УДК 514.765.1+512.813.4

УКОРОЧЕНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРІВ АФФІННОЇ ЗВ’ЯЗНОСТІ

Кіосак В. А.[1], Каменева А. В.[2]
[1]*Одеська державна академія будівництва та архітектури*
[2]*Національний університет "Одеська морська академія"*

Анотація: Маючи довгу історію, теорія відображень отримала нове дихання завдяки тензорним методам дослідження. Введене сто років тому поняття афінної зв’язності, дозволило по новому поглянути на класичні геометричні задачі. В цій роботі, слідуючи загально прийнятій традиції, вводиться поняття відображення простору афінної зв’язності. Модифікуючи методику А. П. Нордена, знайдено формули, яким задовольняють основні тензори: тензор деформації, тензор Рімана, тензор Річчі та їх перші і другі коваріантні похідні для просторів A_n та $\bar{A}_n$, які пов’язані заданим відображенням. В цих формулах присутні як об’єкти A_n, так і $\bar{A}_n$ з коваріантними похідними по відповідних зв’язностях. Для спрощення, введене поняття укороченого відображення і його спеціального випадку – половинного відображення. Зв’язність, яка виникає при половинному відображенні, названа середньою.

Попередні формули при переході до коваріантних похідних в середній зв’язності значно спрощуються. Це дозволяє отримати ознаки (необхідні умови) того, що при заданих відображеннях зберігається об’єкт простору афінної зв’язності внутрішнього характеру. Об’єктами внутрішнього характеру називаються геометричні об’єкти отримані з афінної зв’язності. До таких об’єктів відносять тензор Рімана, тензор Річчі, тензор Вейля. Для всіх таких відображень отримані диференціальні рівняння в коваріантних похідних, яким за необхідністю задовольняє тензор деформації зв’язності.

Вивчення цих рівнянь, природно, проводити, досліджуючи умови інтегрування. Умови інтегрування мають вид алгебраїчних перевизначених систем, тому виникає потреба в додатковій спеціалізації чи просторів, чи об’єктів цих просторів.

Використовуючи методику Н. С. Синюкова та Й. Мікеша, при виконанні певних алгебраїчних умов, отримано вид тензора деформації зв’язності при заданому відображенні.

Зауважимо, що середня зв’язність вибрана лише з міркувань спрощення виду обчислень. В залежності від потреб моделі, що будується, або з фізичних міркувань, може бути побудована інша, більш придатна для даних умов зв’язність і відповідно відображення.

Особливо зручним такий підхід виглядає в застосуванні до інваріантних перетворень, які пов’язують пари просторів афінної зв’язності через їх тензор деформації зв’язності.

Ключові слова: простори афінної зв’язності; відображення; тензор деформації.

SHORTENED MAPPINGS OF SPACES WITH AFFINE CONNECTIVITY

V. Kiosak[1], A. Kamienieva[2]
[1]*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*
[2]*National University "Odessa Maritime Academy"*

Abstract: The long history of theory of mappings was revived thanks to the tensor methods of inquiry. The notion of affine connectivity was introduced a hundred years ago. It enabled us to look at classic geometric problems from a different angle.

Following the common tradition, this paper introduces a notion of a mapping for a space of affine connectivity. Modifying the method of A. P. Norden, we found the formulae for the main tensors: deformation tensor, Riemann tensor, Ricci tensor and their first and second covariant derivatives for

spaces A_n and $\bar{A}_n$, which are connected by a given mapping. These formulae contain both objects of A_n and $\bar{A}_n$ with covariant derivatives in respect to relevant connectivities. In order to simplify the expression, we introduced the notion of shortened mapping and its particular case: a half-mapping. The connectivity that appears in the case of a half-mapping is called a medium connectivity.

The above mentioned formulae can be notably simplified in the case of transition to covariant derivatives in the medium connectivity. This fact permits us to obtain characteristics (the necessary conditions) for the estimates whether an object of inner character from the space of affine connectivity is preserved under a given type of mappings. Objects of the inner character are geometric objects implied by an affine connectivity. They include Riemann tensor, Ricci tensor, Weyl tensor. Every type of mapping received its own set of differential equations in covariant derivatives, which define a deformation tensor of connectivity with a necessity.

The study of these equations can proceed by a research on integrability conditions. Integrability conditions are algebraic over-defined systems. That’s why there is a constant need in introduction of additionally specialized spaces or certain objects of these spaces.

Applying the method of N. S. Sinyukov and J. Mikes, in the case of certain algebraic conditions, we obtained a form of a deformation tensor for a given mapping.

Let us note that the medium connectivity was selected in order to simplify the calculations. Depending on the type of a model under consideration or on the physical limitations, we can construct any other connectivity (and mappings), which would be better suited for the given conditions.

This approach is particularly fruitful when applied for invariant transformations connecting pairs of spaces of affine connectivity via their deformation tensor of connectivity.

Keywords: spaces with affine connectivity; mappings; deformation tensor.

1 ВСТУП

Історія вивчення просторів афінної зв'язності почалась в 1918 році з роботи Вейля. Введене поняття простору афінної зв'язності дозволило узагальнити псевдоріманові простори і по новому поглянути на їх геометричні властивості [6]. В цій роботі будуть, слідуючи загальноприйнятій традиції, досліджуватись простори афінної зв'язності. Методика А. П. Нордена буде модифікована таким чином, щоб отримати формули, що пов'язують основні тензори простору A_n, а саме, тензор Рімана, тензор Річчі, тензор Вейля. Будуть розроблені та застосовані методи та методики для спрощення отриманих рівнянь з міркувань можливих застосувань в геометрії [2] та механіці [1], [18].

Дослідження ведуться локально, в тензорній формі.

2 ДЕФОРМАЦІЯ ЗВ'ЯЗНОСТІ

Простором афінної зв'язності A_n розмірності n, називають такий диференційований многовид, на кожній кривій якого задана афінна зв'язність, що задовольняє умові лінійності, тобто для кожної точки M та для всякого векторного поля в околі даної точки, абсолютний диференціал вектора, що належить цьому полю, обчислений в точці M для всякої кривої, що проходить через цю точку, є лінійна функція вектора елементарного зміщення по кривій.

Якщо не зазначено інше, то розглядаються простори афінної зв'язності A_n без скруту, тобто такі, що

$$\Gamma_{ij}^{h}(x) = \Gamma_{ji}^{h}(x).$$

Простір A_n належить класу C^r ($A_n \in C^r$), якщо $\Gamma_{ij}^{h}(x) \in C^r$.

Розглянемо два простори афінної зв'язності.

Означення 1. Взаємно однозначна відповідність між точками просторів афінної зв'язності A_n та $\bar{A}_n$ називають відображенням, якщо в спільній по відображенню системі координат виконуються умови

$$\bar{\Gamma}_{ij}(x) = \Gamma_{ij}^{h}(x) + P_{ij}^{h}(x). \tag{1}$$

Спільною по відображенню системою координат називають таку систему криволінійних координат, в якій координати відповідних точок співпадають.

Означення 2. Тензор $P_{ij}^{h}(x)$ − називають тензором деформації зв'язності при даному відображенні.

Якщо $P_{ij}^{h}(x)\big| \not\equiv 0$, то відображення називають нетривіальним.

Зауважимо, що тензор деформації симетричний по коваріантним індексам, тобто $P_{ij}^{h} = P_{ji}^{h}$, для просторів афінної зв'язності без скруту.

В випадку тензорного поля S типу $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ коваріантна похідна по зв'язності A_n, яку ми будемо позначати ∇, в кожній системі координат $x^1, x^2, \ldots x^n$ визначається слідуючим чином:

$$\begin{gathered}\nabla_k S_{j_1 j_2 \ldots j_q}^{i_1 i_2 \ldots i_p}(x) = \partial_k S_{j_1 j_2 \ldots j_q}^{i_1 i_2 \ldots i_p}(x) + \Gamma_{k\alpha}^{i_1}(x) S_{j_1 j_2 \ldots j_q}^{\alpha i_2 \ldots i_p}(x) + \ldots + \Gamma_{k\alpha}^{i_p}(x) S_{j_1 j_2 \ldots j_q}^{i_1 i_2 \ldots i_{p-1}\alpha}(x) - \\ -\Gamma_{kj_1}^{\beta}(x) S_{\beta j_2 \ldots j_q}^{i_1 i_2 \ldots i_p}(x) - \ldots - \Gamma_{kj_q}^{\beta}(x) S_{j_1 j_2 \ldots j_{q-1}\beta}^{i_1 i_2 \ldots i_p}(x), \ (i_1, \ldots i_p; \ j_1, \ldots, j_q; \ k = 1, 2, \ldots, n).\end{gathered} \tag{2}$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-18-31

Для простору $\overline{A}_n$ та коваріантної похідної в ньому $\overline{\nabla}$, будемо мати в спільній системі координат

$$\overline{\nabla}_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) = \partial_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) + \overline{\Gamma}^{i_1}_{k\alpha}(x) S^{\alpha i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) + \ldots + \overline{\Gamma}^{i_p}_{k\alpha}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_{p-1}\alpha}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) -$$
$$-\overline{\Gamma}^{\beta}_{kj_1}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{\beta j_2 \ldots j_q}(x) - \ldots - \overline{\Gamma}^{\beta}_{kj_q}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_{q-1}\beta}(x), \quad (i_1, \ldots i_p; \;\; j_1, \ldots, j_q; \;\; k = 1, 2, \ldots, n).$$

Віднімаючи від останнього (2) з урахуванням (1), отримаємо

$$\overline{\nabla}_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) = \nabla_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) + P^{i_1}_{k\alpha}(x) S^{\alpha i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) + \ldots + P^{i_p}_{k\alpha}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_{p-1}\alpha}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) -$$
$$-P^{\beta}_{kj_1}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{\beta j_2 \ldots j_q}(x) - \ldots - P^{\beta}_{kj_q}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_{q-1}\beta}(x), \quad (i_1, \ldots i_p; \;\; j_1, \ldots, j_q; \;\; k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Останнє справедливе для будь-якого тензора, а для тензора деформації (3) прийме вид

$$\overline{\nabla}_k P^h_{ij}(x) - \nabla_k P^h_{ij}(x) = P^h_{k\alpha}(x) P^{\alpha}_{ij}(x) - P^{\alpha}_{ki}(x) P^h_{\alpha j}(x) - P^{\alpha}_{kj}(x) P^h_{i\alpha}(x). \tag{4}$$

Симетруючи останнє, отримаємо

$$\overline{\nabla}_k P^h_{ij} + \overline{\nabla}_j P^h_{ik} - \nabla_k P^h_{ij} - \nabla_j P^h_{ik} = -2 P^{\alpha}_{kj} P^h_{i\alpha}.$$

А альтернуючи

$$\overline{\nabla}_k P^h_{ij} - \overline{\nabla}_j P^h_{ik} - \nabla_k P^h_{ij} + \nabla_j P^h_{ik} = -2(P^h_{k\alpha} P^{\alpha}_{ij} - P^{\alpha}_{ki} P^h_{\alpha j}). \tag{5}$$

Закон зміни тензора кривини, що визначається, як

$$R^h_{.ijk} = \partial_j \Gamma^h_{ik} + \Gamma^{\alpha}_{ik} \Gamma^h_{j\alpha} - \partial_k \Gamma^h_{ij} - \Gamma^{\alpha}_{ij} \Gamma^h_{k\alpha},$$

при відображенні простору A_n на $\overline{A}_n$ запишеться в виді

$$\overline{R}^h_{.ijk} = R^h_{.ijk} + \nabla_k P^h_{ji} - \nabla_j P^h_{ki} + P^h_{\alpha k} P^{\alpha}_{ji} - P^h_{\alpha j} P^{\alpha}_{ki}.$$

Або, з урахуванням (5)

$$\overline{R}^h_{.ijk} = R^h_{.ijk} + \frac{1}{2}(\nabla_k P^h_{ji} - \nabla_j P^h_{ki} + \overline{\nabla}_k P^h_{ji} - \overline{\nabla}_j P^h_{ki}). \tag{6}$$

Тензор Річчі $R_{ij} = R^{\alpha}_{ij\alpha}$ змінюється за законом

$$\overline{R}_{ij} = R_{ij} + \frac{1}{2}(\nabla_{\alpha} P^{\alpha}_{ji} - \nabla_j P^{\alpha}_{\alpha i} + \overline{\nabla}_{\alpha} P^{\alpha}_{ji} - \overline{\nabla}_j P^{\alpha}_{\alpha i}). \tag{7}$$

Теорема 1. При відображенні простору афінної зв'язності A_n на простір афінної зв'язності $\overline{A}_n$ тензори Рімана та Річчі просторів A_n та $\overline{A}_n$ в спільній системі координат зв'язані співвідношеннями (6) та (7) відповідно.

Якщо в просторі афінної зв'язності тензор Річчі є симетричним, тобто $R_{ij} = R_{ji}$, то такі простори називають еквіафінними просторами.

Для коваріантних похідних тензора Рімана, із формули (3), будемо мати

$$\overline{\nabla}_k R^h_{.ijl} - \nabla_k R^h_{.ijl} = P^h_{k\alpha} R^{\alpha}_{.ijl} - P^{\alpha}_{ki} R^h_{.\alpha jl} - P^{\alpha}_{kj} R^h_{.i\alpha l} - P^{\alpha}_{kl} R^h_{.ij\alpha}. \tag{8}$$

Коваріантна похідна тензора Рімана $\overline{A}_n$ із (3) має вид:

$$\overline{\nabla}_l \overline{R}^h_{.ijk} = \overline{\nabla}_l R^h_{.ijk} + \frac{1}{2}(\overline{\nabla}_l \nabla_k P^h_{ji} - \overline{\nabla}_l \nabla_j P^h_{ki} + \overline{\nabla}_l \overline{\nabla}_k P^h_{ji} - \overline{\nabla}_l \overline{\nabla}_j P^h_{ki}).$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-18-31

Враховуючи (8) та переходячи до похідної в A_n, отримаємо:

$$\bar{\nabla}_l \bar{R}^h_{.ijk} = \nabla_l R^h_{.ijk} + P^h_{l\alpha} R^\alpha_{.ijk} - P^\alpha_{li} R^h_{.\alpha jk} - P^\alpha_{lj} R^h_{.i\alpha k} - P^\alpha_{kl} R^h_{.ij\alpha} + \frac{1}{2}(\nabla_l \nabla_k P^h_{ji} - \nabla_l \nabla_j P^h_{ki} + \\ + \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_k P^h_{ji} - \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_j P^h_{ki} + \nabla_\alpha P^h_{ji} P^\alpha_{kl} + \nabla_k P^h_{\alpha i} P^\alpha_{jl} + \nabla_k P^h_{ja} P^\alpha_{il} + \nabla_k P^\alpha_{ij} P^h_{\alpha l}). \tag{9}$$

Коваріантна похідна тензора Річчі

$\bar{\nabla}_k R_{ij} - \nabla_k R_{ij} = -P^\alpha_{ki} R_{\alpha j} - P^\alpha_{kj} R_{\alpha i}$ та

$$\bar{\nabla}_k \bar{R}_{ij} = \nabla_l R_{ij} - P^\alpha_{ki} R_{\alpha j} - P^\alpha_{kj} R_{\alpha i} + \frac{1}{2}(\nabla_\beta \nabla_k P^\beta_{ji} - \nabla_\beta \nabla_j P^\beta_{ki} + \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_k P^\beta_{ji} - \bar{\nabla}_\beta \bar{\nabla}_j P^\beta_{ki} + \\ + \nabla_\alpha P^\beta_{ji} P^\alpha_{k\beta} + \nabla_k P^\beta_{\alpha i} P^\alpha_{j\beta} + \nabla_k P^\beta_{j\alpha} P^\alpha_{i\beta} + \nabla_k P^\alpha_{ij} P^\beta_{\alpha\beta}). \tag{10}$$

Теорема 2. При відображенні просторів A_n та $\bar{A}_n$ коваріантні похідні тензора деформації, тензора Рімана та тензора Річчі задовольняють (4), (9), (10).

Таким чином, нами отримані формули, що зв'язують відповідні об'єкти та їх коваріантні похідні в відповідних по відображенню просторах A_n та $\bar{A}_n$.

Для тензора S справедлива тотожність Річчі:

$$\nabla_k \nabla_l S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) - \nabla_l \nabla_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) = -R^{i_1}_{.\alpha kl}(x) S^{\alpha i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) - \ldots - R^{i_p}_{.\alpha kl}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_{p-1}\alpha}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) + \\ + R^\beta_{.j_1 kl}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{\beta j_2 \ldots j_q}(x) + \ldots + R^\beta_{.j_q kl}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_{q-1}\beta}(x), \quad (i_1, \ldots i_p;\ j_1, \ldots, j_q;\ k = 1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Для коваріантної похідної в $\bar{A}_n$

$$\bar{\nabla}_k \bar{\nabla}_l S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) - \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) = -\bar{R}^{i_1}_{.\alpha kl}(x) S^{\alpha i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) - \ldots - \bar{R}^{i_p}_{.\alpha kl}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_{p-1}\alpha}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) + \\ + \bar{R}^\beta_{.j_1 kl}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{\beta j_2 \ldots j_q}(x) + \ldots + \bar{R}^\beta_{.j_q kl}(x) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_{q-1}\beta}(x), \quad (i_1, \ldots i_p;\ j_1, \ldots, j_q;\ k = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Віднімемо (11) від (12)

$$\bar{\nabla}_k \bar{\nabla}_1 S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) - \nabla_k \nabla_l S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) + \nabla_l \nabla_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) - \bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_k S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) = \frac{1}{2}(\nabla_k P^{i_1}_{l\alpha} - \nabla_l P^{i_1}_{k\alpha} + \\ + \bar{\nabla}_k P^{i_1}_{l\alpha} - \bar{\nabla}_l P^{i_1}_{k\alpha}) S^{\alpha i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) + \ldots + \frac{1}{2}(\nabla_k P^{i_p}_{l\alpha} - \nabla_l P^{i_p}_{k\alpha} + \bar{\nabla}_k P^{i_p}_{l\alpha} - \bar{\nabla}_l P^{i_p}_{k\alpha}) S^{i_1 i_2 \ldots i_{p-1}\alpha}_{j_1 j_2 \ldots j_q}(x) + \\ + \frac{1}{2}(\nabla_l P^\beta_{kj_1} - \nabla_j P^h_{kj_1} + \bar{\nabla}_l P^\beta_{kj_1} - \bar{\nabla}_k P^\beta_{lj_1}) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{\beta j_2 \ldots j_q}(x) + \ldots + \frac{1}{2}(\nabla_l P^\beta_{kj_q} - \nabla_k P^\beta_{kj_q} + \bar{\nabla}_l P^\beta_{kj_q} - \bar{\nabla}_k P^\beta_{lj_q}) S^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{\beta j_2 \ldots j_{q-1}\beta}(x).$$

$(i_1, \ldots i_p;\ j_1, \ldots, j_q;\ k = 1, 2, \ldots, n)$.

Це дозволяє записати тотожність Річчі для тензора деформації

$$\nabla_l \nabla_j P^h_{ki} - \nabla_j \nabla_l P^h_{ki} = P^h_{\alpha i} R^\alpha_{.kjl} - P^\alpha_{ki} R^h_{.\alpha jl} + P^h_{k\alpha} R^\alpha_{.ijl},$$
$$\bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_j P^h_{ki} - \bar{\nabla}_j \bar{\nabla}_l P^h_{ki} = P^h_{\alpha i} \bar{R}^\alpha_{.kjl} - P^\alpha_{ki} \bar{R}^h_{.\alpha jl} + P^h_{k\alpha} \bar{R}^\alpha_{.ijl}.$$

Враховуючи попереднє, отримаємо

$$\bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_k P^h_{ki} - \bar{\nabla}_j \bar{\nabla}_l P^h_{ki} - \nabla_l \nabla_j P^h_{ki} + \nabla_j \nabla_k P^h_{ki} = \frac{1}{2} P^h_{\alpha i}(\nabla_l P^\alpha_{jk} - \nabla_j P^\alpha_{lk} + \bar{\nabla}_l P^\alpha_{jk} - \bar{\nabla}_j P^\alpha_{lk}) - \\ - \frac{1}{2} P^\alpha_{ki}(\nabla_l P^h_{j\alpha} - \nabla_j P^h_{l\alpha} + \bar{\nabla}_l P^h_{j\alpha} - \bar{\nabla}_j P^h_{l\alpha}) + \frac{1}{2} P^h_{k\alpha}(\nabla_l P^\alpha_{ji} - \nabla_j P^\alpha_{li} + \bar{\nabla}_l P^\alpha_{ji} - \bar{\nabla}_j P^\alpha_{li}). \tag{13}$$

Тотожність Річчі для тензора Рімана має вид:

$$\bar{\nabla}_{[lm]} \bar{R}^h_{ijk} = -\bar{R}^\alpha_{ijk} \bar{R}^h_{\alpha lm} + \bar{R}^h_{\alpha jk} \bar{R}^\alpha_{ilm} + \bar{R}^h_{i\alpha k} \bar{R}^\alpha_{jlm} + \bar{R}^h_{ij\alpha} \bar{R}^\alpha_{klm}, \tag{14}$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-18-31

$$\nabla_{[lm]}R^h_{ijk} = -R^\alpha_{ijk}R^h_{\alpha lm} + R^h_{\alpha jk}R^\alpha_{ilm} + R^h_{i\alpha k}R^\alpha_{jlm} + R^h_{ij\alpha}R^\alpha_{klm}. \tag{15}$$

Віднімаючи з (14), (15) та враховуючи (6), будемо мати

$$\begin{gathered}\bar\nabla_{[lm]}\bar R^h_{ijk} - \nabla_{[lm]}R^h_{ijk} = \frac{1}{2}(-\bar R^h_{\alpha lm}(\nabla_k P^\alpha_{ji} - \nabla_j P^\alpha_{ki} + \bar\nabla_k P^\alpha_{ji} - \bar\nabla_j P^\alpha_{ki}) - \\ -\bar R^\alpha_{ijk}(\nabla_m P^h_{l\alpha} - \nabla_l P^h_{m\alpha} + \bar\nabla_m P^h_{l\alpha} - \bar\nabla_l P^h_{m\alpha}) + R^\alpha_{ilm}(\nabla_k P^h_{j\alpha} - \nabla_j P^h_{k\alpha} + \bar\nabla_k P^h_{j\alpha} - \bar\nabla_j P^h_{k\alpha}) + \\ +\bar R^\alpha_{jlk}(\nabla_m P^\alpha_{li} - \nabla_l P^\alpha_{mi} + \bar\nabla_m P^\alpha_{li} - \bar\nabla_l P^\alpha_{mi}) + R^\alpha_{jlm}(\nabla_k P^h_{\alpha i} - \nabla_j P^h_{ki} + \bar\nabla_k P^h_{\alpha i} - \bar\nabla_j P^h_{ki}) + \\ +\bar R^h_{i\alpha k}(\nabla_m P^\alpha_{lj} - \nabla_l P^\alpha_{mj} + \bar\nabla_m P^\alpha_{lj} - \bar\nabla_l P^\alpha_{mj}) + R^\alpha_{klm}(\nabla_\alpha P^h_{ji} - \nabla_j P^h_{\alpha i} + \bar\nabla_\alpha P^h_{ji} - \bar\nabla_j P^h_{\alpha i}) + \\ +\bar R^h_{ij\alpha}(\nabla_m P^\alpha_{lk} - \nabla_l P^\alpha_{mk} + \bar\nabla_m P^\alpha_{lk} - \bar\nabla_l P^\alpha_{mk})).\end{gathered}$$

Групуючи, переконаємось в справедливості

$$\begin{gathered}\bar\nabla_{[lm]}\bar R^h_{ijk} - \nabla_{[lm]}R^h_{ijk} = \frac{1}{2}(-R^h_{\alpha lm}(\nabla_{[k}P^\alpha_{j]i} + \bar\nabla_{[k}P^\alpha_{j]i}) - \bar R^\alpha_{ijk}(\nabla_{[m}P^h_{l]\alpha} + \bar\nabla_{[m}P^h_{l]\alpha}) + \\ +R^\alpha_{ilm}(\nabla_{[k}P^h_{j]\alpha} + \bar\nabla_{[k}P^h_{j]\alpha}) - \bar R^h_{\alpha jk}(\nabla_{[m}P^\alpha_{l]i} + \bar\nabla_{[m}P^\alpha_{l]i}) + R^\alpha_{jlm}(\nabla_{[k}P^h_{\alpha]i} + \bar\nabla_{[k}P^h_{\alpha]i}) + \\ +\bar R^h_{i\alpha k}(\nabla_{[m}P^\alpha_{l]j} + \bar\nabla_{[m}P^\alpha_{l]j}) + R^\alpha_{klm}(\nabla_{[\alpha}P^h_{j]i} + \bar\nabla_{[\alpha}P^h_{j]i}) + \bar R^h_{ij\alpha}(\nabla_{[m}P^\alpha_{l]k} + \bar\nabla_{[m}P^\alpha_{l]k})).\end{gathered} \tag{16}$$

Для тензорів Річчі, аналогічно, отримаємо

$$\begin{gathered}\bar\nabla_{[lm]}\bar R_{ij} - \nabla_{[lm]}R_{ij} = \frac{1}{2}(-R^\beta_{\alpha lm}(\nabla_{[\beta}P^\alpha_{j]i} + \bar\nabla_{[\beta}P^\alpha_{j]i}) - \bar R^\alpha_{ij\beta}(\nabla_{[m}P^\beta_{l]\alpha} + \bar\nabla_{[m}P^\beta_{l]\alpha}) + \\ +R^\alpha_{ilm}(\nabla_{[\beta}P^\beta_{j]\alpha} + \bar\nabla_{[\beta}P^\beta_{j]\alpha}) - \bar R_{\alpha j}(\nabla_{[m}P^\alpha_{l]i} + \bar\nabla_{[m}P^\alpha_{l]i}) + R^\alpha_{jlm}(\nabla_{[\beta}P^\beta_{\alpha]i} + \bar\nabla_{[\beta}P^\beta_{\alpha]i}) + \\ +\bar R_{i\alpha}(\nabla_{[m}P^\alpha_{l]j} + \bar\nabla_{[m}P^\alpha_{l]j}) + R^\alpha_{\beta lm}(\nabla_{[\alpha}P^\beta_{j]i} + \bar\nabla_{[\alpha}P^\beta_{j]i}) + \bar R^\beta_{ij\alpha}(\nabla_{[m}P^\alpha_{l]\beta} + \bar\nabla_{[m}P^\alpha_{l]\beta})).\end{gathered} \tag{17}$$

Теорема 3. При відображенні простору A_n на простір $\bar A_n$ для других коваріантних похідних тензора деформації, тензора Рімана та тензора Річчі виконуються відповідно умови (13), (16), (17).

Зауважимо, що зазначені в приведених теоремах умови носять лише необхідний характер.

Позначимо різницю тензорів Рімана просторів A_n та $\bar A_n$, пов'язаних відображенням, через P^h_{ijk}, тобто P^h_{ijk} − деформація тензорів Рімана при відображенні:

$$\bar R^h_{ijk} - R^h_{ijk} \overset{def}{=} P^h_{ijk},$$

або, враховуючи попереднє,

$$P^h_{ijk} = \frac{1}{2}(\bar\nabla_k P^h_{ij} - \bar\nabla_j P^h_{ik} + \nabla_k P^h_{ij} - \nabla_j P^h_{ik}).$$

Тензор P^h_{ijk} задовольняє умовам

$$P^h_{ijk} + P^h_{ikj} = 0 \text{ та } P^h_{ijk} + P^h_{jki} + P^h_{kij} = 0.$$

Ці умови аналогічні тим, що виконуються для тензора Рімана і тому дозволяють таку ж спеціалізацію [5], [15]. Розглянемо спеціальні відображення.

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-18-31

3 УКОРОЧЕНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРІВ АФІННОЇ ЗВ'ЯЗНОСТІ

Хоча при визначенні відображення ми говоримо про взаємно однозначну відповідність, вибором знаку тензора деформації ми впорядковуємо задану пару просторів афінної зв'язності A_n та $\overline{A}_n$. Між кожною парою просторів A_n та $\overline{A}_n$ можливо встановити відповідність, яка задається об'єктами зв'язності цих просторів. З іншого боку, об'єкт зв'язності A_n та тензор деформації задають зв'язність простору $\overline{A}_n$. Це дозволяє ввести в розгляд відображення, які називатимемо укороченими відносно заданого відображення.

Об'єкт $\overset{\lambda}{\Gamma}{}^h_{ij}$, побудований за правилом

$$\overset{\lambda}{\Gamma}{}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij}(x) + \frac{\lambda}{1+\lambda} P^h_{ij}(x), \quad \lambda = const > 0, \tag{18}$$

задає зв'язність деякого простору афінної зв'язності $\overset{\lambda}{A}_n$.

Означення 3. Відображення простору афінної зв'язності A_n на простір афінної зв'язності $\overset{\lambda}{A}_n$ називають укороченим відображенням, якщо в спільній по відображенню системі координат, має місце рівняння (18).

Враховуючи (18), отримаємо

$$\overset{\lambda}{\Gamma}{}^h_{ij} = \frac{\Gamma^h_{ij} + \lambda \overline{\Gamma}{}^h_{ij}}{1+\lambda}. \tag{19}$$

Рівняння (19) можна записати в виді:

$$\overset{\lambda}{\nabla}_k P^h_{ij}(x) - \nabla_k P^h_{ij}(x) = \frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\left(P^h_{k\alpha}(x)P^\alpha_{ij}(x) - P^\alpha_{ki}(x)P^h_{\alpha j}(x) - P^\alpha_{kj}(x)P^h_{i\alpha}(x)\right).$$

Для першої коваріантної похідної тензора деформації та для другої

$$\begin{gathered}\overset{\lambda}{\nabla}_l \overset{\lambda}{\nabla}_j P^h_{ki} - \overset{\lambda}{\nabla}_j \overset{\lambda}{\nabla}_l P^h_{ki} - \nabla_l \nabla_j P^h_{ki} + \nabla_j \nabla_l P^h_{ki} = \frac{\lambda^2}{2(1+\lambda)^2}\Big(P^h_{\alpha i}(\nabla_l P^\alpha_{jk} - \nabla_j P^\alpha_{lk} + \\ + \overset{\lambda}{\nabla}_l P^\alpha_{jk} - \overset{\lambda}{\nabla}_j P^\alpha_{lk}) - P^\alpha_{ki}(\nabla_l P^h_{j\alpha} - \nabla_j P^h_{l\alpha} + \overset{\lambda}{\nabla}_l P^h_{j\alpha} - \overset{\lambda}{\nabla}_j P^h_{l\alpha}) + \\ + P^h_{k\alpha}(\nabla_l P^\alpha_{ji} - \nabla_j P^\alpha_{li} + \overset{\lambda}{\nabla}_l P^\alpha_{ji} - \overset{\lambda}{\nabla}_j P^\alpha_{li})\Big).\end{gathered} \tag{20}$$

Для тензорів Рімана

$$\overset{\lambda}{R}{}^h_{.ijk} = R^h_{.ijk} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\left(\nabla_k P^h_{ji} - \nabla_j P^h_{ki} + \overset{\lambda}{\nabla}_k P^h_{ji} - \overset{\lambda}{\nabla}_j P^h_{ki}\right), \tag{21}$$

та їх коваріантних похідних

$$\begin{gathered}\overset{\lambda}{\nabla}_l \overset{\lambda}{R}{}^h_{.ijk} = \nabla_l R^h_{.ijk} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\Big(P^h_{l\alpha} R^\alpha_{.ijk} - P^\alpha_{li} R^h_{.\alpha jk} - P^\alpha_{lj} R^h_{.i\alpha k} - P^\alpha_{kl} R^h_{.ij\alpha} + \\ + \frac{1}{2}(\nabla_l \nabla_k P^h_{ji} - \nabla_l \nabla_j P^h_{ki} + \overset{\lambda}{\nabla}_l \overset{\lambda}{\nabla}_j P^h_{ji} - \overset{\lambda}{\nabla}_l \overset{\lambda}{\nabla}_j P^h_{ji} - \overset{\lambda}{\nabla}_l \overset{\lambda}{\nabla}_j P^h_{ki})\Big) + \\ + \frac{\lambda}{2(1+\lambda)^2}\left(\nabla_\alpha P^h_{ji} P^\alpha_{kl} + \nabla_k P^h_{\alpha i} P^\alpha_{jl} + \nabla_k P^h_{j\alpha} P^\alpha_{il} + \nabla_k P^\alpha_{ij} P^h_{\alpha l}\right).\end{gathered} \tag{22}$$

Друга похідна з урахуванням тотожності Річчі приведе до

$$\begin{aligned}
&\overset{\lambda}{\nabla}_{[lm]} \overset{\lambda}{R}{}^h_{ijk} - \nabla_{[lm]} R^h_{ijk} = \frac{\lambda}{2(\lambda+1)}(-R^h_{\alpha lm}(\nabla_{[k}P^\alpha_{j]i} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[k}P^\alpha_{j]i}) - \overset{\lambda}{R}{}^\alpha_{ijk}(\nabla_{[m}P^h_{l]\alpha} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[m}P^h_{l]\alpha}) + \\
&+R^\alpha_{ilm}(\nabla_{[k}P^h_{j]\alpha} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[k}P^h_{j]\alpha}) - \overset{\lambda}{R}{}^h_{\alpha jk}(\nabla_{[m}P^\alpha_{l]i} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[m}P^\alpha_{l]i}) + R^\alpha_{jlm}(\nabla_{[k}P^h_{\alpha]i} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[k}P^h_{\alpha]i}) + \\
&+\overset{\lambda}{R}{}^h_{i\alpha k}(\nabla_{[m}P^\alpha_{l]j} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[m}P^\alpha_{l]j}) + R^\alpha_{klm}(\nabla_{[\alpha}P^h_{j]i} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[\alpha}P^h_{j]i}) + \overset{\lambda}{R}{}^h_{ij\alpha}(\nabla_{[m}P^\alpha_{l]k} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[m}P^\alpha_{l]k}).
\end{aligned} \tag{23}$$

Отримаємо аналогічні формули для тензора Річчі

$$\overset{\lambda}{R}_{ij} = R_{ij} + \frac{\lambda}{2(\lambda+1)}(\nabla_\alpha P^\alpha_{ji} - \nabla_j P^\alpha_{\alpha i} + \overset{\lambda}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ji} - \overset{\lambda}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i}), \tag{24}$$

коваріантних похідних тензора Річчі в просторах A_n та $\overset{\lambda}{A}_n$ відповідно

$$\begin{aligned}
&\overset{\lambda}{\nabla}_k \overset{\lambda}{R}_{ij} = \nabla_l R_{ij} - P^\alpha_{ki}R_{\alpha j} - P^\alpha_{kj}R_{\alpha i} + \frac{\lambda}{2(\lambda+1)}(\nabla_\beta\nabla_k P^\beta_{ji} - \nabla_\beta\nabla_j P^\beta_{ki} + \overset{\lambda}{\nabla}_\beta \overset{\lambda}{\nabla}_k P^\beta_{ji} - \\
&-\overset{\lambda}{\nabla}_\beta\overset{\lambda}{\nabla}_j P^\beta_{ki}) + \frac{\lambda^2}{2(\lambda+1)^2}(\nabla_\alpha P^\beta_{ji}P^\alpha_{k\beta} + \nabla_k P^\beta_{\alpha i}P^\alpha_{j\beta} + \nabla_k P^\beta_{j\alpha}P^\alpha_{i\beta} + \nabla_k P^\alpha_{ij}P^\beta_{\alpha\beta}).
\end{aligned} \tag{25}$$

З урахуванням тотожності Річчі, одержимо

$$\begin{aligned}
&\overset{\lambda}{\nabla}_{[lm]}\overset{\lambda}{R}_{ij} - \nabla_{[lm]}R_{ij} = \frac{\lambda}{2(\lambda+1)}(-R^\beta_{\alpha lm}(\nabla_{[\beta}P^\alpha_{j]i} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[\beta}P^\alpha_{j]i}) - \overset{\lambda}{R}{}^\alpha_{ij\beta}(\nabla_{[m}P_{l]\alpha}^{\ \beta} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[m}P^\beta_{l]\alpha}) + \\
&+R^\alpha_{ilm}(\nabla_{[\beta}P^\beta_{j]\alpha} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[\beta}P^\beta_{j]\alpha}) + \overset{\lambda}{R}_{\alpha j} + (\nabla_{[m}P_{l]i}^{\ \alpha} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[m}P^\alpha_{l]i}) + R^\alpha_{jlm}(\nabla_{[\beta}P^\beta_{\alpha]i} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[\beta}P^\beta_{\alpha]i}) + \\
&+\overset{\lambda}{R}_{i\alpha}(\nabla_{[m}P_{l]j}^{\ \alpha} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[m}P^\alpha_{l]j}) + R^\alpha_{\beta lm}(\nabla_{[\alpha}P^\beta_{j]i} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[\alpha}P^\beta_{j]i}) + \overset{\lambda}{R}{}^\beta_{ij\alpha}(\nabla_{[m}P_{l]\beta}^{\ \alpha} + \overset{\lambda}{\nabla}_{[m}P^\alpha_{l]\beta})).
\end{aligned} \tag{26}$$

Теорема 4. Якщо простори A_n та $\bar{A}_n$ допускають відображення, що відповідає тензору деформації P^h_{ij}, тоді існує укорочене відображення, при якому тензори деформації, Рімана, Річчі та їх коваріантні похідні задовольняють умовам (20) – (26).

Розглянемо можливість спрощення отриманих рівнянь.

4 СЕРЕДНЯ ЗВ'ЯЗНІСТЬ

Якщо $\lambda = 1$, то таке відображення називається укороченим навпіл, а сама зв'язність середньою.

Для середньої зв'язності тензор деформації задовольняє умовам

$$\overset{c}{\nabla}_k P^h_{ij}(x) - \nabla_k P^h_{ij}(x) = \frac{1}{4}(P^h_{k\alpha}(x)P^\alpha_{ij}(x) - P^\alpha_{ki}(x)P^h_{\alpha j}(x) - P^\alpha_{kj}(x)P^h_{i\alpha}(x)). \tag{27}$$

Тут $\overset{c}{\nabla}_k$ – коваріантна похідна по середній зв'язності.

Для других коваріантних похідних

$$\begin{aligned}
&\overset{c}{\nabla}_l \overset{c}{\nabla}_j P^h_{ki} - \overset{c}{\nabla}_j \overset{c}{\nabla}_l P^h_{ki} - \nabla_l\nabla_j P^h_{ki} + \nabla_j\nabla_l P^h_{ki} = \frac{1}{8}(P^h_{\alpha i}(\nabla_l P^\alpha_{jk} - \nabla_j P^\alpha_{lk} + \overset{c}{\nabla}_l P^\alpha_{jk} - \overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{lk}) - \\
&-P^\alpha_{ki}(\nabla_l P^h_{j\alpha} - \nabla_j P^h_{l\alpha} + \overset{c}{\nabla}_l P^h_{j\alpha} - \overset{c}{\nabla}_j P^h_{l\alpha}) + P^h_{k\alpha}(\nabla_l P^\alpha_{ji} - \nabla_j P^\alpha_{li} + \overset{c}{\nabla}_l P^\alpha_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{li})).
\end{aligned} \tag{28}$$

Це дає можливість для тензорів Рімана рівняння (28) записати в виді :

$$\bar{R}^h_{.ijk} = R^h_{.ijk} + \overset{c}{\nabla}_k P^h_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^h_{ki} . \tag{29}$$

Для похідної тензора Рімана

$$\begin{aligned} \overset{c}{\nabla}_j \overset{c}{R}{}^h_{.ijk} &= \nabla_l R^h_{.ijk} + \frac{1}{2}(P^h_{l\alpha} R^\alpha_{.ijk} - P^\alpha_{li} R^h_{.\alpha jk} - P^\alpha_{lj} R^h_{.i\alpha k} - P^\alpha_{kl} R^h_{.ij\alpha} + \\ &+ \frac{1}{2}(\nabla_l \nabla_k P^h_{ji} - \nabla_l \nabla_j P^h_{ki} + \overset{c}{\nabla}_l \overset{c}{\nabla}_k P^h_{ji} - \overset{c}{\nabla}_l \overset{c}{\nabla}_j P^h_{ki})) + \\ &+ \frac{1}{2}(\nabla_\alpha P^h_{ji} P^\alpha_{kl} + \nabla_k P^h_{\alpha i} P^\alpha_{jl} + \nabla_k P^h_{j\alpha} P^\alpha_{il} + \nabla_k P^\alpha_{ij} P^h_{\alpha l}). \end{aligned} \tag{30}$$

З урахуванням тотожності Річчі можемо записати

$$\begin{aligned} \overset{c}{\nabla}_{[lm]} \overset{c}{R}{}^h_{ijk} - \nabla_{[lm]} R^h_{ijk} &= \frac{1}{4}(-R^h_{\alpha lm}(\nabla_{[k} P^\alpha_{j]i} + \overset{c}{\nabla}_{[k} P^\alpha_{j]i}) - \overset{c}{R}{}^\alpha_{ijk}(\nabla_{[m} P^h_{l]\alpha} + \overset{c}{\nabla}_{[m} P^h_{l]\alpha}) + \\ &+ R^\alpha_{ilm}(\nabla_{[k} P^h_{j]\alpha} + \overset{c}{\nabla}_{[k} P^h_{j]\alpha}) + \overset{c}{R}{}^h_{\alpha jk}(\nabla_{[m} P^\alpha_{l]i} + \overset{c}{\nabla}_{[m} P^\alpha_{l]i}) + R^\alpha_{jlm}(\nabla_{[k} P^h_{\alpha]i} + \overset{c}{\nabla}_{[k} P^h_{\alpha]i}) + \\ &+ \overset{c}{R}{}^h_{i\alpha k}(\nabla_{[m} P^\alpha_{l]j} + \overset{c}{\nabla}_{[m} P^\alpha_{l]j}) + R^\alpha_{klm}(\nabla_{[\alpha} P^h_{j]i} + \overset{c}{\nabla}_{[\alpha} P^h_{j]i}) + \overset{c}{R}{}^h_{ij\alpha}(\nabla_{[m} P^\alpha_{l]k} + \overset{c}{\nabla}_{[m} P^\alpha_{l]k})). \end{aligned} \tag{31}$$

Згортаючи (29), для тензорів Річчі будемо мати

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + \overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i} . \tag{32}$$

Для коваріантних похідних тензора Річчі

$$\begin{aligned} \overset{c}{\nabla}_k \overset{c}{R}_{ij} &= \nabla_l R_{ij} - P^\alpha_{ki} R_{\alpha j} - P^\alpha_{kj} R_{\alpha i} + \frac{1}{4}(\nabla_\beta \nabla_k P^\beta_{ji} - \nabla_\beta \nabla_j P^\beta_{ki} + \\ &+ \overset{c}{\nabla}_\beta \overset{c}{\nabla}_k P^\beta_{ki}) + \frac{1}{8}(\nabla_\alpha P^\beta_{ji} P^\alpha_{k\beta} + \nabla_k P^\beta_{\alpha i} P^\alpha_{i\beta} + \nabla_k P^\beta_{j\alpha} P^\alpha_{i\beta} + \nabla_k P^\alpha_{ij} P^\beta_{\alpha\beta}). \end{aligned} \tag{33}$$

Для тензора Річчі з урахуванням тотожності Річчі

$$\begin{aligned} \overset{c}{\nabla}_{[lm]} \overset{c}{R}_{ij} - \nabla_{[lm]} R_{ij} &= \frac{1}{4}(-R^\beta_{\alpha lm} \nabla_{[\beta} P^\alpha_{j]i} + \overset{c}{\nabla}_{[\beta} P^\alpha_{j]i}) - \overset{c}{R}{}^\alpha_{ij\beta}(\nabla_{[m} P^\beta_{l]\alpha} + \overset{c}{\nabla}_{[m} P^\beta_{l]\alpha}) + \\ &+ R^\alpha_{ilm}(\nabla_{[\beta} P^\beta_{j]\alpha} + \overset{c}{\nabla}_{[\beta} P^\beta_{j]\alpha}) + \overset{c}{R}_{\alpha j}(\nabla_{[m} P^\alpha_{l]i} + \overset{c}{\nabla}_{[m} P^\alpha_{l]i}) + R^\alpha_{jlm}(\nabla_{[\beta} P^\beta_{\alpha]i} + \overset{c}{\nabla}_{[\beta} P^\beta_{\alpha]i}) + \\ &+ \overset{c}{R}_{i\alpha}(\nabla_{[m} P^\alpha_{l]j} + \overset{c}{\nabla}_{[m} P^\alpha_{l]j}) + R^\alpha_{\beta lm}(\nabla_{[\alpha} P^\beta_{j]i} + \overset{c}{\nabla}_{[\alpha} P^\beta_{j]i}) + \overset{c}{R}{}^\beta_{ij\alpha}(\nabla_{[m} P^\alpha_{l]\beta} + \overset{c}{\nabla}_{[m} P^\alpha_{l]\beta})). \end{aligned} \tag{34}$$

Теорема 5. Якщо простори A_n та $\bar{A}_n$ допускають відображення, що відповідає тензору деформації P^h_{ij}, тоді існує половинне відображення, при якому тензори деформації, Рімана, Річчі та їх коваріантні похідні задовольняють умовам (27) – (34).

Доведені теореми дозволяють відповідати на питання, що виникає при відображеннях із збереженням об'єктів – тензора Рімана, Річчі, їх коваріантних похідних, а також при завданні умов на тензор деформації. Для прикладу розглянемо тензор Вейля W^h_{ijk}, пригадавши, як він визначається:

$$W^h_{ijk} \overset{def}{=} R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik}) + \frac{1}{n+1}\left(\delta^h_i R_{[jk]} - \frac{1}{n-1}(\delta^h_k R_{[ji]} - \delta^h_j R_{[ki]})\right).$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-18-31

Для еквіафінних просторів останнє рівняння приймає вид:

$$W^h_{ijk} \overset{def}{=} R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik}).$$

При відображеннях, тензори Вейля A_n та $\bar{A}_n$ пов'язані співвідношеннями

$$\bar{W}^h_{ijk} = W^h_{ijk} + \overset{c}{\nabla}_k P^h_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^h_{ki} - \frac{1}{n-1}(\delta^h_k(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i}) - \delta^h_j(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ki} - \overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha i})) +$$

$$+ \frac{1}{n+1}(\delta^h_i(\overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha k} - \overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha j}) - \frac{1}{n-1}(\delta^h_k(\overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i} - \overset{c}{\nabla}_i P^\alpha_{\alpha j}) - \delta^h_j(\overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha i} - \overset{c}{\nabla}_i P^\alpha_{\alpha k}))),$$

або, для еквіафінних просторів

$$\bar{W}^h_{ijk} = W^h_{ijk} + \overset{c}{\nabla}_k P^h_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^h_{ki} - \frac{1}{n-1}(\delta^h_k(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i}) - \delta^h_j(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ki} - \overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha i})).$$

Має місце теорема.

Теорема 6. Якщо при відображенні просторів афінної зв'язності зберігається тензор Вейля, то тензор деформації задовольняє умовам

$$\overset{c}{\nabla}_k P^h_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^h_{ki} = \frac{1}{n-1}(\delta^h_k(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i}) - \delta^h_j(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ki} - \overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha i})) -$$

$$- \frac{1}{n+1}\left(\delta^h_i(\overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha k} - \overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha j}) - \frac{1}{n-1}(\delta^h_k(\overset{c}{\nabla}_j P^\alpha_{\alpha i} - \overset{c}{\nabla}_i P^\alpha_{\alpha j}) - \delta^h_j(\overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha i} - \overset{c}{\nabla}_i P^\alpha_{\alpha k}))\right),$$

а для еквіафінних просторів

$$\overset{c}{\nabla}_k P^h_{ji} - \overset{c}{\nabla}_j P^h_{ki} = \frac{1}{n-1}(\delta^h_k(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ji} - \overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{\alpha i}) - \delta^h_j(\overset{c}{\nabla}_\alpha P^\alpha_{ki} - \overset{c}{\nabla}_k P^\alpha_{\alpha i})).$$

Таким чином, задача про спеціальні відображення або про відображення спеціальних просторів зводиться до вивчення диференціальних рівнянь в коваріантних похідних [3], [13].

Вивчення цих рівнянь дає можливість як якісного аналізу, тобто відповіді на питання: існує чи не існує розв'язок, так і більш глибоких результатів в разі існування розв'язків.

Йдучи по шляху спеціалізації відображень вивчимо можливості спрощення виду тензора деформації, а саме доведемо теорему [7], [16]:

Теорема 7. Умови

$$P^h_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = a(u)u^h + \overset{1}{b}(u)F^h_\alpha u^\alpha \tag{35}$$

та

$$P^h_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = a(u)u^h + \overset{2}{b}(u)v^h \tag{36}$$

виконуються тотожно відносно довільного вектора u^i тоді і тільки тоді, коли відповідно

$$P^h_{ij} = \psi_{(i}\delta^h_{j)} + \varphi_{(i}F^h_{j)} \tag{37}$$

та

$$P^h_{ij} = \psi_{(i}\delta^h_{j)} + v^h a_{ij}, \tag{38}$$

причому

$$a(u)=2\psi_\alpha u^\alpha;\quad \overset{1}{b}(u)=2\varphi_\alpha u^\alpha;\quad \overset{2}{b}(u)=a_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta .$$

Тут P_{ij}^h – тензор деформації, u^i, v^i – компоненти деякого вектора, $a(u)$, $\overset{1}{b}(u)$, $\overset{2}{b}(u)$ – деякі функції, a_{ij} – тензор, F_i^h – афінор.

Для випадку $\overset{1}{b}=\overset{2}{b}=0$, ця теорема доведена Т. Леві–Чевітою [8], суттєвою є вимога, що $n>2$.

Для випадку $n=2$, ця теорема не вірна. Ми скористаємось для доведення методикою, запропонованою М. С. Синюковим та Й. Мікешем [16].

Нехай тотожно виконуються умови (35) відносно довільного вектора u. Домножуючи (35) на $u^i F_\alpha^j u^\alpha$, а потім альтернуючи по індексам h, i та j, отримаємо однорідний поліном 4-го порядку відносно компонентів вектора u. Через довільність u, із отриманного витікає

$$P_{(\alpha\beta}^{[h}\delta_j^i F_{\delta)}^{j]}=0. \tag{39}$$

Нехай $\in^h$ – власний вектор матриці F_i^h, що відповідає власному значенню ρ, тобто

$$\in^\alpha F_\alpha^h=\rho\in^h, \tag{40}$$

тут $\in^h$ та ρ можуть приймати і комплексні значення. Тоді $\in^\alpha G_\alpha^h=0$, якщо $G_i^h \overset{def}{=} F_i^h-\rho\delta_i^h$.

Розглянемо випадок, коли ранг матриці $\left\|G_i^h-\in^h a_i\right\|$ більше одиниці.

Згортаючи (39) з $\in^\beta\in^\gamma\in^\delta$ при умові, що $n\geq 3$ переконаємось в справедливості $P_{\alpha\beta}^h\in^\alpha\in^\beta\neq k\in^h$. Тут k – деякий інваріант.

Згортаючи після цього (39) з $\in^\gamma\in^\delta$, знайдемо

$$P_{i\alpha}^h\in^\alpha=\beta G_i^h+\in^h\overset{1}{b}_i . \tag{41}$$

Згортаючи (39) з $\in^\delta$, отримаємо рівняння (37).

Тепер розглянемо випадок, коли не виконуються обмеження на ранг матриці, тобто має місце

$$F_i^h=\rho\delta_i^h+a_i\in^h+\overset{1}{b}_i c^h, \tag{42}$$

причому $a_i, b_i, \in^h, c^h$ – не колінеарні, бо інакше порушувалась би умова (35).

Так як $\in^\alpha a_\alpha=\in^\alpha\overset{1}{b}_\alpha=0$, то згортаючи (39) з $\in^\beta\in^\gamma\in^\delta$, переконаємось, що $A_{\alpha\beta}^h\in^\alpha\in^\beta$ компланарний з $\in^h$ та c^h. Після цього, згортаючи (39) з $\in^\gamma\in^\delta$ знайдемо, що

$$P_{i\alpha}^h\in^\alpha=a_i\in^h+\beta c^h .$$

Згортаючи (39) з $\in^\delta$, знайдемо

$$P_{ij}^h=a_{ij}\in^h+b_{ij}c^h . \tag{43}$$

Із цього та (39), випливає

$$a_{(ij}\overset{1}{b}_{k)} = b_{(ij}a_{k)}. \tag{44}$$

Так як a_i, b_i – не колінеарні, то з (44) отримаємо

$$a_{ij} = a_{(i}\varphi_{j)}, \; b_{ij} = \overset{1}{b}_{(i}\varphi_{j)}.$$

Тоді (43) приймає вид, який вимагався умовами теореми.

Необхідність очевидна, а те, що з (36) будемо мати (38), доводиться аналогічно.

Таким чином, теорема доведена.

5 ВИСНОВКИ

Використання модернізованої методики А. П. Нордена [6], [10], [12] дозволило отримати формулу зв'язку між відповідними внутрішніми об'єктами просторів A_n та $\bar{A}_n$. Ці формули дозволяють розв'язати задачі збереження геометричних властивостей чи характеристик алгебраїчного чи диференціального типу при відображеннях. Тобто, безпосередньо визначать тензор деформації зв'язності при відображенні. Робити це можливо вивчаючи умови інтегрування відповідних рівнянь. Ці умови – перевизначені алгебраїчні рівняння, при дослідженні яких виникають значні технічні складнощі [4].

Для спрощення введено поняття укороченого відображення та середньої зв'язності. Застосування нововведень продемонстровано на прикладі просторів, в яких тензор деформації зв'язності задовольняє деяким алгебраїчним умовам. Отримані результати можуть бути застосовані при вивчені геодезичних відображень псевдоріманових просторів [8], [17], голоморфно-проективних відображень келерових просторів [14], [16]. Особливий науковий інтерес викликає їх застосування при вивченні інваріантних перетворень.

Література

1. Вашпанова Н. В., Подоусова Т. Ю., Шевченко Т. І. Умови Сен-Венана для псевдоріманових просторів. Механіка та математичні методи. 2019. Т.1. №2. С. 62–74.
2. Егоров И. П. Автоморфизмы в обобщенных пространствах. Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1978. С. 147–191.
3. Кіосак В. А., Лесечко О. В. Моделі механічних систем, що зберігають тензор Вейля. Механіка та математичні методи. 2019. Т.1. №1. С. 25–34.
4. Киосак В., Чепурная Е. Диффеоморфизмы с сохранением тензора Эйнштейна: Тензорные методы. Lap Lambert Academic Publishing. 2012. 108 с.
5. Кручкович Г. И. Римановы и псевдоримановы пространства. Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. 1966, 1968. С. 191–220.
6. Норден А. П. Пространства аффинной связности. М. : Наука, 1976. 432 с.
7. Микеш Й. Проективно симметрические и проективно рекуррентные пространства аффинной связности. Тр. геом. семин. Казань : Казанск. ун-т. 1981. №13. С. 61–62.
8. Синюков Н. С. Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств. Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1982. №13. С. 3–26.
9. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. М. : Наука, 1979. 255 с.
10. Широков А. П. Пространства аффинной связности (некоторые аспекты метода нормализации А. П. Нордена). Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1985. С. 131–151.
11. Kiosak V., Lesechko O. Geodesic mappings of spaces with special vector fields. Mechanics and mathematical methods. 2020. №. 2. (1). P. 45–54.
12. Kiosak V., Lesechko O., Savchenko O. Mappings of Spaces with Affine Connection. 17th Conference on Applied Mathematics. APLIMAT 2018. Procedings, Bratislava. 2018. P. 563–569.

13. Lesechko O., Latysh O., Kamienieva A. Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor. AIP Conference Proceedings. 2019. 2164. 040002. https://doi.org/10.1063/1.5130794.
14. Lesechko O., Latysh O., Spychak T. Conformally flat kähler spaces. AIP Conference Proceedings. 2020. 2302. 04000. https://doi.org/10.1063/5.0034024.
15. Lesechko O., Makarenko L., Sokolova L. On the Pseudo-Riemannian spaces with a special tructure of a curvature tensor. AIP Conference Proceedings. 2020. 2302. 040005. https://doi.org/10.1063/5.0034022.
16. Mikes J., Kiosak V., Vanzurova O. Geodesic mappings of manifolds with affine connection. Palacky University Press. Olomouc. 2008, 221 p.
17. Vashpanov Y., Olshevska O., Lesechko O. Geodesic mappings of spaces with φ(Ric) vector fields. AIP Conference Proceedings. 2020. 2302. 040010. https://doi.org/10.1063/5.0033965.
18. Vasilenko A. T., Lesechko A. V. Nonlinear nonaxisymmetric deformation of composite shells of revolution. Journal of Mathematical Sciences. 1996. № 79 (6). P. 1458–1461, https://doi.org/10.1007/BF02362805.

References

1. Vashpanova, N., Podousova, T., Shevchenko, T. (2019). Umovy Sen-Venana dlia psevdorimanovykh prostoriv [Saint-Venant's conditions for pseudo-Rimannian spaces]. *Mekhanika ta matematychni metody* [Mechanics and mathematical methods], no. 1 (2), 62–74. [in Russian].
2. Ehorov, I. P. (1978). Avtomorfyzmy v obobshchennykh prostranstvakh [Automorphisms in generalized spaces]. *Ytohy nauky y tekhnyky*. *Problemy heometryy* [Results of science and technology. Probl. Geom], no. 10, 147–191. [in Ukranian].
3. Kiosak, V. A., Lesechko, A. V. (2019). Modeli mekhanichnykh system, shcho zberihaiut tenzor Veilia [Models of mechanical systems preserving the Weyl tenzor]. *Mekhanika ta matematychni metody* [Mechanics and mathematical methods], no. 1 (1), 25–34. [in Ukranian].
4. Kiosak, V., Chepurnaya, O. (2012). *Dyffeomorfyzmy s sokhranenyem tenzora Einshteina: Tenzornye metody* [Diffeomorzmy s sokhraneniem tenzora Eynshteyna: Tenzornye metody]. Lap Lambert Academic Publishing [in Russian].
5. Kruchkovich, G. I. (1966, 1968). Rymanovy y psevdorymanovy prostranstva [Riemannian and pseudo-Riemannian spaces]. *Ytohy nauky y tekhn. Alhebra. Topolohyia. Heometryia* [Results of science and technology. Mat. Algebra. Topol. Geom.], 191–220. [in Russian].
6. Norden, A. P. (1976). *Prostranstva Affynnoi Sviaznosty* [Affinely connected spaces]. Moskva, Nauka [in Russian].
7. Mikesh, J. (1981). Proektyvno symmetrycheskye y proektyvno rekurrentnыe prostranstva affynnoi sviaznosty [Projective-symmetric and projective-recurrent affinely connected spaces]. *Tr. heom. semyn* [Tr. Geom. Semin], no. 13, 61–62. [in Russian].
8. Sinyukov, N. S. (1982). Pochty heodezycheskye otobrazhenyia affynnosviaznыkh y rymanovыkh prostranstv [Almost geodesic mappings of affinely connected and Riemannian spaces]. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Probl. Geom*. [Results of science and technology. Probl. Geom], no. 13, 3–26. [in Russian].
9. Sinyukov, N. S. (1979). *Heodezycheskye otobrazhenyia rymanovykh prostranstv* [Geodesic mappings of Riemannian spaces]. Moskva, Nauka, [in Russian].
10. Shirokov, A. P. (1985). Prostranstva affynnoi sviaznosty (nekotorыe aspektы metoda normalyzatsyy A. P. Nordena) [Spaces with affine connection (some aspects of A. P. Norden's normalization method)], *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Probl. Geom*. [Results of science and technology. Probl. Geom], no. 17, 131–151. [in Russian].
11. Kiosak V., Lesechko O. (2020). Geodesic Mappings of Spaces with Special Vector Fields. *Mechanics and mathematical methods*, no. 2 (1), 45–54. [in English].
12. Kiosak, V., Lesechko, O., Savchenko, O. (2018). Mappings of Spaces with Affine Connection. *17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT 2018*, 563–569. [in English].
13. Lesechko, O., Latysh, O., Kamienieva, A. (2019). Models of Mechanical Systems Preserving the Weyl Tensor. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040002, https://doi.org/10.1063/1.5130794. [in English].

14. Lesechko, O., Latysh, O., Spychak T. (2020). Conformally Flat Kähler Spaces. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040004, https://doi.org/10.1063/5.0034024. [in English].
15. Lesechko, O., Makarenko, L., Sokolova, L. (2020). On the Pseudo-Riemannian Spaces with a Special Structure of a Curvature Tensor. *AIP Conference Proceedings*. 2302, 040005, https://doi.org/10.1063/5.0034022. [in English].
16. Mikes, J., Kiosak, V., Vanzurova, O. (2008). *Geodesic Mappings of Manifolds with Affine Connection*. Olomouc: Palacky University. [in English].
17. Vashpanov, Y., Olshevska, O., Lesechko, O. (2020). Geodesic Mappings of Spaces with φ(Ric) Vector Fields. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040010, https://doi.org/10.1063/5.0033965. [in English].
18. Vasilenko, A. T., Lesechko, A. V. (1996). Nonlinear Nonaxisymmetric Deformation of Composite Shells of Revolution. *Journal of Mathematical Sciences*, no. 79 (6), 1458–1461, https://doi.org/10.1007/BF02362805. [in English].

Кіосак Володимир Анатолійович
Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.ф.-м.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
kiosakv@ukr.net
ORCID: 0000-0002-7433-6709
Каменева Алла Вікторівна
Національний університет «Одеська морська академія»,к.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона, 8, Одеса, Україна 65029
kamienieva@ukr.net
ORCID: 0000-0002-9970-9081

Для посилань:
Кіосак В. А. Укорочені відображення просторів аффінної зв’язності / В. А. Кіосак, А. В. Каменева // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 2.– С. 18-31.
For references:
Kiosak, V., Kamienieva, A. (2020). Shortened mappings of spaces with affine connectivity. Mechanics and Mathematical Methods, 2 (2), 18-31