середовищ і різні аналітичні, а також чисельні підходи при аналізі процесу взаємодії між фундаментом і ґрунтом.

Але ж пропозиції щодо загального методу розрахунку плит на змінній пружній основі у літературі відсутні.

3 МЕТА ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даної роботи є застосування аналітичного методу розрахунку будівельних конструкцій у формі круглих і кільцевих пластин і плит, що лежать на безперервній змінній пружній основі.

У якості такого методу обраний метод прямого інтегрування, запропонований у роботах Ю. С. Крутія [12–15].

Застосування запропонованого підходу вже дозволило отримати рішення широкого класу задач, математичним резюме яких являються диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами або системи таких рівнянь [16–18]. А в даному випадку застосування методу прямого інтегрування дозволить ще й оцінити можливості та точність розрахунку розглянутого класу задач методом скінчених елементів.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Однією з моделей пружної основи, що найбільш часто застосовується, є модель Фусса-Вінклера, що з'явилася ще в XIX столітті. Її головною перевагою є її простота, яка заснована на припущенні прямої пропорційності між переданим на основу тиском і прогином, а недоліком – неможливість урахування розподіленої здатності та текстурних особливостей основи. Застосовуючи модель Фусса-Вінклера, можна отримати більш близькі до дослідів величини контактних напружень. Однак при цій моделі не враховується взаємний вплив фундаментів і будівель. При цьому у моделі існує ряд модифікацій, які в інтегральній формі дозволяють враховувати неоднорідні властивості основи, як в плані, так і по глибині. Застосування цієї моделі основи дає надійні результати при слабких і надто стиснутих ґрунтах і невеликих опорних площах фундаментів. Найбільш поширеною модифікацією моделі Вінклера є модель змінного коефіцієнта постелі. Зокрема, ця модель ґрунтової основи знайшла широке застосування при розрахунках напружено-деформованого стану фундаментів конструкцій, що лежать на лесових ґрунтах, для яких характерне просідання.

Розглянемо кільцеву плиту постійної циліндричної жорсткості D , що лежить на змінній пружній основі, й перебуває під дією безупинно розподіленого поперечного навантаження. Нехай a і b – радіуси зовнішньої й внутрішньої контурних окружностей плити, r – радіальна координата ($0 \leq r \leq a$). В окремому випадку, при $b=0$, одержимо суцільну круглу плиту. Будемо вважати, що реакція основи описується моделлю Вінклера.

Осесиметричний згин плити має місце у випадку, коли навантаження $q(r)$, реакція пружної основи $R(r)$ й умови закріплення плити не залежать від полярного кута θ . При цьому основними параметрами напружено-деформованого стану плити будуть прогин $w(r)$ і згинальні моменти – радіальний M_r і окружний M_θ .

Відповідно до моделі Вінклера, залежність між реакцією $R(r)$ пружної основи й прогином $w(r)$ має вигляд

$$R(r) = -k(r)w(r),$$

де $k(r)$ – безперервний змінний коефіцієнт постелі, який представимо як $k(r) = k_0 A(r)$. Тут k_0 – значення коефіцієнта постелі в деякій характерній точці плити; $A(r)$ – безрозмірна безперервна функція, що виражає закон зміни коефіцієнта постелі від радіальної координати.

Аналогічним чином представимо вираження для заданого навантаження $q(r) = q_0 B(r)$,

де q_0 – навантаження в деякій точці плити; $B(r)$ – безрозмірна безперервна функція, якою задана залежність навантаження від радіальної координати.

Диференціальне рівняння згину плити здобуває вид

$$D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} + k_0 A(r) w = q_0 B(r). \quad (1)$$

Після визначення прогину $w(r)$, зусилля в плиті визначаються по відомих формулах:

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right); \quad (2)$$

$$M_\theta = -D \left(\mu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right); \quad (3)$$

$$Q_r = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right), \quad (4)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона.

Для побудови точного розв'язку диференціального рівняння будемо застосовувати метод прямого інтегрування. Опускаючи проміжні математичні перетворення, які докладно викладені в роботах [12-15], приведемо остаточні результати.

Визначено чотири фундаментальні розв'язки $X_n(r)$, $Y_n(r)$ ($n=1,2$) однорідного рівняння, відповідного до рівняння (1), і приватний розв'язок $X_*(r)$ неоднорідного рівняння (1).

У результаті загальний розв'язок вихідного рівняння (1) можна записати так:

$$w(r) = C_1 X_1(r) + C_2 X_2(r) + C_3 Y_1(r) + C_4 Y_2(r) + \frac{q_0 a^4}{D} X_3(r), \quad (5)$$

де $C_1 C_2 C_3 C_4$ – довільні константи, що мають розмірність прогину. З метою виділити в правій частині формули (5) безрозмірний множник, покладемо

$$C_n = (q_0 a^4 / D) \lambda_n \quad (n=1,2,3,4),$$

де λ_n – довільні безрозмірні константи.

Стосовно до вигину круглих і кільцевих плит були отримані наступні формули для функції прогинів $w(r)$:

$$w(r) = \frac{q_0 a^4}{D} W(r); \quad (6)$$

$$W(r) = \lambda_1 X_1(r) + \lambda_2 X_2(r) + \lambda_3 \left(X_1(r) \ln \frac{r}{a} + Z_1(r) \right) + \lambda_4 \left(X_2(r) \ln \frac{r}{a} + Z_2(r) \right) + X_3(r),$$

де $W(r)$ – безрозмірна функція, а λ_n – довільні безрозмірні константи.

При розгляді суцільної плити постійні інтегрування знаходяться з умов в її центрі та на зовнішньому контурі. У центрі плити при значенні $r=0$ прогин і внутрішні зусилля повинні мати кінцеві значення. Отже, в виразі (7) слід відкинути члени, що містять множник $\ln r/a$, тобто покласти $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Це призводить до значних спрощень при розрахунках.

У випадку суцільної плити замість формули (7) отримуємо

$$W(r) = \lambda_1 X_1(r) + \lambda_2 X_2(r) + X_3(r). \quad (8)$$

Відповідно, матимемо:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{q_0 a^3}{D} \tilde{W}(r); \quad (9)$$

$$\tilde{W}(r) = \lambda_1 \tilde{X}_1(r) + \lambda_2 \tilde{X}_2(r) + \tilde{X}_3(r); \quad (10)$$

$$\hat{W}(r) = \lambda_1 \hat{X}_1(r) + \lambda_2 \hat{X}_2(r) + \hat{X}_3(r); \quad (11)$$

$$\hat{W}(r) = \lambda_1 \hat{X}_1(r) + \lambda_2 \hat{X}_2(r) + \hat{X}_3(r). \quad (12)$$

Зазначена конкретизація формул призводить до значних спрощень при розрахунках суцільних круглих плит.

У подібному форматі представлені й формули для перших трьох похідних від функції прогину:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{q_0 a^3}{D} \tilde{W}(r).$$

З урахуванням цього записані й вираження для внутрішніх зусиль:

$$M_r = q_0 a^2 \left(\tilde{W}(r) + \mu \frac{a}{r} \tilde{W}(r) \right); \quad (13)$$

$$M_\theta = -q_0 a^2 \left(\mu \tilde{W}(r) + \frac{a}{r} \tilde{W}(r) \right); \quad (14)$$

$$Q_r = -q_0 a \left(\hat{W}(r) + \frac{a}{r} \hat{W}(r) - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \tilde{W}(r) \right). \quad (15)$$

Формули для прогинів і внутрішніх зусиль, записані в аналітичному виді, повністю характеризують напружено-деформований стан плити у випадку, коли задана навантаження й коефіцієнт постелі являють собою довільні безперервні функції. Метод застосуємо при будь-яких заданих граничних умовах на контурах. Фактично розрахунки зводиться до визначення із заданих граничних умов невідомих констант інтегрування й чисельної реалізації отриманих розв'язків.

Знайдені формули загального виду перетворені для практично важливого випадку, коли коефіцієнт постелі й навантаження мають вигляд многочленів. Показане, що в такому випадку безрозмірні фундаментальні функції представляються статечними рядами. Для обчислення коефіцієнтів статечних рядів виведені відповідні рекурентні співвідношення.

У порівнянні з наближеними методами, запропонований аналітичний метод дозволяє одержати більш точні значення параметрів згину плит.

У якості приклада розглянемо бетонну плиту ($E = 1,5 \cdot 10^7 \text{ кПа}$, $\mu = 0$) товщиною $h = 0,12 \text{ м}$ і радіусом $a = 1,8 \text{ м}$, яка знаходиться під впливом рівномірно розподіленого постійного навантаження $q = 15 \text{ кПа}$.

Коефіцієнт постелі (рис. 1) змінюється за параболічним законом (увігнута парабола).

$$A_0 = 0; A_1 = 0; A_2 = 1; k(a) = 4 \cdot 10^6 \text{ кН/м}^3.$$

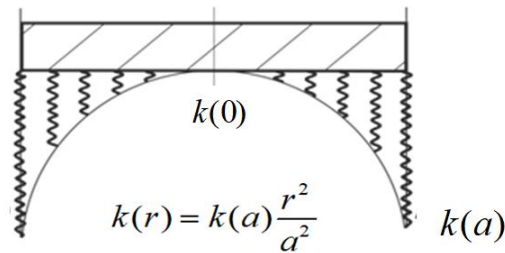


Рис. 1. Закон зміни коефіцієнта постелі

Результати розрахунку авторським метод (АМ) та методом скінчених елементів (МСЕ) у ПК ЛІРА-САПР наведені в табл. 1, а їх графічна інтерпретація – на рис. 2, 3.

Таблиця 1

Результати розрахунку бетонної плити (автоматичне розбиття сітки)

r, м	w, м		Розбіжність (%)	M _r		Розбіжність (%)	M _θ		Розбіжність (%)
	МСЕ	АМ		МСЕ	АМ		МСЕ	АМ	
0,0000	0,0659	0,0662	0,4026	0,4943	0,5001	1,1598	0,4923	0,5001	1,5706
0,0857	0,0651	0,0653	0,3975	0,4646	0,4797	3,1478	0,4806	0,4933	2,5758
0,1714	0,0626	0,0629	0,3900	0,3975	0,4211	5,6044	0,4553	0,4733	3,8013
0,2571	0,0588	0,0590	0,3802	0,3082	0,3318	7,1127	0,4195	0,4417	5,0337
0,3429	0,0538	0,0540	0,3691	0,1997	0,2230	10,4484	0,3759	0,4009	6,2507
0,4286	0,0480	0,0482	0,3578	0,0942	0,1076	12,4535	0,3275	0,3538	7,4489
0,5143	0,0419	0,0421	0,3446	-0,0022	-0,0019	13,6364	0,2773	0,3035	8,6266
0,6000	0,0358	0,0359	0,3295	-0,1106	-0,0952	13,9240	0,2282	0,2529	9,7821
0,6857	0,0300	0,0301	0,3128	-0,1794	-0,1653	7,8595	0,1824	0,2048	10,9110
0,7714	0,0248	0,0249	0,2918	-0,2180	-0,2088	4,1824	0,1417	0,1610	12,0010
0,8571	0,0202	0,0203	0,2701	-0,2242	-0,2265	1,0260	0,1069	0,1229	13,0245
0,9429	0,0165	0,0165	0,0000	-0,2123	-0,2216	4,1968	0,0785	0,0912	13,9140
1,0286	0,0134	0,0135	0,2177	-0,1866	-0,1991	6,2782	0,0564	0,0660	14,5184
1,1143	0,0111	0,0111	0,0000	-0,1531	-0,1644	6,8735	0,0401	0,0469	14,5104
1,2000	0,0093	0,0093	0,0000	-0,1121	-0,1221	8,1900	0,0289	0,0333	13,2533
1,2857	0,0079	0,0079	0,0000	-0,0687	-0,0762	9,8425	0,0220	0,0244	9,8398
1,3714	0,0067	0,0067	0,0000	-0,0254	-0,0291	12,7148	0,0180	0,0196	8,1633
1,4571	0,0057	0,0057	0,0000	0,0182	0,0163	10,4395	0,0193	0,0181	6,2176
1,5429	0,0046	0,0046	0,0000	0,0586	0,0554	5,4608	0,0200	0,0191	4,5000
1,6286	0,0033	0,0033	0,0000	0,0780	0,0790	1,1689	0,0224	0,0217	3,1250
1,7143	0,0018	0,0018	0,0000	0,0663	0,0699	5,4299	0,0249	0,0246	1,4924
1,8000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0256	0,0254	0,7812

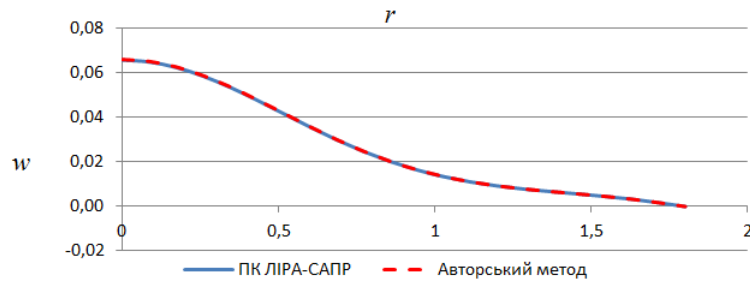


Рис. 2. Розподіл прогинів

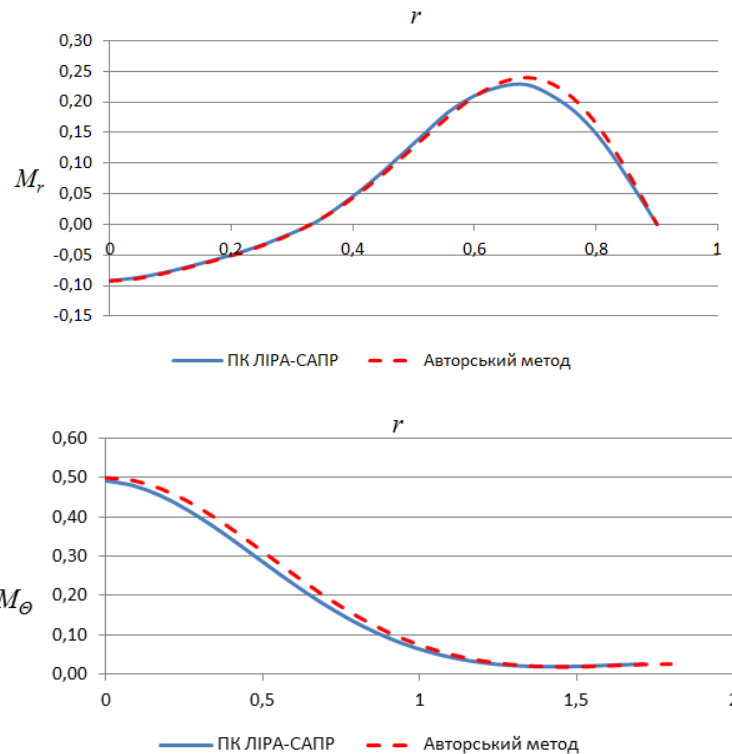


Рис. 3. Радіальний і окружний моменти

Як бачимо, значення прогинів при розрахунку авторським методом та за допомогою ПК ЛІРА-САПР [19-21] практично співпадають, а розбіжність згинальних моментів досить значна, і навіть досягає 14 %.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Результати розрахунків методом скінчених елементів, що наведені в табл. 1, отримані при напівавтоматичному розбитті скінчено-елементної сітки. При цьому по радіусу вибирався крок розбиття $0,1r$, а по колу розбиття відбувалося автоматично. Як вже зазначалося, при такому підході розбіжність в результатах обчислення прогинів МСЕ і авторським методом незначна, а результати обчислення радіальних і окружних моментів відрізняються істотно, і ця відмінність (у відсотках) іноді визначається двозначним числом. Аналогічна картина спостерігалася і у всіх інших виконаних нами численних розрахунках, в яких варіювалися геометричні та фізичні параметри конструкцій, закони зміни навантажень і коефіцієнта ліжку, граничні умови.

Однак при згущенні сітки в окружному напрямку картина змінюється, відбувається зближення результатів, отриманих двома методами. Ілюстрацією цього служить табл. 2, де наведені значення радіальних і окружних моментів, аналогічні тим, що представлені в табл. 1, але при згущенні скінчено-елементної сітки в 2 рази.

Таблиця 2
Результати розрахунку бетонної плити (згущення сітки в два рази)

$r, м$	M_r		Розбіжність (%)	M_θ		Розбіжність (%)
	МСЕ	АМ		МСЕ	АМ	
0,0000	0,4973	0,5001	1,1598	0,4923	0,5001	1,5706
0,0857	0,4746	0,4797	3,1478	0,4806	0,4933	2,5758
0,1714	0,4035	0,4211	5,6044	0,4553	0,4733	3,8013
0,2571	0,3212	0,3318	7,1127	0,4195	0,4417	5,0337
0,3429	0,2097	0,2230	10,4484	0,3759	0,4009	6,2507
0,4286	0,1042	0,1076	12,4535	0,3275	0,3538	7,4489
0,5143	-0,0020	-0,0019	13,6364	0,2773	0,3035	8,6266
0,6000	-0,1006	-0,0952	13,9240	0,2282	0,2529	9,7821
0,6857	-0,1694	-0,1653	7,8595	0,1824	0,2048	10,9110
0,8571	-0,2248	-0,2265	1,0260	0,1069	0,1229	13,0245
0,9429	-0,2183	-0,2216	4,1968	0,0785	0,0912	13,9140
1,0286	-0,1966	-0,1991	6,2782	0,0564	0,0660	14,5184
1,1143	-0,1631	-0,1644	6,8735	0,0401	0,0469	14,5104
1,2000	-0,1191	-0,1221	8,1900	0,0289	0,0333	13,2533
1,2857	-0,0717	-0,0762	9,8425	0,0220	0,0244	9,8398
1,3714	-0,0274	-0,0291	12,7148	0,0180	0,0196	8,1633
1,4571	0,0172	0,0163	10,4395	0,0193	0,0181	6,2176
1,5429	0,0566	0,0554	5,4608	0,0200	0,0191	4,5000
1,6286	0,0785	0,0790	1,1689	0,0224	0,0217	3,1250
1,7143	0,0693	0,0699	5,4299	0,0249	0,0246	1,4924
1,8000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0256	0,0254	0,7812

6 ВИСНОВКИ

Таким чином, розроблений аналітичний метод розрахунку будівельних конструкцій у формі круглих і кільцевих пластин і плит, що лежать на безперервній змінній пружній основі.

Виконані розрахунки показують, що розбіжність в результатах обчислення прогинів МСЕ і авторським методом (АМ) незначна (не перевищує 1%), а результати обчислення радіальних і окружних моментів відрізняються істотно, і ця відмінність іноді досягає 12-14%. однак при згущенні сітки в окружному напрямку картина змінюється, відбувається зближення результатів, отриманих двома методами. це свідчить про неточність скінчено-елементного аналізу, виконаного на основі автоматичного розбиття скінчено-елементної сітки. а це, в свою чергу, веде до "сліпого" армування залізобетонних плит, при якому можливо, як перearмування конструкції, так і її недостатнє армування.

Література

1. Reissner E. On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. The International Journal of Solids and Structures. 1975. № 11. (5). P. 569–573.
2. Meissner E. Das elasticitats problem fur dünne Schalen von Ringflächen. Kugel-oder Kegel form, Phyikalische Zeitschr. 1913. P. 41–52.

3. Штаерман И. Я. К теории симметричных деформаций анизотропных упругих оболочек. Изв. Киев, политех, и селхоз. ин-тов. 1924, кн.1, С. 38–47.
4. Жемочкин Б. Н., Синицын А. П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. М.: Стройиздат, 1962. 262 с.
5. Дудинский В. И. Изгиб круглой пластины на упругом неоднородном основании при неполном контакте с основанием. ПМТФ. 1989. № 1. С. 158–162.
6. Шпитюк Е. Н. Расчет фундаментных плит, взаимодействующих с деформируемым основанием : автореф. дис... канд. техн. Наук : 05.23.17. Ростов-на-Дону, 1997. 26 с.
7. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическое деформирование жесткопластических криволинейных пластин переменной толщины. Прикладная механика и техническая физика. 2007. Т. 48. № 5. С. 108–120.
8. Коренева Е. Б., Гросман В. Р. Аналитическое решение задачи об изгибе круглой ортотропной пластины, переменной толщины, лежащей на упругом основании. Вестник МГСУ. 2011. № 8. С. 156 – 159.
9. Коренева Е. Б. Усовершенствованный расчёт комбинированной фундаментной плиты специального сооружения. Матер. междунар. н.-т. конф. «Механика грунтов в геотехнике и фундаментостроении». Новочеркасск - Изд. ООО "Лик". 2018. С. 326–331.
10. Коренева Е. Б. Расчет комбинированных плит с учетом их контакта с упругим основанием International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2019. № 15 (4). С. 83–87.
11. Wang Y. H., Tham L. G., Cheung Y. K. Beams and plates on elastic foundations: A review. Progress in Structural Engineering and Materials. 2005. № 7 (4). P. 174–182.
12. Крутий Ю. С. Розробка методу розв'язання задач стійкості і коливань деформівних систем зі змінними неперервними параметрами : дис... докт. техн. наук : 01.02.04 Одеса, 2016. 272 с.
13. Крутий Ю. С., Сурьянинов Н. Г. Згин кругової циліндричної оболонки зі змінною товщиною. Вісник Хмельницького національного університету. Сер. Технічні науки. 2016. № 2 (235). С. 116–121.
14. Крутий Ю. С., Сур'янінов М. Г. Чисельна реалізація аналітичного розв'язку задачі про вільні колювання прямокутної пластини, що лежить на змінній пружній основі. Наукові нотатки: міжвуз. зб. Сер. Технічні науки. Луцьк. 2016. №2 (54) С. 167–171.
15. Крутий Ю.С., Сурьянинов Н. Г. Аналитическое решение задачи о свободных колебаниях пластины, лежащей на переменном упругом основании. Наукові нотатки. 2016. № 53. С. 84–92.
16. Крутий Ю. С., Сурьянинов Н. Г. Фундаментальные решения приведенного уравнения параметрических колебаний. Збірник наукових праць Українського державного університету залізничного транспорту. 2017. № 167. С. 17–24.
17. Крутий Ю. С., Сур'янінов М. Г., Сорока М.М., Карнаухова Г.С. Чисельний аналіз круглих пластин на пружній основі зі змінним коефіцієнтом постелі. Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. 2020. № 81. С.66–75.
18. Крутий Ю. С., Сурьянинов Н. Г., Сорока Н.Н., Карнаухова А.С. Аналитические и численные исследования напряженно-деформированного состояния круглых пластин на упругом основании с переменным коэффициентом постели. Science Reviu. 2020. №6 (33). С.30–39.
19. Водопьянов Р. Ю., Титок В. П., Артамонова А. Е. Программный комплекс ЛИРА-САПР 2015. Руководство пользователя. Обучающие примеры. Под редакцией академика РААСН Городецкого А. С. Электронное издание, 2015. 460 с.
20. Барабаш М. С., Козлов С. В., Медведенко Д. В. Комп'ютерні технології проектування металевих конструкцій. К.: НАУ, 2012. 572 с.
21. Барабаш М. С., Кір'язев П. М., Лапенко О. І., Ромашкіна М. А. Основи комп'ютерного моделювання. Навчальний посібник. К. : НАУ, 2019. 500 с.

References

1. Reissner, E. (1975). On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. *The International Journal of Solids and Structures*, 11, 5, 569–573. [in English].
2. Meissner, E. (1913). Das elasticitats problem fur dünne Schalen von Ringflächen. *Kugel-oder Kegel form, Phyikalische Zeitschr*, 41–52. [in English].

3. Shtaerman, Y. Ya. (1924). К теорыі симметричных деформаций анизотропных упругих оболочек [On the theory of symmetric deformations of anisotropic elastic shells]. *Узв. Киев, политехн. у селхоз. ун-тов* [Izvestia Kiev, polytechnic and agricultural institutes], kn.1, 38–47. [in Russian].
4. Zhemochkyn, B. N., Synytsyn, A. P. (1962). *Praktycheskiye metody rascheta fundamentnykh balok y plyt na uprugom osnovanyu* [Practical methods for calculating foundation beams and slabs on an elastic foundation]. Moskva, Stroiyzdat. [in Russian].
5. Dudynskiy, V. Y. (1989). Yzghyb kruhloi plastyny na uprugom neodnorodnom osnovanyu pry nepolnom kontakte s osnovanyem [Bending of a round plate on an elastic inhomogeneous base with incomplete contact with the base], *PMTF*, 1, 158–162. [in Russian].
6. Shpytiuk, E. N. (1997). Raschet fundamentnykh plyt, vzaymodeistvuiushchykh s deformatsionnoy osnovanyem [Calculation of foundation slabs interacting with a deformable base]. : *avtoref. dys... kand. tekhn. Nauk* : 05.23.17. Rostov-na-Donu. [in Russian].
7. Nemyrovskiy, Yu. V., Romanova, T. P. (2007). Dynamicheskoe deformatsionnoye zhestkoplasticheskiykh kryvolynneinykh plastyn peremennoi tolshchiny [Dynamic deformation of rigid-plastic curved plates of variable thickness]. *Prykladnaia mekhanika y tekhnicheskaya fizyka* [Applied Mechanics and Technical Physics], 48, 5, 108–120. [in Russian].
8. Koreneva, E. B., Hrosman, V. R. (2011). Analyticheskoe resheniye zadachi ob yzghybe kruhloi ortotropnoi plastyny, peremennoi tolshchiny, lezhashchei na uprugom osnovanyu [Analytical solution of the problem of bending of a circular orthotropic plate of variable thickness lying on an elastic foundation]. *Vestnyk MHSU* [MGSU Bulletin], 8, 156 – 159. [in Russian].
9. Koreneva, E. B. (2018). Usovershenstvovanniy raschet kombinirovannoy fundamentnoi plyty spetsyalnogo sooruzheniya [Improved calculation of the combined foundation slab of a special structure]. *Materyaly mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoy konferentsyy «Mekhanika hruntov v heotekhnike y fundamentstroeniy»*. Novochoerkassk - Yzdatelstvo OOO "Lyk" [Materials of the International Scientific and Technical Conference "Soil Mechanics in Geotechnics and Foundation Engineering". Novochoerkassk - Publishing house LLC "Lik". 326–331. [in Russian].
10. Koreneva, E. B. (2019). Raschet kombinirovannykh plyt s uchptom ykh kontakta s uprugym osnovanyem [Calculation of combined slabs taking into account their contact with an elastic foundation]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 15, 4, 83–87. [in Russian].
11. Wang, Y. H., Tham, L. G., Cheung, Y. K. (2005). Beams and plates on elastic foundations: A review. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 7, 4, 174–182. [in English].
12. Krutiy, Yu. S. (2016). *Rozrobka metodu rozv'iazannia zadach stiiikosti i kolyvan deformatsionnykh system zi zminnyimi nepererivnyimi parametramy* [Development of the method for solving the problems of durability and the number of deformation systems with variable permanent parameters] : dys... dokt. tekhn. nauk : 01.02.04 Odesa. [in Russian].
13. Krutyi, Yu. S., Surianynov, N. H. (2016). Zghyn kruhovoii tsylindrychnoi obolonky zi zminnoiu tovshchynoiu [Zgin of a circular cylindrical shell with a wintry trade]. *Visnyk Khmelnytskoho natsionalnogo universytetu. Ser. Tekhnichni nauky* [Visnik of Khmelnytsky National University. Technical Science Series], 2, 235, 116–121. [in Russian].
14. Krutiy Yu. S., Surianinov M. H. Chyselna realizatsiia analitychnoho rozv'iazku zadachi pro vilni kolyvannia priamokutnoi plastyny, shcho lezhyt na zminnii pruzhnii osnovi [Numerical implementation of the analytical linkage of the problem of the straight-sided plate to lie on a springy basis]. *Naukovi notatky: mizhvuz. zb. Ser. Tekhnichni nauky* [Science notes: collection of the Series of Technical Sciences], 2, 54, 167–171. [in Russian].
15. Krutyi, Yu.S., Surianynov, N. H. (2016). Analyticheskoe resheniye zadachi o svobodnykh kolebaniyakh plastyny, lezhashchei na peremennom uprugom osnovanyu [Analytical solution of the problem of free vibrations of a plate lying on a variable elastic foundation]. *Naukovi notatky* [Science notes], 53, 84–92. [in Russian].
16. Krutyi, Yu. S., Surianynov, N. H. (2017). Fundamentalnye resheniya pryvedennogo uravneniya parametrycheskiykh kolebaniy [Fundamental solutions of the reduced equation of parametric oscillations]. *Zbirnyk naukovykh prats Ukrainskoho derzhavnogo universytetu zaliznychnoho transportu* [Collection of scientific works of the Ukrainian State University of Railway Transport], 167, 17–24. [in Russian].

17. Krutii, Yu. S., Surianinov, M. H., Soroka, M.M., Karnaukhova, H.S. (2020). Chyselnyi analiz kruhlykh plastyn na pruzhnii osnovi zi zminnym koefitsientom posteli [Numerical analysis of round plates on an elastic basis with a variable bed ratio]. *Visnyk Odeskoi derzhavnoi akademii budivnytstva ta arkhitektury* [Bulletin of the Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture], 81, 66–75. [in Ukrainian].
18. Krutyi, Yu. S., Surianynov, N. H., Soroka N.N., Karnaukhova A.S. Analytycheskye y chyslennye yssledovaniya napriazhenno-deformirovannoho sostoiانيا kruhlykh plastyn na upruhom osnovanyu s peremennym koefitsyentom postely [Analytical and numerical studies of the stress-strain state of round plates on an elastic base with a variable bed ratio]. *Science Reviu*, 6, 33, 30–39. [in Russian].
19. Vodopianov, R. Yu., Tytok, V. P., Artamonova, A. E. (2015). Prohrammnyi kompleks LYRA-SAPR 2015. Rukovodstvo polzovatelja. Obuchaiushchye prymary [LIRA-CAD software package 2015. User's guide. Training examples]. Pod redaktsyei akademika RAASN Horodetskoho A. S. Elektronnoe yzdanye. [in Russian].
20. Barabash, M. S., Kozlov, S. V., Medvedenko, D. V. (2012). *Kompiuterni tekhnologii proektuvannia metalevykh konstruksii* [Computer technologies for designing metal structures]. Kyiv, NAU. [in Ukrainian].
21. Barabash, M. S., Kiriaziev, P. M., Lapenko, O. I., Romashkina, M. A. (2019). *Osnovy kompiuternoho modeliuvannia* [Basics of computer modeling]. Navchalnyi posibnyk. Kyiv, NAU. [in Ukrainian].

Карнаухова Ганна Сергіївна

Одеська державна академія будівництва та архітектури, старший викладач
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029
karnauhovaanna@ukr.net
ORCID: 0000-0002-3542-4300

Кіріченко Дар'я Олексіївна

Одеська державна академія будівництва та архітектури, аспірантка
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029
sunnyderypeople123@gmail.com
ORCID: 0000-0002-8484-0925

Для посилань:

Карнаухова Г. С. Круглі плити на пружній основі зі змінним коефіцієнтом постелі / Г. С. Карнаухова, Д. О. Кіріченко // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 2. – С. 63–74.

For references:

Karnaukhova, G., Kirichenko, D. (2020). Round slabs on a resilient base with variable bedding ratio. *Mechanics and Mathematical Methods*, 2 (2), 63–74.

УДК 372

РАЗРАБОТКА ИНТЕРАКТИВНЫХ ТЕСТОВ В WOLFRAM MATHEMATICA И DELPHI

Гундина М. А.¹, Кондратьева Н. А.¹

¹Белорусский национальный технический университет

Аннотация: Учебный процесс в техническом университете неразрывно связан с использованием информационных технологий. В данной работе описывается процесс создания интерактивных тестов в компьютерной системе *Wolfram Mathematica* и среде *Delphi*.

Основным преимуществом использования таких технологий являются непрерывность и доступность обучения в любом месте и в любое время. Взаимодействие преподавателей, студентов или администраторов с облачной платформой и ее сервисами реализуется с помощью любого устройства (компьютер, планшет, мобильный телефон и т.п.), на котором установлен браузер с возможностью подключения к сети Интернет. Любой студент может начать выполнять задание в аудитории, а продолжить работу дома без необходимости копирования части выполненного задания на любой носитель информации благодаря тому, что вся необходимая информация сохранена в облаке (центре обработки информации) на удаленном сервере.

Описанный в работе алгоритм позволяет создать автоматически различные индивидуальные задания для больших потоков обучающихся.

Подобные разработки могут быть использованы при организации промежуточного и итогового контроля по физико-математическим и техническим дисциплинам. Используемая стандартизированная форма оценки знаний позволяет соотнести уровень достижений по дисциплине в целом, по определенным разделам, по определенным типам задач. В работе описаны особенности применения облачных технологий для организации такого тестирования.

Использование разработанных материалов способствует стимулированию систематической работы обучающихся, снижению роли случайных факторов при прохождении контрольных этапов учебного процесса.

Организация интерактивного тестирования позволяет осуществить мотивационные функции оценки и повысить интерес студента к изучаемой дисциплине. Применение интерактивных тестов способствует повышению уровня информационной и коммуникативной грамотности преподавателей и студентов и направлено на решение важнейшей задачи высшей школы и образования в целом – научить обучающихся плодотворно трудиться в мире глобальной информатизации.

Ключові слова: облако, тест, информационные технологии, математика.

DEVELOPMENT OF INTERACTIVETESTS IN WOLFRAM MATHEMATICA AND DELPHI

M. Hundzina¹, N. Kandrasyeva¹

¹Belarusian National Technical University

Abstract: The educational process at a technical university is inextricably connected with the use of information technology. The process of creating interactive tests in *Wolfram Mathematica* and *Delphi* is described in this paper.

The main advantage of using such technologies is the continuity and availability of learning anywhere and anytime. The interaction of teachers, students or administrators with the cloud platform and its services is realized using any device (computer, tablet, mobile phone, etc.), which has a browser with the ability to connect to the Internet. Any student can begin to complete the assignment in the classroom, and continue to work at home without the need to copy part of the completed



assignment to any storage medium due to the fact that all the necessary information is stored in the cloud (information center) on a remote server.

The algorithm described in the paper allows to automatically create various individual tasks for large streams of students.

Such developments can be used in the organization of intermediate and final control in physical, mathematical and technical disciplines. The standardized form of knowledge assessment used allows us to correlate the level of achievement in the discipline as a whole, according to certain sections, according to certain types of tasks. The features of the use of cloud technologies for organizing such testing are described in this paper.

The use of the developed materials helps to stimulate the systematic study of students, to reduce the role of random factors when passing the control stages of the educational process.

The organization of interactive testing allows to carry out the motivational functions of the assessment and to increase the student's interest in the studied discipline. The use of interactive tests contributes to an increase in the level of information and communication literacy of teachers and students and is aimed at solving the most important task of higher education and education in general - to teach students to work fruitfully in the world of global informatization.

Keywords: cloud, test, information technology, mathematics.

1 ВВЕДЕНИЕ

Применение информационных технологий в управлении качеством математической подготовки студентов учреждений высшего образования технического профиля имеют свои особенности: возникают возможности работы с визуальной и звуковой информацией большого объема; внедряются проекционные технологии; разрабатывается индивидуальный интерактивный материал, который позволяет каждому обучающемуся взаимодействовать с учебным материалом в удобном темпе, осуществлять оценку степени его усвоения; проводится онлайн-тестирование; организуется мониторинг в компьютерных аудиториях и на персональных компьютерах и телефонах. Применение электронных материалов в учебном процессе облегчает проведение лекций и практических занятий по физико-математическим и техническим дисциплинам, что позволяет использовать индивидуальный, дифференцированный подход при осуществлении обратной связи между студентом и преподавателем, и оказывает существенную помощь преподавателю при подготовке к занятию.

Современные технические средства значительно расширяют возможности преподавателя по изложению материала по математическим дисциплинам, особенно в таких разделах как аналитическая геометрия; физические приложения интегрального исчисления, теория вероятностей и математическая статистика и др. Это позволяет сделать материал более доступным, обеспечивает точное воспроизведение информации.

В интерактивных обучающих заданиях используются компьютерные модели, демонстрируются фотографии и видеоизображения реальных объектов, что позволяет обучающимся получить более полное представление о постановке задачи.

Образование сложно представить без использования облачных технологий. Они внесли коррективы в развитие глобальной структуры потоков информации. В облака была передана значительная часть информационной инфраструктуры, ранее находившейся в отдельных компьютерах. Облачные вычисления позволяют минимизировать эксплуатационные затраты и обращения к провайдеру. Сейчас широко используются электронные дневники, расписания, журналы, личные кабинеты для обучающихся и преподавателей, интерактивная приемная, тематические форумы, где обучающиеся могут осуществлять обмен информацией. Для организации подобного учебного процесса разрабатываются компьютерные приложения, электронные учебники, электронные учебно-методические комплексы, тренажеры, обучающие системы, разнообразные программные средства, интерактивные лаборатории, телекоммуникационные системы и интерактивные тесты.

2 АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Восприятие участников образовательного процесса с помощью информационных технологий стимулирует их познавательный интерес; повышает эмоциональное отношение студентов к учебной деятельности [1]. Компьютерное тестирование позволяет заинтересовать студентов, которые предпочитают выполнять задания на компьютере.

На рис. 1 представлен график частоты употребления этого термина в документах, представленных в открытом доступе на английском языке (для обработки данные представлены только до 2008 года).

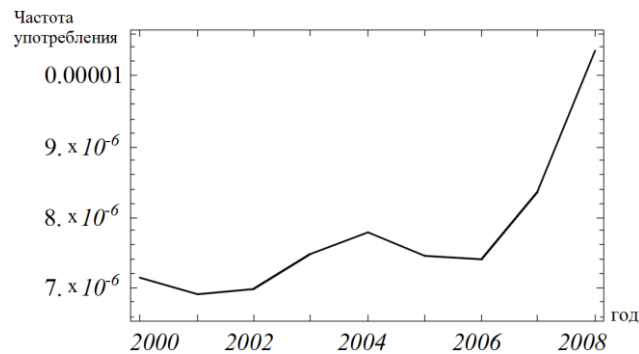


Рис. 1. График частоты употребления термина облачные технологии во временном промежутке от 2000 до 2008 года

Доктор педагогических наук, профессор О. Л. Жук отмечает, что «широкое использование информационных технологий способствует увеличению доли самостоятельной работы студентов, что требует разработки нового учебно-методического и информационного обеспечения» [2].

В отечественной и зарубежной литературе приводятся различные варианты использования интерактивных методов обучения, побуждающих студентов к взаимодействию в образовательном процессе [3–10].

Использование разнообразных педагогических технологий ориентировано на такие результаты обучения как: формирование умений самостоятельно приобретать знания, осуществлять разные виды самостоятельной деятельности по сбору, обработке, передаче, продуцированию учебной информации. В этом вопросе и помогает информационное взаимодействие участников образовательного процесса в различных режимах работы.

Применение таких технологий и средств в образовании может существенно повысить мотивацию обучения, обеспечить развитие самостоятельности при решении учебных задач, развить умения пользования средствами информационных и коммуникационных технологий [3].

Основным преимуществом использования таких технологий являются непрерывность и доступность обучения в любом месте и в любое время. Взаимодействие преподавателей, студентов или администраторов с облачной платформой и ее сервисами реализуется с помощью любого устройства (компьютер, планшет, мобильный телефон и т.п.), на котором установлен браузер с возможностью подключения к сети Интернет. Любой студент может начать выполнять задания в аудитории, а продолжить работу дома без необходимости копирования части выполненного задания на любой носитель информации благодаря тому, что вся необходимая информация сохранена в облаке (центре обработки информации) на удаленном сервере. Так например для компьютерной системы *Wolfram Mathematica* доступ к облаку осуществляется по ссылке www.wolframcloud.com.

Облачные технологии *Wolfram Cloud* сочетают в себе современный интерфейс ноутбука с производительным языком программирования. *Wolfram Cloud* позволяет с любого компьютера загружать приложение, созданное на языке *Wolfram Language*, и используется для автоматического выполнения программ и непосредственного создания индивидуализированных мобильных приложений. В этой программе осуществляется контроль на всех этапах программирования и внедрения приложения в учебном процессе. Команды, написанные в компьютерной системе *Wolfram Mathematica*, в считанные секунды могут быть загружены в виде сайта, и предоставлены обучающемуся как независимое приложение.

Также важным в процессе создания электронных материалов контроля знаний является управление доступа к внутренней облачной инфраструктуре. Обучающийся, используя тестовые приложения, не имеет возможности открыть страницу в программе и посмотреть код, на котором оно написано.

Среда *Wolfram Cloud* позволяет работать с приложением дистанционно на любом компьютере, требуя только одно условие – доступ в сеть Интернет.

Встроенная функция *CloudDeploy* преобразует команду в новый персональный облачный объект. Функция *Delayed* предоставляет выражение, вычисление которого задерживается до того момента, пока это не потребуется. Эта возможность позволяет генерировать при каждом обращении случайный набор тестовых заданий.

Облачные объекты, определяемые как отложенные, будут вычисляться в момент запроса к этим данным. Для функции *CloudObject* может быть определено значение опции *Permissions*, которая задает уровень доступа для классов пользователей на выполнение операций. Доступ может быть организован для всех указанных пользователей, только для разработчиков или для разных классов обучающихся.

В условиях обучения в учреждении высшего образования актуальным является осуществление на I–II курсах промежуточного контроля. Он позволяет не только определить степень усвоения студентами предметных знаний и сформированности их умений, адекватность выбранной преподавателем методики учебным возможностям конкретной группы, но и своевременно, до плановой аттестации (экзаменационной сессии), откорректировать обучающую деятельность.

Тестирование – наиболее приемлемый метод для проведения промежуточного контроля в рамках мониторинга качества образования студентов. Под тестом мы понимали краткое испытание достижений студента, допускающее количественное выражение и статистическую обработку результата.

3 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Компьютеризация неизбежно становится единственным средством автоматизации обработки данных для принятия оптимального управленческого решения в ограниченные сроки. Данное обстоятельство обуславливает необходимость внедрения возможностей технического и прикладного программного обеспечения при подготовке дидактических средств контроля качества подготовки студентов технического профиля.

Целью наших исследований является разработка и внедрение в учебный процесс новых средств обучения физико-математическим и техническим дисциплинам. Было предусмотрено создание электронного приложения, позволяющего осуществлять первичное закрепление изученного материала по темам «Комплексные числа» и «Предел функции» дисциплины «Математика». Приложение состояло из теста, содержащего 5 и 10 типов задач соответственно. Для каждой задачи числовые значения генерировались случайным образом.

4 РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Создание тестов в системе *Wolfram Mathematica*. На рис. 2 представлен результат реализации программы, позволяющий сгенерировать заданное количество вариантов контрольных заданий. Представлены варианты первых трех заданий контрольной.

№ Варианта	Подынтегральная функция №1	Подынтегральная функция №2	Подынтегральная функция №3
1	$4 + \frac{1}{x^{13/20}} + x + x^4$	$(7+9x)^{11/20}$	$\frac{19+7x}{x+x^2}$
2	$10 + \frac{1}{x^{31/20}} + 3x + x^2$	$(6+6x)^{3/5}$	$\frac{13+17x}{7+x+x^2}$
3	$5 + \frac{1}{x^{1/4}} + 4x + x^5$	$(16+7x)^{9/10}$	$\frac{16+17x}{6+x^2}$
4	$6 + \frac{1}{x^{41/20}} + 10x + x^5$	$(14+8x)^{37/20}$	$\frac{9+x}{16+2x+x^2}$
5	$8 + \frac{1}{x^{7/20}} + x^2$	$(1+9x)^{11/20}$	$\frac{18+7x}{7+x+x^2}$
6	$3 + \frac{1}{x^{7/20}} + 7x + x^4$	$(9+18x)^{1/10}$	$\frac{20+18x}{8+3x+x^2}$

Рис. 2. Фрагмент внешнего вида тестового задания, сгенерированного случайным образом в *Wolfram Cloud*

Так, например, для случайного выбора задачи на тему «Интегрирование по частям» может быть использована следующая команда компьютерной системы *Mathematica*:

```
Table[(RandomInteger[20]+1+(RandomInteger[20]+1)xRandomChoice[{Exp[(RandomInteger[20]+1)x],Sin[(RandomInteger[20]+1)x],(RandomInteger[20]+1)x,(RandomInteger[20]+1)^(RandomInteger[20]+1)x]},{i,n}],
```

где функция *Table* – создает таблицу указанного размера, *RandomInteger* – генерирует случайным образом целое число, *RandomChoice* – случайным образом выбирает один из элементов массива.

После генерации случайных условий заданий осуществляется загрузка блока команд в облако с помощью профиля *Wolfram Cloud*. Кроме всего прочего, система *Wolfram Mathematica* имеет возможность подключения к базе данных *Wolfram Knowledgebase*, в которой можно найти сведения различной природы (географические, механические, медицинские, лингвистические и др. данные).

Рассмотрим особенности процесса разработки данного алгоритма создания теста по теме «Неопределенный интеграл» для оценки уровня первичного закрепления материала с применением облачных технологий. Для реализации была использована система *Mathematica*. Команда, генерирующая первый вопрос, выглядит следующим образом:

```
Manipulate[Grid[{"1.What is the value of this integral?"}, {HoldForm[ $\int (1 + Power[x^2, (3)^{-1}] - 2 x^4) / Power[x, (4)^{-1}] \ [DifferentialD]x$ ]}], {Framed@Row[{"The correct answer is ", If [FullSimplify[ If[StringCases[x1, "Integrate"] == { }, ToExpression[x1,StandardForm] // Quiet] == 4 (x)^(3/4) - (8/19) (x)^(19/4) + (12/17) (x)^(17/12) + c], "received", "excepted", "excepted"}]}], BaseStyle -> "Author"}, {{x1, "", ""}, InputField[#, String, FieldHint -> "Write current answer here...", FieldSize -> {20, 4}, BaseStyle -> "Author"] &}, AppearanceElements -> Medium] // TraditionalForm
```

На рис. 3 представлен результат выполнения программы.

Такой алгоритм позволяет создать автоматически различные индивидуальные задания для больших потоков обучающихся.

Применение разработанных материалов способствует стимулированию систематической работы обучающихся, снижению роли случайных факторов при прохождении контрольных этапов учебного процесса.

Контроль знаний с использованием подобных тестов в течение учебного семестра и при проведении итогового экзамена на базе случайно сгенерированных заданий имеет ряд преимуществ:

- позволяет поддерживать ритмичную систематическую работу студентов;
- повышение скорости проверки [3];

- устанавливает обратную связь работы студента и результата этой работы;
- повышает ответственность студента за свое обучение;
- позволяет сформировать адекватную самооценку;
- стимулирует познавательную и творческую активность и др.

Такая форма организации контроля является довольно гибкой для управления образовательным процессом. В зависимости от разработанной системы «как оценивать» и «за что оценивать» можно стимулировать те или иные формы работы, развивать планируемые компетенции.

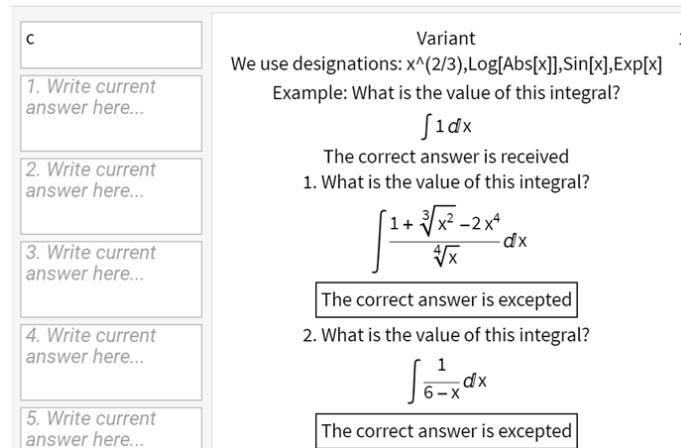


Рис. 3. Фрагмент внешнего вида тестового задания, сгенерированного случайным образом в *Wolfram Cloud*

Создание тестов в среде Delphi. Внешний вид теста представлен на рис. 4. В разработанном нами приложении каждая закладка главного меню содержит одну задачу. При нажатии кнопки «Генерация» создается вариант задачи случайным образом. При нажатии кнопки «Проверка» выводится результат выполнения задачи «Верный ответ», «Неверный ответ».

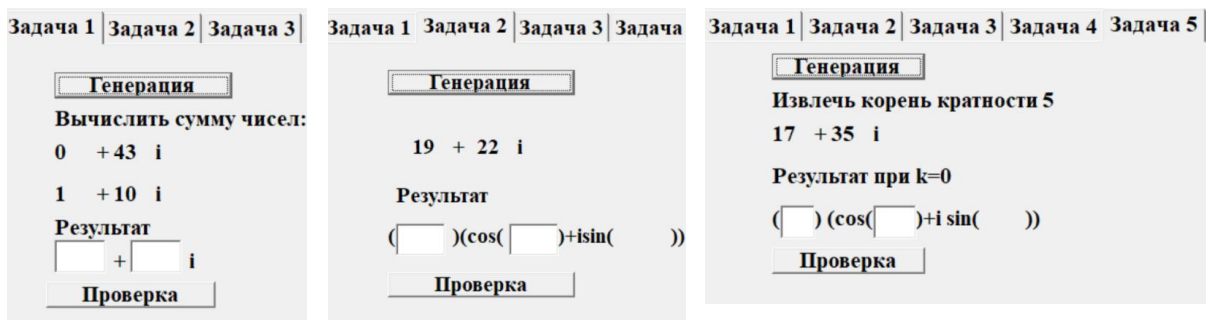


Рис. 4. Фрагмент внешнего вида тестового задания, сгенерированного случайным образом в *Delphi*

Генерация заданий по теме «Предел функции» в системе Wolfram Mathematica. Для разработки теста по этой теме учитывалось, что задачи, предложенные студенту, должны быть равнозначные.

Команда, позволяющая сгенерировать функцию, предел от которой приводит к неопределенности ∞/∞ , выглядит следующим образом:

а) $Table[\{i, (RandomInteger[6] x^{RandomInteger[5]} + (-1)^{RandomInteger[2]} RandomInteger[6] x + RandomInteger[10]) / (x^{(RandomInteger[5]+5)} (-1)^{RandomInteger[2]} x + RandomInteger[10])\}, \{i, 1, 30\}] // TableForm$

б) `Table[{i,(RandomInteger[6] x^(RandomInteger[5]+5)+ (-1) ^RandomInteger[2] RandomInteger[6] x^(RandomInteger[5]+6)+RandomInteger[10])/(x^RandomInteger[5]+ (-1) ^RandomInteger[2] x+RandomInteger[10])},{i,1,30}]/TableForm`

Команда, позволяющая сгенерировать функцию, предел от которой приводит к неопределенности 0/0, выглядит следующим образом:

`For[i=1,i<=30,i++,t=RandomInteger[10];Print[{i,Expand[(x-t)(x-RandomInteger[{1,3}])]/Expand[(x-t)(x-RandomInteger[{4,6}])]}]]`

Задание на тему «Первый замечательный предел» может быть сгенерировано следующим образом:

`For[i=1,i<=30,i++,t=RandomInteger[10]+1;Print[{i,Sin[Expand[RandomInteger[{2,6}] (x-t)(x+RandomInteger[{1,3}])]/Expand[RandomInteger[{1,2}] (x-t) (x+RandomInteger[{5,9}])],x->t]}]]`

Для закрепления темы «Применение эквивалентных бесконечно малых функций» может быть использован следующий пример:

`For[i=1,i<=30,i++,t=RandomInteger[10]+1;Print[{i,Sin[Expand[RandomInteger[{2,6}] ArcTan[(x-t)]]/Expand[RandomInteger[{1,2}] (x-t) (x+RandomInteger[{5,9}])],x->t]}]]`

Задание на тему «Второй замечательный предел» может быть сгенерировано следующим образом:

`For[i=1,i<=30,i++,t=RandomInteger[10]+1;Print[{i,(1+1/Expand[(t (n+RandomInteger[{1,30}]))]^(n+RandomInteger[{31,50}]))]}]]`

Задание на тему «Применение правила Лопиталья»:

а) `For[i=1,i<=30,i++,t=RandomInteger[10]+1;Print[{i,Ln[x-RandomInteger[{1,3}]]-Ln[x-RandomInteger[{4,70}]],x->[Infinity]}]]`

б) `For[i=1,i<=30,i++,t=RandomInteger[10]+1;Print[{i,(t^(2x)+t^x+RandomInteger[{2,5}])/(RandomInteger[{12,15}]^x+RandomInteger[{2,5}]),x->0]}]]`

Задание на тему «Применение тригонометрических формул»:

`For[i=1,i<=30,i++,t=RandomInteger[10]+1;Print[{i,Sin[x]^2/Expand[(t (1-Cos[t x]))],x->0]}]].`

5 ВЫВОДЫ

Применение информационных технологий и тестового контроля знаний, умений и навыков становится все более перспективным элементом образовательного процесса.

Интерактивное тестирование позволяет оперативно и объективно проверить уровень знаний студентов, своевременно ликвидировать затруднения в усвоении материала. Обучающиеся получают возможность самостоятельно проверить уровень своих сформированных умений при помощи интерактивного тестирования.

Стандартизированная форма оценки знаний, которая используется в интерактивных тестах, позволяет соотнести уровень достижений по дисциплине в целом, по определенным разделам, по определенным типам задач.

Также организация интерактивного тестирования позволяет осуществить мотивационные функции оценки и повысить интерес студента к изучаемой дисциплине. Применение интерактивных тестов способствует повышению уровня информационной и коммуникативной грамотности преподавателей и студентов и направлено на решение важнейшей задачи высшей школы и образования в целом – научить обучающихся плодотворно трудиться в мире глобальной информатизации. Использование интерактивных тестов направлено на формирование учебно-познавательных, ценностно-смысловых, информационных и коммуникативных компетенций. Создаются условия, которые позволяют развивать у учащихся умение

отвечать на поставленный вопрос, ставить перед собой цели, принимать решения. Компетенция личностного самосовершенствования проявляется в аспекте интеллектуального саморазвития, эмоциональной саморегуляции, самостоятельности и самооценки.

Литература

1. Кравченя Э. М. Методика обучения взрослых использованию информационных технологий в образовательном процессе. Кіраванне у адукації. 2008. № 11. С. 27–32.
2. Жук О. Л. Компетентностный подход в преподавании психолого-педагогических дисциплин в вузе. Высшэйшая школа. 2011. №1. С. 25–28.
3. Русак Т. В., Таборовец В. В. Интерактивное тестирование при проведении учебных занятий по программированию. Управление в социальных и экономических системах: материалы XVIII международной научной-практической конференции. Минск. 2009. С. 170–171.
4. Слостенин В. А., Исаев И. Ф., Шиянов Е. Н. Педагогика. М. : Академия, 2002. 576 с.
5. Кибирев А. А., Веревкина Т. А. Интерактивные методы обучения: теория и практика. Хабаровск : ХК ИППК ПК, 2003. 117 с.
6. Ступина С. Б. Технологии интерактивного обучения в высшей школе. Саратов : Наука, 2009. 52 с.
7. Панфилова А. П. Инновационные педагогические технологии: активное обучение. М. : Академия, 2009. 192 с.
8. Борисова И.И., Ливанова Е. Ю. Интерактивные формы и методы обучения в высшей школе. Н. Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2011. 65 с.
9. Реутова Е. А. Применение активных и интерактивных методов обучения в образовательном процессе вуза. Новосибирск: НГАУ, 2012. 58 с.
10. Гундина М. А., Кондратьева Н. А. Применение облачных технологий в математической подготовке студентов технического университета. Вестник ВГУ. Витебск. 2020. №2. С. 5–9.

References

1. Kravchenya, E. M. (2008). Metodika obucheniya vzroslyh ispol'zovaniyu informacionnyh tekhnologij v obrazovatel'nom processe [Methodology for teaching adults to use information technologies in the educational process]. *Kiravanne u adukacyi* [Management in education], 11, 27–32. [in Russian].
2. Zhuk, O. L. (2011). Kompetentnostnyj podhod v prepodavanii psihologo-pedagogicheskikh disciplin v vuze [Competence approach in teaching psychological and pedagogical disciplines at a university]. *Vyshejschaya shkola* [High school], 1, 25–28. [in Russian].
3. Rusak, T. V., Taborovec, V. V. (2009). Interaktivnoe testirovanie pri provedenii uchebnyh zanyatij po programmirovaniyu [Interactive testing when conducting training sessions on programming]. *Upravlenie v social'nyh i ekonomicheskikh sistemah: materialy HVIII mezhdunarodnoj nauchnoj-prakticheskoy konferencii* [Management in social and economic systems: materials of the XVIII international scientific and practical conference], 170–171. [in Russian].
4. Slastenin, V. A., Isaev, I. F., Shiyanov, E. N. (2002). *Pedagogika* [Pedagogy]. Moskva : Akademiya. [in Russian].
5. Kibirev, A. A., Verevkina, T. A. (2003). *Interaktivnye metody obucheniya: teoriya i praktika* [Interactive teaching methods: theory and practice]. Khabarovsk : HK IPPK PK. [in Russian].
6. Stupina, S. B. (2009). *Tekhnologii interaktivnogo obucheniya v vysshej shkole* [Interactive learning technologies in higher education]. Saratov : Nauka. [in Russian].
7. Panfilova, A. P. (2009). *Innovacionnye pedagogicheskie tekhnologii: aktivnoe obuchenie* [Innovative pedagogical technologies: active learning]. Moskva : Akademiya, 192. [in Russian].
8. Borisova, I. I., Livanova, E. YU. (2011). *Interaktivnye formy i metody obucheniya v vysshej shkole* [Interactive forms and methods of teaching in higher education]. N. Novgorod : NNGU im. N. I. Lobachevskogo. [in Russian].
9. Reutova, E. A. (2012). *Primenenie aktivnyh i interaktivnyh metodov obucheniya v obrazovatel'nom processe vuza* [The use of active and interactive teaching methods in the educational process of the university]. Novosibirsk : NGAU. [in Russian].



10. Gundina, M. A., Kondrat'eva N. A. (2020). Primenenie oblachnyh tekhnologij v matematicheskoj podgotovke studentov tekhnicheskogo universiteta [Application of cloud technologies in mathematical training of students of a technical university]. *Voronezh State University Bulletin. Vitebsk*, 2, 5–9. [in Russian].

Гундина Мария Анатольевна

Белорусский национальный технический университет, к.ф.-м.н., доцент
пр.Независимости, 65 Минск, Республика Беларусь 220013
maryanatolevna@mail.ru
ORCID: 0000-0002-9385-9919

Кондратьева Наталья Анатольевна

Белорусский национальный технический университет, старший преподаватель
пр.Независимости, 65 Минск, Республика Беларусь 220013
kondr2908@mail.ru
ORCID: 0000-0002-2108-4675

Для посилань:

Гундина М. А. Разработка интерактивных тестов в Wolfram Mathematica и Delphi / М. А. Гундина, Н. А. Кондратьева // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 2. – С. 75–84.

For references:

Hundzina, M., Kandratsyeva N. (2020). Development of interactivetests in Wolfram Mathematica and Delphi. *Mechanics and Mathematical Methods*, 2 (2), 75–84.

УДК 534:624.04

ЯКІСНІ ВЛАСТИВОСТІ КОЛИВАНЬ ПРУЖНО ОБПЕРТОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

Бекшаєв С. Я.¹

¹*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація. У статті досліджуються вільні коливання абсолютно твердого тіла, яке підтримується набором лінійно пружних опор і здійснює плоскопаралельний рух. Пропонована система має два ступені свободи, що дозволяє елементарно визначати частоти і форми її власних коливань за допомогою точних аналітичних виразів. Однак ці вирази досить громіздкі, що ускладнює вивчення поведінки частот і форм при зміні характеристик системи. Тому метою роботи було з'ясування якісних властивостей форм вільних коливань в залежності від пружних, інерційних і геометричних характеристик системи, а також вивчення впливу зміни положення пружних опор на її власні частоти. Основною якісною характеристикою форми власних коливань розглянутої системи є положення її вузла – точки, яка залишається нерухомою при власних коливаннях. Для практично важливого випадку системи з двома опорами в роботі було встановлено, що в загальному випадку з двох форм, що відповідають двом різним власним частотам, одна має вузол, розташований всередині проміжку між опорами, а інша – за його межами. Знайдено аналітичні умови, яким повинні задовольняти інерційні та геометричні характеристики системи, які дозволяють визначити, яка з двох форм за номером відповідної частоти відповідає внутрішньому положенню вузла. Відзначено, що ці умови не залежать від значень коефіцієнтів жорсткості пружних опор. Також були отримані аналітичні результати, що дозволяють більш точно визначити якісну локалізацію вузла. Щоб з'ясувати поведінку власних частот при зміні положення опор, отримано явний аналітичний вираз, який дозволяє знаходити похідну від власної частоти системи по координаті, яка визначає положення будь-якої з опор. Цей результат може бути використано при розв'язанні різноманітних практичних задач, пов'язаних з управлінням і оптимізацією режимів роботи інженерних споруд, які зазнають динамічних, зокрема періодичних, впливів. Результати роботи отримані з використанням якісних методів математичної теорії коливань. Зокрема, систематично використовується теорема про вплив накладення в'язей на власні частоти пружної конструкції

Ключові слова: вільні коливання, тверде тіло, пружні опори, якісні властивості

QUALITATIVE PROPERTIES OF VIBRATIONS OF ELASTICALLY SUPPORTED RIGID BODY

S. Bekshaev¹

¹*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract. The paper investigates free vibrations of an absolutely rigid body, supported by a set of linearly elastic springs and performing a plane-parallel motion. The proposed system has two degrees of freedom, which makes it elementary to determine the frequencies and modes of its natural oscillations by using exact analytical expressions. However, these expressions are rather cumbersome, which makes it difficult to study the behavior of frequencies and modes when the characteristics of the model change. Therefore, the aim of the work was to find out the qualitative properties of the modes of free vibrations depending on the elastic, inertial and geometric characteristics of the system, as well as to study the effect of changing the position of elastic supports on its natural frequencies. The main qualitative characteristic of the mode of natural vibrations of the system in consideration is the position of its node – a point that remains stationary during natural vibrations. For the practically important case of a system with two supports, it has been established in the work that, in the general case, of two modes corresponding to two different natural frequencies, one has a node located inside



the gap between the supports, and the other – outside this gap. Analytical conditions are found that must be satisfied by the inertial and geometric characteristics of the system, which make it possible to determine which of the two modes corresponds to the internal position of the node. It is noted that these conditions do not depend on the stiffness of the supports. Analytical results were also obtained, allowing to determine a more accurate qualitative localization of the node. To clarify the behavior of natural frequencies when the position of the supports changes, an explicit expression is obtained for the derivative of the square of the natural frequency of the system with respect to the coordinate defining the position of the support. This expression can be used to solve a variety of problems related to the control and optimization of the operating modes of engineering structures subjected to dynamic, in particular periodic, effects.

The results of the work were obtained using qualitative methods of the mathematical theory of oscillations. In particular, the theorem on the effect of imposing constraints on the natural frequencies of an elastic system is systematically used.

Keywords: free vibrations, rigid body, elastic supports, qualitative properties

1 ВСТУП

Відомо, що надійна робота інженерних споруд, що знаходяться під дією динамічних, зокрема періодичних, навантажень, може бути забезпечена за рахунок пружної віброізоляції як самих споруд, так і машин і механізмів, які розташовані на спорудах і є джерелами динамічних впливів. Особливу небезпеку становлять можливі резонанси при періодичних впливах на будь-якій з власних частот спектра споруди як пружної конструкції.

Одним з ефективних прийомів захисту від резонансу є управління спектром власних частот елементів споруди, які потребують захисту. Якщо задача визначення власних частот пружних конструкцій добре вивчена, і для її розв'язання запропоновано багато ефективних методів, то проблема управління спектром власних частот пружної конструкції менш вивчена, і навіть досвідчений проектувальник не завжди може передбачити, до яких змін спектра призведе зміна того чи іншого параметра конструкції.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

При проектуванні віброізоляції часто використовують модель пружно закріпленого абсолютно твердого тіла [1-6]. Це дозволяє звести проблему до вивчення руху системи з невеликим числом ступенів свободи. При деяких спрощуючих припущеннях іноді навіть вдається отримати явні аналітичні вирази для власних частот і форм споруди. Однак ці вирази мають, як правило, громіздкий вигляд, що ускладнює якісний аналіз проблеми. Схема конструкції, використана в даній роботі, розглядалася в [6-8], де основна увага була приділена визначенню її власних частот і форм, але недостатньо досліджувалися їх якісні особливості і їх реакція на варіації її параметрів.

В низці робіт [9, 10], присвячених проблемам управління та оптимізації характеристик коливань континуальних пружних систем було відзначено роль особливостей форм їх власних коливань, зокрема розташування вузлів форм. Подібні проблеми виникають і при управлінні коливаннями пружно опертих твердих тіл, але більшість літературних джерел з огляду на відносну елементарність задачі визначення їх власних частот залишають поза увагою деякі цікаві і практично важливі якісні питання щодо засобів впливу на коливальні процеси.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою роботи є дослідження зв'язків між пружними, інерційними та геометричними параметрами пружно закріпленої споруди, яка розглядається як тверде тіло, і якісними особливостями форм його власних коливань. Зокрема, розшуковуються умови, що визначають якісну локалізацію вузла форми – точки, що залишається нерухомою при вільних коливаннях. Ставиться також задача дослідити вплив зміни положення в'язей на власні частоти.

Використовується модель споруди у вигляді абсолютно твердого тіла, обпертого на лінійно-пружні опори скінченої жорсткості. Коливання моделі передбачаються малими, що виправдовує використання лінійного наближення. У роботі використовуються якісні результати теорії коливань стрижневих систем [11].

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ.

4.1. Основна система. Розглядається система, яка зображена на рис. 1 а . Точки спирання, як і центр мас G тіла розташовані на одній прямій, яка далі називається

віссю системи. Передбачається, що при власних коливаннях переміщення точок тіла паралельні площині малюнка, а переміщення точок осі перпендикулярні осі, так що система має два ступені свободи. Маса тіла дорівнює M , момент інерції відносно осі, яка проходить через центр мас G й перпендикулярна площині рисунка, дорівнює J .

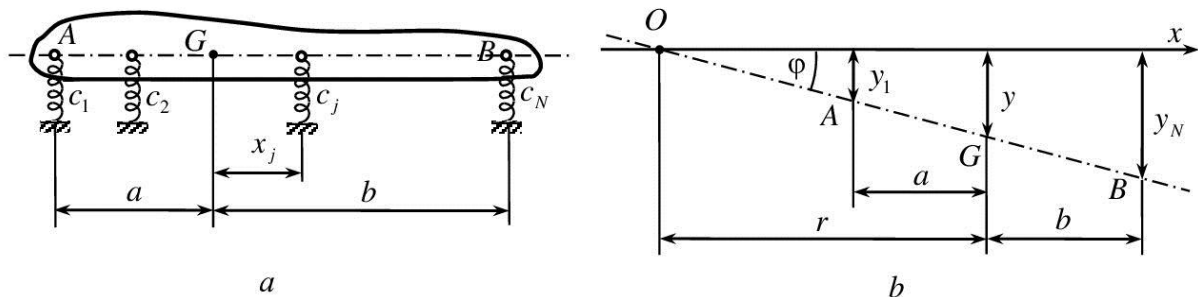


Рис. 1. Основна система (а) та її координати (b)

На осі системи введемо координатну вісь з початком в її центрі мас G . Опора з коефіцієнтом жорсткості c_j має координату x_j , Опори, розташовані зліва від центру мас, мають від'ємні координати.

4.2. Попередні відомості. Далі систематично використовується теорема про вплив накладення в'язей на власні частоти пружних систем [11]: Нехай λ_1 й λ_2 – відповідно перша (основна) та друга власні частоти пружної системи, λ^* – частота підсиленої системи, утвореної з вихідної накладанням однієї в'язі. Тоді виконуються співвідношення

$$\lambda_1 \leq \lambda^* \leq \lambda_2. \quad (1)$$

Рівності в (1) можуть здійснюватися тільки в тому випадку, коли в'язь встановлюється у вузлі форми коливань, яка відповідає одній з частот λ_1 або λ_2 .

4.3. Рівняння руху. Лінеаризовані рівняння руху системи при довільному числі опор мають вид [2]

$$M \ddot{y} = -\sum c_j y_j, \quad J \ddot{\phi} = -\sum c_j y_j x_j, \quad (2)$$

де використано позначення рис. 1.

Якщо в ролі узагальнених координат використовувати вертикальне переміщення y центра мас G і кут повороту ϕ осі системи, рівняння (2) можна привести до виду

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{y} &= -\left(\sum c_j\right)y - \left(\sum c_j x_j\right)\phi \\ J \ddot{\phi} &= -\left(\sum c_j x_j\right)y - \left(\sum c_j x_j^2\right)\phi \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Для двоопорної системи ($N = 2, x_1 = -a, x_2 = b$)

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{y} &= (c_1 + c_2)y + (c_1 a - c_2 b)\phi \\ J \ddot{\phi} &= (c_1 a - c_2 b)y - (c_1 a^2 + c_2 b^2)\phi \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Іноді в ролі узагальнених координат зручніше прийняти будь-які два з переміщень y_j . Зокрема, положення двоопорної системи можна визначати координатами y_1 й y_2 (див. рис. 1). Тоді поряд з (4) можна користуватись еквівалентною системою

$$\left. \begin{aligned} M(\beta\ddot{y}_1 + \alpha\ddot{y}_2) &= -c_1y_1 - c_2y_2 \\ \mu(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) &= c_1\alpha y_1 - c_2\beta y_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

де $\alpha = a/\ell$, $\beta = b/\ell$, $\mu = J/\ell^2$, $\ell = a + b$.

Якщо система здійснює головні коливання (при яких переміщення y_j перебувають у постійних співвідношеннях), на осі системи в загальному випадку існує нерухома точка (точка O на рис. 1) – вузол відповідної форми. У зв'язку з цим виявляється корисною ще одна форма рівняння руху

$$(J + Mr^2)\ddot{\varphi} = -\sum c_j y_j (r + x_j) = -\sum c_j (r + x_j)^2 \varphi, \quad (6)$$

де r – відстань центра мас G від вузла. Це рівняння описує рух системи тільки при двох значеннях r , які відповідають власним формам. При довільному r йому відповідає рух системи з одним ступенем свободи, отриманої встановленням одної в'язі у вигляді шарнірної опори на відстані r від центру мас.

Розшукуючи власні коливання у вигляді $y = Y \sin \sqrt{\lambda} t$, $\varphi = \Phi \sin \sqrt{\lambda} t$, відповідно $y_j = B_j \sin \sqrt{\lambda} t$, де Y , Φ й B_j – константи, прийдемо до алгебраїчної системи

$$\left. \begin{aligned} (\sum c_j - M\lambda)Y + (\sum c_j x_j)\Phi &= 0 \\ (\sum c_j x_j)Y + (\sum c_j x_j^2 - J\lambda)\Phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Зокрема, для двохопорної системи з (4) й (5) впливає

$$\left. \begin{aligned} (c_1 + c_2 - M\lambda)Y - (c_1 a - c_2 b)\Phi &= 0 \\ -(c_1 a - c_2 b)Y + (c_1 a^2 + c_2 b^2 - J\lambda)\Phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} (c_1 - \beta M\lambda)B_1 + (c_2 - \alpha M\lambda)B_2 &= 0 \\ (c_1 \alpha - \mu \lambda)B_1 - (c_2 \beta - \mu \lambda)B_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

4.4. Ортогональність. Розглянемо довільну пружну систему як сукупність матеріальних точок M_j , з'єднаних між собою та з іншими тілами за допомогою внутрішніх й зовнішніх пружних в'язей, і введемо її зміщення $s = s(M)$ – функцію, визначену на множині її точок M_j , значеннями якої є вектори $s_j = s(M_j)$ зміщень точок від їх рівноважних положень. Зміщення пружної системи з положення рівноваги породжує набір реактивних сил, зумовлених деформацією внутрішніх і зовнішніх пружних в'язей системи. Введемо у розгляд функцію $F = F(M)$ точок M_j системи, значеннями якої є рівнодіючі F_j цих сил, прикладених до точки M_j . Функція F визначається функцією зміщення s , що прийнято виражати операторною рівністю $F = Cs$. C – оператор жорсткості системи, який в силу малості зміщень точок вважається лінійним. Для двох будь-яких зміщень $s = u$ й $s = v$ виконується також теорема взаємності, яка виражається рівністю

$$(Cu, v) = (Cv, u), \quad (10)$$

де (Cu, v) означає роботу сил F_j , породжених зміщенням u , на переміщеннях точок M_j , що відповідають зміщенню v . Введемо також функцію ms , визначену на множині точок системи, значеннями якої є вектори $ms(M_j) = m_j s_j$, де m_j – маса точки M_j . Робота сил, рівних $m_j u_j$ й прикладених до точок M_j , на переміщеннях v_j , які

відповідають зміщенню v , дорівнює $(m\mathbf{u}, v) = \sum m_j u_j v_j \cos \alpha_j$, де α_j – кут між векторами $m_j \mathbf{u}_j$ й v_j . Як видно, $(m\mathbf{u}, v) = (m\mathbf{v}, \mathbf{u})$.

При головних (власних) коливаннях з власною частотою $\sqrt{\lambda}$ зміщення точок дорівнюють $s_j(t) = u_j \sin \sqrt{\lambda} t$, а їх прискорення $a_j(t) = -\lambda u_j \sin \sqrt{\lambda} t$. При головних коливаннях з іншою частотою $\sqrt{\sigma}$ відповідно $s_j(t) = v_j \sin \sqrt{\sigma} t$, $a_j(t) = -\sigma v_j \sin \sqrt{\sigma} t$. Рівняння $F_j = m_j a_j$ дозволяють записати операторні рівності

$$\begin{aligned} C\mathbf{u} &= -\lambda m\mathbf{u}, \\ C\mathbf{v} &= -\sigma m\mathbf{v}, \end{aligned} \tag{11}$$

з яких, з урахуванням (10), випливає $(\lambda - \sigma)(m\mathbf{u}, v) = (C\mathbf{u}, v) - (C\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$, звідки

$$\begin{aligned} (m\mathbf{u}, v) &= 0, \\ (C\mathbf{u}, v) &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Останні рівності виражають важливу властивість ортогональності власних форм, яка міститься у таких двох твердженнях:

- а) Робота сил інерції точок пружної системи, яка здійснює власні коливання, на зміщенні, що відповідає власним коливанням з іншою частотою, дорівнює нулю.
- б) Робота реакцій зовнішніх й внутрішніх пружних в'язей, прикладених до точок пружної системи, яка здійснює власні коливання, на зміщенні, що відповідає власним коливанням з іншою частотою, дорівнює нулю.

Необхідно розрізнити *властивість* ортогональності та *співвідношення* ортогональності. Перша – фізична властивість пружних систем. Другі – аналітичні співвідношення, що виражають цю властивість. Співвідношень ортогональності можна записати багато, використовуючи різні набори координат (не обов'язково незалежних). Зокрема, взявши замість (11) рівняння (7), й повторюючи міркування, що привели до (12), можна отримати

$$M Y_1 Y_2 + J \Phi_1 \Phi_2 = 0, \tag{13}$$

де індекс означає номер форми.

Оскільки головною частиною розглядуваної системи є тверде тіло, в якому, як відомо, сума робіт внутрішніх сил при будь-яких переміщеннях дорівнює нулю, при обчисленні $(C\mathbf{u}, v)$ належить враховувати лише зовнішні сили, тобто реакції пружних опор. Це приводить до наступної форми умови ортогональності

$$c_1 B_1^{(1)} B_1^{(2)} + c_2 B_2^{(1)} B_2^{(2)} + \dots + c_N B_N^{(1)} B_N^{(2)} = 0, \tag{14}$$

де верхній індекс означає номер форми. Для двохопорної системи

$$c_1 B_1^{(1)} B_1^{(2)} + c_2 B_2^{(1)} B_2^{(2)} = 0. \tag{15}$$

4.5. Розширена система. Вузли. Розширена система (Р-система) – система в якій до неї приєднуються невагомні точки осі, продовженої довільно в обидві сторони. Поведінка Р-системи повністю визначається рівняннями (2 - 6) руху системи. Вузол власної форми Р-системи – точка перетину її осі з рівноважним положенням осі. В-формою будемо називати форму коливань Р-системи, яка має вузол, розташований в проміжку між опорами. У цьому випадку будемо говорити також, що форма має вузол. БВ-формою (безвузловою формою) будемо називати форму коливань, вузол якої розташований по одну сторону від всіх опор або не існує (в останньому випадку вісь системи при вільних коливаннях залишається горизонтальною). Форму, вузол якої

з однією з крайніх опор, назвемо особливою. Характерні форми вільних коливань двохопорної Р-системи схематично показані на рис. 2.

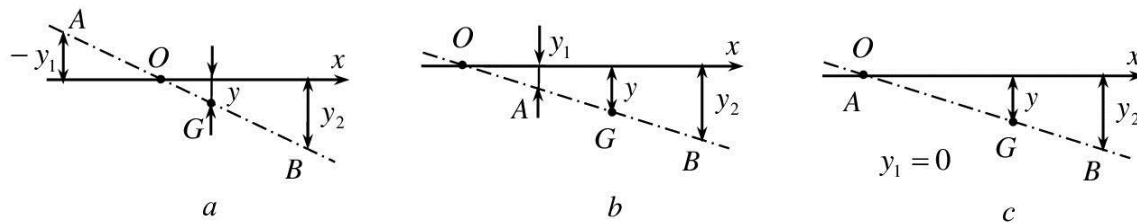


Рис. 2. Характерні форми вільних коливань двохопорної Р-системи:
а – В-форма, б – ВВ-форма, с – особлива форма

З (14) й (15) випливають такі твердження:

- 1) З двох форм вільних коливань багатоопорної ($N > 2$) системи принаймні одна є В-формою.
- 2) З двох форм вільних коливань двохопорної системи одна є В-формою, й одна – ВВ-формою, або обидві форми особливі.

4.6. Критерій наявності вузла в основній формі двохопорної моделі.

Якщо $\mu = \alpha\beta M = \alpha(1-\alpha)M$, система (9) може бути приведена до виду

$$\left. \begin{aligned} (c_1 - \beta M \lambda) B_1 + (c_2 - \alpha M \lambda) B_2 &= 0 \\ (c_1 - \beta M \lambda) \alpha B_1 - (c_2 - \alpha M \lambda) \beta B_2 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (16)$$

Її розв'язки мають вид:

$$B_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{c_2}{\alpha M}, \quad B_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{c_1}{\beta M}, \quad (17)$$

першому з яких відповідає особлива форма з вузлом на лівій опорі, а другому – на правій.

Підставимо в (9) замість μ вираз $\alpha\beta M + \varepsilon$ й прийнемо $\lambda = c_2/\alpha M + \varepsilon_1$, $B_1 = \varepsilon_2$, $B_2 = 1$. Відкидаючи степені ε вищі першої, знайдемо

$$\varepsilon_1 = -\left(\frac{c_2}{\alpha^2 M^2}\right)\varepsilon, \quad \varepsilon_2 = -\left[\frac{c_2}{(c_1\alpha - c_2\beta)M}\right]\varepsilon.$$

Якщо розглядувана частота λ є основною (найменшою), з (17) випливає $c_2/\alpha < c_1/\beta \Rightarrow c_1\alpha - c_2\beta > 0$, звідки випливає, що ε й ε_2 мають різні знаки, тобто. при зростанні μ вище $\alpha\beta M$ відповідна основна форма має координати різних знаків: $B_1 = \varepsilon_2 < 0$, $B_2 = 1 > 0$, і як наслідок має вузол.

Якщо при $\mu = \alpha\beta M = \alpha(1-\alpha)M$ частота λ є кратною, то, як видно з (17), $c_2/\alpha = c_1/\beta \Rightarrow c_1\alpha = c_2\beta$. В цьому випадку систему (9) (при довільних M й μ) можна записати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} (c_1 - \beta M \lambda) \left[B_1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) B_2 \right] &= 0 \\ (c_1\alpha - \mu\lambda)(B_1 - B_2) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

з якого визначаються дві власні частоти, рівні $c_1/\beta M$ і $c_1\alpha/\mu$. Якщо $\mu < \alpha\beta M$, перша з



них є основною і з другого рівняння (18) впливає $B_2 = B_1$, тобто. основна форма не має вузла. Якщо $\mu > \alpha\beta M$, друга з них є основною і з першого рівняння (18) впливає $B_1 + (\alpha/\beta)B_2 = 0$, тобто B_1 й B_2 мають різні знаки, внаслідок чого основна форма має вузол.

Таким чином, встановлено таке твердження:

Основна форма власних коливань двохопорної системи є БВ-формою, якщо $\mu < \alpha\beta M$, В-формою, якщо $\mu > \alpha\beta M$, та особливою формою, якщо $\mu = \alpha\beta M$.

4.7. Якісна локалізація вузла. Звернемо увагу на те, що наявність чи відсутність вузла основної форми двохопорної системи не залежить від значень c_1 й c_2 жорсткості опор.

В той же час локалізація вузла залежить від c_1 і c_2 . З (8) випливає, що при $c_1 a = c_2 b$ форми визначаються рівностями $Y = 0$ та $\Phi = 0$, тобто що одна форма має вузол в центрі мас G , а інша є горизонтальною.

Нехай тепер $c_1 a - c_2 b > 0$. Друге з рівнянь (8) показує, що $\Phi = 0$ вже не є розв'язком системи (8). Тоді основна частота $\lambda_1 < \lambda^* = (c_1 + c_2)/M$, бо λ^* – частота конструкції, утвореної з вихідної системи накладанням жорсткої в'язі, яка перешкоджає її поворотам (див. розд. 4.2). В першому з рівнянь (8) вирази в дужках додатні, звідки випливає, що основній формі відповідають Y і Φ одного знаку. Це означає, що основна форма має вузол зліва від центра мас G .

4.8. Похідна від власної частоти системи по координаті опори. Рівняння (6) має розв'язок $\varphi = \Phi \sin \sqrt{\lambda^*} t$, де $\lambda^* = \lambda^*(r, x_1, \dots, x_N)$ – квадрат частоти крутильних коливань системи з одним ступенем свободи, утвореної з основної системи введенням жорсткого шарніра в точці O ,

$$\lambda^* = \frac{\sum c_j (r + x_j)^2}{J + Mr^2}. \quad (19)$$

Як випливає з розд. 4.2., $\lambda_1 = \lambda_1(x_1, \dots, x_N) \leq \lambda^* = \lambda^*(r, x_1, \dots, x_N) \leq \lambda_2 = \lambda_2(x_1, \dots, x_N)$.

Якщо в (19) змінювати r , зафіксувавши решту змінних, тобто переміщувати введену опору по горизонталі, в загальному випадку знайдуться рівно два значення r , які відповідають мінімуму та максимуму λ^* . Ці значення визначають вузли двох форм основної системи й

$$\lambda_{\min}^*(r) = \lambda_1, \quad \lambda_{\max}^*(r) = \lambda_2. \quad (20)$$

Тому при цих значеннях r

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial r} = 0. \quad (21)$$

Розглянемо тепер частоту $\sqrt{\lambda}$ системи як функцію положення однієї з опор, координату якої позначимо через x , й обчислимо похідну від λ по x . При цьому зазначимо, що $\lambda(x) = \lambda^*(r, x)$, де r є функцією x , яка забезпечує екстремум λ^* . Тоді у відповідності з (21) й (19)

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\partial \lambda^*}{\partial x} + \frac{\partial \lambda^*}{\partial r} \frac{dr}{dx} = \frac{\partial \lambda^*}{\partial x} = \frac{2c(r+x)}{J + Mr^2}, \quad (22)$$

де c – жорсткість переміщуваної опори.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Величина $r+x$ представляє собою відстань від переміщеної опори до вузла O , взяте зі знаком «+», якщо опора знаходиться справа від O , й зі знаком «-», якщо зліва.

Отриманий вираз (22) розкриває практичне і теоретичне значення результатів роботи. Висновки розділів 4.6, 4.7 дозволяють отримати інформацію про наявність і розташування вузлів форм власних коливань, а вираз (22) показує як використати цю інформацію для ціленаправленої зміни власних частот. Зокрема, з нього випливає, що якщо опора не збігається з вузлом, для збільшення частоти її треба віддаляти від вузла.

6 ВИСНОВКИ.

В роботі встановлено залежність виду форм власних коливань пружно закріпленого твердого тіла від співвідношення параметрів, що визначають інерційні, пружні і геометричні характеристики системи. Зокрема, для двоопорної моделі виявлено, що наявність або відсутність вузла форми не залежить від жорсткості опор. Отримано результати, що дозволяють якісно локалізувати вузол форми в залежності від цих параметрів. Знайдено явні аналітичні вирази для похідних від квадратів власних частот системи по координатам опор, які дозволяють ставити і розв'язувати різноманітні задачі управління власними коливаннями пружно опертих тіл. Вивченню цих задач із застосуванням результатів, представлених в статті, будуть присвячені подальші дослідження.

Література

1. Левитский Н. И. Колебания в механизмах. М. : Наука, 1988. 336 с.
2. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. Т. 1. Колебания линейных систем / под ред. В. В. Болотина. М. : Машиностроение, 1978. 352 с.
3. Harris' shock and vibration handbook / Editors Allan G. Piersol, Thomas L. Paez, 6th ed. The McGraw-Hill Companies, Inc. 2010. 1199 p.
4. Encyclopedia of vibration / Editor-in-chief S. Braun. Academic Press. 2002. 1685 p.
5. Karnovsky I., Lebed E. Theory of vibration protection. Springer International Publishing, 2016. 674 p.
6. Глейзер А. И. Колебания автомобиля. Тольятти, Изд-во ТГУ, 2014. 78 с.
7. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Теоретическая механика, ч. III. М.-Л., ГТТИ, 1934. 624 с.
8. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Ленинград, Политехника, 1990. 272 с.
9. Бекшаев С. Я., Кошкин Л. В., Нудельман Я. Л. К вопросу об оптимальном расположении масс и опор вибрирующего стержня. Судостроение и судоремонт. М. : Рекламинформбюро ММФ. 1976. Вып. VII. С. 64 – 67.
10. Бекшаев С. Я. О возмущениях собственных частот вантово-стержневых систем, подкрепленных связями. Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. 2007. №26. С. 40 – 53.
11. Нудельман Я. Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем. М.-Л. ГТТИ, 1949. 176 с.

References

- 1 Levitsky, N. I. (1988). *Kolebaniya v mekhanizmaxh* [Oscillations in mechanisms]. М.: Nauka [in Russian].
- 2 Bolotin, V. V. (red.) (1978). *Vibratsii v tekhnike* [Vibrations in technology]. Т. 1. Kolebaniya lineinykh sistem. М.: Mashinostroenie. [in Russian].
- 3 Piersol, Allan G., Paez, Thomas L. (Editors) (2010). *Harris' shock and vibration handbook*. 6th ed. The McGraw-Hill Companies, Inc. [in English].

- 4 Braun, S. (Editor-in-chief) (2002). *Encyclopedia of vibration*. Academic Press. [in English].
- 5 Karnovsky, I., Lebed E. (2016). *Theory of vibration protection*. Springer International Publishing. [in English].
- 6 Gleizer, A. I. (2014). *Kolebaniya avtomobilya* [Vibrations of the car]. Tol'yatti: Izd. TGU. [in Russian].
- 7 Loytsyansky, L. G., Lur'e, A. I. (1934). *Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical mechanics]. M.-L.: GTTI. [in Russian].
- 8 Panovko, Ya. G. (1990). *Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara* [Fundamentals of Applied Vibration and Impact Theory]. L.: Politekhnik. [in Russian].
- 9 Bekshaev, S, Ya. (1976). K voprosu ob optimal'nom raspolozhenii mass i opor vibriruyushchego sterzhnya [On the question of the optimal arrangement of masses and supports of a vibrating rod]. *Sudostroenie I sudoremont* [Shipbuilding and ship repair]. M.: Reklaminformburo MMF, 7, 64 – 67. [in Russian].
- 10 Bekshaev, S, Ya. (2007). O vozmuscheniyakh sobstvennykh chastot vantovo-sterzhnevnykh sistem, podkreplennykh svyaziami [On perturbations of eigenfrequencies of cable-stayed rod systems, reinforced by constraints]. *Visnyk Odes'koi derzhavnoi akademii budivnitstva ta arkhitektury* [Bulletin of the Odessa State Academy of Education and Architecture], 26, 40 –53. [in Russian].
- 11 Nudelman, Ya. L. (1949) *Metody opredeleniia sobstvennykh chastot i kriticheskikh sil dlya sterzhnevnykh system* [Methods for determining natural frequencies and critical forces for rod systems]. M.-L.: GTTI. [in Russian].

Бекшаєв Сергій Янович

Одеська державна академія будівництва та архітектури, ст. викладач
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029
s.bekshayev@gmail.com
ORCID: 0000-0002-5752-5321

Для посилань:

Бекшаєв С. Я. Якісні властивості коливань пружно обпертого твердого тіла / С. Я. Бекшаєв // Механіка та математичні методи. – 2020. – том 2, вип. 2. – с. 85–94.

For references:

Bekshaev S. (2020). Qualitative properties of vibrations of elastically supported rigid body. *Mechanics and Mathematical Methods*, 2 (2), 85–94

Наукове видання

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ
MECHANICS AND MATHEMATICAL METHODS

Науковий журнал

(українською, російською та англійською мовами)

Відповідальний за випуск: Ковров А. В.

Підписано до друку 29.12.2020 р.
Формат 60×84/8 Папір офісний Гарнітура Times
Цифровий друк. Ум.-друк. арк. 11,16.
Наклад 50 прим. Зам. №21-16Е

Видавець і виготовлювач:
Одеська державна академія будівництва та архітектури
Свідоцтво ДК № 4515 від 01.04.2013 р.
Україна, 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 4.
тел.: (048) 729-85-34, e-mail: rio@ogasa.org.ua

Надруковано в авторській редакції з готового оригінал-макету
в редакційно-видавничому відділі ОДАБА