УДК 539.3

ДЕФОРМАЦІЇ ПОВЕРХОНЬ ЗІ СТАЦІОНАРНИМ ТЕНЗОРОМ РІЧЧІ

Подоусова Т. Ю.[1], Вашпанова Н. В.[1]
[1] *Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Аннотация: У даній роботі розглядаються нескінченно малі (н.м.) деформації першого порядку однозв'язних регулярних поверхонь у тривимірному евклідовому просторі. Пошук векторного поля цієї деформації в загальному випадку зводиться до дослідження та розв'язування системи чотирьох рівнянь (серед них є і диференціальні рівняння) відносно семи невідомих функцій.

Для уникнення невизначенності на задану поверхню накладено наступне обмеження: на поверхні всюди зберігається (в головному) тензор Річчі. Створена математична модель поставленої задачі: система семи рівнянь відносно семи невідомих функцій. Встановлено її механічний зміст. Показано, що кожний розв'язок отриманої системи рівнянь визначатиме поле зсуву зсуву н.м. деформації першого порядку поверхні ненульової гауссової кривини, яке буде однозначною функцією (з точністю до постійного вектора).

Доведено, що кожна регулярна поверхня ненульової гауссової та середньої кривин допускає н.м. деформацію першого порядку зі стаціонарним тензором Річчі. Тензорні поля при цьому знайдені в явному вигляді і залежать від двох функцій, які є розв'язками лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними. Виділено клас жорстких поверхонь по відношенню до вказаних н.м. деформацій.

Припустивши, що одна із функцій заздалегідь задана, отримане диференціальне рівняння в загальному випадку буде неоднорідним диференціальним рівнянням Вейнгартена, причому рівнянням еліптичного типу. Знайдено геометричний та механічний зміст функції, яка є розв'язком цього рівняння. Отримано наступний результат: будь-яка поверхня додатної гауссової та ненульової середньої кривин допускає н.м. деформації першого порядку зі стаціонарним тензором Річчі в області достатньо малої міри. Тензорні поля при цьому матимуть представлення через заздалегідь задану та деяку довільну регулярні функції.

Розглянувши задачу Діріхле, доведено, що однозв'язна регулярна поверхня додатної гауссової та ненульової середньої кривин при певній граничній умові допускає єдину н.м. деформацію першого порядку зі стаціонарним тензором Річчі. Тензори деформації при цьому визначені однозначно.

Ключові слова: деформація, поверхня, тензор Річчі,кривина, диференціальне рівняння.

DEFORMATIONS OF SURFACES FROM STATIONARY RICCI TENSOR

T. Podousova[1], N. Vashpanova[1]
[1] *Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract: In this paper, we consider infinitesimal (n. m.) first-order deformations of single-connected regular surfaces in three-dimensional Euclidean space. The search for the vector field of this deformation is generally reduced to the study and solution of a system of four equations (among them there are differential equations) with respect to seven unknown functions.

To avoid uncertainty, the following restriction is imposed on a given surface: the Ricci tensor is stored (mainly) on the surface. A mathematical model of the problem is created: a system of seven equations with respect to seven unknown functions. Its mechanical content is established. It is shown that each solution of the obtained system of equations will determine the field of displacement n. m. deformation of the first order of the surface of nonzero Gaussian curvature, which will be an unambiguous function (up to a constant vector).

It is proved that each regular surface of nonzero Gaussian and mean curvatures allows first-order n. m. deformation with a stationary Ricci tensor. The tensor fields are found explicitly and depend on two functions, which are the solution of a linear inhomogeneous second-order differential equation with partial derivatives. The class of rigid surfaces in relation to the specified n. m. deformations.

Assuming that one of the functions is predetermined, the obtained differential equation in the General case will be a inhomogeneous differential Weingarten equation, and an equation of elliptical type. The geometric and mechanical meaning of the function that is the solution of this equation is found. The following result was obtained: any surface of positive Gaussian and nonzero mean curvatures admits n. m of first-order deformation with a stationary Ricci tensor in the region of a rather small degree. Tensor fields will be represented by a predefined function and some arbitrary regular functions.

Considering the Dirichlet problem, it is proved that the simply connected regular surface of a positive Gaussian and nonzero mean curvatures under a certain boundary condition admits a single first-order deformation with a stationary Ricci tensor. The strain tensors are uniquely defined.

Keywords: deformation, surface, Ricci tensor, curvature, differential equation.

1 ВСТУП

У повсякденному житті ми нерідко маємо справу з поверхнями. Під поверхнею, зазвичай, розуміють границю або частину границі тіла у просторі. Життєвий досвід показує, що найбільше застосування мають гладкі поверхні. Багато металевих, кам'яних, дерев'яних виробів шліфують та полірують для надання їхнім поверхням різного ступеню гладкості. Якщо із зміною часу форма і положення поверхні у просторі змінюються, то будемо говорити про деформацію поверхні. Як правило, на практиці розглядають, так звані, неперервні деформації, які із зміною часу не допускають розривів та відіграють чималу роль при вирішенні певних проблем. Вивчення н.м. деформацій поверхонь є важливим етапом при дослідженні їхніх неперервних деформацій. Адже саме міцність або гнучкість будь-якої конструкції в авіабудуванні, машинобудуванні тощо, визначається наявністю або відсутністю н.м. деформацій, які описують ту чи іншу конструкцію.

Поняття н.м. деформацій поверхонь з'явилося в роботах Г. Дарбу, Н. Вейля, Е. Рембса. Там були введені різні типи н.м. деформацій та складені відповідні для них рівняння. Серед них достатньо повно вивчені н.м. згинання, які займають важливе місце в диференціальній геометрії. Їм присвячена велика кількість досліджень, з результатами яких можна ознайомитись, наприклад, в роботах С. Е. Кон-Фоссена, О. Д. Александрова, О. В. Погорелова, М. В. Єфімова, І. Н. Векуа, В. Т. Фоменка. Такий інтерес до н.м. згинань пояснюється як самостійним їхнім розвитком з чисто геометричної точки зору, так і тими важливими застосуваннями, які вони отримали в теорії пружних оболонок, оскільки встановлено, що кожне н.м. згинання серединної поверхні оболонки описує безмоментний напружений стан цієї оболонки без поверхневого навантаження, і, навпаки.

У теперішній час активно вивчаються більш загальні н.м. деформації: зі збереженням елемента площі [1]-[3],геодезичних ліній [5], [8], LGT-ліній [6], [12], спеціальних векторних полів [7] та інших геометричних об'єктів [4], [9]-[11].

2 МЕТА РОБОТИ

Дослідити питання про існування н.м. деформацій поверхонь зі стаціонарним тензором Річчі та з'ясувати їхню механічну інтерпретацію. Для розв'язування сформульованих задач застосовуються методи тензорного аналізу, теорії диференціальних рівнянь та граничних задач для них.

3 СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПОСТАВЛЕНОЇ ЗАДАЧІ ТА ЇЇ МЕХАНІЧНИЙ СЕНС

Нехай S – регулярна поверхня класу C^3, гомеоморфна області G площини та задана в тривимірному евклідовому просторі векторно-параметричним рівнянням:

$$\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2), \tag{1}$$

де $\bar{r}$ – радіус – вектор точки поверхні $(x^1, x^2) \in G$.

Регулярна сімейність поверхонь S_t, яка залежить від малого параметра t

$$\tilde{r}(x^1, x^2, t) = \bar{r}(x^1, x^2) + t\bar{y}(x^1, x^2),$$

називається н.м. *деформацією першого порядку* (при $t = 0$ отримаємо S), а $\bar{y}(x^1, x^2)$ – *вектором (полем) зміщення*.

Кожна геометрична величина $P(x^1, x^2)$, яка характеризує ту чи іншу властивість S, для деформованої поверхні набуває взагалі нового залежного від t значення $P(x^1, x^2, t)$.

Нехай приріст $\Delta P = P(x^1, x^2, t) - P(x^1, x^2)$ в регулярному випадку можна розвинути за степенями t:

$$\Delta P = t\frac{\partial P(x^1, x^2, t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} + \frac{t^2}{2}\frac{\partial^2 P(x^1, x^2, t)}{\partial t^2}\bigg|_{t=0} + \ldots$$

Коефіцієнти цього розкладу $\delta P, \delta^2 P, \ldots,$ називають відповідно першою, другою і так далі варіаціями величини $P(x^1, x^2)$:

$$\delta^2 P = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k P(x^1, x^2, t)}{\partial t^k}\bigg|_{t=0}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Оскільки в подальшому будемо розглядати виключно н.м. деформації першого порядку, то будемо рахувати, що геометрична величина *стаціонарна* або *зберігається* при н.м. деформації першого порядку, якщо її приріст є величина не менш, ніж другого порядку відносно t (чим нехтуємо).

Отже, стаціонарна величина характеризується тим, що її перша варіація тотожно дорівнює нулю.

Н.м. деформацію поверхонь без жодних обмежень називають загальною (з.н.м.) деформацією.

Розглянемо з.н.м. деформацію першого порядку з вектором зсуву $\overline{y}(x^1, x^2) \in C^3$, частинні похідні якого мають вид:

$$\overline{y}_i = (c_{i\alpha}T^{\alpha\beta} - \mu\delta_i^\beta)\overline{r}_\beta + c_{i\alpha}T^\alpha\overline{n}, \tag{2}$$

де $c_{i\alpha}$ – дискримінантний тензор $(c_{11} = c_{22} = 0, c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g}, \mathrm{g} = \mathrm{g}_{11}g_{22} - g_{12}{}^2)$, g_{ij} – метричний тензор, $\overline{r}_\alpha = \partial\overline{r}/\partial x^\alpha$, $\overline{n}$ (орт нормалі S) – базисні вектори,

$$\delta_i^\beta = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i = \beta \\ 0, \text{ якщо } i \neq \beta. \end{cases}$$

Функції $T^{\alpha\beta}, T^\alpha, \mu(x^1, x^2)$ є розв'язком наступної системи рівнянь [2]:

$$\begin{cases} T^{\alpha\beta}_{,\alpha} = b^\beta_\alpha T^\alpha + \mu_\alpha c^{\beta\alpha} \\ b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} + T^\alpha_{,\alpha} = 0 \\ c_{\beta\alpha}T^{\alpha\beta} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Тут $b^\beta_\alpha = g^{\beta i}b_{i\alpha}$, $b_{i\alpha}$ – коефіцієнти другої квадратичної форми S, g^{ij} – елементи матриці, оберненої до матриці $\|g_{ij}\|$. Комою позначено коваріантне диференціювання на базі g_{ij}. Індекси всюди набувають значень 1,2.

Систему рівнянь (3) називають *основними рівняннями* з.н.м. деформації першого порядку S. Вона містить чотири рівняння відносно семи невідомих функцій $T^{\alpha\beta}, T^\alpha, \mu$.

Будемо вимагати, щоб при цій деформації тензор Річчі був стаціонарним, тобто, щоб перша варіація тензора Річчі дорівнювала нулю: $\delta R_{ij} = 0$.

Справедлива наступна

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-51-62

теорема 1. Необхідною і достатньою умовою того, щоб при н.м. деформації першого порядку поверхонь ненульової гауссової кривини $(K \neq 0)$ зберігався тензор Річчі є справедливість рівностей

$$(c_{i\alpha} g_{j\beta} + c_{j\alpha} g_{i\beta}) T^{\alpha\beta} + g_{ij} c_{\gamma\alpha} d^{\gamma\beta} T^{\alpha}_{,\beta} = 0 \tag{4}$$

де $d^{\alpha\beta} = (1/K) c^{\alpha i} c^{\beta j} b_{\alpha\beta}$ – елементи матриці, оберненої до матриці $\|b_{ij}\|$.

Доведення. Необхідність. Оскільки $R_{ij} = -K g_{ij}$, то шляхом варіювання цих рівностей, дістанемо варіацію тензора Річчі

$$\delta R_{ij} = -g_{ij} K - 2K \varepsilon_{ij}. \tag{5}$$

Скориставшись виразами варіацій δg_{ij}, δK через тензорні поля $T^{\alpha\beta}$, T^{α} та функцію μ із [2]:

$$2\varepsilon_{ij} = \delta g_{ij} = (c_{i\alpha} g_{j\beta} + c_{j\alpha} g_{i\beta}) T^{\alpha\beta} - 2\mu g_{ij},$$

$$\delta K = K c_{i\alpha}\, \mathrm{d}^{i\beta} \mathrm{T}^{\alpha}_{,\beta} + 2K\mu.$$

Попередні рівності (5) матимуть наступне представлення:

$$\delta R_{ij} = -K (c_{i\alpha} g_{j\beta} + c_{j\alpha} g_{i\beta}) T^{\alpha\beta} - K g_{ij} c_{\gamma\alpha} d^{\gamma\beta} T^{\alpha}_{,\beta}. \tag{6}$$

Враховуючи стаціонарність тензора Річчі із (6) дістанемо рівності (4).

Достатність. Очевидно, із виконання рівностей (4) випливає, що варіація тензора Річчі із (6) буде дорівнювати нулю.

Наслідок 1. При н.м. деформації першого порядку ненульової гауссової кривини зі стаціонарним тензором Річчі справджується рівність

$$c_{\gamma\alpha} d^{\gamma\beta} T^{\alpha}_{,\beta} = 0. \tag{7}$$

Доведення. Згорнемо (4) з g^{ij}. Оскільки $T^{\alpha\beta}$ – симетричний тензор, а $g_{ij} g^{ij} = 2$, то матимемо (7).

Наслідок 2. При н.м. деформації першого порядку ненульової гауссової кривини зі стаціонарним тензором Річчі повна кривина поверхні задовольняє наступну умову

$$\delta K = 2K\mu. \tag{8}$$

Доведення. Прирівняємо (5) до нуля та помножимо на g^{ij}. Врахувавши, що $g^{ij} \varepsilon_{ij} = -2\mu$, отримаємо (8).

Примітка. Слід зазначити, що у випадку нульової гауссової кривини $(K = 0)$ н.м. деформації, при яких зберігається тензор Річчі можуть допускати тільки розгорнуті поверхні, які після деформації в головному залишаються розгорнутими.

Отже, математичною моделлю поставленої задачі буде система рівнянь (3), (4), яка містить сім рівнянь відносно семи невідомих: симетричного тензора $T^{\alpha\beta}$, контраваріантного вектора T^{α} та функції $\mu(x^1, x^2) \in C^2$. Через будь-який набір її розв’язку вектор зміщення $\overline{y}(x^1, x^2)$ згідно (2) матиме вид:

$$\overline{y}(M) = \int\limits_{M_0 M} c_{i\alpha} \left((T^{\alpha\beta} + \mu c^{\alpha\beta}) \overline{r}_{\beta} + T^{\alpha} \overline{n} \right) dx^i + \overline{y_0}, \tag{9}$$

де інтеграл обчислюється вздовж будь-якої спрямної кривої, яка належить S і з’єднує довільну фіксовану точку M_0 із змінною точкою M, $\overline{y}_0$ – постійний вектор. Оскільки

S – однозв'язна поверхня, то криволінійний інтеграл (9) не залежить від шляху інтегрування [16, розд.4]. Отже, векторне поле $\overline{y}(x^1, x^2)$ є однозначною функцією (з точністю до сталого вектора).

Якщо $\overline{y} = const$, то поверхню S будемо називати жорсткою по відношенню до даної н.м. деформації.

Порівнюючи основну систему рівнянь рівноваги навантаженої оболонки у безмоментному напруженому стані [13, с.451]:

$$T^{\alpha\beta} + X^{\beta} = 0, b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + Z = 0, c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0$$

із системою рівнянь (3), (4), очевидно, за умов

$$T^{\alpha i} = T^{\alpha i}, X^i = -b^i_{\alpha} T^{\alpha} + \mu_{\alpha} c^{\alpha i}, Z = T^{\alpha}_{,\alpha} \tag{10}$$

вони збігаються.

Це свідчить про те, що будь-яку н.м. деформацію S $(K \neq 0)$ можна інтерпретувати як деякий безмоментний напружений стан рівноваги навантаженої оболонки з тензором зусиль $T^{\alpha\beta}$ та поверхневим навантаженням

$$X = (\mu_{\alpha} c^{\alpha i} - b^i_{\alpha} T^{\alpha}) \overline{r}_i + Z\overline{n},$$

де Z – його нормальна складова, T^{α} – перерізуюча сила.

4 ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ (3), (4)

Задача про існування н.м. деформацій поверхонь ненульової гауссової кривини зі стаціонарним тензором Річчі звелась до пошуку розв'язків системи рівнянь (3), (4).

Має місце

теорема 2. Будь-яка поверхня $S \in C^4$ ненульових повної та середньої $(H \neq 0)$ кривин допускає н.м. деформацію зі стаціонарним тензором Річчі. Тензорні поля при цьому матимуть наступні представлення:

$$T^{\alpha\beta} = \varphi g^{\alpha\beta}; \tag{11}$$

$$T^k = \varphi_{\alpha} d^{\alpha k} + \mu_{\alpha} c^{\alpha\beta} d^k_{\beta}, \tag{12}$$

де функції $\mu(x^1, x^2)$ та $\varphi(x^1, x^2)$ класу C^3 задовольняють рівняння

$$(d^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha})_{,\beta} + 2H\varphi = \mu_{\alpha,k} c^{\alpha\beta} d^k_{\beta} + \mu_{\alpha} c^{\alpha\beta} (d^k_{\beta})_{,k}. \tag{13}$$

Поверхня S буде жорсткою тільки у випадку, коли функції $\mu(x^1, x^2)$ та $\varphi(x^1, x^2)$ дорівнюють нулю.

Доведення. Нехай поверхня S $(K \neq 0, H \neq 0)$ допускає н.м. деформацію, при якій зберігається тензор Річчі, з полем зміщення $\overline{y}(x^1, x^2)$, частинні похідні якого мають вид (2). Віднесемо поверхню S до ліній кривини $(b_{12} = g_{12} = 0)$. Тоді система рівнянь (3), (4) з урахуванням (7), запишеться так:

$$\begin{cases} g_{11} T^{11} - g_{22} T^{22} = 0 \\ b_{11} T^{11} + b_{22} T^2_{,2} = -T^{\alpha}_{,\alpha} \\ T^{12} = T^{21} = 0. \end{cases}$$

За правилом Крамера знайдемо її розв'язок, який у тензорному виді матиме представлення:

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{T^{\alpha}_{,\alpha}}{2H} g^{\alpha\beta}.$$

Введемо до розгляду функцію

$$\varphi = -\frac{T^{\alpha}_{,\alpha}}{2H}. \qquad (14)$$

Тоді тензор деформації $T^{\alpha\beta}$ набуде виду (11). Очевидно, що $T^{\alpha\beta}$ повинен задовольняти перше рівняння системи (3). Із (11) знайдемо коваріантну похідну $T^{\alpha\beta}_{,\alpha}$ [14, с.130] та підставимо її в (3):

$$g^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha} = b^{\beta}_{\alpha}T^{\alpha} + \mu_{\alpha}c^{\beta\alpha}.$$

Помножимо ці рівності на d^k_{β}. Внаслідок того, що $b^{\beta}_{\alpha}d^k_{\beta} = \delta^k_{\alpha}, g^{\alpha\beta}d^k_{\beta} = d^{\alpha k}$ із останніх рівностей отримаємо вираз для T^{α} виду (12).

Знайдемо із (12) $T^{\alpha}_{,\alpha}$ і підставимо в (14). Отримаємо одне диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними виду (13) відносно невідомих функцій $\mu(x^1,x^2)$ та $\varphi(x^1,x^2)$.

Нехай функції $\mu = 0$ і $\varphi = 0$. Тоді згідно (11), (12) із (2) випливає, що поле зміщення $\overline{y} = const$. Це означає, що в цьому випадку поверхня буде жорсткою по відношенню до вказаних н.м. деформацій.

Теорема доведена.

Зокрема, зазначимо, що у випадку $\mu = const$ із (13) отримаємо рівняння Вейнгартена, яке називається характеристичним рівнянням поля обертанням при н.м. згинаннях поверхні, а його розв'язки - характеристичними функціями [13, с.334].

Отже, пошук розв'язків системи рівнянь (3), (4) зводиться до дослідження та розв'язування одного диференціального рівняння виду (13).

5 АНАЛІЗ НЕОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ ВЕЙНГАРТЕНА ТА ГЕОМЕТРИЧНИЙ І МЕХАНІЧНИЙ ЗМІСТ ЙОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Нехай $S \in C^{4,\alpha}$– поверхня додатної гаусової та ненульової середньої кривин, гомеоморфна області G площини x^1Ox^2, яка обмежена кривою $\partial G \in C^{1,\alpha} (0 < \alpha \le 1)$ та задана рівнянням (1). (Позначення класів функцій запозичені в [13]).

Припустимо, що $\mu(x^1,x^2) \in C^{3,\alpha}$ є заздалегідь заданою функцією, причому $\mu \ne const$. Тоді (13) в загальному виді є неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними відносно функції $\varphi(x^1,x^2)$:

$$d^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta} + l^k\varphi_k + 2H\varphi = F(\mu), \qquad (15)$$

де

$$F(\mu) = \mu_{\alpha,k}c^{\beta\alpha}d^k_{\beta} + \mu_{\alpha}c^{\beta\alpha}(d^k_{\beta})_{,k}, \quad l^k = d^{k\alpha}_{,\alpha} - \Gamma^k_{s\alpha}d^{s\alpha},$$

$\Gamma^k_{s\alpha}$ – символи Кристоффеля другого роду, $\varphi_{\alpha\beta} = \partial^2\varphi / \partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}$.

Тоді $l^k, d^{\alpha\beta}, H \in C^{2,\alpha}(\overline{G})$ і вільний член $F(\mu) \in C^{1,\alpha}(\overline{G})$ є відомими функціями точки поверхні S. Неважко впевнитись в тому, що дискримінант рівняння (15)

$$\Delta = \frac{1}{gK}.$$

Отже, у випадку $K > 0$ в області $\overline{G} = G + \partial G$ рівняння (15) задовольняє умові рівномірної еліптичності $(\Delta > \Delta_0 > 0, \Delta_0 = const)$. Тоді на S існує ізометрична параметризація [13, с.93], відносно якої (15) набуде канонічного виду в G:

$$\varphi_{11} + \varphi_{22} + m\varphi_1 + l\varphi_2 + p\varphi = f(\mu). \tag{16}$$

Тут

$$f(\mu) = \frac{Kg}{b_{22}} F(\mu), \quad m = \frac{Kg}{b_{22}} (d^{1\alpha}_{,\alpha} - \Gamma^1_{s\alpha} d^{s\alpha}), \quad l = \frac{Kg}{b_{22}} (d^{2\alpha}_{,\alpha} - \Gamma^2_{s\alpha} d^{s\alpha}), \quad p = 2Hb_{22}.$$

Справедлива наступна

теорема 3. Будь-яка поверхня $S \in C^{4,\alpha}$ додатньої гауссової та ненульової середньої кривин допускає н.м. деформації зі стаціонарним тензором Річчі в області достатньо малої міри. Тензорні поля при цьому виражаються через довільну функцію $\omega(x^1, x^2) \in C^3(\overline{G})$ та заздалегідь задану функцію $\mu(x^1, x^2) \in C^{3,\alpha}(\mu \neq const)$.

Доведення. оскільки $S \in C^{4,\alpha}$, то коефіцієнти рівняння (16) m, l, p та права частина $f(\mu)$ належать класу $C^{1,\alpha}(\overline{G})$. Це означає, що рівняння (16) в області достатньо малої міри, що входить в $\overline{G}$, має розв'язок [19, с.77], який залежатиме від довільної функції $\omega(x^1, x^2) \in C^{3,\alpha}$.

Теорема доведена.

Відомо [2], що при з.н.м. деформації першого порядку варіація орта нормалі однозв'язної регулярної поверхні s має вид:

$$\delta\overline{n} = c_{\alpha\beta} T^{\alpha} \overline{r}^{\beta}.$$

Звідси знайдемо $T^{\alpha}_{,\alpha}$ і підставимо в рівність (14). Для функції $\varphi(x^1, x^2)$ отримаємо вираз

$$\varphi = \frac{c^{\beta\alpha} \overline{r}_{\alpha} (\delta\overline{n})_{,\beta}}{2H}, \tag{17}$$

який і визначатиме її геометричний сенс.

З іншого боку, інваріант φ можна інтерпретувати як нормальну складову Z поверхневого навантаження. Дійсно, згідно (1), із (14) матимемо наступне представлення функції

$$\varphi = -\frac{Z}{2H},$$

що і розкриває її механічний зміст.

6 ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ОДНОЗВ'ЯЗНОЇ ПОВЕРХНІ

Будемо шукати регулярний в G та неперервний в $\overline{G}$ розв'язок $\varphi(x^1, x^2) \in C^{3,\alpha}(\overline{G})$ рівняння (15), який задовольняє наступній граничній умові

$$\varphi(x^1, x^2) = \eta(x^1, x^2) \text{ на } \partial G, \tag{18}$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-51-62

де $\eta(x^1, x^2)$ – задана функція класу $C^{1,\alpha}$ точки граничної кривої ∂G.

Відомо [15, c.157], що неоднорідна задача (15), (18) завжди має розв'язок, причому єдиний в $\overline{G}$, якщо відповідна однорідна задача

$$\begin{cases} (d^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha})_{,\beta} + 2H\varphi = 0 \ \ (в\ G) \\ \varphi(x^1, x^2) = 0 \ \ (\text{на}\, \partial G) \end{cases} \tag{19}$$

має тільки нульовий розв'язок.

Однією із достатніх ознак цього є існування регулярного в G розв'язку рівняння неперервного та відмінного від нуля всюди в $\overline{G}$.

Покажемо, що для довільної поверхні такий розв'язок завжди існує в достатньо малій області (області Рімана), де функція Рімана відмінна від нуля.

Нехай функція

$$\varphi = \overline{n} \cdot \overline{c}, \tag{20}$$

де $c = const(c \neq 0)$ – сталий вектор.

Очевидно, ненульовий вектор $\overline{c}$ завжди можна вибрати так, щоб функція $\varphi(x^1, x^2) > 0(\varphi < 0)$ всюди в деякій області $\overline{T} \subset G$. Розміри області $\overline{T}$ залежать від сферичного відображення S. В області T вектори $\overline{n}$ і $\overline{c}$ утворюють всюди гострий (тупий) кут.

Скористаємось дериваційними рівняннями теорії поверхонь:

$$\overline{r}^{\beta}_{,\alpha} = b^{\beta}_{\alpha}\overline{n}, \quad \overline{n}_k = -b^{\alpha}_{k}\overline{r}_{\alpha}.$$

Тоді

$$(d^{\alpha\beta}\varphi_{\beta})_{,\alpha} = (d^{\alpha\beta}\overline{n}_{\beta}\overline{c})_{,\alpha} = -(g^{\alpha s}\overline{r}_s\overline{c})_{\alpha} = -g^{\alpha s}b_{\alpha s}\overline{n}\overline{c} = -2H\overline{n}\overline{c} = -2H\varphi.$$

Отже, із першого рівняння системи (19) випливає, що функція $\varphi(x^1, x^2)$ виду (20) є його ненульовим розв'язком.

Має місце наступна

теорема 4. Нехай F – однозв'язна поверхня класу $C^{4,\alpha}$ додатньої гауссової та ненульової середньої кривин. Тоді при граничній умові

$$c^{\alpha\beta}\overline{r}_{\alpha}(\delta\overline{n})_{\beta} = 2H\eta \ \ (\text{на}\ \Gamma) \tag{21}$$

вона допускає єдину н.м. деформацію першого порядку зі стаціонарним тензором Річчі в класі $C^{2,\alpha}(\overline{G})$ – поверхонь. При цьому тензорні поля будуть однозначно визначені.

Доведення. Позначимо через F частину поверхні S, гомеоморфну області T, причому $F \subset S$. Границю поверхні F позначимо через L, а її образ на площині – через Γ.

Враховуючи геометричний зміст функції φ (17), граничну умову запишемо через варіацію орта нормалі у виді (21).

Очевидно, оскільки в області T існує ненульовий розв'язок рівняння (19) виду (20), тоді гранична задача (15), (21) для заданих функцій $\mu(\mu \neq const)$ та η має єдиний розв'язок [17, c.119]. Згідно (11), (12) отримаємо

$$T^{\alpha\beta} \in C^{2,\alpha}(\overline{G}), \ \ T^{\alpha} \in C^{1,\alpha}(\overline{G}).$$

Тоді частинні похідні вектора зміщення із (2) $\overline{y_i} \in C^{1,\alpha}(\overline{G})$.

Звідси випливає, що векторне поле $\overline{y} \in C^{2,\alpha}(\overline{G})$.

Теорема доведена.

7 ВИСНОВКИ

В даній роботі доведено, що:

– однозв’язна регулярна поверхня додатної гауссової та ненульової середньої кривин допускає н.м. деформації першого порядку зі стаціонарним тензором Річчі в області достатньо малої міри;
– однозв’язна регулярна поверхня додатної гауссової та ненульової середньої кривин при певних граничних умовах допускає єдину н.м. деформацію першого порядку зі стаціонарним тензором Річчі;
– знайдено зв’язок таких н.м. деформацій з теорією оболонок.

Отримані результати можуть бути використані як в подальших наукових дослідженнях, так і в безмоментній теорії тонких пружних оболонок при розрахунках їх рівноваги. Розроблені методи можуть бути застосовані при вивченні деформацій інших поверхонь.

Література

1. Bezkorovaina L. L., Vashpanova T. Y. A-deformations of a surface with stationary lengths of LGT-lines. Ukranian Mathematical Journal, 2010. № 62(7). P. 878-884.
2. Podousova T.,Vashpanova N. On the existence deformations of ovaloids. Proceedings of the International Geometry Center. 2020. № 13(1). P. 23-34. https://doi.org/10.15673/2072-9812.3/2014.40572
3. Подоусова Т, Вашпанова Н. О продолжении А-деформаций поверхностей положительной кривизны с краем. Proceed. Of Internat. Geomet. Cent. 2014. № 7 (3). P. 38-48. https://doi.org/10.15673/2072-9812.3/2014.40572
4. Vashpanova N.,Podousova T., Fedchenko Yu. Canonical Deformations of Pseudo-Riemannian Spases. Application Of Mathematics In Technical And Natural Sciences. 2019. № 2164 (1) 040005. https://doi.org/10.1063/1.5130797
5. Podousova T., Ugol’nikov A., Dumanska V. Infinitesimaly small deformanion which preserves geodesiclines. Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. 2020. № 2302 (1). 040007. https://doi.org/10.1063/5.0033749
6. Безкоровайна Л. Л., Вашпанова Т. Ю. LGT- сеть и ее деформации. Соврем. пробл. матем.и мех. 2011. Том 4. Математика. № 2. С. 157-163.
7. Hinterleitner I., Kiosak V. φ(ric)-vector fields on conformally flat spaces. Proceedings of American Institute of Physics. 2009. №1191 (1). P. 98–103. https://doi.org/10.1063/1.3275604
8. Kiosak V., Matveev V. There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor. Journal of Geometry and Physics. 2014. № 78. P. 1–11. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.01.002
9. Vashpanov Yu., Son Jung-Young, Heo Gwanghee, Podousova T., Yong Suk Kim. Determination of geometric parameters of cracks in concrete by image processing. Advances in Civil Engineering. 2019. 2398124. 1–14. https://doi.org/10.1155/2019/2398124
10. Потапенко І. В.Про відновлення варіації метричного тензора поверхні за заданою варіацією символів Крістоффеля другого порядку при інфінітезимальних деформаціях поверхонь в евклідовому просторі E3. Укр. мат. журн. 2011. Т. 63. №4. С. 523-530.
11. Вашпанова Н. В.,Подоусова Т. Ю., Шевченко Т. І. Умови Сен-Венана для псевдо ріманових просторів. Механіка та математичні методи. 2019. №1 (2). С. 64-74.
12. Вашпанова Т. Ю. Про властивості інваріантів тензора LGT-сітки і деформації поверхонь. Збірник праць міжнародного геометричного центру. 2010. Том 3. № 3. С. 15-22.
13. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. Москва : Наука,1988. 509 с.
14. Векуа И. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. Москва : Наука, 1978. 296с.

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-51-62

15.Ладыженская О. А., Уральцева Н. В. Линейые и вказилинейные уравнения эллиптического типа. Москва : Наука, 1976. 576с.
16.Будак Б. М., Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды. Москва : Наука, 1967. 607 с.
17.Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.-Л.: Государственное издание технико-технической литературы. 1948. 296 с.
18. Бицадзе А. В Краевые задачи для єллиптических уравнений второго порядка, Москва : Наука, 1966. 203 с.
19.Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. Москва : ИЛ.,1956,-256с.

References

1. Bezkorovaina, L. L., Vashpanova, T. Y. (2010). A-deformations of a surface with stationary lengths of LGT-lines. *Ukranian Mathematical Journal*, no. 62, 7, 878-884. [in English].
2. Podousova, T.,Vashpanova, N. (2020). On the existence deformations of ovaloids. *Proceedings of the International Geometry Center*, no. 13, 1, 23-34. https://doi.org/10.15673/2072-9812.3/2014.40572. [in English].
3. Podousova, T, Vashpanova, N. (2014). O prodolzhenyy A-deformatsyi poverkhnostei polozhytelnoi kryvyzny s kraem [On the continuation of A-deformations of surfaces of positive curvature with boundary]. *Proceed. Of Internat. Geomet*. *Cent*., no.7, 3, 38-48. https://doi.org/10.15673/2072-9812.3/2014.40572 [in Russian].
4. Vashpanova, N.,Podousova, T., Fedchenko, Yu. (2019). Canonikal Deformations of Pseudo-Riemannian Spases. *Application Of Mathematics In Technical And Natural Sciences*, no. 2164, 1, 040005. https://doi.org/10.1063/1.5130797 [in English].
5. Podousova, T., Ugolnikov, A., Dumanska, V. (2020). Infinitesimaly small deformanion which preserves geodesiclines. *Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences*. no. 2302, 1. 040007 https://doi.org/10.1063/5.0033749 [in English].
6. Bezkorovaina, L. L, Vashpanova, T. Yu. (2011). LGT- set y ee deformatsyy. [LGT- network and its deformations]. *Sovrem. probl. matem.y mekh* [Modern. probl. mathematics and fur], no. 4, Matematyka, 2, 157-163. [in Russian].
7. Hinterleitner, I., Kiosak, V. (2009). φ(ric)-vector fields on conformally flat spaces. *Proceedings of American Institute of Physics*, no. 1191, 98–103. https://doi.org/10.1063/1.3275604 [in English].
8. Kiosak, V., Matveev, V. (2014). There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor. *Journal of Geometry and Physics*, no. 78, 1–11. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.01.002 [in English].
9. Vashpanov, Yu., Son, Jung-Young, Heo, Gwanghee, Podousova, T., Suk Kim, Y. (2019). Determination of geometric parameters of cracks in concrete by image processing. *Advances in Civil Engineering*, no. 2398124, 1–14. https://doi.org/10.1155/2019/2398124 [in English].
10. Potapenko, I. (2011). Pro vidnovlennia variatsii metrychnoho tenzora poverkhni za zadanoiu variatsiieiu symvoliv Kristoffelia druhoho poriadku pry infinitezymalnykh deformatsiiakh poverkhon v evklidovomu prostori E3. [V On the restoration of variation of the metric surface tensor for a given variation of Christoffel symbols of the second order in infinitesimal deformations of surfaces in Euclidean space E3]. *Ukr. mat. zhurn* [Ukr. Mate. Journal], no. 63, 4, 523-530. [in Ukranian].
11. Vashpanova, N. V, Podousova, T. Yu, Shevchenko, T. I. (2019). Umovy Sen-Venana dlia psevdo rimanovykh prostoriv [Conditions of Saint-Venant for pseudo-Riemannian spaces]. *Mekhanika ta matematychni metody* [Mechanics and Mathematical Methods], no. 1, 2, 64-74. [in Ukranian].
12. Vashpanova, T. Yu. (2010). Pro vlastyvosti invariantiv tenzora LGT-sitky i deformatsii poverkhon. [On the properties of invariants of the LGT-grid tensor and deformation of surfaces]. *Zbirnyk prats mizhnarodnoho heometrychnoho tsentru* [Geometr.centr], no. 3, 3, 15-22. [in Ukranian].
13. Vekua, I. N. (1988). *Obobshchennye analytycheskye funktsyy* [Generalized analytical functions]. Moskva : Nauka. [in Russian].
14. Vekua, I. N. (1978). *Osnovyy tenzornoho analyza y teoryy kovaryantov* [Fundamentals of tensor analysis and covariant theory]. Moskva : Nauka. [in Russian].

15. Ladyzhenskaya, O. A., Uraltzeva, N. V. (1976). *Lyneiye y vkazylyneinye uravnenyia ellyptycheskoho typa* [Linear and guasilinear eguations of elliptig type]. Moskva : Nauka. [in Russian].
16. Budak, B. M., Fomin, S. V. (1967). *Kratnye yntehraly y riady* [Multiple integrals and series]. Moskva : Nauka. [in Russian].
17. Vekua, I. N. (1948). *Novye metody reshenyia ellyptycheskykh uravnenyi* [New methods for solving elliptic equations]. M.-L.: Hosudarstvennoe yzdanye tekhnyko-tekhnycheskoi lyteratury. [in Russian].
18. Bitsadze, A. V. (1966). *Kraevye zadachy dlia yellyptycheskykh uravnenyi vtoroho poriadka* [Boundary value problems for second-order elliptic equations]. Moskva: Nauka. [in Russian].
19. Miranda, K. (1956). Uravnenyia s chastnymy proyzvodnymy ellyptycheskoho typa. [Equations with partial derivatives of elliptical type]. Moskva : YL. [in Russian].

Подоусова Тетяна Юріївна
Одеська державна академія будівництва та архітектури, к.ф.-м. н
Вул.Дідріхсона, 4 Одеса,Україна 65029
Podousova_tatyana@ukr.net,
ORCID: 0000-0002-9492-126X
Вашпанова Ніна Володимирівна
Одеська державна академія будівництва та архітектури, к.ф.-м. н, доцент
Вул.Дідріхсона, 4, Одеса,Україна 65029
vasha_nina@ukr.net,
ORCID: 0000-0002-8639-836

Для посилань:
Подоусова Т. Ю. Деформації поверхонь зі стаціонарним тензором Річчі / Т. Ю. Подоусова, Н. В. Вашпанова // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 2. – С. 51–62.

For references:
Podousova, T., Vashpanova N. (2020). Deformations of surfaces from stationary Ricci tensor. Mechanics and Mathematical Methods, 2 (2), 51–62