

УДК 531.38

ПРО РУХ ЗА ІНЕРЦІЄЮ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА НА ТРИСТУПЕНЕВОМУ ПІДВІСІ З ЛАНКАМИ КІНЦЕВОЇ ДОВЖИНИ

Акуленко Л. Д.¹, Болотнік М. М.¹, Лещенко Д. Д.², Палій К. С.²

¹ *Інститут проблем механіки ім. О.Ю. Ішлінського РАН*

² *Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація: В роботах, присвячених динаміці абсолютно твердого тіла з нерухомою точкою вважається, що розглядувана механічна система має три ступені вільності. Така ситуація реалізується, коли тіло закріплено на нерухомій основі за допомогою кульового шарніра. В технічних системах часто зустрічається випадок кріплення твердого тіла до основи за допомогою двоступеневого шарніра, який складається з нерухомої і рухомої осей, які, як правило, взаємно перпендикулярні. В цьому випадку система має дві ступені вільності, однак множина кінематично можливих рухів залишається достатньо багатогою.

Динамічний аналіз руху твердого тіла з двоступеневим шарнірним закріпленням в силовому полі є складовою частиною опису механічних дій робототехнічних систем. В останні десятиліття все більш значну роль в динаміці систем твердих тіл грають маніпуляційні роботи, що складаються з послідовного ланцюга жорстких ланок, які керовані за допомогою моментних приводів в шарнірних з'єднаннях. До того ж класу об'єктів можна віднести і багато біологічних систем, що імітують, наприклад, рух людини або тварини (ходьбу, біг, стрибки).

Дволанкові системи мають різноманітні практичні застосування і майже настільки ж широкий спектр напрямків теоретичних досліджень. Відзначимо зокрема, аналіз вільного і вимушеного плоскопаралельного руху зв'язки двох твердих тіл, з'єднаних ідеальним циліндричним шарніром, які моделюють складовий супутник в космічному просторі, дволанковий маніпулятор, елемент дробильної машини.

Динамічна поведінка твердого тіла в кардановому підвісі – це система, яка може бути інтерпретована як двоступеневий маніпулятор і використовуватися як елемент більш складних робототехнічних конструкцій.

Лінійна математична модель вільних коливань дволанкового маніпулятора з в'язким тертям в обох його з'єднаннях є системою, що зводиться до розрахункової схеми подвійного маятника і дозволяє побудувати точний аналітичний розв'язок в частковому випадку.

За методикою дослідження запропонована стаття близька до робіт, де вивчався рух за інерцією плоского дволанника (шарнірної зв'язки двох тіл), і присвячених дослідженню руху абсолютно твердого тіла на двоступеневому шарнірі.

Ключові слова: тверде тіло, триступеневий підвіс, рух, ланка.

ON INERTIAL MOTION OF AN ABSOLUTELY RIGID BODY ON A THREE-DEGREE SUSPENSION WITH LINKS OF FINITE LENGTH

L. Akulenko¹, N. Bolotnik¹, D. Leshchenko², E. Palii²

¹ *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences*

² *Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract: Papers on the dynamics of an absolutely rigid body with a fixed point generally assume that the mechanical system has three degrees of freedom. This is the situation when the body is attached to a fixed base by a ball-and-socket joint. On engineering systems one often encounters

rigid bodies attached to a base by a two-degrees-of-freedom joint, consisting of a fixed axis and a movable one, which are mutually perpendicular. Such systems have two degrees of freedom, but the set of kinematically possible motions is quite rich.

Dynamic analysis of the motion of a rigid body with a two-degree hinge in a force field is an integral part of the description of the action of mechanical actions of robotic systems. In recent decades, an increasingly closed role in the dynamics of rigid body systems has been played by manipulation robots consisting of a sequential chain of rigid links and controlled by means of torque drives in articulated joints. The same class of objects can be attributed to many biological systems that imitate, for example, the movements of a person or animal (walking, running, jumping). Two-link systems have a variety of practical applications and an almost equally wide range of areas of theoretical research. We note, in particular, the analysis of free and forced plane-parallel motion of a bundle of two rigid bodies connected by an ideal cylindrical hinge and simulating a composite satellite in outer space, a two-link manipulator, and an element of a crushing machine.

The dynamic behavior of a rigid body in the gimbal suspension is a system, which can be interpreted as two-degree manipulator and used an element of more complex robotic structures.

The linear mathematical model of two-link manipulator free oscillations with viscous friction in both its joints is a system, which reduces to the calculation scheme of double pendulum and allows the construction of exact analytical solution in the partial case.

According to the research methodology, the proposed paper is close to works, where the motion by inertia of a plane two-rigid body hinged system was studied and devoted to the study of the motion of an absolutely rigid body on a power-to-power joint.

Keywords: rigid body, three-degree suspension, motion, link.

1 ВСТУП

Досліджується рух за інерцією абсолютно твердого тіла, зв'язаного з нерухомою основою за допомогою триступеневого підвісу, що складається з двох тонких прямолінійних стрижнів і трьох циліндричних шарнірів.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

В [1] досліджується рух абсолютно твердого тіла, закріпленого на двоступеневому шарнірі, коли зовнішні сили, за виключенням сил реакції в шарнірі, відсутні. В статті [2] якісно розглядається рух абсолютно твердого тіла, зв'язаного з нерухомою основою за допомогою двоступеневого шарніра, в однорідному полі ваги, яке діє паралельно нерухомій осі шарніра.

Досліджується рух абсолютно твердого тіла, зв'язаного з нерухомою основою за допомогою двоступеневого шарніра, рухома та нерухома осі якого складають довільний кут [3].

В [4] розглядається задача про вільний рух шарнірної зв'язки двох тіл.

В [5] з використанням моделей і методів теорії коливань і динаміки твердого тіла проведено аналіз статичних, кінематичних і динамічних властивостей шарнірних конструкцій роботів. В роботі [6] досліджується рух абсолютно твердого тіла, з'єднаного з нерухомою основою двоступеневим шарніром, в однорідному потенціальному полі, силові лінії якого напрямлені паралельно нерухомій осі шарніра.

В статті [7] розглянуті граничні періодичні рухи маятникових дволанкових систем з коченням. В роботі [8] досліджено динамічну поведінку твердого тіла з двома ступенями вільності з вібраційною опорою. В [9] розглядається задача про розгортання в невагомості пари динамічно ідентичних тіл (космічних апаратів у формі гантелі), зв'язаних між собою нерозтяжною і невагомою плівкою, яка намотана в вигляді рулону на циліндричні поверхні тіл.

В статті [10] розглядається динамічна поведінка тіла, закріпленого в кардановому підвісі. В [11] представлений вивід рівнянь руху електромеханічного маніпуляційного робота з дволанковою рукою, що здійснює плоскопаралельні рухи в горизонтальній площині. В [12] досліджуються задачі керування дволанковим маятником з керуванням в межланковому шарнірі або в точці підвісу. В роботі [13] розглядається динаміка подвійного математичного маятника, у якого осі циліндричних шарнірів неколінеарні одна до одної і утворюють між собою деякий гострий кут.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглядається абсолютно тверде тіло G , зв'язане з нерухомою основою за допомогою підвісу, який складається з двох рухомих стрижнів і забезпечує твердому тілу три ступені вільності. Підвіс влаштовано наступним чином (рис. 1). Стрижень OO_1 (перша ланка) з'єднаний з основою так, що він може обертатися навколо нерухомої осі e_1 . Стрижень O_1O_2 (друга ланка) з'єднаний зі стрижнем OO_1 за допомогою циліндричного шарніру, вісь якого e_2 проходить через точку O_1 та перпендикулярна першій ланці та осі e_1 . Тверде тіло G , в свою чергу, зв'язане зі стрижнем O_1O_2 за допомогою циліндричного шарніру, вісь якого e_3 проходить через точку O_2 та перпендикулярна ланці O_1O_2 та осі e_2 . Орієнтація осей обертання e_1 , e_2 , e_3 вибирається таким чином щоб вектори e_1 , e_2 , OO_1 та O_1O_2 , e_2 , e_3 утворювали праві

трійки. Підвіс такої конструкції можна трактувати як неідеальну реалізацію кульового шарніра, що забезпечує три ступені вільності обертання абсолютно твердого тіла відносно нерухомої точки. Розглянутий підвіс перетворюється в кульовий шарнір в разі, коли довжини ланок OO_1 та O_1O_2 дорівнюють нулю. Триступеневої підвіс з кінцевими довжинами ланок, який описано вище, може використовуватися в різних керованих системах, зокрема в маніпуляційних роботах.

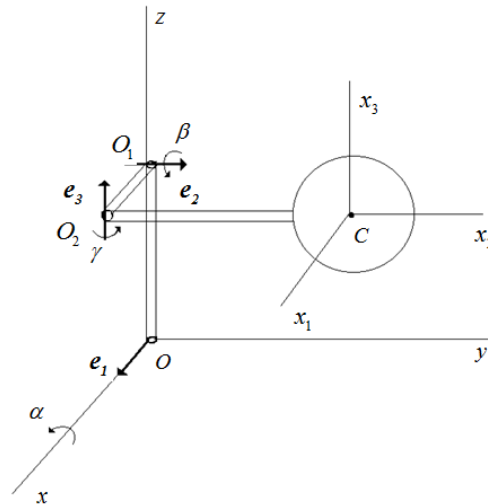


Рис. 1. Тверде тіло на триступеновому підвісі

Для опису руху розглянутої механічної системи вводяться такі праві ортогональні системи координат: нерухома (інерційна) система відліку $OX_1X_2X_3$ вісь X_1 якої колінарна e_1 ; зв'язана з тілом G система координат $Cx_1x_2x_3$, початок якої розташовано в центрі мас тіла, і вісь x_3 колінарна e_3 ; зв'язана з першою ланкою система координат $Ox'_1x'_2x'_3$ вісь x'_1 якої колінарна e_1 , а вісь x'_3 орієнтована уздовж ланки OO_1 ; система координат $Ox''_1x''_2x''_3$, яка зв'язана з другою ланкою, вісь x''_1 якої напрямлена уздовж стрижня O_1O_2 , а вісь x''_2 колінарна e_2 . Прийmemo за узагальнені координати кут α між першою ланкою підвісу та віссю X_3 нерухомої системи відліку, кут β між другою ланкою та віссю X_1 , кут γ між віссю x_2 системи координат, зв'язаної з тілом G і віссю обертання e_2 .

Коли $\alpha = \beta = \gamma = 0$ осі систем координат $OX_1X_2X_3$ та $Cx_1x_2x_3$ відповідно колінарні. Напрямок відліку кутів α, β, γ вибирається таким чином, що обертання навколо осі e_i ($i = 1, 2, 3$) зі збільшенням відповідного кута відбувається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця орта осі e_i . Куты α, β, γ – це куты Кривога першого роду [14], що визначають орієнтацію абсолютно твердого тіла (системи координат $Cx_1x_2x_3$) відносно нерухомої системи відліку.

Матриці переходу від системи координат $OX_1X_2X_3$ до $Ox'_1x'_2x'_3$, від $Ox'_1x'_2x'_3$ до $Ox''_1x''_2x''_3$ і від $Ox''_1x''_2x''_3$ до $Cx_1x_2x_3$ – це матриці повороту навколо осей e_1 (на кут α), e_2 (на кут β) і e_3 (на кут γ) відповідно:

$$\Gamma_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}, \quad \Gamma_\beta = \begin{vmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{vmatrix}, \quad \Gamma_\gamma = \begin{vmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (1)$$



Матриця переходу від нерухої системи відліку $OX_1X_2X_3$ до зв'язаної з тілом G системи координат $Sx_1x_2x_3$ визначається співвідношенням:

$$\Gamma = \Gamma_\gamma \Gamma_\beta \Gamma_\alpha. \quad (2)$$

В даній статті для простоти вважається, що ланки OO_1 та O_1O_2 підвісу – тонкі абсолютно жорсткі, однорідні прямолінійні стрижні.

Введемо такі позначення: a_1 і a_2 – довжини першої і другої ланок підвісу відповідно; ρ_1, ρ_2, ρ_3 – компоненти радіус-вектора центра мас тіла G відносно точки O_2 в системі відліку $Sx_1x_2x_3$; M – маса тіла G ; m_1, m_2 – маси ланок підвісу; I_{ii} ($i=1,2,3$) діагональні компоненти тензора інерції тіла G відносно його центра мас в системі координат $Sx_1x_2x_3$; $-I_{ij} = -I_{ji}$ ($i \neq j, i, j=1,2,3$) – недіагональні компоненти тензора інерції тіла G .

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Запишемо кінетичну енергію розглядуваної механічної системи як суму кінетичних енергій ланок підвісу та тіла G , користуючись для кожного з елементів системи відомою формулою для кінетичної енергії абсолютно твердого тіла:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}) + m(\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}}_c), \quad (3)$$

де \mathbf{R} – радіус-вектор деякої довільної точки P твердого тіла відносно полюса інерціальної системи відліку; \mathbf{r}_c – радіус-вектор центра мас тіла відносно точки P ; m – маса тіла; \mathbf{J} – тензор інерції тіла відносно точки P ; $\boldsymbol{\omega}$ – кутова швидкість тіла. Для кожного елемента механічної системи за точку P прийемо початок системи координат ($Ox_1x_2x_3, O_1x_1x_2x_3$ або $Sx_1x_2x_3$), зв'язаної з даним елементом. Тоді в нерухомій системі координат маємо такі зображення:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \Gamma_\alpha^T = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = a_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{R}_G = \mathbf{R}_2 + \Gamma_\alpha^T \Gamma_\beta^T \begin{Bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \Gamma^T \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_{c_1} = \frac{1}{2} a_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{c_2} = \frac{1}{2} \Gamma_\alpha^T \Gamma_\beta^T \begin{Bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{c_G} = 0.$$

Тут індекси 1, 2 і G вказують на те, що відповідний вектор відноситься до ланок 1 і 2 або до тіла G , верхній індекс T означає транспонування матриці. Кутові швидкості елементів системи, задані в зв'язаних з ними системах координат, визначаються наступними виразами (кінематичними рівняннями):

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{Bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_G = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma \\ -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Кінематичні рівняння (5) можуть бути виведені з матриць переходу (1), (2) за описуваним нижче правилом [15,16]. Нехай Γ_i ($i=1, 2, G$) – матриці переходу від

системи координат $OX_1X_2X_3$ до системи координат, зв'язаної з відповідним елементом. Тоді вектор ω_i кутової швидкості даного елемента відносно нерухомої системи відліку в зв'язаній системі координат має вигляд:

$$\omega_i = \begin{pmatrix} \Omega_{32} \\ \Omega_{43} \\ \Omega_{21} \end{pmatrix}, \quad \Omega = \Gamma_i \dot{\Gamma}_i^T \quad (i = \alpha, \beta, \gamma). \quad (6)$$

Для одержання (5) з (6) необхідно покласти $\Gamma_1 = \Gamma_\alpha$, $\Gamma_2 = \Gamma_\beta \Gamma_\alpha$, $\Gamma_G = \Gamma_\gamma \Gamma_\beta \Gamma_\alpha$. Вирази для кінетичної енергії ланок підвісу, обчислені відповідно до (3) - (5) мають вигляд:

$$T_1 = \frac{1}{6} m_1 a_1^2 \dot{\alpha}^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[\left(a_1^2 + \frac{1}{3} a_2^2 \sin^2 \beta - a_1 a_2 \sin \beta \right) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{3} a_2^2 \dot{\beta}^2 \right]. \quad (7)$$

Вираз для кінетичної енергії T_G тіла G дуже громіздкий і тут не наводиться. Функція T_G в загальному випадку являє собою квадратичну форму узагальнених швидкостей з коефіцієнтами, що залежать від узагальнених координат β і γ , а також від параметрів $a_1, a_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3, I_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$), M . Відзначимо, що від координати α формули T_1, T_2, T_G не залежать. Надалі буде розглядатися окремий випадок, коли T_G не залежить від γ . Аналіз показує, що для цього необхідно, щоб $\rho_1 = \rho_2 = 0, I_{11} = I_{22}, I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$, тобто тіло G повинно бути динамічно симетричним, а вісь динамічної симетрії повинна збігатися з віссю обертання e_3 підвісу. В цьому випадку кінетична енергія тіла G має вигляд:

$$T_G = \frac{1}{2} \left\{ \left[(C - A + M a_2^2 - M \rho_3^2) \sin^2 \beta - 2M a_1 a_2 \sin \beta + 2M \rho_3 \cos \beta (a_1 - a_2 \sin \beta) + A + M \rho_3^2 + M a_1^2 \right] \dot{\alpha}^2 + \left[A + M (\rho_3^2 + a_2^2) \right] \dot{\beta}^2 + C \dot{\gamma}^2 + 2C \sin \beta \dot{\alpha} \dot{\gamma} \right\}. \quad (8)$$

Тут через A і C позначені відповідно екваторіальний і осьовий моменти інерції тіла ($A = I_{11} = I_{22}, C = I_{33}$). Підсумовуючи (7) і (8), одержуємо вирази для повної кінетичної енергії системи:

$$T = T_1 + T_2 + T_G = \frac{1}{2} \left[a(\beta) \dot{\alpha}^2 + b \dot{\beta}^2 + C \dot{\gamma}^2 + 2C \sin \beta \dot{\alpha} \dot{\gamma} \right], \quad (9)$$

$$a(\beta) = A_1 \sin^2 \beta - A_2 \sin \beta + 2M \rho_3 \cos \beta (a_1 - a_2 \sin \beta) + A_0,$$

$$A_0 = A + M \rho_3^2 + a_1^2 \left(M + m_2 + \frac{m_1}{3} \right), \quad A_1 = C - A - M \rho_3^2 + M a_2^2 + \frac{m_2 a_2^2}{3},$$

$$A_2 = a_1 a_2 (2M + m_2), \quad b = A + M \rho_3^2 + a_2^2 \left(M + \frac{m_2}{3} \right).$$

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо випадок, коли тертя в осях шарнірів відсутнє (ідеальні шарніри) і на систему не діють ніякі зовнішні сили за винятком реакції нерухомої осі e_1 . Тоді лагранжіан системи це її кінетична енергія (9), яка зберігається під час руху. Оскільки T не залежить явно від α і γ (α і γ – циклічні координати), розглядувана система має, крім кінетичної енергії, ще два перших інтеграла:



$$L_\alpha = \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\alpha}} = a(\beta)\dot{\alpha} + C \sin \beta \dot{\gamma},$$

$$L_\gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\gamma}} = C \sin \beta \dot{\alpha} + C \dot{\gamma}.$$
(10)

З (10) $\dot{\alpha}$ і $\dot{\gamma}$ виражаються через координату β , інерційні параметри системи і значення інтегралів руху L_α і L_β :

$$\dot{\alpha} = \frac{L_\alpha - L_\gamma \sin \beta}{D(\beta)};$$

$$\dot{\gamma} = \frac{a(\beta)L_\gamma - CL_\alpha \sin \beta}{CD(\beta)};$$

$$D(\beta) = a(\beta) - C \sin^2 \beta.$$
(11)

Відмітимо, що $D(\beta) > 0$. Дійсно, як випливає з (9), (11), при $C = 0$ і $\beta = 0$ маємо $T = 1/2 D(\beta) \dot{\alpha}^2$, і $D(\beta) > 0$ в силу позитивної визначеності кінетичної енергії. Підставляючи (11) в (9), маємо:

$$\frac{b\dot{\beta}^2 + (L_\alpha - L_\gamma \sin \beta)^2}{D(\beta)} = E_* = 2T - \frac{L_\gamma^2}{C}.$$

Це рівняння еквівалентне наступному:

$$\frac{\mu(\beta)\dot{\beta}^2}{2} + \Pi(\beta) = E;$$

$$\mu(\beta) = 2bD(\beta) > 0; \quad E = E_* A_0 - L_\alpha^2;$$

$$\Pi(\beta) = D_1 \sin^2 \beta - D_2 \sin \beta - 2E_* M \rho_3 \cos \beta (a_1 - a_2 \sin \beta);$$

$$D_1 = E_*(A_1 - C) - L_\gamma^2; \quad D_2 = L_\alpha L_\gamma - \frac{E_* A_2}{2}.$$
(12)

Розв'язування рівнянь (11) і (12) зводиться до обчислення квадратур за стандартною схемою. Спочатку інтегрується рівняння (12), що дає

$$\int_{\beta_0}^{\beta} \left\{ \frac{\mu(\beta)}{2[E - \Pi(\beta)]} \right\}^{\frac{1}{2}} d\beta = \pm(t - t_0),$$
(13)

де t_0 – початковий момент часу, якому відповідають початкові значення координати $\beta = \beta_0$. Знак в правій частині (13) збігається зі знаком швидкості $\dot{\beta}$ в початковий момент часу. Якщо $\dot{\beta}(t_0) = 0$, то зазначений знак протилежний знаку похідної $\Pi(\beta)$ в точці β_0 . Якщо $\dot{\beta}(t_0) = 0$ і $\Pi'(\beta_0) = 0$, то $\beta(t) \equiv \beta_0$.

Розв'язуючи (13) відносно β , отримуємо явну залежність координати β від часу: $\beta = \beta(t)$. Підставляючи потім цю формулу в (11) та інтегруючи відповідні рівняння за часом, знайдемо $\alpha = \alpha(t)$ і $\gamma = \gamma(t)$.

У загальному випадку квадратури, що дають розв'язок рівнянь (11), (13), не виражаються в термінах функцій, зручних для аналітичного дослідження. Тому скористаємося якісними моделями для аналізу руху розглянутої системи.

Рух по куту β описується рівнянням (12), яке не залежить від рівнянь (11). Рівняння (12) за формою збігається з інтегралом енергії консервативної механічної

системи з одним ступенем вільності, кінетична і потенційна енергія якої дорівнюють $\mu(\beta)\beta^2/2$ і $\Pi(\beta)$ відповідно. Найбільш ефективним методом якісного аналізу таких систем є метод фазової площини. Фазовий портрет визначається властивостями функції, див., наприклад, [17]. Дослідимо цю функцію для окремого випадку $\rho_3 = 0$, що відповідає збігу кінця другої ланки підвісу (точки O_2) з центром мас тіла G . В цьому випадку

$$\Pi(\beta) = D_1 \sin^2 \beta - 2D_2 \sin \beta. \quad (14)$$

Функція (14) неперервна і 2π -періодична по β (і, отже, обмежена). Знайдемо стаціонарні точки функції на проміжку $[0, 2\pi]$. Диференціюючи (14), одержуємо

$$\frac{d\Pi}{d\beta} = 2 \cos \beta (D_1 \sin \beta - D_2). \quad (15)$$

З (15) випливає, що при всіх значеннях параметрів механічної системи і інтегралів руху T , L_α , L_γ функція $\Pi(\beta)$ має стаціонарні точки

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \beta_2 = \frac{3\pi}{2}, \quad (16)$$

причому якщо $|D_2| > |D_1|$, то інших стаціонарних точок немає.

Аналіз вищих похідних показує, що β_1 - точка максимуму, якщо $D_2 < D_1$ і точка мінімуму, якщо $D_2 \geq D_1$. Аналогічно, β_2 - точка максимуму, якщо $D_1 > -D_2$ і точка мінімуму, якщо $D_1 \leq -D_2$.

Якщо $|D_2| \leq |D_1|$ і $D_1 \neq 0$, то функція $\Pi(\beta)$ окрім точок (16) має стаціонарні точки.

Поведінка функції $\Pi(\beta)$ залежить від співвідношень між параметрами D_1 та D_2 , а саме:

1) якщо $D_2 < -|D_1|$, то $\Pi(\beta)$ має два екстремуми на проміжку $[0, 2\pi)$: максимум, коли $\beta = \beta_1 = \pi/2$, та мінімум, коли $\beta = \beta_2 = 3\pi/2$;

2) якщо $D_2 > |D_1|$, то $\Pi(\beta)$ має два екстремуми: мінімум, коли $\beta = \beta_1$, та максимум, коли $\beta = \beta_2$;

3) якщо $D_1 > -D_2$ та $D_2 < 0$, тоді $\Pi(\beta)$ має чотири екстремуми: максимуми, коли $\beta = \beta_1$ та $\beta = \beta_2$, та мінімуми, коли $\beta = \beta_3$ та $\beta = \beta_4$, абсолютний максимум досягається в точці $\beta = \beta_1$;

4) якщо $D_1 > D_2 > 0$, то $\Pi(\beta)$ має чотири екстремуми: максимуми, коли $\beta = \beta_1$ та $\beta = \beta_2$, та мінімуми, коли $\beta = \beta_3$ та $\beta = \beta_4$, абсолютний максимум досягається в точці $\beta = \beta_2$;

5) якщо $D_1 < D_2 < 0$, то $\Pi(\beta)$ має чотири екстремуми: максимуми, коли $\beta = \beta_3$ та $\beta = \beta_4$, та мінімуми, коли $\beta = \beta_1$ та $\beta = \beta_2$, абсолютний максимум досягається в точці $\beta = \beta_2$;

6) якщо $D_1 < -D_2 < 0$, то $\Pi(\beta)$ має чотири екстремуми: максимуми, коли $\beta = \beta_3$ та $\beta = \beta_4$, та мінімуми, коли $\beta = \beta_1$ та $\beta = \beta_2$, абсолютний максимум досягається в точці $\beta = \beta_1$.

Для прикладу на рис. 2 показаний графік функції $\Pi(\beta)$ у випадку 4). Виходячи з графіка цієї функції, можна визначити всі якісно різні типи руху розглядуваної механічної системи по координаті β , користуючись відомою методикою аналізу консервативних систем з одним ступенем вільності. Нижче наводиться класифікація рухів для випадку 4), що відповідає рис. 2.

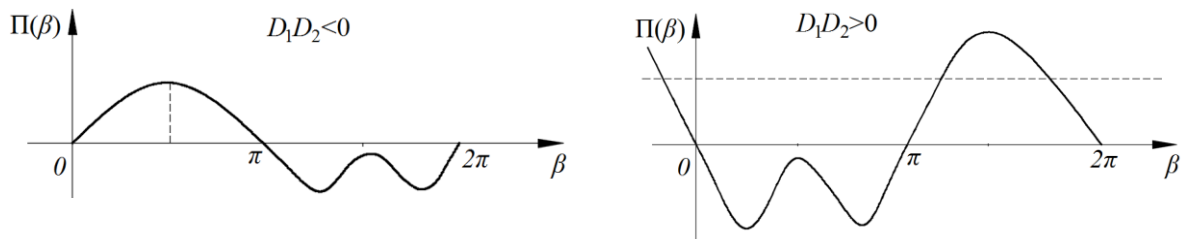


Рис. 2. Графік функції $\Pi(\beta)$ у випадку 4)

Якщо $E > \Pi_{\max} = D_1 + 2D_2$, то система здійснює періодичні обертання по куту β з періодом

$$\tau_r = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\mu(\beta)}{2[E - \Pi(\beta)]} \right\}^{\frac{1}{2}} d\beta. \quad (17)$$

Якщо $E = \Pi_{\max}$, то система або здійснює рухи по сепаратрисі, яка проходить через положення нестійкої рівноваги $\beta = \beta_2 = 3\pi/2$, що відповідає максимуму функції $\Pi(\beta)$, або покоїться в зазначеному положенні рівноваги. Рух по сепаратрисі відповідає в даному випадку повному оберту системи навколо осі e_2 за нескінченний час.

Якщо $D_1 - 2D_2 = \Pi(\beta_1) < E < \Pi_{\max}$, то система здійснює коливання між точками

$$\beta_-^{(0)} = \arcsin \left\{ \frac{D_2 - (D_2^2 + D_1 E)^{\frac{1}{2}}}{D_1} \right\} \text{ і } \beta_+^{(0)} = \pi - \beta_-^{(0)}.$$

Період цих коливань дорівнює

$$\tau_v^{(0)} = 2 \int_{\beta_-^{(0)}}^{\beta_+^{(0)}} \left\{ \frac{\mu(\beta)}{2[E - \Pi(\beta)]} \right\}^{\frac{1}{2}} d\beta. \quad (18)$$

Вирази для $\beta_{\pm}^{(0)}$ одержуються з розв'язання рівняння $\Pi(\beta) = E$, де $\Pi(\beta)$ визначається формулою (14). Якщо $E = \Pi(\beta_1)$, то система або здійснює рух по сепаратрисі, яка проходить через положення нестійкої рівноваги $\beta = \beta_1 = \pi/2$, що відповідає локальному максимуму функції $\Pi(\beta)$, або покоїться в зазначеному положенні рівноваги. Рух по сепаратрисі тут відповідає "коливанням" між точками $\beta = \beta_-^{(1)}$ і $\beta = \pi/2$ або між точками $\beta = \pi/2$ і $\beta = \beta_+^{(1)}$ з нескінченно великим періодом (прихід в положення нестійкої рівноваги $\beta = \pi/2$ з будь-якого стану відбувається за нескінченно великий час).

Якщо $E_{\min} = -D_2^2/D_1 < E < \Pi(\beta_1)$, то система здійснює коливання між точками $\beta_-^{(2)} = \beta_-^{(1)}$ і $\beta_+^{(2)} = \arcsin \left\{ \left[D_2 + (D_2^2 + D_1 E)^{1/2} \right] / D_1 \right\}$ або між точками

$\beta_-^{(2)} = \pi - \arcsin \left\{ \left[D_2 + (D_2^2 + D_1 E)^{1/2} \right] / D_1 \right\}$ і $\beta_+^{(2)} = \beta_+^{(1)}$. Період цих коливань визначається формулою (18) із заміною індексу (1) на (2).

Якщо $E = E_{\min}$, то система може знаходитися в одному з двох стійких положень рівноваги ($\beta = \beta_3$ або $\beta = \beta_4$).

Аналогічну класифікацію рухів можна провести і для решти п'яти випадків співвідношень між параметрами D_1 і D_2 .

Якщо $\beta = const$, тобто по координаті β система знаходиться в одному з положень рівноваги, про які розповідалося в розд.3, то як впливає з (11), по кутах α і γ система рівномірно обертається зі сталими кутовими швидкостями $\dot{\alpha}$ і $\dot{\gamma}$.

Якщо за кутом β відбувається обертання, то за період обертання τ_r (див. (17)) кути α і γ отримують відповідно збільшення

$$\begin{aligned} \Delta_r \alpha &= L_\alpha \Omega_1^r - L_\gamma \Omega_1^r, \quad \Delta_r \gamma = L_\gamma \Omega_3^r - L_\alpha \Omega_2^r, \\ \Omega_1^r &= \int_0^{2\pi} \eta(\beta) D^{-1}(\beta) d\beta, \quad \Omega_2^r = \int_0^{2\pi} \eta(\beta) \sin \beta \cdot D^{-1}(\beta) d\beta, \\ \Omega_3^r &= \int_0^{2\pi} \eta(\beta) a(\beta) [CD(\beta)]^{-1} d\beta, \quad \eta(\beta) = \left\{ \frac{\mu(\beta)}{2[E - \Pi(\beta)]} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Формули (19) знаходяться шляхом інтегрування рівнянь (11) по t в межах від t_0 до $t_0 + \tau_r$ з заміною змінної інтегрування на β відповідно до (13).

Аналогічно в разі коливань по куту β маємо:

$$\begin{aligned} \Delta_v \alpha &= L_\alpha \Omega_1^v - L_\gamma \Omega_2^v, \quad \Delta_v \gamma = L_\gamma \Omega_3^v - L_\alpha \Omega_2^v; \\ \Omega_1^v &= 2 \int_{\beta_-}^{\beta_+} \eta(\beta) D^{-1}(\beta) d\beta, \quad \Omega_2^v = \int_{\beta_-}^{\beta_+} \eta(\beta) \sin \beta \cdot D^{-1}(\beta) d\beta; \\ \Omega_3^v &= 2 \int_{\beta_-}^{\beta_+} \eta(\beta) a(\beta) [CD(\beta)]^{-1} d\beta, \end{aligned} \quad (20)$$

де β_- і β_+ – крайні положення по куту β_+ при коливаннях ($\beta_- < \beta_+$).

З (19) і (20) випливає, що за кожен період обертань (коливань) за кутом β кути α і γ отримують один і той самий приріст.

Якщо $\nu_\alpha^{r,v} = |\Delta_{r,v} \alpha / (2\pi)|$ і $\nu_\gamma^{r,v} = |\Delta_{r,v} \gamma / (2\pi)|$ – раціональні числа, то рух системи в цілому періодичний з періодом $\tau_{r,v}^0 = n\tau_{r,v}$, де n – найменший спільний знаменник чисел $\nu_\alpha^{r,v}$ і $\nu_\gamma^{r,v}$. В інших випадках рух в цілому неперіодичний.

6 ВИСНОВКИ

Досліджено рух за інерцією абсолютно твердого тіла, зв'язаного з нерухомою основою за допомогою триступеневого підвісу, який складається з двох тонких прямолінійних стрижнів і трьох циліндричних шарнірів. Підвіс такої конструкції може використовуватися в різних керованих системах, зокрема в маніпуляційних роботах. Розглядається випадок динамічно симетричного твердого тіла, вісь динамічної симетрії якого збігається з віссю обертання e_3 підвісу. Рух за кутом Крилова першого роду β

описується рівнянням, яке за формою збігається з інтегралом енергії консервативної механічної системи з одним ступенем вільності. Якісний аналіз цієї системи проведено методом фазової площини. Визначені якісно різні типи руху розглядуваної механічної системи за координатою β . Досліджено рух за іншими кутами Крилова α і γ .

Література

1. Bolotnik N. N. Inertial motions of an absolutely rigid body on a two-degrees-of-freedom joint. *J. Appl. Math. Mech.* 1994. № 58. (5). P. 841–848.
2. Bolotnik N. N. The motion of an absolutely rigid body on a two-degrees-of-freedom joint in an uniform gravitational field. *J. Appl. Math. Mech.* 1995. № 59 (6). P. 865–872.
3. Bolotnik N. N. Free motion of a rigid body on a two-degrees-of-freedom joint with nonperpendicular axes. *Mech. Solids.* 2001. № 36 (3). P. 30–41.
4. Akulenko L. D., Leshchenko D. D. Relative oscillations and rotations in a plane two-rigid-body hinged system. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela.* 1991. № 26 (2). P. 8–17.
5. Смольников Б. А. Проблемы механики и оптимизации роботов. Москва : Наука, 1991. 232 с.
6. Makeev N. N. Движение твердого тела с двухстепенным шарниром в потенциальном поле. *Вестник Саратовского государственного технического университета.* 2005. № 1(6). С. 35–54.
7. Лобас Л. Г., Хребет В. Г. О предельных периодических движениях маятниковых двузвенных систем с качением. *Прикл. механика.* 1993. Т. 29. №8. С. 85–93.
8. Ge Z.-M., Tsen P.-C. Non-linear dynamic analysis and control of chaos for a two-degrees-of-freedom rigid body with vibrating support. *J. Sound Vib.* 2001. № 240(2). P. 323–349.
9. Blinov A. P. Problem of unwinding of a rotating cluster of bodies under zero gravity. *Mech. Solids.* 2015. № 50(3). P. 256-259.
10. Леонтьев В. А., Смирнов А. С., Смольников Б. А. Динамика свободных и управляемых движений твердого тела в двухстепенном подвесе. *Робототехника и техническая кибернетика.* 2020. Т. 8. №1. С. 53–60.
11. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г. Манипуляционные роботы. Москва : Наука, 1989. 368 с.
12. Formal'skii A. M. *Stabilization and Motion Control of Unstable Objects.* Berlin/Boston : Walter de Gruyter, 2015. 250 p.
13. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Колебания двойного математического маятника с неколлинеарными шарнирами. *Современное машиностроение. Наука и образование.* 2020. №9. С. 153–165.
14. Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. Москва : Наука, 1976. 670 с.
15. Pars L. A. *A Treatise on Analytical Dynamics.* London : Heynemann, 1968. 641p.
16. Маркеев А. П. Теоретическая механика. Москва/Ижевск : РХД, 2007. 592 с.
17. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Москва : Наука, 1981. 568 с.

References

1. Bolotnik, N. N. (1994). Inertial motions of an absolutely rigid body on a two-degrees-of-freedom joint. *J. Appl. Math. Mech.*, no. 58, 5, 841–848. [in English].
2. Bolotnik, N. N. (1995). The motion of an absolutely rigid body on a two-degrees-of-freedom joint in an uniform gravitational field. *J. Appl. Math. Mech.*, no. 59, 6, 865–872. [in English].
3. Bolotnik, N. N. (2001). Free motion of a rigid body on a two-degrees-of-freedom joint with nonperpendicular axes. *Mech. Solids*, no. 36, 3, 30–41. [in English].
4. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (1991). Relative oscillations and rotations in a plane two-rigid-body hinged system. *Izv. AN SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela*, no. 26, 2, 8–17. [in English].
5. Smolnykov, B. A. *Problemy mekhaniky y opytmzatsyyu robotov* [The problems of mechanics and robotoptimization]. Moskva, Nauka. [in Russian].
6. Makeev, N. N. (2005). Dvyzhenye tverdogo tela s dvukhstepennym sharnyrom v potentsyalnom pole [The movement of a solid body with two-degree articulation joint in a conservative field]. *Vestnyk Saratovskoho hos. tekhn. un-ta* [Proceedings of Saratov State Technical University], no. 1, 6, 35–54. [in Russian].

7. Lobas, L. G., Khrebet, V. G. (1993). O predelnykh peryodycheskykh dvizheniyakh maiatnykovykh dvukhzvennykh system s kacheniyem [On limited periodic motions of two-link pendular systems with rolling]. *Prykl. mekhanyka* [Appl. Mech.], no. 29, 8, 85–93. [in Russian].
8. Ge, Z.-M., Tsen, P.-C. (2001). Non-linear dynamic analysis and control of chaos for a two-degrees-of-freedom rigid body with vibrating support. *J. Sound Vib.*, no. 240, 2, 323–349. [in English].
9. Blinov, A. P. (2015). Problem of unwinding of a rotating cluster of bodies under zero gravity. *Mech. Solids*, no. 50, 3, 256–259. [in English].
10. Leontev, V. A., Smirnov, A. S., Smolnikov, B. A. (2020). Dynamika svobodnykh i upravliaemykh dvizheniy tverdogo tela v dvukhstepennom podvese [Dynamics of free and controlled rigid body motions in the two-state suspension]. *Robototekhnika i tekhnicheskaya kibernetika* [Robotics and Technical Cybernetics], no. 8, 1, 53–60. [in Russian].
11. Chernousko, F. L., Bolotnik, N. N., Ggradetsky, V. G. (1989). *Manypuliatyionnye roboty* [Manipulation Robots. Dynamics, Control, Optimization]. Moskva, Nauka. [in Russian].
12. Formal'skii, A. M. (2015). *Stabilization and Motion Control of Unstable Objects*. Berlin/Boston: Walter de Gruyter. [in English].
13. Smirnov, A. S., Smolnikov, B. A. (2020). Kolebaniya dvoynogo matematycheskogo maiatnyka s nekollynearnyimi sharnyramy [Oscillations of a double mathematical pendulum with non-collinear joints]. *Sovremennoe mashynostroeniye. Nauka y obrazovaniye* [Modern mechanical engineering. Science and education], no. 9, 153–165. [in Russian].
14. Ishlinsky, A. Y. (1976). *Oryentatsiya, hyroskopy y unertsyalnaia navyhatsiya* [Orientation, Gyros and Inertial Navigation]. Moskva, Nauka. [in Russian].
15. Pars, L. A. (1968). *A Treatise on Analytical Dynamics*. London: Heynemann. [in English].
16. Markeev, A. P. (2007). *Teoretycheskaya mekhanyka* [Theoretical Mechanics]. Moskva–Izhevsk: RChD. [in Russian].
17. Andronov, A. A., Khaikin, S. E. (1981). *Teoriya kolebaniy* [Theory of Oscillations]. Moskva: Nauka. [in Russian].

Акуленко Леонід Денисович

Інститут проблем механіки ім. О.Ю. Ішлінського РАН, д.ф.-м.н., професор
Проспект Вернадського, д. 101, Москва, Росія 119526
l.akulenko@bk.ru
ORCID: 0000-0003-3209-1472

Болотнік Микола Миколайович

Інститут проблем механіки ім. О.Ю. Ішлінського РАН, член-кореспондент РАН, д.ф.-м.н.,
Проспект Вернадського, д. 101, Москва, Росія 119526
bolotnik@ipmnet.ru
ORCID: 0000-0003-1939-0099

Лещенко Дмитро Давидович

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.ф.-м.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
leshchenko_d@ukr.net
ORCID: 0000-0003-2436-221X

Палій Катерина Сергіївна

Одеська державна академія будівництва та архітектури, асистент
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
ESChernyakova@gmail.com
ORCID: 0000-0002-5553-2405

Для посилань:

Акуленко Л. Д., Про рух за інерцією абсолютно твердого тіла на тріступеневому підвісі з ланками кінцевої довжини/ Л. Д. Акуленко, М. М. Болотніков, Д. Д. Лещенко, К. С. Палій // Механіка та математичні методи. 2020. Том 2, Вип. 2. С. 6–17.

For references:

Akulenko, L., Bolotnik, N., Leshchenko, D., Paliy, E. (2020). On inertial motion of an absolutely rigid body on a three-degree suspension with links of finite length. *Mechanics and Mathematical Methods*, 2 (2), 6–17.