

ISSN 2618-0650 (Print)
ISSN 2664-1364 (Online)

Механіка



та математичні методи

**Mechanics
and Mathematical Methods**

**Науковий журнал
The scientific journal**

III/1/2021

УДК 531 : 51-7 (05)
М55

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

Науковий журнал



Засновник і видавець:

Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Том III
№1
2021**

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: Серія КВ №23478–13318 Р від 13.07.2018 р.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
Серія ДК №4515 від 01.04.2013 р.

М55 **Механіка та математичні методи** : науковий журнал. — Одеса : ОДАБА, 2021. — Том III. — Вип. №1. — 114 с.

В науковому журналі публікуються статті і огляди за спеціальностями:

- 111 Математика;
- 112 Статистика;
- 113 Прикладна математика;
- 121 Інженерія програмного забезпечення;
- 122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології;
- 124 Системний аналіз;
- 131 Прикладна механіка;
- 192 Будівництво та цивільна інженерія.

Рекомендовано до друку Вченою радою Одеської державної академії будівництва та архітектури, протокол №9 від 30.06.2021 р.

Адреса: редакція журналу «Механіка та математичні методи»
Одеська державна академія будівництва та архітектури
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029

Телефони: (048)723-23-10, (048)7323402, (048)7298626

E-mail: mmm@ogasa.org.ua

Web: mmm-journal.com.ua

УДК 531 : 51-7 (05)
М55

ISSN 2618-0650 (Print)
ISSN 2664-1364 (Online)

Одеська державна академія
будівництва та архітектури, 2021

Склад редакційної колегії:

Головний редактор: Ковров А. В., к.т.н., проф., ректор Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Заступники головного редактора:

Крутії Ю. С., д.т.н., проф., проректор з науково-педагогічної роботи Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Сур'янінов М. Г., д.т.н., проф., завідувач кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Відповідальний секретар: Кіосак В. А., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

- Бербюк В. Є. д.ф.-м.н., проф., професор кафедри механіки та морських наук, Технічний університет Чалмерса, Гетеборг, Швеція;
- Ватуля Г. Л., д.т.н., проф., професор кафедри будівельної механіки та гідравліки Українського державного університету залізничного транспорту, Харків, Україна;
- Горик О. В., д.т.н., проф., завідувач кафедри загальнотехнічних дисциплін Полтавської державної аграрної академії, Полтава, Україна;
- Карпюк В. М., д.т.н., проф., професор кафедри залізобетонних конструкцій та транспортних споруд Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Куріазопоулос А., к.т.н., доц., професор кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Кода Е., д.т.н., проф., декан факультету будівництва та інженерії середовища Варшавського природничого університету, Варшава, Польща;
- Кононов Ю. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач відділу теорії керуючих систем інституту прикладної математики та механіки НАН України, Слав'янск, Україна;
- Кривий О. Ф., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики Національного університету "Одеська морська академія", Одеса, Україна;
- Круглов В. Є., к.ф.-м.н., проф., декан факультету математики, фізики і інформаційних технологій Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна;
- Кучер М. К., д.т.н., проф., завідувач відділу конструкційних матеріалів інституту проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна;
- Лесечко О. В., к.ф.-м.н., доц., завідувач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Лещенко Д. Д., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри теоретичної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Ляшенко Т. В., д.т.н., проф., професорка кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Максимович О. В., д.т.н., проф., професорка кафедри зварювального виробництва, діагностики та відновлення металоконструкцій Національного університету "Львівська політехніка", Львів, Україна;
- Пастернак Я. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна;
- Пневматікос Н., к.т.н., доц., доцент кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Попов В. Г., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри вищої математики Національного університету "Одеська морська академія", Одеса, Україна;
- Савченко О. Г., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, Херсон, Україна;
- Трач В. М., д.т.н., проф., завідувач кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування, Рівне, Україна;
- Шваб'юк В. І., д.т.н., проф., професор кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна.

Технічний редактор: Головата Злата Олександрівна

Лінгвістичний радник з англійської мови: Мар'яно Яніна Георгіївна, к.ф.н, доц.

ІТ підтримка: Вандинський Віктор Юрійович

The composition of the editorial board:

Chief Editor: Kovrov A., Ph.D., Professor, Rector of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

Deputy Chief Editor:

Krutii Yu., Doctor of Technical Science, Professor, Pro-rector for Research of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

Suryaninov M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

Assistant Editor: Kiosak V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Higher Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

- Berbyuk V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor in Mechanical Systems, Division of Dynamics, Department of Mechanics and Maritime Sciences Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden;
- Vatulia G., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Structural Mechanics and Hydraulics Department, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine;
- Goryk O., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Basic Technical Disciplines Department, Poltava State Agrarian Academy, Poltava, Ukraine;
- Karpyuk V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Reinforced Concrete Constructions and Transport Constructions, Odessa, Ukraine;
- Kyriazopoulos A., Ph.D., Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Koda E., Doctor of Technical Science, Professor, Dean of Construction and Environmental Engineering Faculty, University of Life Sciences, Warsaw, Poland;
- Kononov Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Control-system Theory Division, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Slavyansk, Ukraine;
- Kryvyi O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Department of Higher Mathematics Department, National University "Odessa Maritime Academy", Odessa, Ukraine;
- Kruglov V., Ph.D., Professor, Dean of Mathematics, Physics and Information Technology Faculty, Odessa I. I. Mechnikov National University, Odessa, Ukraine;
- Kucher M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Materials Division, G. S. Pisarenko Institute for Problems of Strength, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine;
- Lesechko O., Ph.D., Associate Professor, Head of Higher Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Leshchenko D., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Lyashenko T., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Information Technology and Applied Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Maksymovych O., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Welding Engineering, Diagnostics and Rebuilding of Metal Structures, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine;
- Pasternak Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Applied Mathematics and Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine;
- Pnevmatikos N., Ph.D., Associate Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Popov V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Higher Mathematics Department, National University "Odessa Maritime Academy", Odessa, Ukraine;
- Savchenko O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Algebra, Geometry and Mathematical Analysis Department, Kherson State University, Kherson, Ukraine;
- Trach V., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Bridges and Tunnels, Strength of Materials and Structural Mechanics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine;
- Shvabyuk V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Engineering Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine.

Technical Editor: Holovata Zlata

Linguistic Adviser in English language: Maryanko Yanina, Ph.D., Associate Professor

IT Support: Vandynskiy Viktor

ЗМІСТ

| | |
|---|-----|
| Карпюк І. А., Клименко Є. В., Карпюк В. М., Карпюк М. В. Нелінійна деформаційно-силова модель бетонного стержня з неметалевою композитною арматурою у загальному випадку напруженого стану..... | 6 |
| Воліна Т. М., Пилипака С. Ф., Несвідомін А. В. Рух частинки по сферичному сегменту з вертикальними радіально встановленими лопатками | 27 |
| Ольшанський В. П., Сліпченко М. В. Коливання імпульсно навантаженого осцилятора зі степеневим позиційним тертям ... | 37 |
| Т. Lyashenko Structured systems of factors and experimental-statistical models in studies of building composites..... | 47 |
| S. Kroviakov, A. Mishutin, L. Chintea Multi-criteria optimization of the fiber concretes compositions of rigid pavement..... | 62 |
| М. Bekirova Stress state of compressed reinforced concrete elements considering creep and influence of an aggressive environment | 72 |
| Кириченко В. В., Лесіна Є. В. Про порушення єдиності розв'язку задачі Діріхле для систем другого порядку..... | 83 |
| Т. Makovkina, M. Surianinov, O. Chuchmai Modal analysis of reinforced concrete and fiber concrete beams | 95 |
| О. Lesechko, Т. Shevchenko Pseudo-riemannian spaces with a special Riemann tensor..... | 106 |

CONTENT

| | |
|---|-----|
| I. Karpiuk, Ye. Klymenko, V. Karpiuk, M. Karpiuk Nonlinear deformation-force model of a concrete bar with non-metallic composite reinforcement in the general case of a stressed state..... | 6 |
| T. Volina, S. Pylypaka, A. Nesvidomin Particle motion on the spherical segment with verticals radially installed blades | 27 |
| V. Olshanskiy, M. Slipchenko Oscillation of pulse-loaded oscillator with degree positional friction..... | 37 |
| T. Lyashenko Structured systems of factors and experimental-statistical models in studies of building composites..... | 47 |
| S. Kroviakov, A. Mishutin, L. Chintea Multi-criteria optimization of the fiber concretes compositions of rigid pavement..... | 62 |
| M. Bekirova Stress state of compressed reinforced concrete elements considering creep and influence of an aggressive environment | 72 |
| V. Kyrychenko, Ye. Lesina On the uniqueness violation of the Dirichlet problem solution for second-order systems... | 83 |
| T. Makovkina, M. Surianinov, O. Chuchmai Modal analysis of reinforced concrete and fiber concrete beams..... | 95 |
| O. Lesechko, T. Shevchenko Pseudo-riemannian spaces with a special Riemann tensor..... | 106 |

УДК 624.012.4:624.072.4

НЕЛІНІЙНА ДЕФОРМАЦІЙНО-СИЛОВА МОДЕЛЬ БЕТОННОГО СТЕРЖНЯ З НЕМЕТАЛЕВОЮ КОМПОЗИТНОЮ АРМАТУРОЮ У ЗАГАЛЬНОМУ ВИПАДКУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

Карпюк І. А.¹, Клименко Є. В.¹, Карпюк В. М.¹, Карпюк М. В.¹

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: У статті розглядається нелінійна деформаційно-силова модель бетонної стержневої конструкції з неметалевою композитною арматурою (НКА-FRP) у загальному випадку напруженого стану, коли в її будь-якому поперечному перерізі одночасно можуть виникнути всі чотири внутрішні силові фактори від зовнішнього навантаження, а саме: згинальний і крутний моменти, поперечна і поздовжня сили. Приведений достатньо глибокий і змістовний аналіз відомих досліджень за обраною тематикою. Встановлено, що запропонована нелінійна деформаційно – силова модель стержневої конструкції з FRP у загальному випадку напруженого стану може бути практично корисною завдяки можливості її застосування при проектуванні або підсиленні балок, ригелів, колон і елементів розкисних ферм прямокутного перерізу, які експлуатуються в умовах агресивного впливу оточуючого середовища. Вказану модель можна використовувати також при перевірці несучої здатності існуючих стержневих бетонних конструкцій з FRP, які працюють не тільки під впливом агресивного середовища, а й в умовах складного напружено-деформованого стану. В ході досліджень розроблений алгоритм визначення несучої здатності розрахункового перерізу бетонного стержня з FRP при його складному напруженому стані. Загальні фізичні співвідношення для розрахункового перерізу приведені у вигляді матриці жорсткостей. Алгоритм розрахунку бетонного стержня з FRP складається із блоку вводу вихідних даних, основної частини, допоміжних підпрограм перевірки умов збільшення вектора навантаження та вичерпання несучої здатності, а також блоку роздрукування результатів розрахунків. На кожному етапі простого статичного ступенево зростаючого навантаження розрахунок здійснюється шляхом виконання деякої кількості ітерацій до тих пір, доки точність визначення всіх компонент вектора деформацій не буде задовольняти деякій наперед заданій величині. Розглядаються також особливості та закономірності зміни нормальних і дотичних напружень, узагальнених лінійних і кутових деформацій, а також рівняння рівноваги бетонного стержня з FRP, який працює під впливом агресивного середовища в умовах складного напруженого стану.

Ключові слова: бетонний стержневий елемент з FRP, напруження, деформації, деформаційно-силова модель, жорсткість, рівняння рівноваги, розрахунковий поперечний переріз, просторова тріщина.

NONLINEAR DEFORMATION-FORCE MODEL OF A CONCRETE BAR WITH NON-METALLIC COMPOSITE REINFORCEMENT IN THE GENERAL CASE OF A STRESSED STATE

I. Karpiuk¹, Ye. Klymenko¹, V. Karpiuk¹, M. Karpiuk¹

¹Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: The article discusses a nonlinear deformation-force model of a concrete bar structure with a non-metallic composite reinforcement (NKA-FRP) in the general case of a stressed state, when all four internal force factors from an external load (namely, bending and twisting moments, transverse



and longitudinal forces). A sufficiently deep and meaningful analysis of well-known studies on the selected topic is given. It has been established that the proposed nonlinear deformation-force model of a bar structure with FRP in the general case of a stressed state can be practically useful due to the possibility of its application in the design or reinforcement of beams, girders, columns and elements of rosette trusses of rectangular cross-section, which are operated under aggressive environmental conditions. This model can also be used to check the bearing capacity of existing FRP concrete bar structures, which operate not only under the influence of an aggressive environment, but also under conditions of a complex stress-strain state. In the course of the research, an algorithm was developed for determining the bearing capacity of the design section of a concrete rod with FRP under its complex stress state. General physical relations for the design section are given in the form of a stiffness matrix. The algorithm for calculating a concrete bar with FRP consists of a block for inputting the initial data, the main part, auxiliary subroutines for checking the conditions for increasing the load vector and depletion of the bearing capacity, as well as a block for printing the calculation results. At each stage of a simple static stepwise increasing load, the calculation is carried out by performing a certain number of iterations until the accuracy of determining all components of the deformation vector satisfies a certain predetermined value. The features and patterns of changes in normal and tangential stresses, generalized linear and angular deformations, as well as the equations of equilibrium of a concrete bar with FRP, which operates under the influence of an aggressive environment under conditions of a complex stress state, are also considered.

Keywords: concrete bar element with FRP, stress, strain, deformation-words model, stiffness, equilibrium equations, design cross-section, spatial crack.

1 ВСТУП

Загальний випадок напруженого стану бетонного стержня з FRP передбачає виникнення в його довільних перерізах сумісної дії поздовжніх та поперечних сил, згинальних і крутних моментів (рис. 1).

Основи сучасних уявлень про теорію міцності бетону, а також бетону зі сталеву або композитною (КА) арматурою при тривісному напружено-деформованому стані були закладені М. М. Філоненко-Бородичем, Г. О. Генієвим, В. М. Киссюком, Г. О. Тюпіним, Г. С. Писаренком, А. А. Лебедевим, Т. А. Баланом, С. Ф. Клованичем, М. І. Карпенком та його учнями, Dei Poli, К. Н. Gerstle, Н. В. Kupfer та ін.

Розвиток сучасних ЕОМ у вигляді персональних комп'ютерів дозволяє здійснювати розв'язок задач зі складними розрахунковими моделями чисельними методами, в тому числі бетонних стержнів з FRP.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Основні гіпотези і передумови.

Розглянемо бетонний стержень з FRP прямокутного перерізу сталої по довжині жорсткості, в розрахункових перерізах якого виникає загальний випадок напруженого стану (рис. 1).

Представимо собі, що стержень виготовлений із важкого бетону на гранітному щебені і кварцовому піску. Він армований взаємно перпендикулярними поздовжніми (вздовж осі Z) та поперечними стержнями неметалевої композитної арматури FRP, орієнтованими вздовж осей X і Y.

Ураховуючи рекомендації [1, 2, 3, 4] основні припущення розрахунку бетонних елементів з композитною арматурою можна представити так:

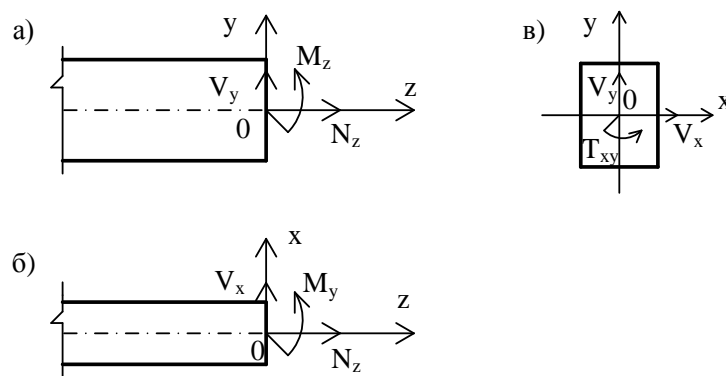


Рис. 1. Внутрішні зусилля в нормальному, перерізі складнонапруженого стержня в силових площинах ZOY(а), ZOX(б), XOY(в).

- бетонний стержень з FRP являється негнучким, тобто достатньо коротким і масивним. Тому його руйнування відбувається внаслідок втрати міцності, а не стійкості;

- розглядаються тільки нормальні перетини;

- зв'язки між внутрішніми зусиллями і деформаціями в бетоні, а також стержнях FRP визначаються за діаграмами $\sigma_c - \varepsilon_c$, $\sigma_f - \varepsilon_f$, $\tau_c - \gamma_c$, $\tau_f - \gamma_f$;

- вважається справедливою гіпотеза Бернуллі, тобто перерізи плоскі і перпендикулярні до поздовжньої осі до деформації стержня залишаються такими ж і після її здійснення;

- дотичні напруження у розрахунковому перетині стержня при вільному його крученні визначаються згідно рекомендацій [5], [6];

- дотичні та нормальні напруження у розрахункових перерізах елемента при його стисненому крученні обчислюються згідно рішення [7, 8];

- бетонна частина і поздовжні FRP стержні сприймають нормальні $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ та дотичні $\tau_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{xy}$ напруження;

- у стержнях поперечної FRP появляються тільки дотичні зусилля τ_{zx}, τ_{zy} в залежності від орієнтації цих стержнів. Розподіл вказаних напружень по довжині стержнів поперечної арматури вважається таким, що змінюється по їх довжині;

- експериментально отримана умова міцності [9, 10, 11] слугує критерієм виникнення макротріщин і руйнування бетону;

- вважається, що має місце сумісна робота бетону і арматури аж до появи макротріщин в ньому. Після їх появи всі внутрішні зусилля у розрахунковому перетині з тріщиною сприймаються тільки арматурою FRP;

- арматурні стержні виключаються із роботи з досягненням в них характеристичного опору на розтяг f_{rk} або $0,2f_{rk}$ при їх роботі на стиск;

- при переході від елементарних внутрішніх зусиль до узагальнених внутрішніх силових факторів (M_x, M_y, T_{xy}, N_z) застосовується процедура числового інтегрування елементарних внутрішніх зусиль по всій площі поперечного перетину стержневої конструкції. Для його здійснення розрахунковий перетин стержневої конструкції уявно розбивається на елементарні частки, в межах яких внутрішні зусилля не змінюються.

Керучись [9, 12] міцність бетону, що знаходиться у тривісному напружено-деформованому стані, може бути описана симетричною відносно головних напружень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ поверхнею, яку доцільно будувати за рекомендаціями М. М. Філоненка-Бородича з використанням [1, 2, 3, 4]:

$$f(\sigma_{oc}, \tau_{oc}, \theta_c) = \tau_{oc} - \tau_{olc}(\sigma_{oc}) \cdot \rho(\theta_c) = 0, \quad (1)$$

де τ_{oc}, σ_{oc} – елементарні октаедричні дотичні і нормальні внутрішні зусилля (напруження);

θ_c – кут виду напруженого стану;

$\rho(\theta_c)$ – інтерполяційна функція [12] між $\tau_{o1}(\theta_c = 60^\circ)$ і $\tau_{o2}(\theta_c = 0^\circ)$, яка визначається за формулою:

$$\rho(\theta_c) = \frac{2a_c \cos \theta_c + b_c \sqrt{a_c (4 \cos^2 \theta_c - 1) + b_c^2}}{4a_c \cos^2 \theta_c + b_c^2}, \quad (2)$$

де $a_c = 1 - c_c^2$, $b_c = 2c_c - 1$, $c_c = \tau_{o2c} / \tau_{o1c}$.

Зв'язок між октаедричними напруженнями при кутах виду напруженого стану $\theta_c = 60^\circ$ і $\theta_c = 0^\circ$ згідно з [12] можна представити:

$$\sigma_{oc} = A_1 \tau_{o1c}^2 + B_1 \tau_{o1c} + C_1, \quad \sigma_{oc} = A_2 \tau_{o2c}^2 + B_2 \tau_{o2c} + C_1. \quad (3)$$

Коефіцієнти A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 отриманні шляхом «прив'язки» характерних точок на поверхні міцності бетону. Використовуючи експериментальні залежності В. М. Бондаренка і В. І. Колчунова [13] з урахуванням вимог чинних норм їх пропонується визначати за такими спрощеними формулами:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{4,14}{f_{ck} - f_{ctk}}; & B_1 &= \frac{5,38f_{ck}^2 + f_{ck}f_{ctk} - 6,38f_{ck}^2}{4,24(f_{ck} - f_{ctk})^2}; \\
 A_2 &= \frac{4,09f_{ck} - 4,16f_{ctk}}{1,20f_{ck}^2 - 2,20f_{ck}f_{ctk} + f_{ctk}^2}; & B_2 &= \frac{4,46f_{ck}^2 - 2,04f_{ck}f_{ctk} - 0,73f_{ctk}^2}{4,32f_{ck}^2 - 7,92f_{ck}f_{ctk} + 3,60f_{ctk}^2}; \\
 C_1 &= -H = -\frac{0,82f_{ck}f_{ctk}}{f_{ck} - f_{ctk}},
 \end{aligned} \tag{4}$$

де f_{ck}, f_{ctk} – характеристична (при проектуванні розрахункова f_{cd}, f_{ctd}) міцність бетону, відповідно, на стиск і розтяг. Отже, поверхня міцності бетону може бути однозначно описаною формулою (1) тому, що до неї за допомогою коефіцієнтів (4) включено п'ять незалежних характеристик його міцності для окремих деформацій:

- центрального стиску $R_c = f_{ck}$ і розтягу $R_p = f_{ctk}$,
- двовісному стиску $R_{2c} \cong 1,2R_c = 1,2f_{ck}$ і розтягу $R_{2p} \cong R_p = f_{ctk}$,
- об'ємного рівномірного (тривісного) розтягу $R_{3p} = H \cong (0,82R_c \cdot R_p) / (R_c - R_p)$.

Кут виду напруженого стану в бетоні вказаного елемента доцільно визначати за виразом [7] з урахуванням $\sigma_x = \sigma_y = 0$ та рекомендацій [1, 2, 3, 4]:

$$\theta_c = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3D_3}}{2\sqrt{D_2^3}} \right) = \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{\sqrt{\sigma_{zc} \left[2\sigma_{zc}^2 + 9(\tau_{xyc}^2 + \tau_{zyc}^2 + \tau_{zxc}^2) \right]}}{2\sqrt{\left(\frac{\sigma_{zc}^2}{3} + \tau_{xyc}^2 + \tau_{zyc}^2 + \tau_{zxc}^2 \right)^3}} \right], \tag{5}$$

де D_3, D_2 – відповідно, третій та другий інваріанти девіатора напружень.

З урахуванням формул (1), (3) отримаємо

$$\sigma_{oc} = \frac{A_1}{\rho^2(\theta_c)} \tau_{oc}^2 + \frac{B_1}{\rho(\theta_c)} \tau_{oc} + C_1. \tag{6}$$

Найбільші величини міцності бетону на її поверхні у вигляді $\hat{\sigma}_{oc}$ та $\hat{\tau}_{oc}$ обчислюються шляхом розв'язку системи рівнянь:

$$\begin{cases} \hat{\tau}_{oc} - \tau_m = m_\sigma (\hat{\sigma}_{oc} - \sigma_m); \\ \hat{\sigma}_{oc} = \frac{A_1}{\rho^2(\theta_c)} \hat{\tau}_{oc}^2 + \frac{B_1}{\rho(\theta_c)} \hat{\tau}_{oc} + C_1, \end{cases} \tag{7}$$

де σ_m та τ_m – напруження на попередній ступені навантаження (при пропорційно зростаючому ступеневому навантаженні $\sigma_m = \tau_m = 0$);

m_σ – характеристика напруженого стану бетону. Так, при об'ємному рівномірному розтязі $m_\sigma = 0$, двовісному розтязі або стиску $m_\sigma = \pm\sqrt{2/2}$, одновісному розтязі – стиску $m_\sigma = \pm\sqrt{2}$ (знак «+» характеризує деформацію розтягу, «-» – стиску).

Умова текучості Губера - Мізеса - Генкі [7] для FRP при $\sigma_x = \sigma_y = 0$ має вид:

$$\sigma_{zf}^2 + 3\tau_{xyf}^2 + 3\tau_{zxf}^2 + 3\tau_{zyf}^2 = \tilde{f}_{fd}^2, \tag{8}$$

де τ_{fd}^2 – розрахункова міцність неметалевої композитної арматури FRP з урахуванням

її зменшення (16) внаслідок складного напруженого стану у порівнянні з центральним розтягом – стиском.

У загальному випадку напруженого стану вказану умову можна представити:

$$\sigma_{xf}^2 + \sigma_{yf}^2 + \sigma_{zf}^2 - \sigma_{xf}\sigma_{yf} - \sigma_{yf}\sigma_{zf} - \sigma_{zf}\sigma_{xf} + 3\tau_{xyf}^2 + 3\tau_{zyf}^2 + 3\tau_{zxf}^2 = \tilde{f}_{fd}^2.$$

Залежність $\sigma_c - \varepsilon_c$ у бетоні згідно з рекомендаціями [9] можна представити у вигляді:

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b^0 \nu_b} = \frac{\sigma_c}{E_{cm} \zeta_c} = \varepsilon_c, \quad (9)$$

де $\varepsilon_b = \varepsilon_c$ – відносні лінійні деформації бетону;

$\sigma_b - \sigma_c$ – нормальні напруження в бетоні;

$E_b^0 = E_{cm}$ – початковий модуль пружності бетону;

$\nu_b = \zeta_c$ – коефіцієнт, що характеризує залежність січного модуля пружності бетону від рівня його навантаження.

Деформаційні залежності для бетону, який знаходиться в об'ємному напруженому стані, доцільно виражати у вигляді зв'язку між октаедричними напруженнями і деформаціями. При цьому, вважаються справедливими гіпотези, викладені в [1, 2, 3, 4]:

- залежність $\tau_{oc} - \gamma_{oc}$ нелінійна: $\tau_{oc} = G_c(\gamma_{oc}) \cdot \gamma_{oc}$, де $G_c(\gamma_{oc})$ – січний (октаедричний) модуль зсуву бетону;

- зв'язок між нормальними октаедричними напруженнями σ_{oc} і середніми деформаціями ε_{oc} є нелінійним $\sigma_{oc} = K(\gamma_{oc}) \cdot (\varepsilon_{oc} - \rho_c \gamma_{oc}^2)$, де ρ_c - модуль дилатації ([14] - g_{oc}); $K(\gamma_{oc})$ – модуль об'ємних деформацій.

Спираючись на припущення про єдину криву деформування при обчисленні січного модуля пружності бетону, рекомендується скористатися гіпотезою [12], згідно з якою форма зв'язку між напруженнями та деформаціями не залежить від виду напруженого стану. Тобто зв'язок між τ_{oc} і γ_{oc} дозволяється прийняти таким же, як і при центральному стиску, а січний модуль зсуву (рис.2) – обчислювати за виразом Гіббса, запропонованим Саенсом, $G_c(\gamma_{oc}) = G_{oc} \cdot f(\gamma_{oc})$, в якій

$$f(\gamma_{oc}) = \frac{1}{1 + A\eta + B\eta^2 + C\eta^3}, \quad (10)$$

де $C = \lambda(1 - \xi_r) / [\xi_r(\eta_r - 1)^2 - 1/\eta_r]$; $B = 1 - 2C$; $A = C + \lambda - 2$; $\xi_r = \bar{\sigma}_r / f_{ck} \approx 0,85$

і $\eta_r = \gamma / \bar{\gamma}_r \approx 1,41$; $\xi = \sigma_{oc} / f_{ck}$; $\eta = \gamma_{oc} / \bar{\gamma}_{oc}$; $\lambda = \xi / \eta$; початковий модуль зсуву

$$G_{oc} = G_{cm} = \frac{E_{cm}}{2(1 + \nu_c)}; \quad \sigma_{oc} = \frac{\sigma_{xc} + \sigma_{yc} + \sigma_{zc}}{3}; \quad \varepsilon_{oc} = \frac{\varepsilon_{xc} + \varepsilon_{yc} + \varepsilon_{zc}}{3};$$

$$\tau_{oc} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{xc} - \sigma_{yc})^2 + (\sigma_{zc} - \sigma_{yc})^2 + (\sigma_{zc} - \sigma_{xc})^2 + 6(\tau_{xyc}^2 + \tau_{zyc}^2 + \tau_{zxc}^2)};$$

$$\gamma_{oc} = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xc} - \varepsilon_{yc})^2 + (\varepsilon_{zc} - \varepsilon_{yc})^2 + (\varepsilon_{zc} - \varepsilon_{xc})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xyc}^2 + \gamma_{zyc}^2 + \gamma_{zxc}^2)}.$$

З урахуванням $\sigma_{xc} = \sigma_{yc} = 0$ для стержня, що розглядається: $\sigma_{oc} = \sigma_{zc} / 3$;

$$\varepsilon_{oc} = \frac{\varepsilon_{zc}}{3}; \tau_{oc} = \frac{1}{3} \sqrt{2\sigma_{zc}^2 + 6(\tau_{xyc}^2 + \tau_{zyc}^2 + \tau_{zxc}^2)}; \gamma_{oc} = \frac{2}{3} \sqrt{2\varepsilon_{zc}^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xyc}^2 + \gamma_{zyc}^2 + \gamma_{zxc}^2)}.$$

Граничні (максимально можливі) зсуви $\bar{\gamma}_r$ на октаедричних площинках у роботі [12] рекомендується визначити за наступними рівняннями регресії:

$$\bar{\gamma}_r = 7,97 \left(\frac{\tau_{oc}}{f_{ck}} \right)^2 + 15,22 \left(\frac{\tau_{oc}}{f_{ck}} \right) - 3,713. \quad (11)$$

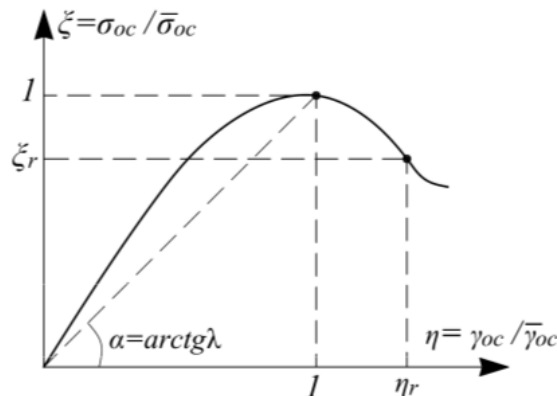


Рис. 2. Діаграма деформування бетону фіб в умовах складного напруженого стану

Модуль дилатації бетону з урахуванням [14] можна визначити за формулою:

$$\rho_c = g_{oc} = -\frac{\theta_c}{\tilde{A}_c^2} = -\frac{(\varepsilon_{xc} + \varepsilon_{yc} + \varepsilon_{zc})G_{oc}}{4f_{bk}}, \quad (12)$$

де θ_c, \tilde{A}_c – відповідно, граничні об'ємні деформації та інтенсивність деформацій бетону зсуву при чистому зсуві;

f_{bk} – характеристичне (розрахункове f_{bd}) значення граничних напружень зчеплення визначається: $f_{bd} = R_{b,sh} = 0,7\sqrt{R_b R_{bt}} = 0,7\sqrt{f_{cd} f_{ctd}}$.

Модуль об'ємних деформацій згідно [12] визначається: $K_c(\gamma_{oc}) = K_{oc} \cdot f(\gamma_{oc})$, де $K_{oc} = E_{cm}/(1-2\nu_c)$ – початковий модуль об'ємних деформацій.

Виходячи з наведеного, модуль пружності E_c та коефіцієнт поперечних деформацій ν_c бетону при складному напруженому стані згідно з [9] визначається:

$$E_c = \frac{3K_c(\gamma_{oc})G_c(\gamma_{oc})}{G_c(\gamma_{oc}) + K_c(\gamma_{oc})}, \nu_c = \frac{K_c(\gamma_{oc}) - 2G_c(\gamma_{oc})}{2[G_c(\gamma_{oc}) + K_c(\gamma_{oc})]}. \quad (13)$$

Аналогічно з виразами для бетону можна отримати формули для змінного модуля при зсуві для неметалевої композитної арматури (FRP) та залежності для діаграми її зсуву:

$$G_f = \frac{E_{fk} \vartheta_f}{2(1+\nu_f)}; \tau_f = \frac{E_{fk} \vartheta_f}{2(1+\nu_f)} \gamma_f, \quad (14)$$

де ν_f – змінний коефіцієнт змінного модуля. Ураховуючи пружний характер деформування FRP вздовж волокон у практичних розрахунках можна прийти $\nu_f \cong 0$.

Осьову деформацію в стержнях поперечної арматури FRP і відносну кутову деформацію у прилеглому бетоні можна обчислити за [15]:

$$\varepsilon_{fw}^* = \gamma_c^* = \gamma_c \left[\frac{1 + d_{fw} E_{fw} \nu_{fw} (1 + \nu_c)}{2 l_{fw} E_{cm} \mathcal{G}_c} \right]^{-1}. \quad (15)$$

Сумісна робота поздовжньої та поперечної арматури FRP при розрахунку конструкцій ураховується шляхом зменшення розрахункового значення міцності на розтяг поздовжньої арматури за [15] з понижуючим коефіцієнтом $k_l=0,08\dots 0,10$:

$$\tilde{f}_{fd} = f_{fd} = \sqrt{\frac{1 - 3s^2 k_1 \left(\frac{ctg^2 \alpha}{l_{fw,x}^2} + \frac{ctg^2 \beta}{l_{fw,y}^2} \right)}{4(1 + \nu_f)^2}}, \quad (16)$$

де s – крок поперечної арматури;

α – кут нахилу просторової тріщини на горизонтальній грані елемента відносно осі z ;

β – кут нахилу просторової тріщини на вертикальній грані елемента відносно осі z .

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Мета даного дослідження полягає в подальшому розвитку та адаптації прийнятої у загальному вигляді нелінійної деформаційно-силової моделі стержневої бетонної конструкції з неметалевою композитною арматурою, яка з єдиних позицій механіки армованого FRP бетону дозволила б ураховувати особливості сумісної роботи бетону і арматури на всіх стадіях її деформування, включаючи руйнування.

Для досягнення поставленої мети визначені наступні задачі: 1) з'ясувати стан наукової розробки теми, окреслити джерельну базу; 2) сформулювати основні гіпотези і теоретичні передумови розрахункової моделі; 3) скомпонувати нормальний перетин дослідної конструкції; 4) скласти рівняння рівноваги внутрішніх зусиль і зовнішніх силових факторів у розрахунковому перерізі прогінної бетонної конструкції з FRP; 5) визначити узагальнені лінійні та кутові деформації плоских розрахункових перерізів вказаних конструкцій; 6) скласти фізичні співвідношення для загального випадку напруженого стану нормального перетину бетонного стержня з FRP; 7) визначити напрямок і довжину нахиленої до поздовжньої осі елемента просторової руйнуючої тріщини; 8) обчислити координати центру згину та центру кручення стержня з урахуванням утворення в бетоні тріщин; 9) розробити алгоритм визначення несучої здатності розрахункових нормальних перерізів бетонних стержнів прямокутного перерізу, армованих FRP; 10) сформулювати відповідні висновки.

Бетонну частину нормального перетину елемента уявно поділяємо на призматичні скінчені елементи (рис. 3, а), найменший розмір яких відповідає найбільшому розміру крупного заповнювача бетону. Кожна така часка нумерується та визначаються координати її центра x_{cn} , y_{cn} , відносно центральних осей, площа A_{cn} , нормативна міцність бетону на розтяг f_{ctk} , стиск f_{ck} , модуль деформацій E_{cm} . Коефіцієнт поперечних деформацій вважається сталим: $\nu_c = 0,2$. Такий підхід дає можливість визначати напружено-деформований стан, в тому числі несучу здатність, тріщиностійкість та деформативність елементів складеного перетину, виготовлення або нарощування яких виконували поетапно бетонами різних класів. Він дозволяє також розраховувати стержні, які попали під вплив фізичної або хімічної корозії, високих температур тощо.

Вважаємо, що стержні поздовжньої арматури FRP розташовані згідно з рис. 3, б. Їх

позначаємо відповідним номером j , вказуємо їх діаметр d_{fj} , координати центрів ваги відносно головних осей інерції перетину, нормативне значення міцності f_{fk} , нормативне значення деформацій ε_{fk} або гранично значення попередньо напруженої FRP ε_{fu} , модуль деформацій E_{fjk} згідно прийнятого класу FRP. Коефіцієнт поперечних деформацій для всіх стержнів поздовжньої FRP також приймається сталим, наприклад, $\nu_f = 0,22 - 0,25$ для BFRP.

Стержні поперечної арматури FRP (хомути) розташовуються у площині поперечного перетину по його контуру. Вони уявно поділяються на окремі частки, кожній з яких надається відповідний номер і вказується її діаметр d_{fwi} , площа A_{fwi} , площа поверхні дотику з бетоном A_{cfwi} та прив'язка їх до центральних осей перетину (x_{fj}, y_{fj}) . Вертикальним і горизонтальним поперечним стержням, розташованим у площині перетину, задаються: нормативне значення міцності на розтяг f_{fwk} , модуль пружності E_{fw} , для заданого класу FRP, коефіцієнт поперечних деформацій ν_f , який, наприклад, для BFRP дорівнює $0,22 - 0,25$, нормативне значення деформацій ε_{fwk} та відносні деформації при найбільшому навантаженні ε_{fwi} .

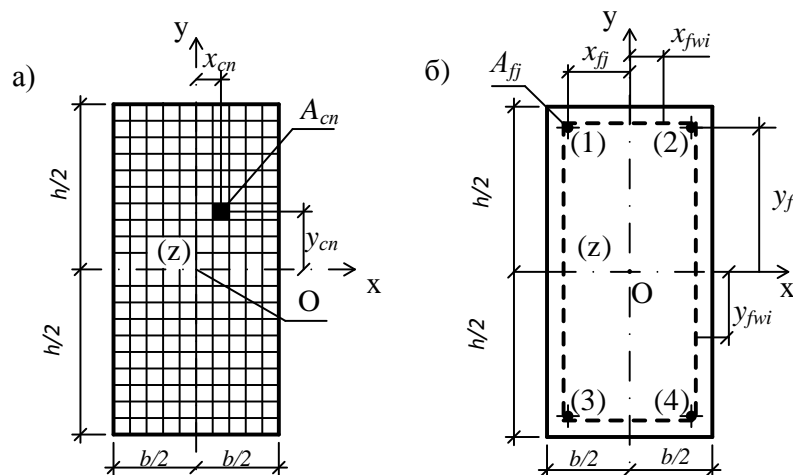


Рис. 3. Складові частки бетону (а), композитної арматури FRP (б) розрахункового поперечного перерізу стержня

Поперечна арматура FRP для вказаного на рис. 3 перетину ураховується по довжині бетонного стержня як розподілений по його грані шар погонної площі

$$A_{z_{fwi}} = \frac{\pi d_{fwi}^2}{4s_i}, \quad (17)$$

де s_i – крок поперечних стержнів у поздовжньому напрямку.

Рівняння рівноваги.

З урахуванням викладеного вище для розрахункового перетину бетонного стержня з FRP можна зікласти наступні рівняння рівноваги:

$$\left\{ \begin{aligned} N_z &= \sum_{n=1}^k A_{cn} \sigma_{zcn} + \sum_{j=1}^m A_{ff} \sigma_{zff}, \\ M_y &= \sum_{n=1}^k A_{cn} \sigma_{zcn} X_{cn} + \sum_{j=1}^m A_{ff} \sigma_{zff} X_{ff}, \\ M_x &= \sum_{n=1}^k A_{cn} \sigma_{zcn} Y_{cn} + \sum_{j=1}^m A_{ff} \sigma_{zff} Y_{ff}, \\ V_x &= \sum_{n=1}^k A_{cn} \tau_{zxcn} + \sum_{j=1}^m A_{ff} \tau_{zxfj} + \sum_{i=1}^{l_{xfwi,1-2,3-4}} A_{xfwi} \sigma_{xfwi}, \\ V_y &= \sum_{n=1}^k A_{cn} \tau_{zycn} + \sum_{j=1}^m A_{ff} \tau_{zyfj} + \sum_{i=1}^{l_{yfw,1-4,2-3}} A_{yfw} \sigma_{yfw}, \\ T_{xy} &= \sum_{n=1}^k A_{cn} (\tau_{zycn} X_{cn}^{tor} - \tau_{zxcn} Y_{cn}^{tor}) + \sum_{j=1}^m A_{ff} (\tau_{zyfj} X_{ff}^{tor} - \tau_{zxfj} Y_{ff}^{tor}) + \sum_{i=1}^{l_{xfwi,1-4}} A_{xfwi} (\sigma_{yfw} X_{fw}^{tor} - \sigma_{xfwi} Y_{fw}^{tor}), \end{aligned} \right.$$

де σ_{zcn} – нормальні внутрішні сили (напруження) в n -ному скінченному елементі бетонної частини перетину;

σ_{zff} – нормальні внутрішні сили (напруження) в j -ому стержні FRP;

τ_{zxcn}, τ_{zycn} – дотичні внутрішні сили (напруження) в n -ому скінченному елементі бетонної частини перетину;

$\tau_{zxcff}, \tau_{zyff}$ – дотичні внутрішні сили (напруження) в j -ому стержні FRP;

$\sigma_{xfwi}, \sigma_{yfw}$ – нормальні внутрішні сили (напруження) на i -ій ділянці поперечних стержнів FRP.

Нормальні та дотичні внутрішні сили в системі рівнянь (18) обчислюються за повними діаграмами стану бетону і арматури FRP з урахуванням наведених вище припущень:

$$\begin{aligned} \sigma_{zml} &= E_{ml} \zeta_{zml} \varepsilon_{zml} & \tau_{zxml} &= G_{ml} \varrho_{zxml} \gamma_{zxml} \\ \tau_{zyml} &= G_{ml} \varrho_{zyml} \gamma_{zyml} & \tau_{xyml} &= G_{ml} \varrho_{xyml} \gamma_{xyml}, \end{aligned} \quad (19)$$

де ζ – коефіцієнт зміни змінного модуля деформацій бетону E_{ml} ;

ϱ – коефіцієнт зміни змінного модуля зрізу G_{ml} ;

$m = c$ для скінчених елементів бетонної частини перетину;

$m = f$ для стержнів поздовжньої арматури FRP;

$m = fw$ для стержнів поперечної арматури FRP;

l – номер скінченного елемента бетону або стержня поздовжньої арматури FRP.

Лінійні та кутові деформації у загальному вигляді обраховуються в припущенні справедливості гіпотези Бернуллі з урахуванням рішень Х. Хана [16] при поперечному згині стержня, функцій розподілу дотичних напружень Сен-Венана при вільному і Ю. Школи [17] при стисненому його крученні:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{zml} &= \varepsilon_0 + \chi_x X_{ml} + \chi_y Y_{ml} + \beta_z \theta_z \varphi(X_{ml}^{tor}, Y_{ml}^{tor}); \\ \gamma_{zxml} &= K_x g_{xml} + K_y h_{yml} + \theta_z f_{zxml}; \\ \gamma_{zyml} &= K_y g_{yml} + K_x h_{xml} - \theta_z f_{zyml}; \\ \gamma_{xyml} &= -\theta_z f_{xyml}, \end{aligned} \right. \quad (20)$$

де ε_0 – відносна лінійна деформація по осі z ;

χ_x, χ_y – кривизни згину у площинах дії згинальних моментів M_x, M_y відповідно.

K_x, K_y – кривизни зсуву в площинах дії поперечних сил V_x, V_y відповідно;

θ_z – відносний (погонний) кут закручування одиниці довжини стержня (рад/м);

$\varphi(X_{ml}^{tor}, Y_{ml}^{tor})$ – функція крутіння Сен-Венана відносно центру кручення;

β_z – коефіцієнт депланації всього поперечного перерізу, який при стисненому крученні визначається за формулою

$$\beta_z = \eta e^{-\eta z},$$

де η – коефіцієнт стисненого кручення, який визначається за [8];

z – відстань по довжині стержня від розрахункового перерізу до найближчого жорсткого закріплення. При вільному крученні стержнів приймаємо $\beta_z = 1$;

$g_{xnl}, g_{yml}, h_{xnl}, h_{yml}$ – функції розподілу кутових деформацій при поперечному згині Хана;

$f_{zxml} = \tau_{zxml} / (\theta_z \cdot G_{ml}), f_{zyml} = \tau_{zyml} / (\theta_z \cdot G_{ml}), f_{xyml} = \tau_{xyml} / (\theta_z \cdot G_{ml})$ – функції розподілу кутових деформацій при вільному і стисненому крученні.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ ЗАГАЛЬНІ. ЗАГАЛЬНІ ФІЗИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

З урахуванням рівнянь рівноваги (18), узагальнених деформацій (20), діаграм стану бетону і арматури та розвиваючи ідеї [1, 2, 3, 4, 17] в частині урахування впливу поперечних сил, загальні фізичні співвідношення для розрахункового поперечного перерізу бетонного стержня з FRP можна представити:

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \\ V_x \\ V_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & D_{36} \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ 0 & 0 & 0 & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi_y \\ \chi_x \\ K_x \\ K_y \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (21)$$

або $\{N\} = [D]\{\varepsilon\}$,

де D_{11} – поздовжня (вздовж осі z) жорсткість стержня:

$$D_{11} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cnn} \zeta_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \zeta_{fj}}{\psi_{fj}}. \quad (22)$$

D_{22}, D_{33} – жорсткості стержня у площинах zox, zoy (згинальні):

$$D_{22} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cnn} \zeta_{cn} X_{cn}^2 + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \zeta_{fj} X_{fj}^2}{\psi_{fj}}; \quad (23)$$

$$D_{33} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cnn} \zeta_{cn} Y_{cn}^2 + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \zeta_{fj} Y_{fj}^2}{\psi_{fj}}. \quad (24)$$

D_{23} – жорсткість взаємного впливу згину в двох площинах:

$$D_{23} = D_{32} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} X_{cn} Y_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \zeta_{z fj} X_{fj} Y_{fj}}{\psi_{fj}}. \quad (25)$$

D_{12}, D_{13} – жорсткості впливу поздовжньої сили на згин та згинальних моментів на видовження елемента:

$$D_{12} = D_{21} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} X_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \zeta_{z fj} X_{fj}}{\psi_{fj}}; \quad (26)$$

$$D_{13} = D_{31} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} Y_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \zeta_{z fj} Y_{fj}}{\psi_{fj}}. \quad (27)$$

D_{44}, D_{55} – жорсткості зсуву в напрямку дії поперечних сил V_x, V_y :

$$D_{44} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{cmn} g_{zxcn} g_{xcn}}{2(1+\nu_c)} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} g_{zxfj} g_{xfj}}{2(1+\nu_f)} + \sum_{i=1}^{l_{fw,x}} A_{fwi} E_{fw} \zeta_{xfwi} g_{xfwi,c}; \quad (28)$$

$$D_{55} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{cmn} g_{zycn} g_{ycn}}{2(1+\nu_c)} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} g_{zyfj} g_{yjf}}{2(1+\nu_f)} + \sum_{i=1}^{l_{fw,y}} A_{fwi} E_{fw} \zeta_{yfwi} g_{yfwi,c}. \quad (29)$$

D_{45}, D_{54} – жорсткості взаємного впливу згину в площинах zox, zoy :

$$D_{45} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{cmn} g_{zxcn} h_{xcn}}{2(1+\nu_c)} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} g_{zxfj} h_{xfj}}{2(1+\nu_f)} + \sum_{i=1}^{l_{fw,x}} A_{fwi} E_{fw} \zeta_{xfwi} h_{xfwi,c}; \quad (30)$$

$$D_{54} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{cmn} g_{zycn} h_{ycn}}{2(1+\nu_c)} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} g_{zyfj} h_{yjf}}{2(1+\nu_f)} + \sum_{i=1}^{l_{fw,y}} A_{fwi} E_{fw} \zeta_{yfwi} h_{yfwi,c}. \quad (31)$$

D_{16}, D_{26}, D_{36} – жорсткості впливу поздовжньої сили N та згинальних моментів M_x, M_y на зсув у площині, а також крутного моменту T_{xy} на зсув у площинах ZOX, ZOY :

$$D_{16} = D_{61} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} \beta_z \varphi(X_{cn}^{tor}, Y_{cn}^{tor}) + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \zeta_{z fj} \beta_z \varphi(X_{fj}^{tor}, Y_{fj}^{tor})}{\psi_{fj}}; \quad (32)$$

$$D_{26} = D_{62} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} X_{cn}^{tor} \beta_z \varphi(X_{cn}^{tor}, Y_{cn}^{tor}) + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \zeta_{z fj} X_{fj}^{tor} \beta_z \varphi(X_{fj}^{tor}, Y_{fj}^{tor})}{\psi_{fj}}; \quad (33)$$

$$D_{36} = D_{63} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} Y_{cn}^{tor} \beta_z \varphi(X_{cn}^{tor}, Y_{cn}^{tor}) + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \zeta_{z fj} Y_{fj}^{tor} \beta_z \varphi(X_{fj}^{tor}, Y_{fj}^{tor})}{\psi_{fj}}. \quad (34)$$

D_{46}, D_{56} – жорсткості впливу крутного моменту T_{xy} на зсув у площинах z_{ox}, z_{oy} та поперечних сил V_x, V_y на зсув в площині xoy :

$$D_{46} = D_{64} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{cmn} g_{zxcn} f_{zxcn}}{2(1+\nu_c)} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} g_{zxfj} f_{zxfj}}{2(1+\nu_f)} + \sum_{i=1}^{l_{fw,x}} A_{fwi} E_{fw} \zeta_{xfwi} f_{zxfwi,c}; \quad (35)$$

$$D_{56} = D_{65} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{cmn} g_{zycn} f_{zycn}}{2(1+\nu_c)} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} g_{zyfj} f_{zyfj}}{2(1+\nu_f)} + \sum_{i=1}^{l_{fw,y}} A_{fwi} E_{fw} \zeta_{yfwi} f_{zyfwi,c}. \quad (36)$$

D_{66} – жорсткість при крученні стержня в площині xoy :

$$D_{66} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{cnn} \vartheta_{xycn}}{2(1+\nu_c)} (f_{zycn} X_{cn}^{tor} - f_{zxcn} Y_{cn}^{tor}) + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \vartheta_{xyfj}}{2(1+\nu_f)} (f_{zyfj} X_{fj}^{tor} - f_{zxfj} Y_{fj}^{tor}) + \sum_{i=1}^{l_{f_{w,y}} + l_{f_{w,x}}} A_{fwi} E_{fwi} \zeta_{xyfwi} (f_{zyfwi} X_{fwi}^{tor} - f_{zxfwi} Y_{fwi}^{tor}), \quad (37)$$

де ψ_{fj} – коефіцієнт В. І. Мурашева, який може бути визначений згідно з чинними російськими нормами за формулою:

$$\psi_{fj} = 1 - \omega \frac{\sigma_{fj,cr}}{\sigma_{fj}}, \quad (38)$$

де $\sigma_{fj,cr}$ – напруження в j – тому стержні в момент виникнення тріщин;

σ_{fj} – поточне напруження в j – тому стержні повздовжньої арматури на рівні навантаження, що розглядається;

ω – коефіцієнт повноти епюри розтягнутого бетону, який згідно з рекомендаціями [14] можна приймати: $\omega = 0,7$.

Будемо вважати, що фізичні співвідношення (21)...(37) є справедливими на всіх стадіях напружено – деформованого стану стержневих бетонних елементів з FRP прямокутного перерізу при простому пропорційному їх навантаженні.

Такий підхід дає змогу урахувати дискретність розташування поздовжньої та поперечної арматури FRP, нелінійність властивостей використаних матеріалів шляхом введення січних модулів при їх розтязі (стиску) та зсуві, нерівномірний розподіл напружень по довжині поперечної арматури FRP, а також розглядати загальний випадок складного напруженого стану зі стисненим або вільним крученням, центральним чи позацентровим стиском (розтягом) з малими або великими ексцентриситетами, косим згином.

Вказані фізичні співвідношення можна застосовувати й до інших стержневих бетонних елементів з FRP, що випробують складний напружено – деформований стан, з довільною формою поперечного перерізу за наявності відповідних функцій розподілу дотичних напружень.

При сталому співвідношенні зовнішніх силових факторів на будь – якій стадії навантаження можна знайти вектор деформацій, використовуючи фізичні співвідношення (21)...(37):

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1} \{N\}, \quad (39)$$

компоненти якого дають змогу визначити узагальнені лінійні (ε_z) та кутові ($\gamma_{zy}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$) деформації складнонапружених стержневих залізобетонних елементів з FRP.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

5.1. Визначення напрямку і довжини похилої до поздовжньої осі просторової руйнуючої тріщини

Утворення тріщин на гранях залізобетонного стержня доцільно визначати за оригінальною методикою [15] шляхом видалення із розрахунку тих бетонних елементів, просторовий напружено-деформований стан яких не задовольняє умові

міцності згідно з триінваріантним критерієм В. М. Круглова [10, 11] або умові міцності [5] при неоднорічних напружених станах. Такий підхід дозволяє простежити за розвитком тріщини у площині поперечного перерізу бетонного стержня з FRP, а також обчислити нахил цієї тріщини до його поздовжньої осі на зовнішніх гранях шляхом визначення напрямку площинок головних розтягуючих напружень у частках бетону, розташованих на цих гранях.

Якщо не виконується умова міцності бетону за одним із вказаних критеріїв, то для визначення орієнтації тріщини потрібно знайти направляючий косинус площинки з максимальним розтягуючим напруженням. Головні напруження у випадку просторового напруженого стану рекомендується визначати за виразом [9]:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0, \quad (40)$$

де I_1, I_2, I_3 – інваріанти тензора напружень у довільній точці бетону.

Ураховуючи те, що згідно з граничними умовами і у відповідності з прийнятими гіпотезами у точках, віддалених від місць прикладання зосереджених силових факторів, $\sigma_{xcn} = \sigma_{ycn} = 0$, вирази для інваріантів тензора напружень приймають значення $I_1 = \sigma_{zcn}, I_2 = -\tau_{zxcn}^2 - \tau_{zycn}^2 - \tau_{xycn}^2, I_3 = 0$, підставляючи які в рівняння (40) знаходимо розв'язок:

$$\sigma_{cn} = 0,5 \left[I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 4I_2} \right] = 0,5 \left[\sigma_{zcn} \pm \sqrt{\sigma_{zcn}^2 + 4(\tau_{zxcn}^2 + \tau_{zycn}^2 + \tau_{xycn}^2)} \right]. \quad (41)$$

Найбільші розтягуючі напруження визначаються при утриманні знаку «+». Тоді значення направляючих косинусів площинки максимальних розтягуючих напружень [9] в одній із часток бетону, наприклад, з правого боку стержня можна знайти за допомогою виразів:

$$\cos(x, v_{cn,1-4}) = \frac{\tau_{zxcn,1-4}}{S}; \quad \cos(y, v_{cn,1-4}) = \frac{\tau_{zycn,1-4}}{S}; \quad \cos(z, v_{cn,1-4}) = \frac{\sigma_{zcn,1-4}}{S}; \quad (42)$$

де $S = \sqrt{\sigma_{zcn,1-4}^2 + \tau_{zxcn,1-4}^2 + \tau_{zycn,1-4}^2 + \tau_{xycn}^2}$;

$v_{cn,1-4}$ – нормаль до площинки з максимальними розтягуючими напруженнями в частці бетону, що розглядається;

1–4 – індекс, що вказує на прив'язку правої бічної поверхні елемента до 1 і 4 стержнів повздовжньої арматури.

Аналогічно можна визначити направляючі косинуси площинок з максимальними розтягуючими напруженнями в окремих частках бетону на інших гранях елемента, прив'язуючи їх до відповідної повздовжньої арматури.

Кут нахилу тріщини в межах крайньої частки бетону елемента на довільній грані розглядається як кут між лінією, паралельною поздовжній осі Z , та лінією перетину площини грані з площиною головних розтягуючих напружень. Із аналітичної геометрії відомо, що кути нахилу руйнуючої тріщини, наприклад, на нижній та правій бічній гранях стержневої бетонної конструкції з FRP в межах часток бетону, що знаходяться на цих гранях, відповідно, дорівнюють:

$$\alpha_{cn,3-4} = \arccos \left[\frac{\cos(x, v_{cn,3-4})}{\sqrt{\cos^2(x, v_{cn,3-4}) + \cos^2(z, v_{cn,3-4})}} \right] = \arccos \left[\frac{\tau_{zxcn,3-4}}{\sqrt{\tau_{zxcn,3-4}^2 + \sigma_{zcn,3-4}^2}} \right];$$

$$\beta_{cn,1-4} = \arccos \left[\frac{\cos(y, v_{cn,1-4})}{\sqrt{\cos^2(y, v_{cn,1-4}) + \cos^2(z, v_{cn,1-4})}} \right] = \arccos \left[\frac{\tau_{zycn,1-4}}{\sqrt{\tau_{zycn,1-4}^2 + \sigma_{zcn,1-4}^2}} \right]. \quad (43)$$

З урахуванням (43) довжина проекції тріщини, що утворюється на вказаних вище гранях, на поздовжню вісь бетонного стержня з FRP становить:

$$l_{cr,3-4}^{zox} = \sum_1^{b/b_c} b_* ctg \alpha_{cn,3-4}, \quad l_{cr,1-4}^{zoy} = \sum_1^{h/h_c} h_* ctg \beta_{cn,1-4}. \quad (44)$$

Прийнята методика дозволяє простежити за розвитком і зміною кутів нахилу руйнуючої тріщини на бічних поверхнях (гранях) стержня. Отже, ті частки бетону, в яких виникла тріщина, виключаються з роботи. Проте, необхідно урахувувати той факт, що на величину зусиль, які сприймаються поздовжньою арматурою, суттєво впливає робота бетону, який знаходиться між тріщинами. Для урахування роботи розтягнутого бетону між тріщинами можна використати схему зчеплення арматури з бетоном, запропоновану в свій час В. І. Мурашевим.

Згідно з [9] загальні напруження у об'ємному бетонному елементі з FRP складаються з напружень у бетоні і арматурі:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_c\} + \{\sigma_f\}. \quad (45)$$

Ураховуючи сумісність відносних деформацій бетону і арматури зв'язок між напруженнями і деформаціями в середині елемента можна представити:

$$\{\sigma\} = ([d_f] + [D_c])\{\varepsilon\} = [d]\{\varepsilon\}, \quad (46)$$

де $[d] = ([d_f] + [D_c])$ – матриця механічних характеристик бетону з FRP.

Матриця механічних характеристик армування у загальному виді [12]

$$[d_f] = \sum_i [d_f^i], \quad (47)$$

де $[d_f^i]$ – матриця відповідного i -того напрямку армування, вклад якого визначається як добуток відповідної характеристики на косинус кута між напрямком армування і перпендикуляром до грані елемента, яку перетинають арматурні стержні.

Середні осьові деформації j -того розтягнутого чи стиснутого стержня поздовжньої арматури FRP в зоні утворення тріщини згідно з теорією В. І. Мурашева визначається так:

$$\varepsilon_{fmj} = \varepsilon_{ff} \psi_{ff} + \varepsilon_{cn} (1 - \psi_{ff}), \quad (48)$$

де ε_{ff} – деформації j -того розтягнутого чи стиснутого вільного (без бетону) стержня поздовжньої арматури в зоні утворення тріщини;

ε_{cn} – деформації n -ої частки бетону в тому місці, де розташований j -ий стержень поздовжньої арматури FRP на ділянці між тріщинами;

ψ_{ff} – коефіцієнт В. І. Мурашева, який визначається за формулою (38).

5.2. Визначення координат центру згину та центру кручення з урахуванням тріщиноутворення

При утворенні тріщини бетонна частина поперечного перерізу зменшується, а центр його жорсткості, відносно якого потрібно знаходити характеристики жорсткості, що входять до системи рівнянь (21), зміщується в бік стиснутої грані. Згідно з

прийнятою гіпотезою нормальні напруження σ_z не сприймаються поперечною арматурою. Тому центр згину і центр кручення не збігаються. Координати центру згину приведенного по жорсткості поперечного перерізу бетонного стержня з FRP з урахуванням зміни напруженого стану арматури в результаті утворення тріщин можна представити:

$$X_c = \frac{\sum_{n=1}^k A_{cn} y_{cn} E_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} y_{fj} E_{fj}}{\psi_{fj}}}{\sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj}}{\psi_{fj}}}; \quad Y_c = \frac{\sum_{n=1}^k A_{cn} x_{cn} E_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} x_{fj} E_{fj}}{\psi_{fj}}}{\sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj}}{\psi_{fj}}}. \quad (49)$$

Координати центру кручення з урахуванням наявності поперечної арматури визначаються відповідно:

$$X_{c,tor} = \frac{\sum_{n=1}^k A_{cn} y_{cn} G_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} y_{fj} G_{fj}}{\psi_{fj}} + \sum_{i=1}^{l_{fw,y}} A_{fwi} y_{fwi} E_{fwi}}{\sum_{n=1}^k A_{cn} G_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} G_{fj}}{\psi_{fj}} + \sum_{i=1}^{l_{fw,y}} A_{fwi} E_{fwi}}; \\ Y_{c,tor} = \frac{\sum_{n=1}^k A_{cn} x_{cn} G_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} x_{fj} G_{fj}}{\psi_{fj}} + \sum_{i=1}^{l_{fw,x}} A_{fwi} x_{fwi} E_{fwi}}{\sum_{n=1}^k A_{cn} G_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} G_{fj}}{\psi_{fj}} + \sum_{i=1}^{l_{fw,x}} A_{fwi} E_{fwi}} \quad (50)$$

де x_{cn}, y_{cn} – координати центрів ваги бетонних часток відносно осей симетрії поперечного перерізу;

x_{fj}, y_{fj} – координати центрів ваги стержнів поздовжньої арматури FRP відносно тих же осей;

x_{fwi}, y_{fwi} – координати центрів ваги окремих ділянок стержнів поперечної арматури FRP відносно осей симетрії перерізу.

При визначенні характеристик жорсткостей впливу, в т.ч. взаємного, повздовжніх та поперечних сил, а також згинальних моментів у рівняннях системи (21) використовуються координати центрів ваги часток бетону, стержнів поздовжньої та окремих ділянок стержнів поперечної арматури відносно центру згину. Тобто значення координат y, x у виразах (23)...(31) визначаються так:

$$X_{cn} = x_{cn} - X_c, \quad X_{fj} = x_{fj} - X_c, \quad X_{fwi} = x_{fwi} - X_c; \\ Y_{cn} = y_{cn} - Y_c, \quad Y_{fj} = y_{fj} - Y_c, \quad Y_{fwi} = y_{fwi} - Y_c. \quad (51)$$

При визначенні характеристик жорсткості четвертого, п'ятого і шостого рівнянь у формулах (28)...(36) використовуються координати відносно центру кручення:

$$X_{cn}^{tor} = x_{cn} - X_{c,tor}; \quad X_{fj}^{tor} = x_{fj} - X_{c,tor}; \quad X_{fwi}^{tor} = x_{fwi} - X_{c,tor}; \\ Y_{cn}^{tor} = y_{cn} - Y_{c,tor}; \quad Y_{fj}^{tor} = y_{fj} - Y_{c,tor}; \quad Y_{fwi}^{tor} = y_{fwi} - Y_{c,tor}. \quad (52)$$

5.3. Умови закінчення розрахунку

Стержні поздовжньої арматури FRP перестають сприймати зростаюче навантаження (умовно виключаються з роботи), якщо компоненти напружено-деформованого стану такі, що не задовольняють критерій міцності FRP, в якому

границя текучості визначена з урахуванням її зменшення (16) внаслідок складного напруженого стану.

Стержень поперечної арматури FRP умовно виключається з роботи, якщо нормальні напруження хоча би на одній з його ділянок досягнуть напружень f_{fk} .

Інколи в елементах поперечної арматури при великих крутних моментах з'являються зусилля, при яких порушується їх зчеплення з бетоном внаслідок того, що дотичні напруження в бетоні поблизу цієї арматури досягають межі міцності на зсув. У такому випадку умовно виключається з роботи той елемент поперечної арматури, в якому виникло порушення зчеплення з бетоном, тобто не виконується умова:

$$\tau_{zxc} < f_{bd} \text{ або } \tau_{zyc} < f_{bd}, \quad (53)$$

де f_{bd} – розрахункове значення граничних напружень зчеплення арматури з бетоном.

Згідно з чинними нормами $f_{bd} = 2,25\eta_1\eta_2f_{ctd}$,

де f_{ctd} – розрахункове значення міцності бетону на розтяг (в експериментах – характеристичне f_{ctk}); $\eta_1 = 1,0$ при нормальних умовах зчеплення бетону з арматурою; $\eta_2 = 1,0$ при діаметрах арматури до 32мм включно.

На кожному етапі навантаження розрахунок здійснюється шляхом виконання деякої кількості ітерацій до тих пір, доки точність визначення всіх компонент вектора деформацій не буде задовольняти деяку задану величину, тобто доки не буде виконана умова:

$$\frac{\{\varepsilon\}_n - \{\varepsilon\}_{n-1}}{\{\varepsilon\}_n} < \{\eta\}, \quad (54)$$

де $\{\varepsilon\}_n$ – вектор деформацій, обчислений на n-ій ітерації;

$\{\varepsilon\}_{n-1}$ – те ж на попередній, n – 1-ій, ітерації;

$\{\eta\}$ – вектор точності, складений із заданих точностей для кожної складової вектора деформацій.

Послідовно збільшуючи вектор діючих у стержні зусиль заданого співвідношення, можна визначити несучу здатність бетонного стержня з FRP. У якості граничного навантаження приймається максимальний вектор зусиль $\{N\}$, при якому система рівнянь (21) має рішення, тобто визначник матриці $[D]$ не дорівнює нулю (з деякою заданою точністю η_{det}) або несуча здатність бетонного стержня з FRP вважається вичерпаною, якщо

$$\det[D] < \eta_{det}. \quad (55)$$

5.4. Алгоритм визначення несучої здатності розрахункових нормальних перерізів бетонних стержнів прямокутного перерізу, армованих FRP

У межах даної роботи зі збереженням основних принципів [9, 12, 18] здійснюється розробка нової програми «NTVM» в середовищі ефективної комп'ютерної математики MATLAB, яка дозволить у повному об'ємі визначити всі внутрішні зусилля (силові фактори) у загальному випадку складного напружено – деформованого стану бетонного стержня з FRP з урахуванням його вільного або стисненого кручення, сучасних критеріїв міцності матеріалів при простому пропорційному навантаженні.

Блок–схема алгоритму визначення несучої здатності бетонних стержнів прямокутного поперечного перерізу з довільним ортогональним армуванням FRP

представлена на рис. 4.

Алгоритм складається з блоку введення вихідних даних, основної частини, допоміжних підпрограм перевірки умов збільшення вектора навантаження і вичерпання несучої здатності та блоку роздрукування результатів розрахунків.

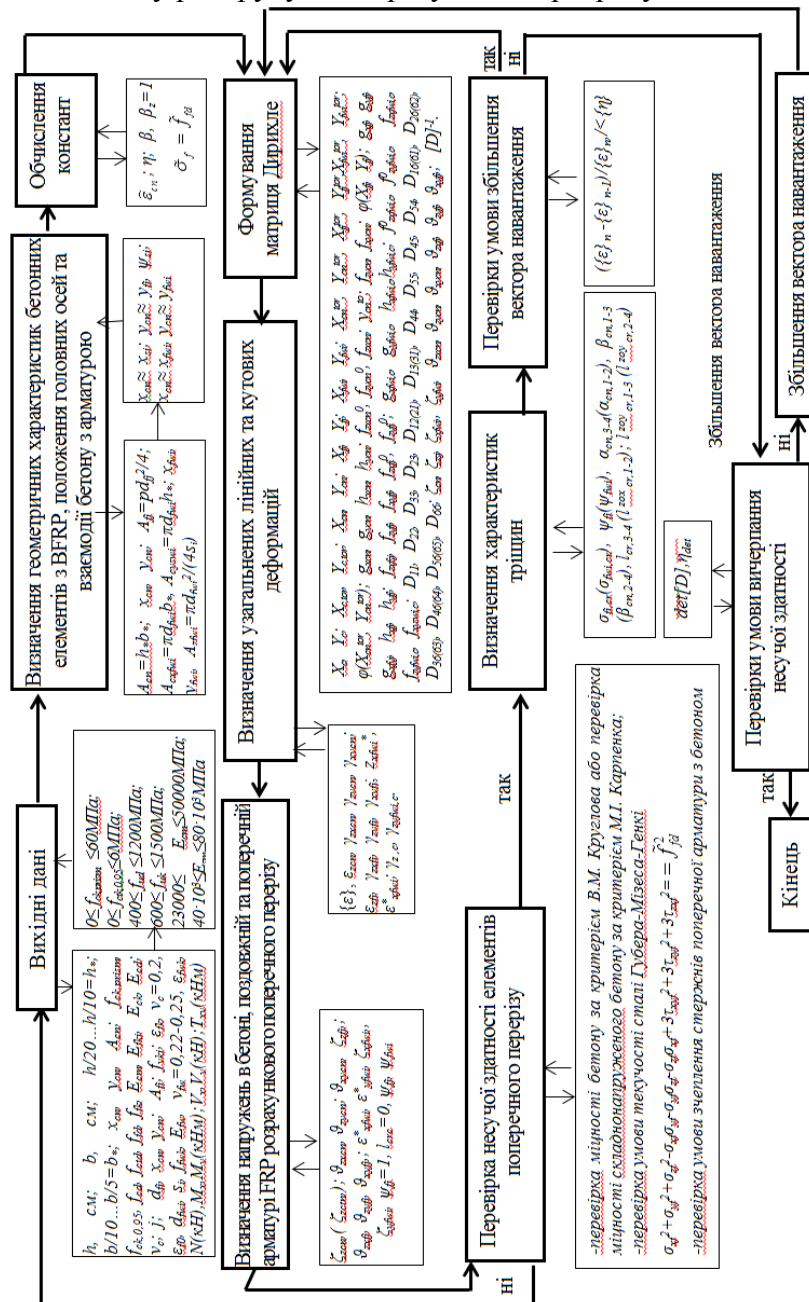


Рис. 4. Блок – схема алгоритму розрахунку

6 ВИСНОВКИ

1. Отримала подальший розвиток прийнята у загальному вигляді нелінійна деформаційно-силова модель стержневої бетонної конструкції з неметалевою композитною арматурою, яка з єдиних позицій механіки армованого бетону дозволяє урахувати особливості сумісної роботи бетону і арматури FRP на всіх стадіях, включаючи руйнування, в її розрахункових перерізах у загальному випадку напруженого стану з урахуванням сумісної дії повздовжніх та поперечних сил, згинальних та крутних моментів. Її можна застосувати при проектуванні чи підсиленні балок, ригелів, колон та елементів розкільних ферм прямокутного поперечного перерізу, а також перевірці несучої здатності існуючих стержневих бетонних конструкцій з FRP,

що працюють в умовах складного напружено-деформованого стану або агресивного впливу оточуючого середовища.

2. Прогноз тріщиноутворення на гранях залізобетонного стержня і перевірку міцності бетону рекомендується здійснювати за тринваріантним критерієм В. М. Круглова або п'ятипараметричним критерієм М. І. Карпенка та його учнів.

3. Утворення тріщин в бетоні ураховується шляхом виключення з розрахунку тих часток бетону, просторовий напружено-деформований стан яких не задовольняє зазначеним в п.2 висновків критеріям міцності.

4. Проведені експериментально-теоретичні дослідження [19] підтвердили можливість і доцільність застосування представленої деформаційно-силової моделі для визначення несучої здатності, тріщиностійкості, деформативності, а також орієнтації тріщини відносно граней бетонного елемента з FRP та її довжини на цих гранях.

5. Зниження міцності повздовжньої арматури FRP, зумовлене її сумісною роботою з аналогічною поперечною арматурою, доцільно ураховувати за допомогою (16). Стержні цієї арматури FRP також умовно виключаються з роботи, якщо напруження в ній досягають значень \tilde{f}_{fd} із (16). Стержень поперечної арматури умовно виключається з роботи, якщо нормальні напруження хоча би на одній з його ділянок досягнуть значень \tilde{f}_{fd} .

6. Представленні рівняння рівноваги (18), вирази для узагальнених деформацій (20), аналітичні описи діаграм стану матеріалів, загальні фізичні співвідношення у вигляді (21) є справедливими для всіх стадій складного напружено-деформованого стану бетонного стержня з FRP. Пластичні властивості бетону ураховуються шляхом використання січних модулів пружності при стиску, розтязі і зсуві, а зміщені внаслідок тріщиноутворення центри жорсткостей при згині й крученні стержня-відповідно, за допомогою виразів (50, 51).

Несуча здатність розрахункових перерізів та стержня, в цілому, визначається максимальним вектором зусиль заданого співвідношення або рівнів, при якому система рівнянь (21) ще має розв'язок, тобто визначник матриці жорсткості [D] не дорівнює нулю із заданою точністю. Прогини і кути закручування окремих перерізів стержня, при потребі, можна визначити через їх відповідні кривизни згину і відносні (погонні) кути закручування, які обчислюються в процесі розрахунку.

Література

1. Карпюк В. М. Розрахункові моделі силового опору прогінних залізобетонних конструкцій у загальному випадку напруженого стану. Одеса: ОДАБА, 2014. 352 с.
2. Карпюк В. М., Костюк А. І., Сьоміна Ю. А. Нелінійна деформаційно-силова модель прогінних залізобетонних конструкцій у загальному випадку напруженого стану. Вісник ВІЕМ, 2017. №18. С. 136-150.
3. Karpyuk V. M., Kostyuk A. I., Semina Yu. A. General Case of Nonlinear Deformation-Strength Model of Reinforced Concrete Structures. Strength of Materials. 2018. Volume 50. Issue 3. P. 453–464.
4. Карпюк В. М., Петров О. М. Міцність, деформативність та тріщиностійкість прогінних залізобетонних елементів при їх згині з крученням. Одеса: Optimum, 2016. 171 с.
5. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
6. Биргер И. А., Пановко Я. Г. Прочность, устойчивость, колебания: справочник в 3т. Т. 1. М.: Машиностроение, 1968. 832 с.
7. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1956. 420 с.
8. Школа Ю. О. Напряженное состояние балок, подверженных стесненному кручению. Будівельні конструкції: міжвідомч. зб. наук. праць. К.: НДІБК, 2000. Вип. 52. С. 208–213.
9. Карпенко Н. И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.

10. Круглов В. М. Феноменологический критерий прочности бетона при трёхосном напряжённом состоянии. Известия вузов, серия: строительство и архитектура, 1986. №6. С. 6–11.
11. Круглов В. М. Нелинейные соотношения и критерий прочности бетона в трёхосном напряжённом состоянии. Строительная механика и расчёт сооружений, 1987. №1. С. 40–44.
12. Безушко Д. І. Нелінійні моделі матеріалів при розрахунку залізобетонних конструкцій, що згинаються, методом скінчених елементів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.23.01 – «Будівельні конструкції, будівлі та споруди». Одеса, 2008. 20 с.
13. Бондаренко В. М., Колчунов В. И. Расчетные модели силового сопротивления железобетона. Издательство Ассоциации строительных вузов. Москва, 2004. 472 с.
14. Гениев Г. А. Киссюк В. Н., Тюпин Г. А. Теория пластичности бетона и железобетона. М: Стройиздат, 1974. 316 с.
15. Школа Ю. А. Несущая способность и деформативность железобетонных стержневых элементов при сложном напряжённом состоянии: дис. на соискание научн. степени канд. техн. наук: спец. 05.23.01. Одесса, 2002. 197 с.
16. Хан Х. Теория упругости. Основы линейной теории и её применения М.: Мир, 1988. 344 с.
17. Яременко О. Ф., Школа Ю. А. Фізичні співвідношення для перерізів залізобетонних стержневих елементів у загальному випадку напруженого стану. Вісник національного університету «Львівська політехніка». Теорія і практика будівництва, 2007. №600. С. 339–344.
18. Клованич С. Ф., Мироненко И. Н. Метод конечных элементов в механике железобетона. Одеса: Изд-во ОНПУ, 2007. 100 с.
19. Karpiuk V., Tselikova A., Khudobych A., Karpiuk I., Kostyuk A. Study of strength, deformability property and crack resistance of beams with BFR. Eastern-European journal of enterprise technologies. Харків, Т. 4/7 Вип.106 2020. С. 42–53.

References

1. Karpiuk, V. M. (2014). *Rozrakhunkovi modeli sylovoho oporu prohinnykh zalizobetonnykh konstrukttsii u zahalnomu vypadku napruzhenoho stanu* [Computational models of the force resistance of spanning reinforced concrete structures in the general case of a stressed state]. (monograph). Odessa. ODABA [in Ukraine].
2. Karpiuk, V. M., Kostyuk, A. I., Somina, Yu A. (2017). Nelineiina deformatsiino-sylova model prohinnykh zalizobetonnykh konstrukttsii u zahalnomu vypadku napruzhenoho stanu [Nonlinear deformation-force model of spans of reinforced concrete structures in the general case of a stressed state]. *VIEM Bulletin*. (18). 136–150. [in Ukraine].
3. Karpiuk, V. M., Kostyuk, A. I., Semina, Yu. A. (2018) General Case of Nonlinear Deformation-Strength Model of Reinforced Concrete Structures Strength of Materials. *Strength of Materials* no. 50. (3). 453–464.
4. Karpiuk, V. N., Petrov, A. N. (2016). *Mitsnist, deformatyvnist ta trishchynostiikist prohinnykh zalizobetonnykh elementiv pry yikh zghyni z kruchenniam* [Strength, deformability and crack resistance of spanning reinforced concrete elements during bending with torsion] (monograph). Odessa: Optimum. [in Ukraine].
5. Tymoshenko, S. P., Huder, Dzh. (1975). *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moskva. Nauka. [in Russian].
6. Byrher, Y. A., Panovko, Ya. H. (1968). *Prochnost, ustoiichyvost, kolebaniya: spravochnyk v 3t.* [Strength, stability, fluctuations: a reference book]. Moskva, Mashynostroenye (1) [in Russian].
7. Bezukhov, N. I. (1956). *Osnovy teoryy uprugosti, plastychnosti y polzuchesty* [Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity and creep]. Moskva. Vysshaya shkola. [in Russian].
8. Shkola, Yu. A. (2000). Napriazhennoe sostoianye balok, podverzhennykh stesnennomu krucheniyu [The stress state of beams subjected to constrained torsion]. *Budivelni konstrukttsii: mizhvidomch. zb. nauk. prats.* Moskva, NIISK. no. 52. 208–213. [in Russian].
9. Karpenko, N. I. (1996). *Obshchye modely mekhaniky zhelezobetona* [General Models of Reinforced Concrete Mechanics]. Moskva. Stroyizdat. [in Russian].

10. Kruglov, V. M. (1986). Fenomenolohycheskyi kryteriyi prochnosti betona pry trekhosnom napriazhennom sostoianyy [Phenomenological criterion for the strength of concrete in a triaxial stress state]. *Yzvestiya vuzov, seryia: stroytelstvo y arkhytektura* (6). 6–11. [in Russian].
11. Kruglov, V. M. (1987). Nelyneinye sootnosheniya y kryteriyi prochnosti betona v trekhosnom napriazhennom sostoianyy [Nonlinear relations and the criterion for the strength of concrete in a triaxial stress state], *Stroytelnaia mekhanika y raschet sooruzheniy* (1). 40–44. [in Russian].
12. Bezushko, D. I. (2008). *Neliniini modeli materialiv pry rozrakhunku zalizobetonnykh konstruksii, shcho zghynaiutsia, metodom skinchenykh elementiv* [Nonlinear models of materials in the design of reinforced concrete structures are bent by the finite element method]: avtoref. dys. na zdobuttia nauk. stupenia kand. tekhn. nauk: spets. 05.23.01 – «Budivelni konstruksii, budivli ta sporudy. [in Ukraine].
13. Bondarenko, V. M., Kolchunov, V. I. (2004). *Raschetnye modeli sylovoho soprotivleniya zhelezobetona* [Calculation models of power resistance of reinforced concrete]. *Yzdatelstvo Assotsyatsyy stroytelnykh vuzov. Moscow.* [in Russian].
14. Henyev, H. A., Kyssiuk, V. N., Tiupyn, H. A. (1974). *Teoriya plastychnosti betona y zhelezobetona.* [Theory of plasticity of concrete and reinforced concrete]. Moskva. Stroyizdat. [in Russian].
15. Shkola, Yu. A. (2002). *Nesushchaia sposobnost y deformatsiynost zhelezobetonnykh sterzhnevyykh elementov pry sloznom napriazhennom sostoianyy* [Bearing capacity and deformability of reinforced concrete bar elements in a complex stress state]: dys. na soyskanye nauchn. stepeny kand. tekhn. nauk: spets. 05.23.01. Odessa. [in Russian].
16. Khan, H. (1988). *Teoriya uprugosti. Osnovy lyneinoi teoryy y ee pryimeneniya* [Theory of elasticity. Fundamentals of linear theory and its applications]. Moskva. Mir. [in Russian].
17. Yaremenko, A. F., Shkola, Yu. A. (2007). Fizychni spivvidnoshennia dlia pereriziv zalizobetonnykh sterzhnevyykh elementiv u zahalnomu vypadku napruzhenoho stanu [Physical relations for sections of reinforced concrete bar elements in the general case of a stressed state]. *Visnyk natsionalnoho universytetu «Lvivska politekhnika». Teoriia i praktyka budivnytstva.* 339–344. [in Ukraine].
18. Klovanych, S. F., Myronenko, Y. N. (2007). *Metod konechnykh elementov v mekhanike zhelezobetona* [Finite element method in reinforced concrete mechanics]. Odesa. Yzd-vo ONPU. [in Russian].
19. Karpiuk, V., Tselikova, A., Khudobych, A., Karpiuk, I., Kostyuk, A. (2020). Study of strength, deformability property and crack resistance of beams with BFR. *Eastern-European journal of enterprise technologies, Kharkiv.* no.4/7 (106) 42–53.

Карпюк Ірина Анатоліївна

Одеська державна академія будівництва та архітектури, к.т.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029, irina.carpyuk@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3437-5882

Клименко Євгеній Володимирович

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.т.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029, klimenkoew57@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4502-8504

Карпюк Василь Михайлович

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.т.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029, karpiukvim@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4088-6489

Карпюк Марія Василівна

Одеська державна академія будівництва та архітектури, студентка
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029, marai.v.karpiuk@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5084-4971

Для посилань:

Карпюк І. А., Клименко Є. В., Карпюк В. М., Карпюк М. В. Нелінійна деформаційно-силова модель бетонного стержня з неметалевою композитною арматурою у загальному випадку напруженого стану. *Механіка та математичні методи*, 2021. Т. 3. № 1. С. 6–26.

For references:

Karpiuk I., Klumenko Ye., Karpiuk V., Karpiuk M. (2021). Nonlinear deformation-force model of a concrete bar with non-metallic composite reinforcement in the general case of a stressed state. *Mechanics and Mathematical Methods.* 3 (1). 6–26

УДК 631.333.5:514.18

РУХ ЧАСТИНКИ ПО СФЕРИЧНОМУ СЕГМЕНТУ З ВЕРТИКАЛЬНИМИ РАДІАЛЬНО ВСТАНОВЛЕНИМИ ЛОПАТКАМИ

Волина Т. М.¹, Пилипака С. Ф.¹, Несвідомін А. В.¹

¹Національний університет біоресурсів і природокористування України

Анотація: Розглянуто відносний рух частинки по внутрішній поверхні горизонтального сферичного диска вздовж вертикальної лопатки, встановленої у радіальному напрямі. Диск обертається навколо вертикальної осі із заданою кутовою швидкістю. Складено систему диференціальних рівнянь руху частинки, яку розв'язано чисельними методами. Знайдено кінематичні характеристики, з'ясовано закономірності відносного руху частинки по поверхні циліндра. Побудовано графіки, що характеризують рух частинки при певних заданих параметрах, а саме: графік зміни кута, що задає положення точки на поверхні сфери в напрямі меридіана, графіки зміни абсолютної і відносної швидкостей, графіки зміни сили реакції сферичного диска і лопатки. Чисельне інтегрування отриманого диференціального рівняння показало, що за півсекунди частинка підіймається на висоту півсфери, а потім починає опускатися. При цьому опускання чергується з підйомом до повної зупинки частинки на певній висоті, тобто частинка «залипає» і далі обертається разом з півсферою. Кут «залипання» може бути знайдено аналітично. Крім того, чисельні методи обчислень показали, що при нульовому значенні коефіцієнта тертя частинки по поверхні диска, тобто при абсолютно гладенькій його поверхні, і ненульовому – по поверхні лопатки, та при необмеженому зростанні кутової швидкості обертання диска частинка «залипає» на висоті центра сфери. Якщо ж обидві поверхні абсолютно гладенькі, то затухаючі коливання кута, що задає положення точки на поверхні сфери у напрямі меридіана, відбуваються нескінченно довго. Робоча поверхня диска відцентрового апарата, виготовлена у вигляді сферичного сегмента, забезпечує початок польоту частинки в момент сходження з диска під заданим кутом до горизонтальної площини, збільшуючи площу розсіювання технологічного матеріалу. Отриманий у статті аналітичний опис руху частинки дає можливість дослідити її розгін по диску вздовж лопаток та знайти відносну і абсолютну швидкості в момент сходження частинки із диска. Знайдені аналітичні залежності дозволяють визначати вплив конструктивних та технологічних параметрів на процес розгону частинки.

Ключові слова: сферичний диск, робоча поверхня, частинка, система координат, абсолютна швидкість.

PARTICLE MOTION ON THE SPHERICAL SEGMENT WITH VERTICALS RADIALY INSTALLED BLADES

T. Volina¹, S. Pylypaka¹, A. Nesvidomin¹

¹National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

Abstract: The relative motion of a particle on the inner surface of a horizontal spherical disk along a vertical blade mounted in the radial direction is considered in the article. The disk rotates around a vertical axis with a given angular velocity. A system of differential equations of motion of a particle is compiled and solved by numerical methods. The kinematic characteristics of the motion are found, the regularities of the relative motion of the particle on the surface of the cylinder are clarified. Graphs characterizing the motion of a particle at certain given parameters are constructed, namely: graph of angle change, which sets the position of the particle on the surface of the sphere in the direction of the meridian, graphs of absolute and relative velocities, graphs of change of forces of the reaction of the spherical disk and blade. Numerical integration of the obtained differential equation



showed that in half a second the particle rises to the height of the hemisphere, and then begins to fall. In this case, the descent alternates with the rise to a complete stop of the particle at a certain height, i.e. the particle “sticks” and then rotates with the hemisphere. The angle of “sticking” can be found analytically. In addition, numerical calculation methods have shown that at zero value of the friction coefficient of the particle on the disk surface, i.e. at its absolutely smooth surface, and at the non-zero value of the friction coefficient of the blade surface, and at an unlimited increase of the disk angular velocity the particle “sticks” at the height of the center of the sphere. If both surfaces are absolutely smooth, then the damping oscillations of the angle that determines the position of the particle on the surface of the sphere in the direction of the meridian, occur indefinitely. The working surface of the disk of the centrifugal apparatus, which is made in the form of a spherical segment, provides the beginning of the flight of the particle at the time of ascent from the disk at a given angle to the horizontal plane, increasing the scattering area of the technological material. The analytical description of the particle motion obtained in the article makes it possible to investigate its acceleration along with the blades of the disk and to find the relative and absolute velocities at the moment of particle ascent from the disk. The found analytical dependencies allow determining the influence of constructive and technological parameters on the process of particle acceleration.

Keywords: spherical disk, working surface, particle, coordinate system, absolute velocity.

1 ВСТУП

Для розсіювання мінеральних добрив застосовують апарати відцентрового типу. Їхні робочі органи можуть мати різну конструкцію. Принцип роботи таких апаратів полягає в тому, що матеріальна частинка, тобто частинка добрива, ковзає по робочій поверхні, яка обертається навколо вертикальної осі і під дією відцентрової сили розганяється і рухається до периферії від осі обертання [1]. Для збільшення швидкості розгону такі апарати додатково укомплектовують вертикальними лопатками, вздовж яких змушена рухатися частинка в радіальному напрямі. Від форми та конструктивних параметрів робочих органів апарату залежать кінематичні характеристики руху технологічного матеріалу. Дослідження закономірностей руху частинки в залежності від форми та конструктивних особливостей робочих органів дозволяє покращити конструкцію апарату.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Рух матеріальних частинок по поверхнях розглядається у наукових статтях у контексті їхньої природи: це можуть бути механічні частинки, частинки газу чи рідини, частинки у потоці тощо. Звісно, рух окремої частинки не може бути ідентифіковано з рухом тіла або технологічного матеріалу, який складається з окремих частинок та під час дослідження руху якого мають бути враховані сили інерції, що виникають під час обертання тіла. У деяких випадках при незначних кутових швидкостях ці сили можуть бути проігноровані, як, наприклад, при дослідженні руху частинки по зовнішній поверхні циліндра, що здійснює поступальні коливання в горизонтальних площинах [2]. Проте, на основі руху окремої частинки можливо ідентифікувати залежності, що можуть бути застосовані до тіла або до технологічного матеріалу чи допомагають визначити напрям подальших досліджень. Так, науковцями розглянуто рух матеріальних частинок по рухомим спіральним робочим органам [3]; по рухомій хвилястій площині [4]; по гвинтовій поверхні [5]; по гравітаційному спуску, утвореному поверхнею косоного закритого гелікоїда [6]; переміщення частинки вертикальним шнеком при стаціонарному режимі [7] та горизонтальним шнеком, обмеженим співвісним нерухомим циліндром [8]. Крім того, у праці [9] розглянуто рух частинки по краю похилого плоского еліпса, що обертається навколо осі вертикального обмежувального циліндра. Найбільш близьким до питання, яке розглядається у даній статті, дослідженням є рух частинки по сферичному сегменту, який обертається навколо вертикальної осі [10]. Отже, для вивчення руху частинки в залежності від конструктивних параметрів поверхні необхідно мати аналітичні залежності, що описують такий рух.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідити закономірності руху матеріальних частинок у відцентровому апараті у вигляді поверхні сферичного сегмента із радіально розташованими вертикальними лопатками.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Запишемо параметричні рівняння сфери із початком координат в її нижньому полюсі:

$$X = R \sin \varepsilon \cos \alpha; \quad Y = R \sin \varepsilon \sin \alpha; \quad Z = R(1 - \cos \varepsilon), \quad (1)$$

де R – радіус сфери;

ε, α – незалежні змінні сфери, якими є кути, що задають положення точки на поверхні сфери в напрямі меридіана і паралелі відповідно.

Сферичний сегмент потрібної форми задається двома конструктивними параметрами: кутом підйому β частинки в момент її сходження із поверхні сегмента вздовж вертикальної лопатки і діаметром d (рис. 1). Виходячи із цих умов, знаходимо радіус R сфери:

$$R = \frac{d}{2 \sin \beta}. \quad (2)$$

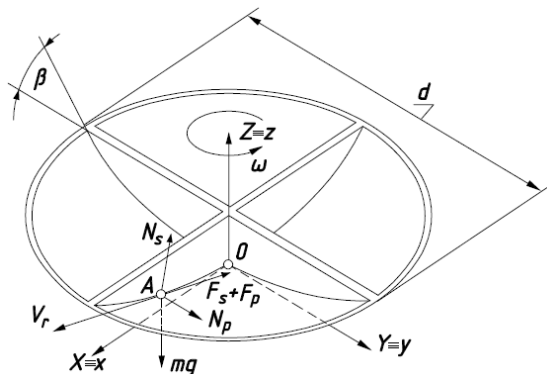


Рис. 1. Робочий орган відцентрового апарату з вертикальними лопатками та положення матеріальної частинки в точці A із прикладеними до неї силами

Щоб побудувати за рівняннями (1) сферичний сегмент із заданими конструктивними параметрами d, β і R згідно формули (2), кути ε і α повинні змінюватися в наступних межах: $\varepsilon = 0 \dots \beta$, $\alpha = 0 \dots 2\pi$.

Матеріальна частинка під час обертання диска із кутовою швидкістю ω буде мати контакт із поверхнями сегмента і лопатки і ковзати вздовж їхньої спільної лінії – кола радіуса R . Його рівняння отримаємо із (1) при $\alpha = 0$:

$$x = R \sin \varepsilon; \quad y = 0; \quad z = R(1 - \cos \varepsilon). \quad (3)$$

Лінія (3) є траєкторією відносного руху частинки, тобто траєкторією її ковзання. Під час обертання диска за якийсь час t крива разом із диском повернеться на кут $\theta = \omega t$. За цей час частинка переміститься по кривій (3) в сторону периферії диска (рис. 2). Процес руху частинки будемо описувати по відношенню до двох систем координат: нерухомої $OXYZ$ і рухомої $Ox_1y_1z_1$. Рухома система координат жорстко прив'язана до диска і обертається разом із ним. У початковий момент ці дві системи збігаються (рис. 1).

Задамо відносну траєкторію руху частинки по кривій (3) у вигляді залежності $\varepsilon = \varepsilon(t)$, яку необхідно в кінцевому підсумку розшукати.

Знайдемо абсолютну траєкторію руху частинки. За час t вона здійснила відносне переміщення по кривій за рівняннями (3), де величина кута ε є функцією часу t і поворот на кут $\theta = \omega t$ (рис. 2). Вертикальна координата для обох систем однакова: $Oz = OZ$. Отже абсолютну траєкторію переміщення частинки знайдемо поворотом рухомої системи з координатами (3) частинки по відношенню до нерухомої навколо осі OZ за відомими формулами:

$$x_a = x \cos \theta - y \sin \theta; \quad y_a = x \sin \theta + y \cos \theta; \quad z_a = z. \quad (4)$$

Підставимо в (4) рівняння (3) та вираз для кута $\theta = \omega t$ і після цього отримаємо параметричні рівняння абсолютної траєкторії руху частинки:

$$\begin{aligned} x_a &= R \sin \varepsilon \cos(\omega t); \\ y_a &= R \sin \varepsilon \sin(\omega t); \\ z_a &= R(1 - \cos \varepsilon). \end{aligned} \quad (5)$$

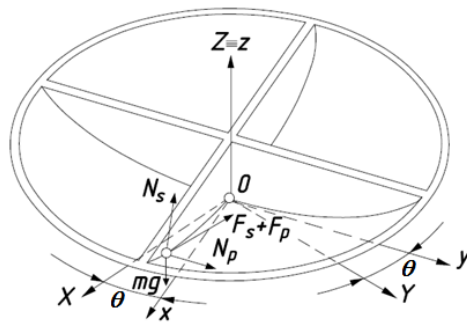


Рис. 2. Робочий орган відцентрового апарату з вертикальними лопатками та положення матеріальної частинки із прикладеними до неї силами після повороту на кут $\theta = \omega t$

Диференціальне рівняння абсолютного руху частинки у векторному записі має вигляд: $m\bar{w} = \bar{F}$, де m – маса частинки, \bar{w} – вектор абсолютного прискорення, \bar{F} – результуючий вектор прикладених до частинки сил. Такими силами є сила ваги mg ($g=9,81 \text{ м/с}^2$), реакція N_s поверхні сферичного диска, реакція N_p поверхні лопатки, сила тертя $F_s = f_s N_s$ при ковзанні частинки по поверхні диска, сила тертя $F_p = f_p N_p$ при ковзанні частинки по поверхні лопатки (f_s і f_p – коефіцієнти тертя частинки по поверхні диска і лопатки відповідно). Усі сили мають строго визначений напрям дії. Для початкового моменту руху (коли обидві системи координат збігаються) вони зображені на рис. 1.

Сила ваги спрямована вниз, отже її проекції запишуться:

$$\{0; \quad 0; \quad -mg\}. \quad (6)$$

Реакція N_p лопатки спрямована перпендикулярно до неї, тобто збігається із напрямом осі Oy . Проекції одиничного вектора реакції N_p запишуться:

$$\{0; \quad 1; \quad 0\}. \quad (7)$$

Реакція N_s сферичного диска (сегмента) спрямована перпендикулярно до його поверхні, тобто до центра сфери. Радіус-вектор кола (3), вздовж якого визначається напрямний вектор реакції N_s , спрямований від центра сфери до точки на кривій при умові, що початок координат знаходиться в центрі сфери. Отже, напрямний вектор буде спрямований у протилежну сторону. Його проекції запишуться:

$$\{-\sin \varepsilon; \quad 0; \quad \cos \varepsilon\}. \quad (8)$$

Обидві сили тертя F_s і F_p спрямовані по дотичній до траєкторії відносного руху частинки в протилежну швидкості V_r (рис. 1) її ковзання сторону. Знайдемо одиничний вектор напряму відносної швидкості V_r , вздовж якого діє сила сумарна сила тертя $F_s + F_p$. Для цього продиференціюємо відносну траєкторію (3), маючи на увазі, що $\varepsilon = \varepsilon(t)$:



$$\begin{aligned}x' &= R\varepsilon' \cos \varepsilon; \\y' &= 0; \\z' &= R\varepsilon' \sin \varepsilon.\end{aligned}\tag{9}$$

Геометрична сума складових (9) дасть вираз величини відносної швидкості частинки:

$$V_r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = R\varepsilon'^2.\tag{10}$$

Розділивши проекції відносної швидкості (9) на її величину (10), отримаємо вирази одиничного вектора відносної швидкості V_r в проекціях на осі рухомої системи $Oxyz$:

$$\{\cos \varepsilon; \quad 0; \quad \sin \varepsilon\}.\tag{11}$$

Після повороту диска разом із рухомою системою координат $Oxyz$ на кут $\theta = \omega t$ частинка займе нове положення на кривій, а сама крива теж повернеться на цей кут. Напрямок дії всіх векторів прикладених сил визначено. При повороті диска разом із ним повертається частинка і прикладені до неї вектори сил, які в рухомій системі не змінюють напрямку. Після повороту векторів (7), (8), (11) на кут $\theta = \omega t$ навколо осі OZ їх проекції на нерухому систему опишуться наступними виразами.

Одиничний вектор реакції N_p лопатки:

$$\{-\sin \omega t; \quad \cos \omega t; \quad 0\}.\tag{12}$$

Одиничний вектор реакції N_s сферичного диска:

$$\{-\sin \varepsilon \cos \omega t; \quad -\sin \varepsilon \sin \omega t; \quad \cos \varepsilon\}.\tag{13}$$

Одиничний вектор відносної швидкості V_r :

$$\{\cos \varepsilon \cos \omega t; \quad \cos \varepsilon \sin \omega t; \quad \sin \varepsilon\}.\tag{14}$$

Напрямок дії сили ваги (6) частинки при повороті диска не змінюється.

Проекції абсолютної швидкості і абсолютного прискорення частинки на осі нерухомої системи координат $OXYZ$ знайдемо послідовним диференціюванням рівнянь (5). Після диференціювання рівнянь (5) отримуємо проекції абсолютної швидкості:

$$\begin{aligned}x'_a &= R\varepsilon' \cos \varepsilon \cos \omega t - R\omega \sin \varepsilon \sin \omega t; \\y'_a &= R\varepsilon' \cos \varepsilon \sin \omega t + R\omega \sin \varepsilon \cos \omega t; \\z'_a &= R\varepsilon' \sin \varepsilon.\end{aligned}\tag{15}$$

Величину абсолютної швидкості отримаємо геометричним сумуванням складових (15): $V_a = \sqrt{x_a'^2 + y_a'^2 + z_a'^2} = R\sqrt{\varepsilon'^2 + \omega^2 \sin^2 \varepsilon}$.

Після диференціювання виразів (15) отримаємо проекції вектора абсолютного прискорення:

$$\begin{aligned}x''_a &= R(\varepsilon'' \cos \omega t - 2\omega \varepsilon' \sin \omega t) \cos \varepsilon - R(\varepsilon'^2 + \omega^2) \sin \varepsilon \cos \omega t; \\y''_a &= R(\varepsilon'' \sin \omega t + 2\omega \varepsilon' \cos \omega t) \cos \varepsilon - R(\varepsilon'^2 + \omega^2) \sin \varepsilon \sin \omega t; \\z''_a &= R\varepsilon'' \sin \varepsilon + R\varepsilon'^2 \cos \varepsilon.\end{aligned}\tag{16}$$

Розпишемо векторне рівняння $m\ddot{\vec{w}} = \vec{F}$ в проєкціях на осі нерухокої системи координат $OXYZ$. Напрямок дії реакцій N_p лопатки і N_s сферичного диска задано одиничними векторами (12) і (13). Напрямок сумарної сили тертя $F_s + F_p = f_s N_s + f_p N_p$ задано одиничним вектором (14), який потрібно брати із протилежним знаком. Отримаємо три рівняння:

$$\begin{aligned} x_a'' &= -N_p \sin \omega t - N_s \sin \varepsilon \cos \omega t - (f_s N_s + f_p N_p) \cos \varepsilon \cos \omega t; \\ y_a'' &= N_p \cos \omega t - N_s \sin \varepsilon \sin \omega t - (f_s N_s + f_p N_p) \cos \varepsilon \sin \omega t; \\ z_a'' &= N_s \cos \varepsilon - (f_s N_s + f_p N_p) \sin \varepsilon - mg. \end{aligned} \quad (17)$$

Підставимо у (17) вирази абсолютного прискорення із (16) і отримаємо систему трьох диференціальних рівнянь із трьома невідомими функціями: $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $N_s = N_s(t)$ і $N_p = N_p(t)$. Розв'яжемо систему відносно ε'' , N_s , N_p :

$$\varepsilon'' = \left(\omega^2 \sin \varepsilon - 2\varepsilon' \omega f_p - \frac{g}{R} f_s \right) \cos \varepsilon - \left(\frac{g}{R} + f_s \omega^2 \sin \varepsilon \right) \sin \varepsilon - \varepsilon'^2 f_s; \quad (18)$$

$$N_s = m \left(R \varepsilon'^2 + g \cos \varepsilon + R \omega^2 \sin^2 \varepsilon \right); \quad (19)$$

$$N_p = 2mR\omega \varepsilon' \cos \varepsilon. \quad (20)$$

Диференціальне рівняння (18) не залежить від (19) і (20), тому може бути розв'язане окремо. Реакції поверхонь (19) і (20) знаходять після того, як розв'язано рівняння (18). Для його розв'язання потрібно застосовувати чисельні методи.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо приклад. Нехай діаметр сферичного диска $d = 0,4$ м, кут $\beta = 20^\circ$. За формулою (2) знаходимо третій конструктивний параметр $R = 0,58$ м. При чисельному інтегруванні диференціального рівняння (18) часові t потрібно надавати такого значення, щоб кут ε не виходив за межі кута β . У момент часу, коли $\varepsilon = \beta$, частинка знаходиться на зовнішній крайці диска.

На рис. 3,а побудовано залежність $\varepsilon = \varepsilon(t)$ для наведених конструктивних параметрів і при $f_s = f_p = 0,3$, $\omega = 25 \text{ c}^{-1}$. Початкове значення кута ε не дорівнює нулю, бо частинка не може знаходитися на осі обертання. У такому випадку відсутня відцентрова сила і частинка не може розпочати рух. Як видно із рис. 3,а, для досягнення периферії диска частинка розганяється протягом 0,32 с.

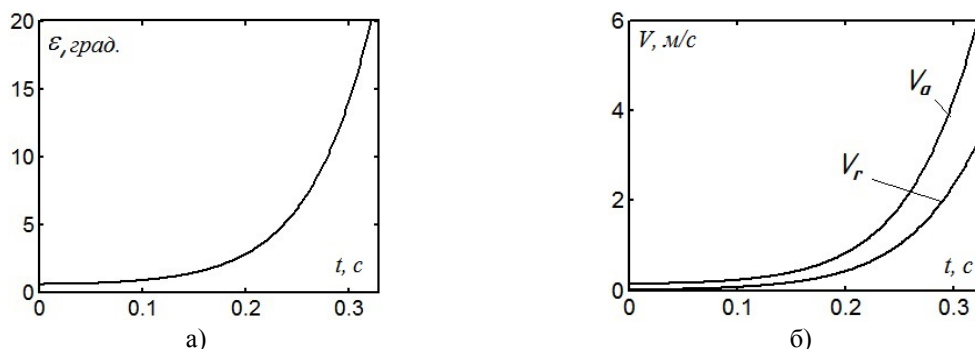


Рис. 3. Графіки, що характеризують рух частинки при $f_s = f_p = 0,3$, $\omega = 25 \text{ c}^{-1}$:
а) графік зміни кута ε ; б) графіки зміни відносної V_a і абсолютної V_r швидкостей

Графіки зміни відносної і абсолютної швидкостей показано на рис. 3,б. Із них видно, що в момент сходження з диска відносна і абсолютна швидкості мають наступні значення: $V_r = 3,2$ м/с, $V_a = 5,8$ м/с. На рис. 4 за формулами (19), (20) побудовано графіки зміни сили реакції N_s сферичного диска і N_p лопатки на частинку масою $m = 0,01$ кг.

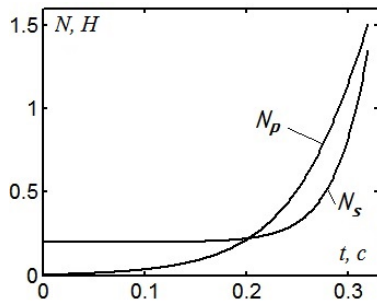


Рис. 4. Графіки зміни сили реакції N_s сферичного диска і N_p лопатки

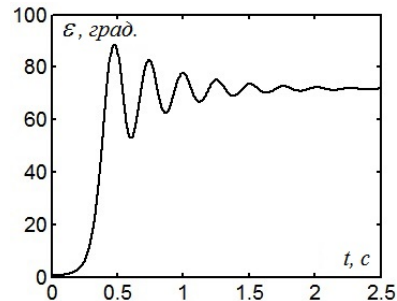


Рис. 5. Графіки зміни кута ε

Якби сферичний сегмент не було обмежено кутом β , то частинка піднімалась би по внутрішній поверхні сфери до певної висоти. Чисельне інтегрування диференціального рівняння (18) при тривалості руху $t = 2,5$ с показало, що кут ε за півсекунди досягає максимального значення ($\varepsilon = 90^\circ$), а потім починаються його затухаючі коливання (рис. 5). Це означає, що частинка піднімається на висоту півсфери, а потім починає опускатися, причому опускання чергується із підйомом аж до повної зупинки частинки на певній висоті. Для наведеного на рис.5 випадку зупинці частинки відповідає кут $\varepsilon = 70^\circ$, тобто частинка «залипає» на висоті, близькій до півсфери і далі обертається разом із нею.

Кут «залипання» можна знайти аналітично. Коли воно відбулося, то $\varepsilon' = \varepsilon'' = 0$. Підстановка цих значень у диференціальне рівняння (18) приводить до тригонометричного рівняння відносно невідомого кута ε :

$$(R\omega^2 \sin \varepsilon - g f_s) \cos \varepsilon - (g + R f_s \omega^2 \sin \varepsilon) \sin \varepsilon = 0. \quad (21)$$

Для розв'язання рівняння (21) потрібно застосовувати чисельні методи. Однак при $f_s = 0$, тобто при абсолютно гладенькій поверхні диска, воно суттєво спрощується і має простий розв'язок:

$$\varepsilon = \text{Arccos} \frac{g}{R\omega^2}. \quad (22)$$

Чисельні методи обчислень показали, що при $f_s = 0$ і $f_p \neq 0$ затухаючі коливання кута ε наближаються до значення, яке можна знайти за формулою (22). Згідно неї при необмеженому зростанні кутової швидкості обертання диска кут ε прямує до 90° , тобто частинка «залипає» на висоті центра сфери. Якщо ж обидві поверхні абсолютно гладенькі, тобто $f_s = f_p = 0$, то коливання відбуваються нескінченно довго.

6 ВИСНОВКИ

Виготовлення робочої поверхні диска відцентрового апарата у вигляді сферичного сегмента забезпечує початок польоту частинки в момент сходження з диска під заданим кутом до горизонтальної площини. Це збільшує площу розсіювання технологічного

матеріалу. Аналітичний опис руху частинки дає можливість дослідити її розгін по диску вздовж лопаток та знайти відносну і абсолютну швидкості в момент сходження частинки з диска. Отримані аналітичні залежності дозволяють визначати вплив конструктивних та технологічних параметрів на процес розгону частинки. Перспективи подальших досліджень полягають у вивченні впливу окремих параметрів на процес розгону частинки.

Література

1. Pylypaka S. F., Klendiy M. B., Klendiy O. M. Particle motion on the surface of a concave soil-tilling disk. *Acta Polytechnica*. 2018. 58(3). P. 201–208. doi: 10.14311/AP.2018.58.0201.
2. Pylypaka S., Klendiy M., Zaharova T. Movement of the particle on the external surface of the cylinder, which makes the translational oscillations in horizontal planes. In: Ivanov V. et al. (eds) *Advances in Design, Simulation and Manufacturing. DSMIE 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham. 2019. P. 336–345. doi: 10.1007/978-3-319-93587-4_35.
3. Matveev A. I., Lebedev I. F., Nikiforova L. V., Yakovlev B. V. Modeling of the particles movement in a screw pneumatic separator. *Mining Information and Analytical Bulletin*. 2014. 10. P. 172–178.
4. Pylypaka S., Volina T., Hryshchenko I., Rybenko I., Sydorenko N. Dynamics of a Particle on a Movable Wavy Surface. In: Tonkonogyi V. et al. (eds) *Advanced Manufacturing Processes II. InterPartner 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham. 2021. doi: 10.1007/978-3-030-68014-5_20.
5. Pylypaka S., Nesvidomin V., Zaharova T., Pavlenko O., Klendiy M. The Investigation of Particle Movement on a Helical Surface. In: Ivanov V. et al. (eds) *Advances in Design, Simulation and Manufacturing II. DSMIE 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham. 2020. doi: 10.1007/978-3-030-22365-6_67.
6. Kresan T. A. Розрахунок гравітаційного спуску, утвореного поверхнею косою закритого гелікоїда. *Техніка та енергетика. Machinery & Energetics*, 2020. S.1. № 11(2). P. 49–57. doi: 10.31548/machenergy2020.02.049.
7. Pylypaka S. F., Babka V. M., Grischenko I. Yu., Kresan T. A. Математична модель переміщення частинки вертикальним шнеком при стаціонарному режимі. *Техніка та енергетика. Machinery & Energetics*, 2019. S.1. № 10(4). P. 57–62. doi: 10.31548/machenergy2019.04.057.
8. Kresan T. A., Pylypaka S. F., Babka V. M., Kremets Ya. S., Klendiy M. B. Транспортування частинки горизонтальним шнеком, обмеженим співвісним нерухомим циліндром. *Техніка та енергетика. Machinery & Energetics*, 2019. S. L. № 10(3). P. 15–20. doi: 10.31548/machenergy2019.03.015.
9. Pylypaka S. F., Klendiy M. B., Nesvidomin V. M., Trokhaniak V. I. Particle motion over the edge of an inclined plane that performs axial movement in a vertical limiting cylinder. *Acta Polytechnica*. 2019. № 59(1). P. 67–76. doi: 10.14311/AP.2019.59.0067.
10. Pylypaka S., Nesvidomin V., Volina T., Sirykh L., Ivashyna L. Movement of the Particle on the Internal Surface of the Spherical Segment Rotating About a Vertical Axis. *INMATEH Agricultural Engineering*. 2020. № 62(3). P. 79–86. doi: 10.35633/inmateh-62-08.

References

1. Pylypaka, S. F., Klendiy, M. B., Klendiy, O. M. (2018). Particle motion on the surface of a concave soil-tilling disk. *Acta Polytechnica*. 58 (3). 201–208.
2. Pylypaka, S., Klendiy, M., Zaharova, T. (2019). Movement of the particle on the external surface of the cylinder, which makes the translational oscillations in horizontal planes. In: Ivanov V. et al. (eds) *Advances in Design, Simulation and Manufacturing. DSMIE 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer. Cham. 336–345.
3. Matveev, A. I., Lebedev, I. F., Nikiforova, L. V., Yakovlev, B. V. (2014). Modeling of the particles movement in a screw pneumatic separator. *Mining Information and Analytical Bulletin*. 10. 172–178.
4. Pylypaka, S., Volina, T., Hryshchenko, I., Rybenko, I., Sydorenko, N. (2021). Dynamics of a Particle on a Movable Wavy Surface. In: Tonkonogyi V. et al. (eds) *Advanced Manufacturing Processes II. InterPartner 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer. Cham.

5. Pylypaka, S., Nesvidomin, V., Zaharova, T., Pavlenko, O., Klendiy, M. (2020). The Investigation of Particle Movement on a Helical Surface. In: Ivanov V. et al. (eds) *Advances in Design, Simulation and Manufacturing II. DSMIE 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer. Cham.
6. Kresan, T. A. (2020). Rozrakhunok hravitatsiinoho spusku, utvorenoho poverkhneiu kosoho zakrytoho helikoida [Calculation of the gravitational descent formed by the surface of the oblique closed helicoid]. *Tekhnika ta enerhetyka. Machinery & Energetics*. S.I. 11(2). 49–57. [in Ukraine].
7. Pylypaka, S. F., Babka, V. M., Grischenko, I. Yu., Kresan, T. A. (2019). Matematychna model peremishchennia chastynky vertykalnym shnekom pry statsionarnomu rezhymi [Mathematical model of particle movement by a vertical auger in stationary mode]. *Tekhnika ta enerhetyka. Machinery & Energetics*. S.I. 10(4). 57–62. [in Ukraine].
8. Kresan, T. A., Pylypaka, S. F., Babka, V. M., Kremets, Ya. S., Klendiy, M. B. (2019). Transportuvannia chastynky horizontalnym shnekom, obmezhnym spivvisnym nerukhomym tsylindrom [Transportation of the particle by a horizontal auger, limited by a coaxial stationary cylinder]. *Tekhnika ta enerhetyka. Machinery & Energetics*. S.I. 10(3). 15–20. [in Ukraine].
9. Pylypaka, S.F, Klendiy, M.B., Nesvidomin, V.M., Trokhaniak, V.I. (2019). Particle motion over the edge of an inclined plane that performs axial movement in a vertical limiting cylinder. *Acta Polytechnica*. 59 (1). P. 67–76.
10. Pylypaka, S., Nesvidomin, V., Volina, T., Sirykh, L., Ivashyna, L. (2020). Movement of the Particle on the Internal Surface of the Spherical Segment Rotating About a Vertical Axis. *INMATEH – Agricultural Engineering*, 62(3). 79–86.

Воліна Тетяна Миколаївна

Національний університет біоресурсів і природокористування України
к.т.н., доцент
вул. Героїв Оборони, 15 Київ, Україна 03041
t.n.zaharova@ukr.net
ORCID: 0000-0001-8610-2208

Пилипака Сергій Федорович

Національний університет біоресурсів і природокористування України
д.т.н., професор
вул. Героїв Оборони, 15 Київ, Україна 03041
psf55@ukr.net
ORCID: 0000-0002-1496-4615

Несвідомін Андрій Вікторович

Національний університет біоресурсів і природокористування України
к.т.н.
вул. Героїв Оборони, 15 Київ, Україна 03041
a.nesvidomin@gmail.com
ORCID: 0000-0002-9227-4652

Для посилань:

Воліна Т. М., Пилипака С. Ф., Несвідомін А. В. Рух частинки по сферичному сегменту з вертикальними радіально встановленими лопатками. *Механіка та математичні методи*, 2021. Т. 3. № 1. С. 27-36.

For references:

Volina, T., Pylypaka, S., Nesvidomin, A. (2021). Particle motion on the spherical segment with verticals radially installed blades. *Mechanics and Mathematical Methods*. 3 (1). 27-36.

УДК 534.1:539.3

КОЛИВАННЯ ІМПУЛЬСНО НАВАНТАЖЕНОГО ОСЦИЛЯТОРА ЗІ СТЕПЕНЕВИМ ПОЗИЦІЙНИМ ТЕРТЯМ

Ольшанський В. П.¹, Сліпченко М. В.¹

¹Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка

Анотація: Описано нестационарні коливання осцилятора з нелінійним позиційним тертям, спричинені миттєвим силовим імпульсом. Прийнято степеневу залежність сили позиційного тертя від переміщення системи, що узагальнює відомі моделі. Відповідні задачі динаміки розв'язували точно методом припасовування та наближено методом енергетичного балансу В дослідженні з використанням періодичних Атеб-функцій побудовано точний аналітичний розв'язок нелінійного диференціального рівняння руху. Виведено компактні формули для розрахунку розмахів коливань і тривалостей напівциклів. Показано, що спадання розмахів коливань, як і при дії сили лінійного в'язкого опору, проходить за законом геометричної прогресії. Знаменник прогресії менший одиниці і залежить від констант позиційного тертя, зокрема від показника нелінійності. Отже, маємо не тільки спадання розмахів коливань, а і зростання тривалостей напівциклів, що властиво нелінійним системам з жорсткою силовою характеристикою. У наближених розрахунках переміщень використано апроксимації типу Паде для періодичних Атеб-функцій. Похибка цих апроксимацій менша одного відсотка. Із одержаних аналітичних співвідношень, як окремі випадки, випливають відомі залежності, висвітлені в теорії коливань для лінійного позиційного тертя. Показано, що і у випадку нелінійного позиційного тертя процес коливань, спричинених миттєвим імпульсом, має безліч розмахів і не обмежений у часі. У випадку степеневого позиційного тертя розмахи коливань імпульсно навантаженого осцилятора можна розрахувати за елементарними формулами. Розрахунок переміщень у часі пов'язаний з використанням періодичних Атеб-функцій, значення яких не складно визначати за відомими асимптотичними формулами. Розрахунки підтверджують, що отримана наближена формула не дає великих похибок.

З метою перевірки адекватності одержаних аналітичних розв'язків проведено чисельне комп'ютерне інтегрування вихідного нелінійного диференціального рівняння руху. Одержано гарну відповідність результатів розрахунку, до яких призводять аналітичні та чисельні розв'язки задачі Коші.

Ключові слова: нелінійний осцилятор, степеневе позиційне тертя, миттєвий імпульс сили, періодичні Атеб-функції, їх апроксимація.

OSCILLATION OF PULSE-LOADED OSCILLATOR WITH DEGREE POSITIONAL FRICTION

V. Olshanskiy¹, M. Slipchenko¹

¹Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture

Abstract: Nonstationary oscillations of the oscillator with nonlinear positional friction caused by an instantaneous force pulse are described. The power dependence of the positional friction force on the displacement of the system, which generalizes the known models, is accepted. The corresponding dynamics problems were solved precisely by the method of adding and approximated by the method of energy balance. In the study, using periodic Ateb-functions, an exact analytical solution of the nonlinear differential equation of motion was constructed. Compact formulas for calculating oscillation ranges and half-cycle durations are derived. It is shown that the decrease in the amplitude of oscillations, as well as under the action of the force of linear viscous resistance, follows the law of geometric progression. The denominator of the progression is less than one and depends on the positional friction constants, in particular on the nonlinearity index. Thus, we have not only a decrease



in the amplitude of oscillations, but also an increase in the durations of half-cycles, which is characteristic of nonlinear systems with a rigid force characteristic. Approximate displacement calculations use Pade-type approximations for periodic Ateb-functions. The error of these approximations is less than one percent. From the obtained analytical relations, as separate cases, the known dependences covered in the theory of oscillations for linear positional friction follow. It is shown that even in the case of nonlinear positional friction the process of oscillations caused by an instantaneous momentum has many oscillations and is not limited in time. In the case of power positional friction, the oscillation ranges of the pulse-loaded oscillator can be calculated by elementary formulas. The calculation of displacements in time is associated with the use of periodic Ateb-functions, the values of which are not difficult to determine by known asymptotic formulas. Calculations confirm that the obtained approximate formula does not give large errors.

In order to verify the adequacy of the obtained analytical solutions, numerical computer integration of the original nonlinear differential equation of motion was performed. The results of the calculation, which lead to analytical and numerical solutions of the Cauchy problem, are well matched.

Keywords: nonlinear oscillator, power positional friction, instant impulse of force, periodic Ateb-functions, their approximation.

1 ВСТУП

В сучасних умовах експлуатації пружні елементи машин нерідко піддаються дії короткочасних імпульсних навантажень. Це впливає на їх ресурс і надійність. Тому вивчення особливостей деформування коливальних, особливо нелінійних, систем в таких умовах становить не тільки теоретичний, а і практичний інтерес. Важливе значення набуває розробка моделей руху з удосконаленим урахуванням дії сил тертя, особливо при резонансних режимах руху. Це стосується і позиційного тертя, яке описано в роботах [1-3].

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Позиційне тертя виникає в коливальних системах, які пружною ланкою мають листову ресору. Його вплив на вільні коливання почали розглядати ще з часів І. В. Мещерського, в збірнику задач якого з теоретичної механіки є відповідна задача [1, с. 442]. Теорія таких коливань детально висвітлена в [2, 3], де показано, що як і при дії сили лінійного в'язкого опору, при наявності позиційного тертя зміна розмахів коливань підпорядкована геометричній прогресії зі знаменником меншим одиниці. Певне узагальнення цих результатів є в роботі [4]. Там позиційне тертя пов'язане зі степеневою залежністю пружної сили від переміщення. Показано, що і в цьому випадку відношення сусідніх розмахів коливань є сталою величиною, хоча через нелінійності сили пружності в ході руху змінюються тривалості циклів, тому що залежать від розмахів. Спільну дію позиційного тертя та інших видів опору при вільних коливаннях розглядали в [5, 6]. Відповідні задачі динаміки розв'язували точно методом припасовування та наближено методом енергетичного балансу. Тут розглядаємо нелінійні коливання осцилятора зі степеневим позиційним тертям, спричинені миттєвим імпульсом зовнішньої сили. Динаміка імпульсно навантажених осциляторів змінних параметрів досліджена в [7].

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою статті є побудова аналітичних розв'язків рівняння руху та аналіз числових результатів, до яких вони призводять.

Для побудови точних розв'язків залучаємо періодичні Атеб-функції, які набули поширення в теорії коливань не тільки в Україні [8-10], а і за її межами [11-13]. При переході від точних до наближених розв'язків, задіяних у розрахунках, використовуємо відомі апроксимації названих спеціальних функцій елементарними функціями.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

На відміну від попередніх робіт стосовно позиційного тертя, тут використовуємо його степеневу залежність від переміщення осцилятора, коли його силова характеристика $F(x)$ має вигляд, зображений на рис. 1.

Аналітично залежність сили пружності $F(x)$ від переміщення системи $x(t)$ описуємо виразом [4]:

$$F(x) = (c + \Delta c \operatorname{sign} x \cdot \operatorname{sign} \dot{x}) |x|^{\nu} \operatorname{sign}(x),$$

у якому c , Δc – характеристики жорсткості, причому $\Delta c < c$; $\nu > 0$ – показник нелінійності. У попередніх дослідженнях, за винятком [4], приймали $\nu = 1$.

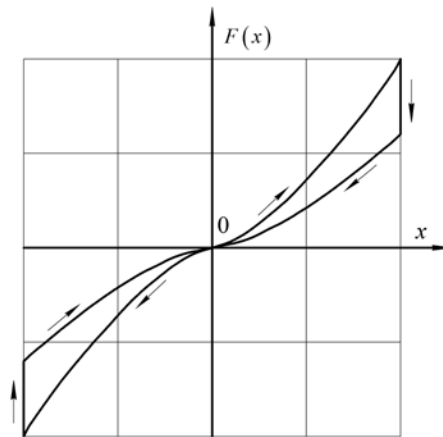


Рис. 1. Залежність $F(x)$ при збільшенні та зменшенні $|x|$

Коливання імпульсно навантаженого осцилятора масою m описуємо диференціальним рівнянням:

$$m \ddot{x} + F(x) = 0, \quad (1)$$

при початкових умовах миттєвого навантаження його імпульсом $S = m v_0$:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (2)$$

На початковому етапі руху, коли $\dot{x} \geq 0$, $x \geq 0$, рівняння (1) має вигляд:

$$m \ddot{x} + c_1 x^\nu = 0,$$

де $c_1 = c + \Delta c$.

Його інтегрування, з урахуванням (2), дає:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sqrt{v_0^2 - \frac{2c_1}{m(\nu+1)} x^{\nu+1}}; \\ x(t) &= a_1 \text{Sa}\left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2} \eta\right); \\ a_1 &= \left(\frac{m v_0^2}{2} \frac{\nu+1}{c_1}\right)^{\frac{1}{\nu+1}}; \quad \eta = a_1^{\frac{\nu-1}{2}} \sqrt{\frac{2c_1}{m(\nu+1)}} t. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут a_1 – максимальне переміщення осцилятора; $\text{Sa}(\nu, 1, (\nu+1/2)\eta)$ – періодичний Атеб-синус, інтегральне подання якого є в [8, 9].

Перша зупинка осцилятора, з переміщенням $x(t_1) = a_1$, настає при:

$$t_1 = \int_0^{a_1} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2c_1}{m(\nu+1)} x^{\nu+1}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2\nu+2}\right)} \sqrt{\frac{m}{(\nu+1)c_1}} a_1^{\frac{1-\nu}{2}}, \quad (4)$$

де $\Gamma(z)$ – гама-функція, затабульована в [14, 15].

У випадку лінійного позиційного тертя ($\nu=1$) із (3), (4) випливає, що: $\Gamma(1/1+\nu) = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$; $\Gamma(\nu+3/2\nu+2) = \Gamma(1) = 1$ і

$$x(t) = a_1 \sin\left(\sqrt{\frac{c_1}{m}} t\right); \quad a_1 = \left(\frac{m v_0^2}{c_1}\right)^{1/2}; \quad t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{c_1}}.$$

Це узгоджується з відомими залежностями [2, 3].

Подальший рух осцилятора, коли $\dot{x} \leq 0$, $x \geq 0$, описується рівнянням:

$$m \ddot{x} + c_2 x^\nu = 0,$$

у якому $c_2 = c - \Delta c > 0$.

Його розв'язуємо при початкових умовах:

$$x(t_1) = a_1; \quad \dot{x}(t_1) = 0.$$

Цей розв'язок подається виразами:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\sqrt{\frac{2c_2}{m(\nu+1)}} (a_1^{\nu+1} - x^{\nu+1}); \\ x(t) &= a_1 \operatorname{Ca}\left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2} \tau\right), \end{aligned} \quad (5)$$

де $\tau = a_1^{\nu-1/2} \sqrt{2c_2/m(\nu+1)} (t - t_1)$; $\operatorname{Ca}(\nu, 1, (\nu+1/2)\tau)$ – періодичний Атеб-косинус.

При $t = t_{1*}$ осцилятор повертається у вихідне положення $x(t_{1*}) = 0$. Цей час визначається рівнянням:

$$\operatorname{Ca}\left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2} \tau\right) = 0$$

і становить:

$$t_{1*} = t_1 + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2\nu+2}\right)} \sqrt{\frac{m}{(\nu+1)c_2}} a_1^{\frac{1-\nu}{2}}, \quad (6)$$

Із (5), (6), для лінійного позиційного тертя ($\nu = 1$), випливає, що при $t_1 \leq t \leq t_{1*}$:

$$x(t) = a_1 \cos\left[\sqrt{\frac{c_2}{m}} (t - t_1)\right]; \quad t_{1*} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{m}{c_1}} + \sqrt{\frac{m}{c_2}}\right).$$

Ці залежності теж узгоджуються з [2, 3].

Швидкість руху в положенні $x = 0$ подається формулою:

$$v_1 = -\sqrt{\frac{2c_2}{m(\nu+1)}} a_1^{1+\nu}. \quad (7)$$

Далі коливальний процес повторюється і для обчислення другого розмаху коливань a_2 треба в (3) замінити v_0 на v_1 і a_1 на a_2 . Тоді, з урахуванням (7), отримаємо вираз:

$$a_2 = a_1 \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{1+\nu}}.$$

Аналогічне співвідношення виконується і для інших розмахів a_n , $n = 3, 4, \dots$. Отже в цій коливальній системі:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^{\frac{1}{1+\nu}} = \text{const}.$$

Спадання розмахів підпорядковано геометричній прогресії, як і при дії сили лінійного в'язкого опору [2].

Приклад.

З метою проведення обчислень задаємо: $m = 1$ кг; $c = 4200$ Н/м; $\Delta c = 1000$ Н/м; $\nu = 1,5$; $v_0 = 1$ м/с. При таких вхідних даних: $c_1 = 5200$ Н/м; $c_2 = 3200$ Н/м; $\Gamma(2/5) \approx 2,21825$; $\Gamma(0,9) \approx 1,06867$ і згідно з (3)-(7): $a_1 \approx 0,035675$ м; $t_1 \approx 0,052501$ с; $t_{1*} \approx 0,119426$ с; $v_1 = -0,784468$ м/с. Повторне використання цих розрахункових формул дає: $a_2 \approx 0,029378$ м; $t_2 \approx 0,174538$ с; $t_{2*} \approx 0,244793$ с; $v_2 = 0,615386$ м/с; $a_3 \approx 0,024193$ м; $t_3 \approx 0,302647$ с; $t_{3*} \approx 0,376397$ с; $v_3 = -0,482751$ м/с; $a_4 \approx 0,019922$ м; $t_4 \approx 0,437130$ с; $t_{4*} \approx 0,514550$ с. Ці результати добре узгоджуються з відповідними на рис. 2, який одержано чисельним інтегруванням рівняння (1).

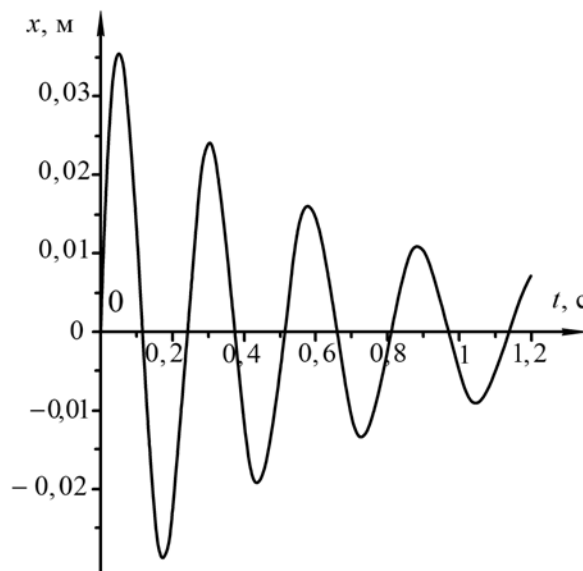


Рис. 2. Переміщення осцилятора з нелінійним позиційним тертям

На графіку на рис. 2 маємо не тільки спадання розмахів коливальних, а і зростання тривалостей напівциклів, що властиво нелінійним системам з жорсткою силовою характеристикою.

Зупинимось далі на обчисленні переміщень осцилятора при різних t . Згідно із (3), при $r \leq t_1$, відношення $x(t)/a_1$, становить:

$$\frac{x(t)}{a_1} = \text{Sa} \left(\frac{3}{2}; 1, \frac{5}{4} \eta \right),$$

причому $\eta \approx 28,03094t$.

Значення Атеб-сінуса будемо обчислювати за асимптотичною формулою, виведеного в [16]. Тоді:

$$\frac{x(t)}{a_1} \approx \eta - \frac{16\eta^{7/2}}{7(16 + \eta^{5/2})}. \quad (8)$$

Результати обчислення безрозмірного переміщення занесено в табл. 1.

Таблиця 1

Значення $x(t)/a_1$ при $t < t_1$.

| | | | | | |
|----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 100t, с | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| η | 0,2803 | 0,5606 | 0,8409 | 1,1212 | 1,4055 |
| $\frac{10x(t)}{a_1}$ | <u>2,787</u> | <u>5,421</u> | <u>7,661</u> | <u>9,244</u> | <u>9,950</u> |
| a_1 | 2,787 | 5,420 | 7,661 | 9,247 | 9,962 |
| 100t, с | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| η | 0,2303 | 0,5606 | 0,8409 | 1,1212 | 1,4055 |

В чисельники записано результати, які дає наближена формула (8), а в знаменники результати, одержані чисельним інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері. Як бачимо, розбіжності значень $x(t)/a_1$, отримані різними способами, не великі. Похибка наближеної формули (8) менша 1 %.

На проміжку $t \in (t_1; t_{1*})$, згідно з (5), маємо:

$$\frac{x(t)}{a_1} = \text{Ca}\left(\frac{3}{2}; 1, \frac{5}{4}\tau\right), \quad (9)$$

де $\tau \approx 21,98928(t - 0,052501)$.

Тоді, по аналогії з (8), формулу (9) заміняємо на:

$$\frac{x(t)}{a_1} \approx (I - \tau) - \frac{16(I - \tau)^{7/2}}{7[16 + (I - \tau)^{5/2}]}. \quad (10)$$

Тут $I \approx 1,47164$.

При запису формули (10) врахували відомий зв'язок між Атеб-косинусом і Атеб-синусом [9, 17], а саме:

$$\text{Ca}\left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2}\tau\right) = \text{Sa}\left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2}(I - \tau)\right),$$

де

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{\nu+1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2\nu+2}\right)}.$$

Тоді, при $\nu = 3/2$, [14]:

$$\Gamma(0,4) = \frac{\Gamma(1,4)}{0,4} \approx 2,21816; \quad \Gamma(0,9) = \frac{\Gamma(1,9)}{0,9} \approx 1,44164; \quad I = 1,47164.$$

Відношення $x(t)/a_1$, обчислені за формулою (10), та одержані чисельним інтегруванням рівняння (1), записано в табл. 2.

Таблиця 2

Значення $x(t)/a_1$ при $t_1 < t < t_{1*}$.

| 100t, с | τ | I - τ | Формула (10) | Числ. інтегр. |
|---------|--------|------------|-----------------------|---------------|
| | | | Значення $10x(t)/a_1$ | |
| 6 | 0,1649 | 1,3068 | 9,820 | 9,831 |
| 7 | 0,3848 | 1,0869 | 9,093 | 9,096 |
| 8 | 0,6047 | 0,8670 | 7,839 | 7,839 |
| 9 | 0,8246 | 0,6471 | 6,166 | 6,167 |
| 10 | 1,0445 | 0,4272 | 4,200 | 4,200 |
| 11 | 1,2644 | 0,2073 | 2,067 | 2,067 |

Розрахунки підтверджують, що і наближена формула (10) не дає великих похибок. У випадку інших ν значення періодичних Ateb-функцій можна наближено одержувати за допомогою асимптотичних формул, надрукованих в [18].

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Отримані вище результати узагальнюють відомі залежності для позиційного тертя в теорії механічних коливань. В узагальненому варіанті теорії впадання розмахів коливань у часі теж відбувається за законом геометричної прогресії, знаменник якої залежить від показника нелінійності, але коливання проходять зі змінною тривалістю циклів, в чому проявляється нелінійність системи. При цьому для опису переміщень осцилятора доводиться залучати спеціальні періодичні функції.

6 ВИСНОВКИ

У випадку степеневого позиційного тертя розмахи коливань імпульсно навантаженого осцилятора можна розрахувати за елементарними формулами. Розрахунок переміщень у часі пов'язаний з використанням періодичних Ateb-функцій, наближені значення яких не складно визначати за відомими асимптотичними формулами. Проведені розрахунки підтвердили адекватність одержаних аналітичних розв'язків нелінійної задачі Коші, виражених через спеціальні функції та їх наближення в елементарних функціях.

Література

1. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1975. 448 с.
2. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
3. Сурьянинов Н. Г., Дашенко А. Ф., Белоус П. А. Теоретические основы динамики машин Одесса: ОГПУ, 2000. 306 с.
4. Olshanskiy V., Burlaka V., Slipchenko M. Free oscillations of an oscillator with nonlinear position friction. Ukrainian journal of mechanical engineering and material science. 2018. 4. (2) P. 50–57. doi.org/10.23939/ujmems2018.02.050
5. Ольшанський В. П., Тіщенко Л. М., Ольшанський С. В. та ін. Динаміка дисипативних осциляторів. Харків: Міськдрук, 2016. 264 с.
6. Ольшанський В. П., Сліпченко М. В., Спольнік О. І., Бурлака В. В. Нелінійні коливання дисипативних осциляторів. Харків: Міськдрук, 2020. 268 с.
7. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Метод ВБК в расчетах нестационарных колебаний осцилляторов. Харьков: Міськдрук, 2014. 264 с.
8. Сокіл Б. І. Про застосування Ateb-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ. Доповіді Національної академії наук України, 1997. 1. С. 55–58.
9. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем. Львів: Львівська політехніка, 2014. 288 с.

10. Pukach P. Ya., Kuzio I. V. Resonance phenomena in quasi-zero stiffness vibration isolation systems. *Науковий вісник національного гірничого університету*, 2015. Issue 3. P. 62–67.
11. Gendelman O., Vakakis A. F. Transition from localization to nonlocalization in strongly nonlinear damped oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2000. 11. (10) P. 1535–1542. doi.org/10.1016/S0960-0779(99)00076-4
12. Cveticanin L. *Strong nonlinear oscillators*. Analytical Solution. 2 nd edition. Springer. Cham. 2017. 317 p. doi.org/10.1007/978-3-319-58826-1
13. Cveticanin L., Pogany T. Oscillator with a sum of noninteger-order nonlinearities. *Journal of Applied Mathematics*, 2012. Vol. 2012. 20 p. doi.org/10.1155/2012/649050
14. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами)*. М.: Наука, 1979. 832 с.
15. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. *Специальные функции*. М.: Наука, 1977. 344 с.
16. Ольшанський В. П. Порівняння наближених розв'язків інтегрального рівняння сили удару тіл в теорії Герца. *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, 2019. 8 (1333). С. 244–249.
17. Грицик В. В., Назаркевич М. А. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Атеб-функцій. *Доповіді Національної академії наук України*, 2007. 12. С. 37–42.
18. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про рух осцилятора зі степеневою характеристикою пружності. *Вібрації в техніці та технологіях*, 2017. 3 (86). С. 34–40.

References

1. Meshhershkiy, I. V. (1975). *Sbornik zadach po teoreticheskoy mehanike* [Collection of problems in theoretical mechanics]. М.: Nauka. [in Russian].
2. Biderman, V. L. (1980). *Teoriya mehanicheskikh kolebanij* [Mechanical vibration theory]. М.: Vysshaya shkola. [in Russian].
3. Suryaninov N. G., Dashhenko, A. F., Belous, P. A. (2000). *Teoreticheskie osnovy dinamiki mashin* [Theoretical Foundations of Machine Dynamics]. Odessa: OGPU. [in Russian].
4. Olshanskiy, V., Burlaka, V., Slipchenko, M. (2018). Free oscillations of an oscillator with nonlinear position friction. *Ukrainian journal of mechanical engineering and material science*. no. 4. 2. 50–57. doi.org/10.23939/ujm2018.02.050
5. Olshanskiy, V. P., Tishchenko, L. M., Olshanskiy, S. V. (2016). *Dynamika dysypatyvnykh oscyljatoriv* [Dynamics of dissipative oscillators]. Kharkiv: Miskdruk. [in Ukraine].
6. Olshanskiy, V. P., Slipchenko, M. V., Spolnik, O. I., Burlaka, V. V. (2020). *Nelinijni kolyvannja dysypatyvnykh oscyljatoriv* [Nonlinear oscillations of dissipative oscillators]. Kharkiv: Miskdruk. [in Ukraine].
7. Olshanskiy, V. P., Olshanskiy, S. V. (2014). Metod VBK v raschetah nestacionarnykh kolebanij oscyljatorov [VBK method in calculating non-stationary oscillations of oscillators]. Kharkiv: Miskdruk. [in Russian].
8. Sokil, B. I. (1997). Pro zastosuvannja Ateb-funkcij dlja pobudovy rozv'jazkiv dejakykh rivnjan, jaki opysujut nelinijni kolyvannja odnovymirnykh seredovyshh [On the application of Ateb functions to construct solutions of some equations that describe nonlinear oscillations of one-dimensional media]. *Dopovidi Nacionalnoi akademii nauk Ukrainy*. no. 1. 55–58. [in Ukraine].
9. Pukach, P. Ja. (2014). *Yakisni metody doslidzhennja nelinijnykh kolyvalnykh system* [Qualitative methods of research of nonlinear oscillatory systems]. Lviv: Lvivska politehnika, [in Ukraine].
10. Pukach, P. Ya., Kuzio, I. V. (2015). Resonance phenomena in quasi-zero stiffness vibration isolation systems. *Naukovyi visnyk natsionalnogo hirnychogo universytetu*. no. 3. 62–67.
11. Gendelman, O., Vakakis, A. F. (2000). Transition from localization to nonlocalization in strongly nonlinear damped oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals*. 11. 10. 1535–1542. doi.org/10.1016/S0960-0779(99)00076-4.
12. Cveticanin, L. (2007). *Strong nonlinear oscillators*. Analytical Solution. 2 nd edition. Springer. Cham. doi.org/10.1007/978-3-319-58826-1.
13. Cveticanin, L., Pogany, T. (2012). *Oscillator with a sum of noninteger-order nonlinearities*. *Journal of Applied Mathematics*. 2012. doi.org/10.1155/2012/649050.

14. Abramovic, M., Stigan, I. (1979). *Spravochnik po specialnym funkcijam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablicami)* [Special functions reference (with formulas, graphs and math tables)]. M.: Nauka. [in Russian].
15. Janke, E., Jemde, F., Ljosh, F. (1977). *Specialnye funkcii* [Special functions]. M.: Nauka. [in Russian].
16. Olshanskiy, V. P. (2019). Porivnjannja nablyzhenyh rozvjazkiv integralnogo rivnjannja syly udaru til v teorii Gerca [Correspondence of the approximate relations of the integral level of force or the blow of til in the theory of Hertz]. *Visnyk NTU «HPI». Serija: Matematychni modeljuvannja v tehnicji ta tehnologijah.* 8 (1333). 244–249. [in Ukraine].
17. Grycyk, V. V., Nazarkevych, M. A. (2007). Matematychni modeli alhorytmiv i realizacija Ateb-funkcij [Mathematical models of algorithms and implementation of Ateb-functions]. *Dopovidi Nacionalnoi akademii nauk Ukrainy.* 2. 37–42. [in Ukraine].
18. Olshanskiy, V. P., Olshanskiy, S. V. (2017). Pro ruh oscyljatora zi stepenevoju harakterystykoju pruzhnosti [About the collapse of the oscillator due to the power characteristic of springiness]. *Vibracii v tehnicji ta tehnologijah.* 3 (86). 34–40. [in Ukraine].

Ольшанський Василь Павлович

Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. П. Василенка
д.ф.-м.н., професор
вул. Алчевських, 44, Харків, Україна, 61002
OlshanskiyVP@gmail.com
ORCID: 0000-0003-1407-4476

Сліпченко Максим Володимирович

Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. П. Василенка
к.т.н., доцент
вул. Алчевських, 44, Харків, Україна, 61002
Slipchenko1982@gmail.com
ORCID: 0000-0002-9728-661X

Для посилань:

Ольшанський В. П., Сліпченко М. В. Роливання імпульсно навантаженого осцилятора зі степеневим позиційним тертям. *Механіка та математичні методи*, 2021. Т. 3. № 1. С. 37–46.

For references:

Olshanskiy V., Slipchenko M. (2021). Oscillation of pulse-loaded oscillator with degree positional friction. *Mechanics and Mathematical Methods.* 3 (1). 37–46.

UDC 691:519.24

STRUCTURED SYSTEMS OF FACTORS AND EXPERIMENTAL-STATISTICAL MODELS IN STUDIES OF BUILDING COMPOSITES

T. Lyashenko¹

¹*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract: The introduction to the article presents the objects of research, for which the proposed approach to modelling and the types of the models are intended. These are high quality composite building materials, the multicomponent dispersed systems, with the components that could be multicomponent themselves. The need to use for their design the mathematical models of the dependences of structure parameters and properties of the material on the factors of composition and processes of production and operation is noted.

Then the background of experimental-statistical (ES) models application in research and development of composite materials is considered. What they are needed for is emphasized. The peculiarities of these models are noted in contrast to the models of other classes, including the usual regression ones. The necessity of experiment design to build ES-models is also emphasized. Special types of ES-models are named, for the cases when it is necessary to consider linearly related factors ("mixtures"). The expediency of structurizing the system of all the factors under consideration and the corresponding ES-models is indicated to.

The concept of a priori and a posteriori structuring of factor systems when modeling is proposed. Systems that could include subsystems of linearly related factors and subsystems of mutually independent factors separated out at the stage of a priori structuring have been called "mixtures, technologies" systems and classified by the type of factor domains. System designations are given. Special polynomial models developed for them are presented.

For the analysis of modelling results, a posteriori allocation of the factor regions and the use of tools of composition-process fields methodology are proposed. The local fields of material properties in coordinates of one or another group of the factors and their transformation under the influence of the factors of another group can be analysed, using numerical generalizing indices of the local fields and the secondary models for these indices. The path from obtaining data of designed natural experiment for building the primary ES-models to the secondary models, for generalizing indices, based on the results of computational experiment, is schematically shown.

Keywords: mixture, factor domain, simplex, design of experiment, reduced polynomial, composition-process field.

СТРУКТУРОВАНІ СИСТЕМИ ФАКТОРІВ І ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-СТАТИСТИЧНІ МОДЕЛІ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ БУДІВЕЛЬНИХ КОМПОЗИТІВ

Ляшенко Т. В.¹

¹*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація: У вступі до статті представлені об'єкти досліджень, для яких призначені пропонувані підхід до моделювання та види моделей. Об'єкти - високоякісні композиційні будівельні матеріали. Це багатокомпонентні дисперсні системи, з вкладеною багатокомпонентністю. Наголошується на необхідності використовувати для їх проектування математичні моделі зв'язків параметрів структури і властивостей матеріалу з факторами рецептури і процесів виробництва і експлуатації.

Далі розглядаються передумови застосування експериментально-статистичних (ЕС) моделей в дослідженнях і при розробці композиційних матеріалів. Підкреслюється їх призначення. Відзначаються особливості цих моделей на відміну від моделей інших класів, в тому числі від звичайних регресійних. Підкреслюється також необхідність планування експерименту для їх побудови. Називаються спеціальні типи ЕС-моделей, якщо є необхідність розглядати лінійно пов'язані фактори, «суміші». Вказується на корисність структурування системи всіх досліджуваних факторів і відповідних ЕС-моделей.

Пропонується концепція апріорного і апостеріорного структурування систем факторів при моделюванні. Системи, які могли б включати підсистеми лінійно пов'язаних факторів і підсистеми взаємозалежних факторів, які виділяються на етапі апріорного структурування, названі системами «суміші, технології» і класифіковані за типом факторних областей. Даються позначення систем. Наводяться розроблені для них спеціальні поліноміальні моделі.

Для аналізу результатів моделювання пропонується апостеріорне виділення факторних областей і використання інструментів методології рецептурно-технологічних полів. Можуть бути проаналізовані локальні поля властивостей матеріалу в координатах тієї чи іншої групи факторів і їх трансформація під впливом факторів іншої групи, з використанням числових узагальнюючих показників локальних полів і вторинних моделей, для цих показників. Схематично показаний шлях від отримання даних спланованого натурального експерименту, для побудови первинних моделей, до побудованим за результатами обчислювального експерименту вторинним моделям, для узагальнюючих показників.

Ключові слова: суміш, факторна область, симплекс, планування експерименту, приведений поліном, рецептурно-технологічне поле.

1 INTRODUCTION

The most studies in modern materials science aim at creating high grade materials that best serve exactly what they are designed for. In this sense, probably, they are called High Performance Materials [1-3]. They can provide high strength, weight reduction, cleanliness for high purity applications, high-temperature capability, materials processing efficiency, corrosion resistance, multi-functionality, long or short life and good utilization, reliability, durability, saving resources, and so on. This material might be high-strength concrete for bridge structures, but also a low-strength fast-setting mortar for short-term mine rock anchorage. The high performance materials and composite materials as their special class have been included into the list of the top 20 engineering achievements of the 20th century [4].

To create building composites that serve their purposes in the fullest measure more and more multi-component components are used (binder systems, complex admixtures, poly-fractional fillers, hybrid fibres, etc.). The "nested" multicomponent is characteristic. This is testified by great number of books and papers, for instance, by these ones [5-7]. To provide desirable properties of such composites at various stages of their life (mix, forming structures, hardened composite, degrading material that should be utilised) one has to analyse quantitatively the relations of the properties with multi-component composition and process (CP) parameters (including operational conditions).

The CP-parameters, the levels of which can be set, present the vector of CP-factors, $x = (x_1, \dots, x_k)$. Criteria of material behavior (Y , generally called properties) are technological and structural characteristics, functional properties, other quality criteria, and any other responses (including resources and costs) to variations of controllable inputs x . The levels of criteria Y , which characterise the material structure response to controllable effects of x , provide the information for forming desirable structures through certain values of CP-factors. And, of course, to determine these values one needs mathematical models of the relations between factors x and criteria Y , in order to analyse these relations and to "lay the quality" in design of the material (composition and modes, which would provide specified or improved levels of the properties).

2 ANALYSIS OF LITERATURE DATA AND TARGET SETTING

The typology of mathematical models in building materials science, by their origin [8, 9], comprises mathematical physics equations (important as a priori knowledge at any modelling), conceptual models, virtual models (simulations of materials structures and artificial neural networks), and experimental-statistical (ES) models. The coefficients (constants) in fundamental equations and in analytical expressions of the concepts are related to the fixed composition and modes, not to dependencies on them. The models simulating structures, in particular those that emerge with hydration [10-12], alone do not allow the levels of operational properties to be predicted, of the composite that should be designed [13, 14]. To do this, in particular, to calculate the diffusivity [15] or strength [10], the conceptual or regression models are invoked.

ES-models are widely used when studying and developing building composites, evidently since they are the ones that can connect directly the properties (not only structural and operational characteristics, but coefficients of fundamental and conceptual equations and the estimates got on simulated structures as well) with multicomponent composition and processes parameters.

The term "Experimental-Statistical Modelling" (ESM) has been put forward by V. A. Voznesensky [16, p. 32]. The development of ESM, even before the appearance of this

term, and of its content definition [8, 16, 17], were aimed at overcoming the blackness of the "black box" [18, 19] (the origin of ESM from which can be traced back). With ESM, the black box is already lighter and more transparent. The models are no longer black box models, but, say, of gray one. ES-models are assumed to be built on the base of the best possible information, namely, on a priori knowledge and on results of the designed reasonable experiment. The statement of the problem (the purposes and possibilities) should be defined on the base of system approach and of a priori physical-chemical, technological, and other knowledge, at "pre-design of experiment" stage. Defined should be: the components of material, the intervals of their dosages and the ranges of processes parameters to be varied in the experiment (the factor region Ω_x), hypothetical kinds of the models $Y(x)$ to be obtained (taking into account a priori information on effects of CP-factors), other conditions. And then the ES-models, mathematical descriptions of the relationships between factors x and criteria Y , as a rule, in the form of polynomials, are built (with least squares method followed by statistical analysis), on results of carried out designed experiment.

Design of experiment (DOE) is not only a formalized way to maximize the amount of information received with limited resources, which allows one to characterize both the individual and joint influence of the CP-factors x on the responses Y , with the highest possible accuracy. This is the philosophy and logic of research [20], the core of the experiment strategy [16, 21].

The equation (1) presents the general form of ES-model (linear in parameters, non-linear in factors).

$$Y(x) = \sum_{l=1}^L b_l f_l(x), \quad (1)$$

where $f_l(x)$ are linearly independent, basis functions (as a rule, degrees of x); in particular, the most often used are the 2nd order polynomials (2).

$$Y(x) = b_0 + \sum_i b_i x_i + \sum_i b_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j. \quad (2)$$

These are not just regression models (sometimes referred to as ES-models, thus discrediting the latter). The use of the dimensionless variables (most often normalised to $-1 \leq x_i \leq +1$, instead of dimensional X_i , $X_{i,\min} \leq X_i \leq X_{i,\max}$) gives clear physical sense to coefficients of ES-model, having dimension of the criterion Y they evaluate, and ensures acceptable calculation errors.

When studying multicomponent disperse systems, the building composites among them, the system of factors under study or some of them (factor subsystem) can present the "mixture". This is when as the factors the portions (from 0 to 1) of the components forming the mixture (1 in a sum) should be considered. It can be the mixture of fractions of the grains of several size or different minerals, or the portions of the components in complex chemical admixtures, etc.

In these cases of linearly related factors the special kinds of polynomials and corresponding experiment designs are used [22-26]. The 1st such models and designs were proposed by H. Sheffe: simplex-lattice design and reduced polynomial [22], simplex-centroid design and the products of designs in case of both linearly related and independent factors [23]. The reduced polynomials for the last case were given in works [25, 27, 28] (with algorithm of the synthesis of the designs in [27]). Put forward were also the reduced polynomials for the systems with two mixtures [28] (the application of this model and synthesised design were presented in [16]) and for the systems with two mixtures and mutually independent factors (presented and applied in [8]).

Nowadays ESM is the developed methodology of researches [8, 9, 17]. Some of its elements intersect with those of the "response surface methodology" [29, 30]. But for ESM, it is important not only and not so much to build good models. ES modelling is aimed at extracting as much information as possible from the models, in which data of the experiments (of both natural or computational) are convoluted. For ESM, it is not so much the models as such that are important, but the tasks that can be solved with their help, including in tandem with fundamental and structural-simulation models.

Of course, the polynomial form does not contribute to explanation of mechanisms of the material behavior, to conclusions and projections of a general nature. The "richness of reality" hidden in ES-models and the knowledge that they can potentially contain may be lost.

Decomposition of factors system (the allocation of subsystems in accordance with factor nature, character, and the degree of influence on the properties) and the use of the corresponding structured ES-models could reduce the losses, could help to extract from the models, more fully, the information that is folded in them. Allocating the influence of factor subsystems and their synergism could mitigate to some extent the contradiction between the "simplicity" of the integral polynomial model and the structural complexity of the object (composite material).

3 PURPOSE AND OBJECTIVES OF RESEARCH

The purpose of this article is to generalize and to promote the "structuring approach" to solving the tasks of building materials science with the help of ES-models.

The generalization implies some classification of the systems under consideration and of ES-models that would describe them. The "structuring" suggests this, firstly, at the stage of formulating the tasks to be solved (a priori, before the experiment, before building the models on experiment results). Secondly, at the stage of solving the tasks (a posteriori, after the experiment, using the models already obtained on its results).

4 RESULTS

A priori structuring. Decomposition of factors system should begin with meaningful (technological) statement of the problem of research and development of composite material. CP-factors are divided into subsystems, first of all, in accordance with the nature and degree of their influence on the structure and the properties of the material. These can be: a group of factors that define the properties of the matrix (water-binder ratio, concentration of additives, etc.); factors that set the amount of filler and its dispersion and (or) mineral composition; the composition of the complex admixture; process modes (temperature at different stages of the process, pressure in autoclave, etc.); operational factors that condition the aggressiveness of the environment; a set of factors from different such groups, to variation of which (according a priori data) the responses Y are most or least sensitive; and so on.

When passing to mathematical descriptions, corresponded to factor subsystems identified at the stage of the technological statement of the problem can be different types of the domains in the factor space. According to these types of factor domains the factor systems and their constituent subsystems have been named and designated.

"**Technology**", T , is the system (subsystem) of mutually independent factors.

T_p includes p factors. The domain of factor space corresponding to T_p is p -dimensional cube (line segment, square, cube...) of mutually independent normalized factors x_i , $-1 \leq x_i \leq +1$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_p) \in \Omega_x$.

These can be both formulation factors (for example, dosage of additive relative to the content of the base component) and parameters of production and operation processes.

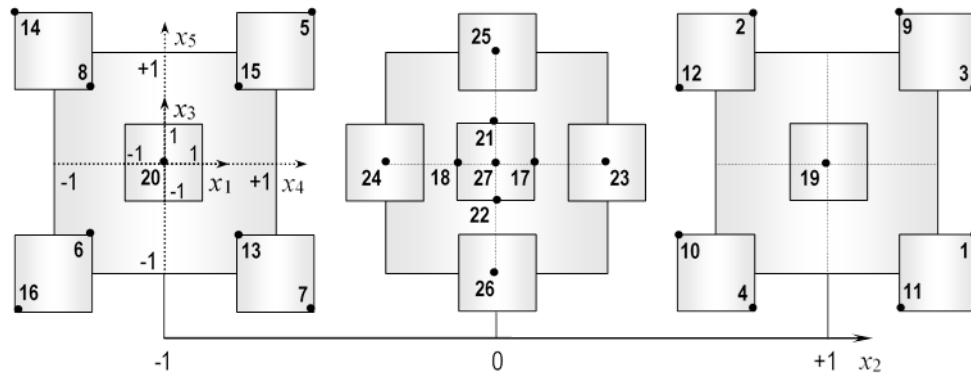


Fig. 1. The display of the 2nd order 5 factors design of experiment in system $T_1T_2T_2$ factor region

Several subsystems "technology" can be separated in T_p (specifically, T_{p_1} and T_{p_2} , $p_1 + p_2 = p$, then it is, $T_{p_1T_{p_2}}$). Structured image of such factor system can be used, in particular, just to show the points of experiment design (Fig. 1).

"Mixture", M , is the system (subsystem) of linearly related factors v_i , the portions of the components forming the mixture, $0 \leq v_i \leq 1$, $\sum v_i = 1$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_q) \in \Omega_v$. M_q is the mixture of q components. The domain Ω_v of factor space is $(q-1)$ -dimensional simplex (segment, triangle, tetrahedron ...). There might be more than one mixture in the system, as mentioned above (w is used as the second designation). In particular, this could be $M_{q_1}M_{q_w}$.

In some cases [26], especially when the factor domain is a limited part of the simplex, it may be advisable to use, instead of v or w , the mutually independent variables x (specifically, the dosages of the components relative to the one that is necessarily present in the mixture, i.e., T -factors).

Factor domains and subdomains can be parts of cubes and of simplices cut out by additional constraints on v , w , and x (for example, shown in [17]), as well as prisms and other products of the whole and bounded cubes and simplices.

The features of the factor space in problems of materials development may lead to consideration of the systems "mixtures, technologies – properties", for which the generalized designation M_sT_sQ can be used, where Q denotes the *quality*, defined by a set of material properties (of criteria Y).

The system of factors "mixtures, technologies" (M_sT_s) generalizes practically all combinations (considered in building materials science) of linearly related and mutually independent variables, which could be included in ES-model.

In most specific studies of building composite materials, it is not reasonable to include in consideration more than 7 factors, more than 2 "mixtures", and more than two T -subsystems when designing certain experiment and meaning subsequent analysis of its results (in some cases it could be 8 [31] and 9 [32] factors and more than 2 technological subsystems).

The vector of the factors in $M_{q_1}M_{q_w}T_{p_1}T_{p_2}Q$ can be written as $\mathbf{z} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}, (x_1, x_2)) \in \Omega_z$. The structured factor region Ω_z may be written as the Cartesian product of the corresponding subregions, $\Omega_z = \Omega_v \otimes \Omega_w \otimes (\Omega_{x_1} \otimes \Omega_{x_2})$. In particular, for $\mathbf{z} = (v_1, v_2, v_3, x_1, x_2)$ the region Ω_z is a set of points of the mixture triangle at each point of the square of mutually independent factors (and vice versa).

Given in Tables 1 and 2 are the designations for a number of typical factor systems "mixtures, technologies" and variants of displaying the corresponding factor regions ("inverse" mappings are meant too, in particular, "squares on triangle" in addition to "triangles on square").

Corresponded to structured systems of the factors are the structured forms of ES-models. Given below are the types of ES-models for "Mixtures, Technologies – Properties" systems. For a number of representatives of those systems the models written in structured form are shown, not the long trains of polynomial terms, but the blocks of them related to certain factor subsystems and synergetic effects.

Table 1

Designations of factor systems with variants of displaying the domains of 2-4 factors.

| Factors system | Designation | Number of factors $k = (p = p_1 + p_2) + q_v + q_w$ | | |
|-----------------------------------|-------------------|---|--------------------------------|---|
| | | 2 | 3 | 4 |
| «Mixture» | M | M_2 Segment (–) | M_3 Triangle (Δ) | M_4 Tetrahedron |
| «Technology» | T | T_2 Square (\square) | T_3 Cube | |
| «Mixture, Mixture» | $M_{q_v}M_{q_w}$ | | | M_2M_2 «– on –» |
| «Mixture, Technology» | MT | | M_2T_1 «– on –» | M_3T_1 « Δ on –» (triangular prism) |
| «Technology, Technology» | $T_{p_1}T_{p_2}$ | T_1T_1 «– on –» | T_2T_1 « \square on –» | T_2T_2 , « \square on \square » «Cubes on –» |
| «Mixture, Technology, Technology» | $MT_{p_1}T_{p_2}$ | | | $M_2T_1T_1$ «rectangles and \square on –» |

For $T_{p_1}T_{p_2}Q$ systems these are the ordinary polynomial $P(x)$ written in blocks corresponding to individual subsystems and their synergies, like the one of the 2nd order (3), for T_2T_2 .

$$Y(x) = b_0 \begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} + b_{11}x_1 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 \\ + b_{22}x_2 + b_{22}x_2^2 \end{matrix}} \quad \text{(a)} & \boxed{\begin{matrix} + b_{13}x_1x_3 \\ + b_{14}x_1x_4 \\ + b_{23}x_2x_3 \\ + b_{24}x_2x_4 \end{matrix}} \quad \text{(c)} \\ \boxed{\begin{matrix} + b_{33}x_3 + b_{33}x_3^2 + b_{12}x_1x_2 \\ + b_{44}x_4 + b_{44}x_4^2 \end{matrix}} \quad \text{(b)} & \end{matrix} \quad (3)$$

The free term b_0 presents the level of Y at medium values of all x , equal to zero, at the center of the experiment. Block (a) evaluates the effects of one group of factors (let it be matrix factors, dosages of admixtures) at central values of the factors from another group (quantity and specific surface of filler, for instance). The effects of those from another group at central values of the 1st group factors are presented in block (b). Block (c) evaluates the synergism (antagonism) of the factors from different groups.



To describe the systems $M_q T_p Q$, with factor region $\Omega_v \otimes \Omega_x$ (simplices on cube and vice versa), the reduced polynomials, $P_r(\mathbf{v}, \mathbf{x})$, can be used. Incomplete 3rd degree polynomial (4) and polynomial of the 3rd degree (5) are shown below (the higher degree would not be reasonable). The usual polynomial of $k = q + p$ variables is reduced to this form by substituting equalities in it following from the linear relation of q factors. The model (5) contains C_{q+p+2}^3 terms and coefficients. The terms in its 1st line present Sheffe reduced polynomials (of the 1st, then of the 2nd order, incomplete of 3rd degree, and of 3rd degree).

Table 2

| Factors system | Designation | Number of factors $k = (p = p_1 + p_2) + q_v + q_w$ | | |
|-----------------------------------|-----------------|--|---|--|
| | | 5 | 6 | 7 |
| «Mixture, Mixture» | $M_{qv}M_{qw}$ | M_3M_2 « Δ on - » | M_3M_3 « Δ on Δ » | M_4M_3 «Tetrahedrons on Δ » |
| «Mixture, Technology» | MT | M_4T_1 «Tetrahedrons on - » M_3T_2 , « Δ on \square » | M_4T_2 «Tetrahedrons on \square » « Δ on prism» | M_4T_3 «Tetrahedrons on cube» |
| «Technology, Technology» | $T_{p1}T_{p2}$ | T_3T_2 «Cubes on \square » | T_2T_1 « \square on - » | T_2T_2 , « \square on \square » «Cubes on - » |
| «Mixture, Mixture, Technology» | $M_{qv}M_{qw}T$ | $M_2M_2T_1$ « \square and rectangles on - » | $M_3M_2T_1$ «Triangular prisms on - » « Δ on rectangle» | $M_3M_3T_1$ «Triangular prisms on Δ » $M_3M_2T_2$ «Triangular prisms on \square » « Δ on prisms» |
| «Mixture, Technology, Technology» | $MT_{p1}T_{p2}$ | $M_3T_1T_1$ «triangular prisms on - », « Δ on \square » | $M_3T_1T_2$ «triangular prisms on \square » « Δ on cube» | $M_3T_2T_2$, $M_4T_1T_2$ « Δ and tetrahedrons on \square , - , cube» |

$$Y(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^q A_i v_i + \sum_{j>i=1}^q A_{ij} v_i v_j + \sum_{i<j<l} A_{ijl} v_i v_j v_l + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q D_{ij} v_i x_j + \sum_{1 \leq i < j \leq p} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^p b_{ii} x_i^2, \quad (4)$$

$$Y(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^q A_i v_i + \sum_{j>i=1}^q A_{ij} v_i v_j + \sum_{i<j<l} A_{ijl} v_i v_j v_l + \sum_{i<j} A_{i-j} v_i v_j (v_i - v_j) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q D_{ij} v_i x_j + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q D_{ijj} v_i x_j^2 + \sum_{1 \leq j < l \leq p} \sum_{i=1}^q D_{i(jl)} v_i x_j x_l + \sum_{l=1}^p \sum_{1 \leq i < j \leq q} D_{(ij)l} v_i v_j x_l + \sum_{1 \leq i \neq j \leq p} b_{ij} x_i^2 x_j + \sum_{1 \leq i < j < l \leq p} b_{ijl} x_i x_j x_l + \sum_{i=1}^p b_{iii} x_i^3. \quad (5)$$

Coefficients A correspond to those in Sheffe polynomial, describing the system MQ at $\mathbf{x} = 0$. A_i defines the level of Y at the center of Ω_x when only i -th component is in the mixture.

Other A characterize the nonlinearity of the property changing with mixing the components. Coefficients D and b define the variation of A with x varying.

The equation (6) presents the 2nd order model for the system M_3T_1Q written in structured form.

$$Y(v_1, v_2, v_3, x) = \begin{matrix} \boxed{= A_{11}v_1 + A_{12}v_1v_2 + A_{13}v_1v_3} & \boxed{+ D_1v_1x} \\ \boxed{+ A_{21}v_2} & \boxed{+ A_{23}v_2v_3} & \boxed{+ D_2v_2x} \\ \boxed{+ A_{31}v_3} & & \boxed{+ D_3v_3x} \\ \boxed{+ b_{11}x^2} & & \end{matrix} \quad (6)$$

The analysis of a priori data may not allow to put forward a hypothesis about the relation between Y and $z = (v, x)$ corresponding to the reduced polynomial, for example, about the absence of the effects v_1v_jx , as in (6). Then one can use as ES models the products of ordinary and reduced polynomials for individual subsystems, if it would be possible to carry out a costly experiment to estimate a large number of coefficients and high-order effects (many of which may turn out to be insignificant).

In models-products, each of the model coefficients for one of the subsystems can be written as a function of the factors of the other subsystem. In particular, $Y(v, x)$ can be expressed by the product (7) of the reduced Scheffe polynomial and an ordinary polynomial, where i and j are the indices of effects, of the basis functions f , in models-multipliers.

$$Y(v, x) = P_r(v) \times P(x) = \sum \left\{ A_j = \left[\sum b_{ij} \cdot f_i(x) \right] \right\} \cdot f_j(v). \quad (7)$$

In particular, the product of second-order polynomials (Scheffe and usual) for the M_3T_1Q system can be written in the form (8) or (9).

$$Y(v_1, v_2, v_3, x) = (b_{0.1} + b_{1.1}x + b_{11.1}x^2) \cdot v_1 + (b_{0.2} + b_{1.2}x + b_{11.2}x^2) \cdot v_2 + (b_{0.3} + b_{1.3}x + b_{11.3}x^2) \cdot v_3 + \dots + (b_{0.23} + b_{1.23}x + b_{11.23}x^2), \quad (8)$$

$$Y(v_1, v_2, v_3, x) = (A_{1.0}v_1 + A_{2.0}v_2 + A_{3.0}v_3 + A_{12.0}v_1v_2 + A_{13.0}v_1v_3 + A_{23.0}v_2v_3) + (A_{1.1}v_1 + A_{2.1}v_2 + A_{3.1}v_3 + A_{12.1}v_1v_2 + A_{13.1}v_1v_3 + A_{23.1}v_2v_3) \cdot x + (A_{1.11}v_1 + A_{2.11}v_2 + A_{3.11}v_3 + A_{12.11}v_1v_2 + A_{13.11}v_1v_3 + A_{23.11}v_2v_3) \cdot x^2. \quad (9)$$

To evaluate all 18 coefficients of the model (8, 9), at least 18 trials (in points of experiment design) are required. The model (6) needs minimum 10 trials to estimate its coefficients, but is unable to evaluate the relation of synergy within the mixture with the level of "technological" factor.

The reduced polynomials $P_r(v, w)$, for the system $M_{qv}M_{qw}Q$ (and factor regions $\Omega_v \otimes \Omega_w$), the functions of two groups of linearly dependent variables, have been also put forward. The models of the 2nd and 3rd order have the form (10) and (11) respectively and contain $C_{qv+qw+n-2}^n$ coefficients (n is the order of polynomial).

$$Y(v, w) = \sum_{1 \leq i < j \leq qv} A_{ij} v_i v_j + \sum_{1 \leq i < j \leq qw} B_{ij} w_i w_j + \sum_{i=1}^{qv} \sum_{j=1}^{qw} C_{ij} v_i w_j, \quad (10)$$



$$\begin{aligned}
 Y(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = & \sum_{1 \leq i < j \leq q_v} A_{ij} v_i v_j v_l + \sum_{1 \leq i < j \leq q_w} A_{i-j} v_i v_j (v_i - v_j) \\
 & + \sum_{1 \leq i < j \leq q_w} B_{ij} w_i w_j w_l + \sum_{1 \leq i < j \leq q_w} B_{i-j} w_i w_j (w_i - w_j) \\
 & + \sum_{i=1}^{q_v} \sum_{j=1}^{q_w} C_{ij} v_i w_j + \sum_{1 \leq i < j \leq q_v} \sum_{l=1}^{q_w} C_{(ij)l} v_i v_j w_l + \sum_{l=1}^{q_v} \sum_{1 \leq j < l \leq q_w} C_{i(j)l} v_i w_j w_l.
 \end{aligned} \tag{11}$$

One needs sufficiently less experiment trials to build such models than to estimate the coefficients of the product of two Sheffe polynomials. In particular, if $q_v = q_w = 3$ the production of two 2nd degree multipliers contains 36 terms, while reduced polynomial (12) only 15, providing the decrease in resource consumption by 2.4 times, with saturated design of the experiment.

$$\begin{aligned}
 Y(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3) = & A_{12} v_1 v_2 + A_{13} v_1 v_3 + A_{23} v_2 v_3 \\
 & + B_{12} w_1 w_2 + B_{13} w_1 w_3 + B_{23} w_2 w_3 \\
 & + C_{11} v_1 w_1 + C_{12} v_1 w_2 + C_{13} v_1 w_3 \\
 & + C_{21} v_2 w_1 + C_{22} v_2 w_2 + C_{23} v_2 w_3 \\
 & + C_{31} v_3 w_1 + C_{32} v_3 w_2 + C_{33} v_3 w_3.
 \end{aligned} \tag{12}$$

The coefficients A and B in (10-12) characterize the nonlinearity in changing material property when mixing the components independently in two mixtures. Coefficients C_{ij} correspond to the levels of Y when present in the 1st mixture is only the i -th component and only the j -th is in the 2nd mixture. C_{ijl} in (11) account for nonlinearity of mixing the components in one of the mixtures for the "pure" components in another. For instance, such parameter might evaluate the effect of mixing "short" and "long" fibres when only high specific surface component is in the filler.

The reduced incomplete 3rd degree polynomials (12, 13) have been obtained for the systems "mixtures, technologies – properties", $M_{q_v} M_{q_w} T_p Q$ (with factor regions $\Omega_v \otimes \Omega_w \otimes \Omega_x$).

$$Y(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) = \sum_{j>i=1}^{q_v} A_{ij} v_i v_j + \sum_{j>i=1}^{q_w} B_{ij} w_i w_j + \sum_{i=1}^{q_v} \sum_{j=1}^{q_w} (C_{ij} + \sum_{l=1}^p R_{ijl} x_l) v_i w_j + \sum_{i=1}^p b_{ii} x_i^2 + \sum_{j>i=1}^p b_{ij} x_i x_j, \tag{13}$$

$$Y(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) = Y_{(13)} + \sum_{l=1}^p \left(\sum_{j>i=1}^{q_v} P_{ijl} v_i v_j + \sum_{j>i=1}^{q_w} Q_{ijl} w_i w_j \right) x_l. \tag{14}$$

Coefficients R, P, Q reflect a linear change in the corresponding parameters of MMQ models in dependence on \mathbf{x} . When substituting the fixed values of certain factors in the models for $M_{q_v} M_{q_w} T_p Q$, specifically in (14), all the types of models considered above are obtained, describing the systems that are simpler in structure and dimension.

A posteriori structuring helps to extract the information and the knowledge folded (hidden) in the ES-models obtained. Aimed at the same is the methodology of properties fields (of Y criteria) in coordinates of composition and processes parameters [9, 33], described by ES-models. The concepts and tools of composition-process fields methodology (the means of computational materials science) are helpful in realization of structuring approach.

In accordance with the ideology of DOE, all components of the vector \mathbf{z} are included in ES-model. Such model describes the whole field $Y(\mathbf{z})$, in the domain Ω_z , of all the factors under consideration. The structured model of the whole field $Y(\mathbf{z} = (\mathbf{z}_{gr}, \mathbf{z}_{ch}))$ represents also the variety of the local fields $Y(\mathbf{z}_{gr} / \mathbf{z}_{ch})$, in the coordinates of a particular group of gradient factors, forming the local fields ($\mathbf{z}_{gr} \in \Omega_{gr}$, producing a gradient of Y), at certain values of a

group of factors that could change them ($z_{ch} \in \Omega_{ch}$). Any useful combination of separating out of z the gradient factors and the changing factors can be considered. The transformation of $Y(z_{gr})$ under the influence of z_{ch} can be described.

The specific features of the whole and of the local fields are characterized (measured) by their generalizing indices ($G_Y\{z\}$, $G_Y\{z_{gr}\}$, numerical characteristics of distribution of Y level over the region of CP-factors). These could be the maximal and minimal levels of Y , the increments, the levels at some special points and their coordinates, etc. [9, 33], calculated (estimated) with ES-models.

By the estimates of $G_Y\{z_{gr}\}$ at fixed values of z_{ch} , the secondary ES-models (in relation to the primary ES-model, built on primary experimental data) can be obtained, describing the dependences of the generalizing indices of local fields on the factors x_{ch} that change these fields.

The models for generalizing indices, $G_Y\{z_{gr}\}(z_{ch})$, are built on the estimates of $G_Y\{z_{gr}\}$ calculated for the fields $Y(z_{gr})$ at points z_{ch} of the designed computational (secondary, simulation) experiment (in Ω_{ch} region, in accordance with the form of the secondary model).

In general, the path from obtaining real data on Y at N_1 points of the design of real (natural) experiment to obtaining, by the results of N_2 tests in designed computational experiment, the models that would express the features of the dependences of properties Y on CP-factors z , may be presented with the formal chain shown in Fig. 2.

The chain "natural experiment – secondary model" reflects the alternation of composing and decomposing (synthesis and analysis) of the description of the system under study when moving from the particular to the general. This is effective use of the "particular" when formulating a question to the nature (designed real experiment) – generalization in an attempt to get an answer (ES-model) – analysis, structuring when stating a new question (designed computational experiment), and at a higher level of knowledge – the new level of generalizing the empirical information (models for generalizing indices).

As a result, for each of the studied criteria Y , in addition to the whole primary ES-model, a material scientist-technologist has at his disposal a set of ES-models of a lower dimension – the models of local fields and secondary models for G_Y indices. The $G_Y\{z_{gr}\}(z_{ch})$ model may be required for quantitative analysis of $Y(z_{gr})$ transformations under the influence of z_{ch} , for controlling the local field through these factors, for its optimisation by one or another criterion $G_Y\{z_{gr}\}$.

When analysing the results of the modelling it may be useful to compare the local fields $Y(z_{gr})$ for "contrasting" z_{ch} , with the largest difference in properties over the range of change factors. Helpful for meaningful analysis are plots and maps (isolines, surfaces) of local fields at different levels of z_{ch} . These are already widely used diagrams "squares on a square", "squares on a triangle", etc., often with displaying on the carrying figure (in z_{ch} coordinates) the changes in the maximum and minimum levels of local fields, absolute and relative differences, and other generalizing indices [9, 33].

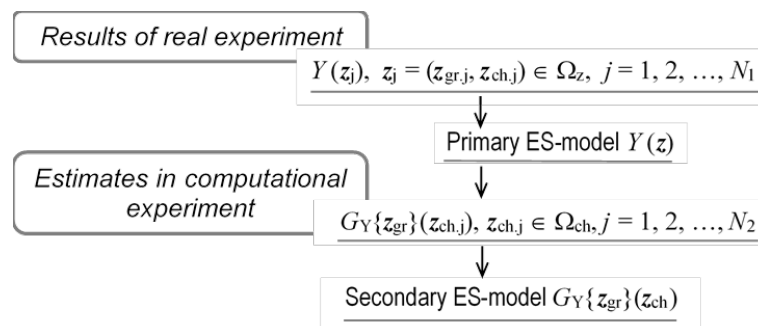


Fig. 2. The path "from experimental data to generalized descriptions"

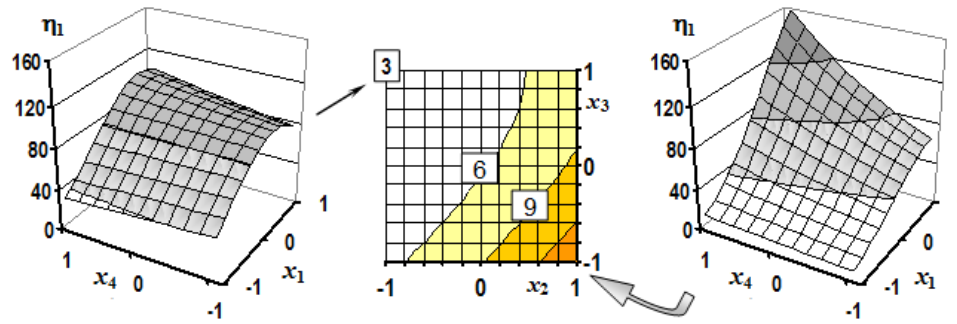


Fig. 3. Two local fields $\eta_1(x_1, x_4)$ and relative decrease of η_1 in such fields for various *MMC* and *MC* – on $\{x_2, x_3\}$ -square

Shown in Fig. 3 are two representatives of the local fields of effective viscosity of the mortar, η_1 (Pa·s, at shear rate 1 s^{-1}), in coordinates of the dosages of 2 binder components (gradient factors), at two from pairs of values of 2 change factors that were varied in computational experiment [34]. The relative decrease of viscosity due to binder components (generalizing index) in dependence on molecular mass (*MMC*) and the quantity of methylcellulose (*MC*) is shown on the square of these change factors.

5 CONCLUSIONS

The concept of a priori and a posteriori structuring the system of factors in researches of building composite materials has been put forward. The systems, which might include the "mixtures", the subsystems of linearly related factors, have been classified by the types of factor domains. The developed kinds of polynomial models for these systems are given.

Structuring the factor systems at a posteriori stage of a study, the local fields of material properties with their generalizing indices, and the visualization possibilities help in "fighting dimensionality" when designing the multicomponent composite materials.

It seems promising to use ES-models for describing and analyzing the combined effect of design parameters and of composition of the material of a building structure (two subsystems of factors) on its properties.

References

1. Mindes, S. (2006). High performance concrete: where do we go from here? In A. M. Brandt, V. C. Li, I. H. Marshall (Eds.). *Brittle Matrix Composites*. 8. 15–23. Cambridge: Woodhead Publ. Ltd., Warsaw: ZTUREK RSI.
2. C. Shi and Y. L. Mo (2008). *High-Performance Construction Materials*. Science and Applications World Scientific. <https://doi.org/10.1142/6793>.
3. W. P. De Wilde, C. A. Brebbia and S. Hernández (2012). *High Performance Structures and Materials VI*. WITpress.
4. Constable, G., Somerville, B. (2003). *A Century of Innovation: Twenty Engineering Achievements that Transformed our Lives*. Washington, DC: Joseph Henry Press. <https://doi.org/10.17226/10726>.
5. Caijun Shi, C., Roy, D., Krivenko, P. (2019). *Alkali-Activated Cements and Concretes*. CRC Press.
6. P. Samui, D. Kim, N. Iyer, S. Chaudhary (Eds.) (2020). *New Materials in Civil Engineering*. Butterworth-Heinemann.
7. Khan, M., Cao, M. (2021). Effect of hybrid basalt fibre length and content on properties of cementitious composites. *Magazine of Concrete Research*. 73 (10). 487–498. <https://doi.org/10.1680/jmacr.19.00226>.
8. Voznesensky, V. A., Lyashenko, T. V., Ivanov, Y. P., Nikolov, I. I. (1989). *EVM i optimizaciya kompozicionnyh materialov* [Computers and Optimisation of Composite Materials]. Kiev: Budivelnik. [in Russian].

8. Lyashenko, T. V., Voznesensky, V. A. (2017). *Metodologiya recepturno-tekhnologicheskikh polej v komp'yuternom stroitel'nom materialovedenii* [Composition-process fields methodology in computational building materials science]. Odessa: Astroprint. [in Russian].
9. Bentz, D. P. (1999). Modelling cement microstructure: Pixels, particles, and property prediction. *Materials and Structures*. 32. 187–195.
10. Le, N.L.B., Stroeven, M., Sluys, L. J., Stroeven, P. (2013). A novel numerical multi-component model for simulating hydration of cement. *Computational Materials Science*. 78. 12–21.
11. Stroeven, P., Slowik, M. (2019). Economic and reliable estimation of cementitious material properties on the basis of virtual models. In M.A. Glinicki, D. Józwiak-Niedźwiedzka, C. K.Y. Leung, J. Olek (Eds.), *Brittle Matrix Composites*. 8. 35–44. Warsaw: Institute of Fundamental Technological Research.
12. Wittmann, F. H., Roelfstra, P. E., Sadouki, H. (1984). Simulation and Analysis of Composite Structures. *Materials Science and Engineering*. 68. 239–248.
13. Garboczi, E. J. (2013). The computational materials science of concrete: Past, present and future. *American Ceramic Society Bulletin*. 92 (4). 40–45.
14. Garboczi, E. J., Bentz, D. P. (1992). Computer simulation of the diffusivity of cement-based materials. *J. of Materials Science*. 27. 2083–2092.
15. Voznesensky, V. A. (Ed.). (1983). *Sovremennyye metody optimizacii kompozicionnykh materialov* [Contemporary Methods of Optimization of Composite Materials], Kiev: Budevel'nik. [in Russian].
16. Lyashenko, T. V., Voznesensky, V. A. (1995). Experimental-statistical modeling in computational materials science. In: Proc. 3rd Int. *Applied Statistics in Industry Conf.*, 287–298. Dallas: ACG Press.
17. Bunge, M. (1963). A general black-box theory. *Philosophy of Science*. 30 (4). 346–358.
18. Ashby, W. R. (1956). The black box. In *An Introduction to Cybernetics*, 86–117. London: Chapman & Hall.
19. Nalimov, V. V., Golikova, T. I. (1981). *Logicheskie osnovaniya planirovaniya eksperimenta* [Logical foundations of designing an experiment], 2nd ed. Moscow: Metallurgiya. [in Russian].
20. Voznesensky, V. A. (1981). *Statisticheskie metody planirovaniya eksperimenta v tekhniko-ekonomicheskikh issledovaniyakh* [Statistical methods of experiment design in technical and economic studies], 2nd ed. Moscow: Finansy i Statistika. [in Russian].
21. Sheffe, H. (1958). Experiments with mixtures. *J. Roy. Statist. Soc., B*. 20 (2). 344–360.
22. Sheffe, H. (1963). Simplex-centroid design for experiments with mixtures. *J. Roy. Statist. Soc., B*. 25(2). 235–263.
23. Zedgenidze, I. G. (1976). *Planirovanie eksperimenta dlya issledovaniya mnogokomponentnykh sistem* [Design of Experiments for the Study of Multi-Component Systems]. Moscow: Nauka. [in Russian].
24. Vuchkov, I. Jonchev, H. (1979). *Planirane i analiz na eksperimenta pri izsledvane na svoystvata na smesi i splavi* [Design and analysis of the experiment in studies of the properties of mixtures and alloys]. Sofia: Tekhnika. [in Bulgarian].
25. Cornell, J. A. (2002). *Experiments with Mixtures: Designs, Models, and the Analysis of Mixture Data*. 3rd ed. Wiley.
26. Danilenko, E. L., Lyashenko, T. V. (1979). Raschet tochnykh optimal'nykh planov na vypuklykh mnogogrannnikah [Calculation of exact optimal designs on convex polyhedra]. *Industrial Laboratory*. 45 (3). 249–251. [in Russian].
27. Lyashenko, T. V. (1981). Planirovanie eksperimenta po opisaniyu sistem s gruppami linejno svyazannykh vhodov [Design of experiment to describe systems with groups of linearly connected inputs]. In *Organizaciya i Avtomatizaciya na Eksperimentalnite Izsledvaniya*. 110–113. Ruse. Bulgaria: Ministerstvo na elektronikata i elektrotekhnikata. [in Russian].
28. Myers, R. M., Montgomery, D. C. (2002). *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiment*. 2nd ed. John Wiley & Sons.
29. Montgomery, D. C. *Design and Analysis of Experiments*, 10th ed. John Wiley & Sons.
30. Lyashenko, T., Voznesensky, V. (2007). Compromise optimisation of slag alkaline binders with computational materials science methods. In *Alkali Activated Materials – Research, Production and Utilization*. Proc. Int. Conf.. 447–458. Prague: CRA.
31. Lyashenko, T. V., Voznesensky, V. A., Gavriuliuk, V. P. (2009) Multicriteria optimisation of autoclaved aerated concrete properties and expenditure of energy resources. In *Brittle Matrix Composites*. 9. 219–226. Cambridge: Woodhead Publ. Ltd., Warsaw: IFTR PAS.

32. Lyashenko, T. V. (2015). Composition-process fields methodology for design of composites structure and properties. In *Brittle Matrix Composites*. 11. 289–298. Warsaw: IFTR PAS.
33. Lyashenko, T., Kryukovskaya, S. (2012). Modelling the influence of composition on rheological parameters and mechanical properties of fibre reinforced polymer-cement mortars. In *Brittle Matrix Composites*, 10, 169–178. Cambridge: Woodhead Publ. Ltd. Warsaw: IFTR.

Література

1. Mindes S. High performance concrete: where do we go from here? In A. M. Brandt, V. C. Li, I. H. Marshall (Eds.), *Brittle Matrix Composites*. Cambridge: Woodhead Publ. Ltd., Warsaw: ZTUREK RSI. 2006. №8. P. 15–23.
2. C. Shi and Y. L. Mo. High-Performance Construction Materials. Science and Applications World Scientific. 2008. 448 p. <https://doi.org/10.1142/6793>
3. W. P. De Wilde, C. A. Brebbia and S. Hernández. High Performance Structures and Materials VI. WITpress. 2012. 558 p.
4. Constable G., Somerville B. A Century of Innovation: Twenty Engineering Achievements that Transformed our Lives. Washington, DC: Joseph Henry Press. 2003. 256 p. <https://doi.org/10.17226/10726>
5. Caijun Shi C., Roy, D., Krivenko, P. Alkali-Activated Cements and Concretes. CRC Press. 2019. 392 p.
6. P. Samui, D. Kim, N. Iyer, S. Chaudhary (Eds.). *New Materials in Civil Engineering*, Butterworth-Heinemann. 2020. 1104 p.
7. Khan M., Cao M. Effect of hybrid basalt fibre length and content on properties of cementitious composites. *Magazine of Concrete Research*. 2021. 73 (10). P. 487–498. <https://doi.org/10.1680/jmacr.19.00226>
8. Вознесенский В. А., Ляшенко Т. В., Иванов Я. П., Николов И. И. ЭВМ и оптимизация композиционных материалов. Киев: Будівельник, 1989. 240 с.
9. Ляшенко Т. В., Вознесенский В. А. Методология рецептурно-технологических полей в компьютерном строительном материаловедении. Одесса: Астропринт, 2017. 168 с.
10. Bentz D. P. Modelling cement microstructure: Pixels, particles, and property prediction. *Materials and Structures*. (1999). №32. P. 187–195.
11. Le N.L.B., Stroeve M., Sluys L. J., Stroeve P. A novel numerical multi-component model for simulating hydration of cement. *Computational Materials Science*. 2013. 78. 12–21.
12. Stroeve P., Slowik M. Economic and reliable estimation of cementitious material properties on the basis of virtual models. In M.A. Glinicki, D. Józwiak-Niedźwiedzka, C. K.Y. Leung, J. Olek (Eds.), Warsaw: Institute of Fundamental Technological Research. 2019. *Brittle Matrix Composites* 8. 35–44 pp.
13. Wittmann F. H., Roelfstra P. E., Sadouki H. Simulation and Analysis of Composite Structures. *Materials Science and Engineering*. 1984. 68. 239–248.
14. Garboczi E. J. The computational materials science of concrete: Past, present and future. *American Ceramic Society Bulletin*. 2013. 92 (4). 40–45.
15. Garboczi E. J., Bentz D. P. Computer simulation of the diffusivity of cement-based materials. *J. of Materials Science*. 1992. 27. 2083–2092.
16. Вознесенский В. А., Выровой В. Н., Керш В. Я., Ляшенко Т. В., и др. Современные методы оптимизации композиционных материалов Киев: Будівельник, 1983. 144 с.
17. Lyashenko T. V., Voznesensky, V. A. Experimental-statistical modeling in computational materials science. In: Proc. 3rd Int. Applied Statistics in Industry Conf. 1995. 287–298. Dallas: ACG Press.
18. Bunge M. A general black-box theory. *Philosophy of Science*. 1963. 30 (4). 346–358.
19. Ashby W. R. The black box. In *An Introduction to Cybernetics*. London: Chapman & Hall. 1956. 86–117 pp.
20. Налимов В. В., Голикова Т. И. Логические основания планирования эксперимента. Издание 2-е, переработанное и дополненное. Москва: Металлургия, 1981. 152.
21. Вознесенский В. А. Статистические методы планирования эксперимента в технико-экономических исследованиях. М.: Финансы и статистика, 1981. 263 с.
22. Sheffe H. Experiments with mixtures. *J. Roy. Statist. Soc.*, B. 1958. 20 (2). 344–360.

23. Sheffe H. Simplex-centroid design for experiments with mixtures. *J. Roy. Statist. Soc.*, B. 1963. 25(2). 235–263.
24. Зедгинидзе И. Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем. М.: Наука, 1976. 390 с.
25. Vuchkov I. Jonchev H. Design and analysis of the experiment in studies of the properties of mixtures and alloys. Sofia: Tekhnika. 1979. 356.
26. Cornell J. A. Experiments with Mixtures: Designs, Models, and the Analysis of Mixture Data, 3rd ed. Wiley. 2002. 680.
27. Даниленко Е. Л., Ляшенко Т. В. Расчет точных оптимальных планов на выпуклых многогранниках. *Industrial Laboratory*, 1979. 45 (3). 249–251.
28. Ляшенко Т. В. (1981). Планирование эксперимента для описания систем с группами линейно связанных входов. Организация и автоматизация на экспериментальните. Русе. Болгария, 1981. с.110–113.
29. Myers R. M., Montgomery D. C. Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiment, 2nd ed. John Wiley & Sons. 2002. 814.
30. Montgomery D. C. Design and Analysis of Experiments, 10th ed. John Wiley & Sons, 688.
31. Lyashenko T., Voznesensky V. (2007). Compromise optimisation of slag alkaline binders with computational materials science methods. In Alkali Activated Materials – Research, Production and Utilization. Proc. Int. Conf. Prague: CRA. 2007. 447–458 pp.
32. Lyashenko T. V., Voznesensky V. A., Gavriliuk V. P. (2009) Multicriteria optimisation of autoclaved aerated concrete properties and expenditure of energy resources. Cambridge: Woodhead Publ. Ltd., Warsaw: IFTR PAS. In Brittle Matrix Composites. 2009. 9. 219–226 pp.
33. Lyashenko T. V. Composition-process fields methodology for design of composites structure and properties. Warsaw: IFTR PAS. In Brittle Matrix Composites. 2016. 11. 289–298 pp.
34. Lyashenko T., Kryukovskaya S. Modelling the influence of composition on rheological parameters and mechanical properties of fibre reinforced polymer-cement mortars. Cambridge: Woodhead Publ. Ltd., Warsaw: IFTR. In Brittle Matrix Composites. 2012. 10. 169–178 pp.

Tatiana Lyashenko

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
Doctor of Technical Science, professor
Didrihsona str., 4, Odessa, Ukraine 65029
frabul16@gmail.com
ORCID: 0000-0002-6232-4866

For references:

Lyashenko T. (2021). Structured systems of factors and experimental-statistical models in studies of building composites. *Mechanics and Mathematical Methods*. 3 (1). 47 – 61

Для посилань:

Ляшенко Т. В. Структуровані системи факторів і експериментально-статистичні моделі при дослідженні будівельних композитів. *Механіка та математичні методи*, 2021. Т. 3. №. 1. С. 47–61.

UDC 691.327

MULTI-CRITERIA OPTIMIZATION OF THE FIBER CONCRETES COMPOSITIONS OF RIGID PAVEMENT

S. Kroviakov¹, A. Mishutin¹, L. Chintea¹

¹Odessa State Academy of Civil Engineering and Architectur

Abstract: The experiment was carried out according to the optimal plan, which four factors of the composition of modified fiber concrete for rigid pavement were varied: amount of Portland cement, polypropylene fiber, metakaolin and polycarboxylate type additive. All concrete mixtures had equal mobility P2. Complex of experimental-statistical models describe the influence of factors on the properties of concrete is obtained. Selection of optimal compositions of fiber concrete of a rigid pavement was carried out using the obtained experimental-statistical models.

Graphical optimization method for "squares and squares" diagrams was used. The square in the coordinates "amount of metakaolin" - "amount of complex action additive Coral ExpertSuid-5" was used as a carrier in the construction of diagrams. These values of the mechanical characteristics of concrete were used as limitation criteria: compressive strength at the age of 3 and 28 days, flexural tensile strength, frost-resistance, abrasion. Frost-resistance and abrasion are the main indicators that ensure the durability of concrete for rigid pavement in typical operating conditions. The concrete prime cost indicator was used as an optimization criterion. 2 variants of concretes compositions of classes C30/35 and C32/40 with increased durability and high strength was chosen. The selected compositions of C30/35 class concretes have frost-resistance F350, flexural tensile strength 8.0-8.2 MPa, abrasion 0.38-0.39 g/cm², compressive strength at 3 days age 35 MPa and strength at 28 days age 54 MPa. The selected compositions of C32/40 class concretes have frost-resistance F400, flexural tensile strength 8.5-8.6 MPa, abrasion 0.34 g/cm², compressive strength at 3 days age 38-39 MPa and strength at 28 days age 57-58 MPa. All four selected compositions have the amount of metakaolin 15-20 kg/m³, polypropylene fiber 0.9-1.5 kg/m³, polycarboxylate type additive Coral ExpertSuid-5 0.8-0.9% of the cement mass.

Keywords: experimental-statistical modeling, optimization, rigid pavement, fiber, strength, frost-resistance, durability.

БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ СКЛАДІВ ФІБРОБЕТОНІВ ЖОРСТКОГО ДОРОЖНЬОГО ПОКРИТТЯ

Кровяков С. О.¹, Мішутін А. В.¹, Кінтя Л.¹

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: За оптимальним планом проведено експеримент, у якому варіювалися чотири фактори складу модифікованих фібробетонів для жорстких дорожніх покриттів: кількість портландцементу, поліпропіленової фібри, метаклаоліну і добавки полікарбоксилатного типу. Всі бетонні суміші мали рівну рухомість Р2. Отримано комплекс експериментально-статистичних моделей, які описують вплив факторів на властивості бетону. З використанням отриманих експериментально-статистичних моделей проведено вибір оптимальних складів фібробетонів жорсткого дорожнього покриття.

Застосовано графічний метод оптимізації за діаграмами типу «квадрати та квадрати». При побудові діаграм в якості несучого використовувався квадрат у координатах «кількість метаклаоліну» – «кількість добавки комплексної дії Coral ExpertSuid-5». У якості критеріїв обмеження використовувалися такі значення фізико-механічних характеристик бетонів: міцність на стиск у віці 3 і 28 діб, міцність на розтяг при згині, морозостійкість, стираниність. Морозостійкість та стираниність є основними показниками, що забезпечують довговічність бетонів жорстких дорожніх покриттів в типових умовах експлуатації. У якості критерію



оптимізації використовувався показник собівартості бетону. Обрано по 2 варіанти складів бетонів класів С30/35 і С32/40 з підвищеною довговічністю та високою ранньою міцністю. Обрані склади бетонів класу С30/35 мають морозостійкість F350, міцність на розтяг при згині 8,0-8,2 МПа, стиранність 0,38-0,39 г/см², міцність на стиск у віці 3-х діб 35 МПа і у віці 28-ми діб 54 МПа. Обрані склади бетонів класу С32/40 мають морозостійкість F400, міцність розтяг при згині 8,5-8,6 МПа, стиранність 0,34 г/см², міцність на стиск у віці 3-х діб 38-39 МПа і у віці 28-ми діб 57-58 МПа. Всі чотири обраних склади характеризуються кількістю метаколіну 15-20 кг/м³, поліпропіленової фібри 0,9-1,5 кг/м³, добавки полікарбонатного типу Coral ExpertSuid-5 0,8-0,9% від маси цементу.

Ключові слова: експериментально-статистичне моделювання, оптимізація, жорстке дорожнє покриття, фібра, міцність, морозостійкість, довговічність.

1 INTRODUCTION

Rigid pavements are more durable than non-rigid asphalt pavement and they have many operational advantages, first of all, the absence of rutting. However, the repair of cement-concrete pavements is more difficult; therefore, the task of maximizing the durability of concrete on rigid pavement is relevance. In particular, this task is relevant for Ukraine, where cement-concrete roads have been actively built in recent years.

The durability of concretes used in pavements is mainly determined by frost-resistance and abrasion. Standardized quality indicators for rigid pavements are compressive strength and flexural tensile strength. The early strength of concrete is an important indicator in terms of the timing of opening traffic and facilitating technological operations. Accordingly, during using modifiers of various types and dispersed reinforcement to find the optimal compositions of concrete for rigid pavements, it is necessary to use the methods of multicriteria analysis of material properties.

2 ANALYSIS OF LITERARY DATA AND RESOLVING THE PROBLEM

The share of rigid pavements in the United States is 60%, in Austria 46%, Belgium 41%, Germany 31%, France 20%, the Netherlands 15%, Portugal 10%, Spain, Italy, Canada, Switzerland and UK about 5% [1]. In Ukraine and in the world more and more roads with cement-concrete pavement are being built. For example, in the Czech Republic, over the past 15 years, 65% of new roads were built from cement-concrete, and many such roads are also being built in Poland and Slovakia [2]. According to the "Program for the development of cement-concrete roads in Ukraine for 2021-2025," adopted by Ukravtodor, by 2025, it is planned to build and reconstruct about 2,900 km of national roads using rigid pavements.

In modern conditions, in the manufacture of concrete for rigid pavements, it is possible to achieve the required level of efficiency simultaneously with high durability and strength of the material only through the use of modifier additives [3]. Superplasticizers of the polycarboxylate type [3,4] and pozzolanic additives, in particular metakaolin [5,6], are some of the most effective modifiers today. Dispersed reinforcement is also an effective method for improving the mechanical properties of concrete, which determine its durability and performance [7,8].

To search for rational compositions of concretes as multicomponent materials, it is advisable to use experimental planning methods [9]. Implementation of the experiment according to the optimal design allows obtaining adequate experimental-statistical models that show the relationship between the composition of the composite material and its properties [10]. By analyzing the complex of the obtained experimental-statistical (ES) models, it is possible to carry out multi-criteria optimization of the composition of concrete, including the composition of concrete of rigid pavements.

3 PURPOSE AND TASKS OF THE STUDY

The purpose of this study is to select the optimal compositions of rigid pavement fiber concrete of C30/35 and C32/40 classes with increased durability and high early strength. Concretes at a project age of 28 days must meet to their class in compressive strength, provide increased flexural tensile strength, frost-resistance, wear-resistance (low abrasion) and early strength. At the same time, the prime cost of the selected compositions should be minimal, which is important given the large amount of concrete works in road construction.

4 BASIC RESULTS

In accordance with the 18-point optimal plan, a 4-factor experiment was carried out, in which the following factors of the composition of fiber concrete of rigid pavements were varied [11]:

- X1, amount of Portland cement (CEM II/A-S 42.5), from 400 to 500 kg/m³;
- X2, amount of polypropylene fiber (length 12 mm, diameter 20 μm), from 0 to 2 kg/m³;
- X3, amount of metakaolin, from 0 to 30 kg/m³;
- X4, amount of polycarboxylate additives of complex action (superplasticizer and accelerator) Coral ExpertSuid-5, from 0.6 to 1% by weight of cement.

All the mixtures of tested fiber concretes had equal mobility P2 (slump from 6 to 8 cm), which was achieved by varying the amount of water.

Selection of the optimal compositions of fiber concrete of rigid pavements was carried out using a set of obtained ES-models. These models describe the effect of the composition on the corresponding properties of the composite:

- compressive strength at the age of 3 days:

$$f_{\text{ck.cube.3}}(\text{MPa}) = 40.9 + 5.8x_1 - 1.7x_1^2 + 0.8x_1x_2 \pm 0x_1x_3 \pm 0x_1x_4 - 0.4x_2 + 0.9x_2^2 \pm 0x_2x_3 - 0.6x_2x_4 + 2.1x_3 - 0.8x_3^2 + 1.0x_3x_4 + 3.0x_4 - 1.1x_4^2 \quad (1)$$

- compressive strength at the project age:

$$f_{\text{ck.cube}}(\text{MPa}) = 59.4 + 5.9x_1 - 2.4x_1^2 + 1.1x_1x_2 \pm 0x_1x_3 + 1.1x_1x_4 - 2.0x_2 + 2.4x_2^2 \pm 0x_2x_3 - 1.0x_2x_4 + 1.6x_3 - 3.1x_3^2 \pm 0x_3x_4 + 1.5x_4 - 1.9x_4^2 \quad (2)$$

- flexural tensile strength at the project age:

$$f_{\text{ctk}}(\text{MPa}) = 8.30 + 0.61x_1 - 0.22x_1^2 + 0.07x_1x_2 \pm 0x_1x_3 + 0.10x_1x_4 + 0.32x_2 \pm 0x_2^2 + 0.09x_2x_3 - 0.13x_2x_4 + 0.05x_3 - 0.17x_3^2 + 0.05x_3x_4 + 0.11x_4 + 0.09x_4^2 \quad (3)$$

- frost-resistance:

$$F(\text{cycles}) = 393 + 60x_1 \pm 0x_1^2 + 8x_1x_2 \pm 0x_1x_3 \pm 0x_1x_4 + 23x_2 - 14x_2^2 - 10x_2x_3 \pm 0x_2x_4 + 7x_3 - 29x_3^2 + 7x_3x_4 + 19x_4 - 23x_4^2 \quad (4)$$

- abrasion:

$$G(\text{g/cm}^2) = 0.350 - 0.036x_1 + 0.020x_1^2 - 0.016x_1x_2 - 0.008x_1x_3 \pm 0x_1x_4 - 0.056x_2 + 0.030x_2^2 \pm 0x_2x_3 \pm 0x_2x_4 - 0.006x_3 + 0.012x_3^2 \pm 0x_3x_4 - 0.018x_4 + 0.022x_4^2 \quad (5)$$

- prime cost indicator calculated in the prices of March 2020:

$$\begin{aligned} \text{Cost (UAH/m}^3\text{)} = & 1886.02 + 112.21x_1 - 0.54x_1^2 \pm 0x_1x_2 - 0.31x_1x_3 + 1.91x_1x_4 \\ & + 47.49x_2 \pm 0x_2^2 - 0.53x_2x_3 + 0.38x_2x_4 \\ & + 128.62x_3 - 0.85x_3^2 - 0.30x_3x_4 \\ & + 17.43x_4 + 0.32x_4^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Selection was carried out by a graphical method on diagrams of the “squares on a square” type [10]. Selection of compositions of fiber concrete with two different levels of requirements for the characteristics of the material was carried out. In the first version (concretes of class C30/35), the following values of the mechanical characteristics of concretes were used as limitation criteria:

- compressive strength $f_{\text{ck.cube}} \geq 50$ MPa. Such strength is ensured by the class of concrete C30/35 at the most common level of the coefficient of variation for concrete plants in Ukraine. This allows the use of concrete on roads of category I-b (B35, M500 according to the requirements of DBN V.2.3-4:2015). Isolines $f_{\text{ck.cube}} = 50$ MPa are plotted according to the ES-model (2) and are shown in red in the diagrams;

- flexural tensile strength $f_{\text{ctk}} \geq 8$ MPa. Such tensile strength ensures the quality of work of the material in the structure of the pavement and largely provides the durability of concrete under high loads. Isolines $f_{\text{ctk}} = 8$ MPa are plotted according to the ES-model (3) and are shown in green in the diagrams;

- frost-resistance $\geq F350$. Such level of frost-resistance ensures high durability of concrete during the operation of rigid pavements in typical climatic conditions of Ukraine. Isolines F350 are plotted according to the ES-model (4) and are shown in blue in the diagrams;

- abrasion $G \leq 0.40$ g/cm². This level of abrasion (no more than 0.40 g/cm²) provides high wear resistance of concrete, respectively, the durability of concrete in conditions of heavy traffic. Isolines $G = 0.40$ g/cm² are plotted according to the ES-model (5) and are shown in gray in the diagrams;

- compressive strength at the age of 3 days $f_{\text{ck.cube.3}} \geq 35$ MPa. Such a high level of early strength makes it possible to start operating roads earlier and facilitates subsequent technological operations during the construction process. Isolines $f_{\text{ck.cube.3}} = 35$ MPa are plotted according to the ES-model (1) and are shown in purple in the diagrams.

As an optimization criterion [10], the indicator of the prime cost of concrete (UAH/m³), calculated in prices of March 2020, was used. Isolines of the prime cost of concrete are plotted according to the ES-model (6) are shown in brown in the diagrams.

A square in coordinates X_3 (amount of metakaolin) – X_4 (amount of a complex action additive Coral ExpertSuid-5) was used as a carrier when constructing diagrams of the “squares on a square” type. Diagrams in the field of a bearing square at various levels of factors x_3 – x_4 reflect the effect of the amount of Portland cement and polypropylene fiber. The diagrams take into account the fact that for a significant part of the mechanical characteristics the best indicators (the highest strength, the highest frost-resistance, the lowest abrasion, etc.) were observed for compositions with the amount of Metakaolin 18-20 kg/m³ and with the amount of additive Coral ExpertSuid-5 about 0,9% [11]. Accordingly, in the field of the carrier square, not 9, but 16 diagrams of the influence of factors x_1 – x_2 are shown for more accurate optimization (Fig. 1). Diagrams in coordinates $x_3 = +0.333$ (20 kg/m³ Metakaolin) and $x_4 = 0.5$ (0.9% additive) were added to the diagrams in the main (–1, 0, 1) coordinates of factors.

Areas of the diagrams that did not meet the specified limitation criteria were shaded with the appropriate color. In the unshaded areas, that is, when all the established quality criteria

are met, two optimal compositions were selected. These compositions (coordinates) are marked with stars with corresponding numbers in Fig. 1.

In the second option for choosing the optimal compositions (concretes of C32/40 class), the following values of the mechanical characteristics of concretes were used as limitation criteria:

- compressive strength $f_{ck,cube} \geq 55$ MPa, which provides the required class of concrete on roads of category I-a (B40, M550 according to the requirements of DBN V.2.3-4:2015) and allows the use of concrete on roads with the highest loads. According to [12], preference should always be given to pavements made of high-strength concrete of B40..B60 classes, which ensures the durability of new roads during construction. Isolines $f_{ck,cube} = 55$ MPa are shown in red in the diagrams;

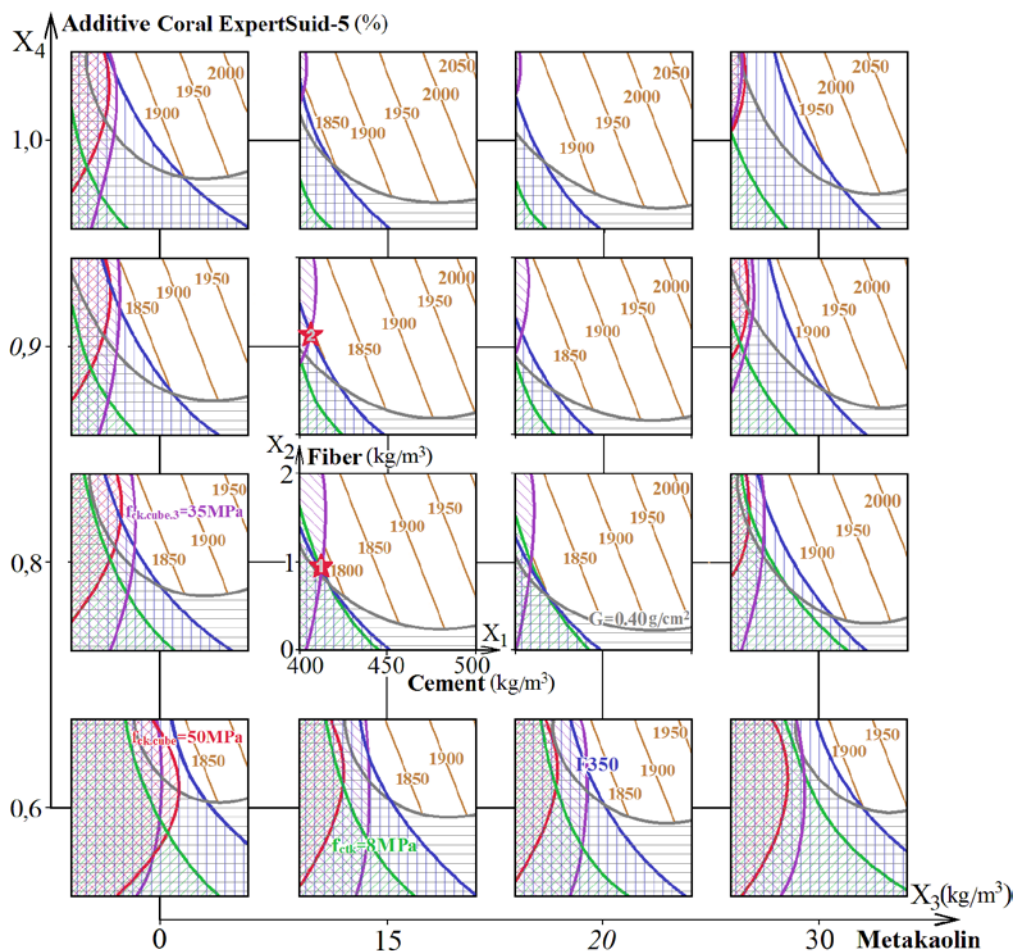


Fig. 1. Selection of the optimal compositions of rigid pavement fiber concrete of C30/35 class

- flexural tensile strength $f_{ctk} \geq 8.5$ MPa, which is 0.5 MPa higher than was specified as a limitation criterion when choosing concretes of C30/35 class. This ensures a higher quality and durability of the material in the construction of the pavement compared to the C30/35 class concretes. Isolines $f_{ctk} = 8.5$ MPa are shown in green in the diagrams;

- frost-resistance $\geq F400$, which is 50 cycles higher than was specified as a limitation criterion when choosing concretes of C30/35 class. This ensures even greater durability of concrete during operation in Ukrainians climatic conditions. Isolines F400 are shown in blue in the diagrams;

- abrasion $G \leq 0,35$ 0.35 g/cm^2 , which is 0.05 g/cm^2 lower than was specified as a limitation criterion when choosing concretes of C30/35 class. Such abrasion provides a higher

wear resistance of the pavement in conditions of heavy traffic. Isolines $G = 0.35 \text{ g/cm}^2$ are shown in gray in the diagrams;

- compressive strength at the age of 3 days $f_{ck.cube.3} \geq 35 \text{ MPa}$, which is similar to the limitation when choosing compositions of concretes of C30/35 class. This strength also makes it possible to start the operation of roads earlier and facilitates the implementation of subsequent technological operations. Isolines $f_{ck.cube.3} = 35 \text{ MPa}$ are shown in purple in the diagrams.

The isolines in Fig. 2 were plotted using the same EC-models, which were used to plot similar isolines in Fig. 1. These isolines similarly reflect the change in all investigated properties of concrete.

The two optimal concrete compositions were selected in the unshaded areas in Fig. 2, that is, when the levels of all assigned quality criteria are met. Composition coordinates are marked with stars with corresponding numbers, which is similar to Fig. 1.

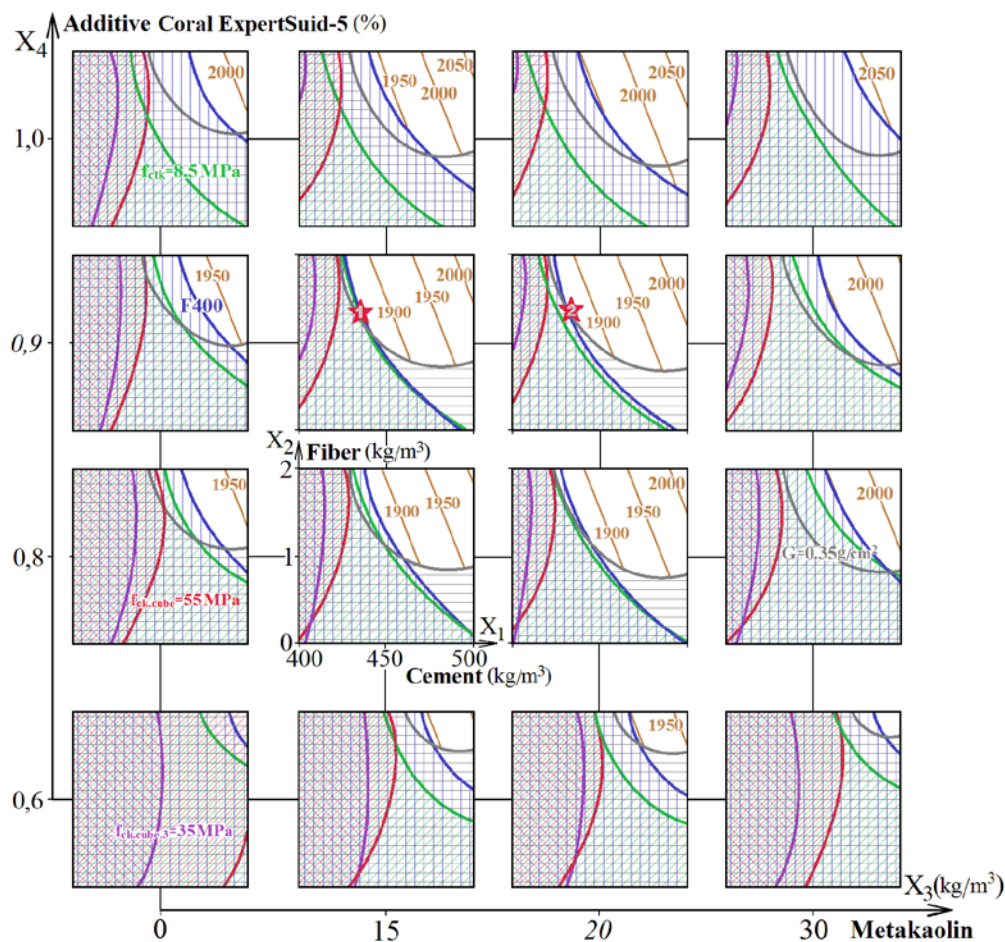


Fig. 2. Selection of the optimal compositions of rigid pavement fiber concrete of C32/40 class

5 DISCUSSION OF THE RESULTS OF THE STUDY

As mentioned earlier, two optimal compositions of C30/35 class fiber concretes were selected. These compositions are marked with stars with corresponding numbers in Fig. 1.

Composition No.1 (C30/35) is characterized by the lowest prime cost (1790 UAH /m³) and provides the necessary level for all quality criteria of concrete. The point of this composition in a factor space has the coordinates: $x_1 = -0.6$, $x_2 = -0.1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Composition No.2 (C30/35) has a prime cost 1800 UAH/m³, which is only 0.6% more than the prime cost of composition No. 1. At the same time, concrete of composition No.2 in

comparison with composition No.1 has a slightly higher flexural tensile strength and less abrasion. The point of this composition in a factor space has the coordinates: $x_1 = -0.7$, $x_2 = 0.1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0.5$.

Also, two optimal compositions of C32/40 class fiber concretes were selected. These compositions are marked with stars with corresponding numbers in Fig. 2.

Composition No.1 (C32/40) is characterized by the lowest prime cost (1860 UAH /m³) and provides the necessary level for all quality criteria of concrete. The point of this composition in a factor space has the coordinates: $x_1 = -0.3$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0.5$.

Composition No.2 (C32/40) has a prime cost of 1865 UAH /m³, which practically does not differ from the prime cost of composition No.1. At the same time, the composition No.2 has a slightly higher compressive strength and flexural tensile strength compared to the composition No.1. The difference between the indicators of the mechanical properties of the compositions No.1 and No.2 is within the limits of the experimental accuracy. But for composition No. 2, this difference ensures the achievement of the required level of strength with a greater probability. The point of composition No.2 in a factor space has the coordinates: $x_1 = -0.35$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.33$, $x_4 = 0.5$.

The content of the components of the mixture for all selected compositions of concretes C30/35 and C32/40 classes and the calculated mechanical properties of concretes are shown in Table 1.

Table 1

Selected optimal compositions of fiber concrete and their mechanical characteristics.

| No. composition | Composition of concrete | Mechanical characteristics |
|--------------------------|---|--|
| C30/35, composition No.1 | Cement – 420 kg/m ³ Crushed stone – 1127 kg/m ³ Sand – 676 kg/m ³ Metakaolin – 15 kg/m ³ Fiber – 0.9 kg/m ³ Additive Coral – 3.36 kg/m ³ Water – 174 l/m ³ | Compressive strength $f_{ck.cube} = 54$ MPa Flexural tensile strength $f_{ctk} = 8$ MPa Frost-resistance F350 Abrasion $G = 0.395$ g/cm ² Compressive strength at the age of 3 days $f_{ck.cube.3} = 35$ MPa Prime cost – 1790 UAH/m ³ |
| C30/35, composition No.2 | Cement – 415 kg/m ³ Crushed stone – 1131 kg/m ³ Sand – 686 kg/m ³ Metakaolin – 15 kg/m ³ Fiber – 1.1 kg/m ³ Additive Coral – 3.74 kg/m ³ Water – 169 l/m ³ | Compressive strength $f_{ck.cube} = 54$ MPa Flexural tensile strength $f_{ctk} = 8.2$ MPa Frost-resistance F350 Abrasion $G = 0.38$ g/cm ² Compressive strength at the age of 3 days $f_{ck.cube.3} = 35$ MPa Prime cost – 1800 UAH/m ³ |
| C32/40, composition No.1 | Cement – 435 kg/m ³ Crushed stone – 1124 kg/m ³ Sand – 669 kg/m ³ Metakaolin – 15 kg/m ³ Fiber – 1.4 kg/m ³ Additive Coral – 3.92 kg/m ³ Water – 175 l/m ³ | Compressive strength $f_{ck.cube} = 57$ MPa Flexural tensile strength $f_{ctk} = 8.5$ MPa Frost-resistance F400 Abrasion $G = 0.34$ g/cm ² Compressive strength at the age of 3 days $f_{ck.cube.3} = 38$ MPa Prime cost – 1860 UAH/m ³ |
| C32/40, composition No.2 | Cement – 433 kg/m ³ Crushed stone – 1124 kg/m ³ Sand – 665 kg/m ³ Metakaolin – 20 kg/m ³ Fiber – 1.5 kg/m ³ Additive Coral – 3.90 kg/m ³ Water – 176 l/m ³ | Compressive strength $f_{ck.cube} = 58$ MPa Flexural tensile strength $f_{ctk} = 8.6$ MPa Frost-resistance F400 Abrasion $G = 0.34$ g/cm ² Compressive strength at the age of 3 days $f_{ck.cube.3} = 39$ MPa Prime cost – 1865 UAH/m ³ |

6 CONCLUSIONS

Thus, the multicriteria optimization of the compositions of fiber concrete of a rigid pavement was carried out using the obtained complex of EC-models. Optimal compositions of fiber concrete of rigid pavements of C30/35 and C32/40 classes with increased durability under typical operating conditions and high early strength are selected taking into account the cost price.

References

1. Hall, K., Dawood, D., Vanikar, S. and other (2007). *Long-life Concrete Pavements in Europe and Canada*. Report No. FHWA-PL-07-027. American Trade Initiatives.
2. Śliwiński, J., Hager, I., Tracz, T. and other (2010). *New generation cement concretes. Ideas, design, technology and applications*. Cracow: Cracow University of Technology.
3. Sobko, Y. M., Shevchuk, G. Y., Topylko, N. I., Novyts'kyy, Y. L. (2018). Dorozhni tsementobetonny na osnovi modyfikovanykh dobavok novoyi heneratsiyi. [Road cement concretes based on modified additives of new generation] *Visnyk Natsional'noho universytetu "Lvivs'ka politekhnika". Seriya: Teoriya i praktyka budivnytstva* [Lviv Polytechnic National University]. Lviv: Vydavnytstvo Lvivs'koyi politekhniky. 888. 133–137. [in Ukrainian].
4. Liu, J., Yu, C., Ran, Q., Yang, Y. (2019). Recent advance of chemical admixtures in concrete. *Cement and Concrete Research*. Vol. 124. 105834.
5. Kryzhanovskiy, V. O., Kroviakov, S. O., Zavoloka, M. V. (2021). Influence of metakaolin on properties of concrete modified with polycarboxylate admixture for rigid pavement repair. *Bulletin of odessa state academy of civil engineering and architecture*. 82. 90–97.
6. Salimi, J., Ramezani-pour, A. M., Moradi, M. J. (2020). Studying the effect of low reactivity metakaolin on free and restrained shrinkage of high performance concrete. *Journal of Building Engineering*. Vol. 28:101053.
7. Liu, H., Wang, N. (2020). Computer model and analysis on pavement performance and pavement structure of polypropylene fibre material concrete. *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 1578. Issue 1. No. 012057.
8. Kroviakov, S., Kryzhanovskiy, V., Zavoloka, M. (2021) Steel fibrous concrete with high-early strength for rigid pavements repair. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 1162. No. 012008.
9. Jeff Wu, C. F., Hamada, M. S. (2009). *Experiments: Planning, Analysis, and Optimization*. 2d ed. Wiley & Sons. 552.
10. Lyashenko, T. V., Voznesenskiy, V. A. (2017) *Metodologiya retsepturno-tekhnologicheskikh poley v komp'yuternom stroitel'nom materialovedenii*. [Methodology of recipe-technological fields in computer building materials science]. Odessa: Astroprint. [in Russian].
11. Mishutin, A., Kos, Z., Gryn'yova, I., Chintea, L. (2021) Durability of modified fiber concrete for rigid pavements. *Croatian regional development journal*. Vol. 2. No. 1. 35–46.
12. Hamelyak, I. P., Korets'kyy, A. S., Korets'kyy, S. S. (2013) Pro neobkhidnist' budivnytstva v Ukrayini avtomobil'nykh dorih iz tsementobetonnyym pokryttyam. [About necessity of construction in Ukraine of highways with a cement-concrete covering]. *Avtoshlyakhovyk Ukrayiny*. №5 (235). 24–31. [in Ukrainian].

Література

1. Hall K., Dawood D., Vanikar S. and other. Long-life Concrete Pavements in Europe and Canada Report No. FHWA-PL-07-027, American Trade Initiatives. 2007. 69 p.
2. Śliwiński J., Hager I., Tracz T. and other. New generation cement concretes. Ideas, design, technology and applications Cracow: Cracow University of Technology. 2010. 189 p.
3. Собко Ю. М., Шевчук Г. Я., Топилко Н. І., Новицький Ю. Л. Дорожні цементобетони на основі модифікованих добавок нової генерації. Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Серія: Теорія і практика будівництва. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2018. № 888. С. 133–137.

4. Liu H., Wang N. Computer model and analysis on pavement performance and pavement structure of polypropylene fibre material concrete. Journal of Physics: Conference Series. 2020. V. 1578. Issue 1. No. 012057.
5. Kryzhanovskiy V. O., Kroviakov S. O., Zavoloka M. V. Influence of metakaolin on properties of concrete modified with polycarboxylate admixture for rigid pavement repair. Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури, 2021. №82. С. 90–97
6. Salimi J., Ramezaniapour A.M., Moradi M.J. Studying the effect of low reactivity metakaolin on free and restrained shrinkage of high performance concrete. Journal of Building Engineering. 2020. V. 28:101053.
7. Liu H., Wang N. Computer model and analysis on pavement performance and pavement structure of polypropylene fibre material concrete. Journal of Physics: Conference Series. 2020. V. 1578. Issue 1. No. 012057.
8. Kroviakov S., Kryzhanovskiy V., Zavoloka M. Steel fibrous concrete with high-early strength for rigid pavements repair. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2021. 1162. No. 012008
9. Jeff Wu C. F., Hamada M.S. Experiments: Planning, Analysis, and Optimization. 2d ed., Wiley & Sons, 2009. 552 p.
10. Ляшенко Т. В., Вознесенский В. А. Методология рецептурно-технологических полей в компьютерном строительном материаловедении. Одесса: Астропринт, 2017. 168 с.
11. Mishutin A., Kos Z., Grynuova I., Chintea L. Durability of modified fiber concrete for rigid pavements. Croatian regional development journal. 2021. Vol. 2. No. 1. pp. 35–46.
12. Гамеляк І. П., Корецький А. С., Корецький С. С. Про необхідність будівництва в Україні автомобільних доріг із цементобетонним покриттям. Автошляховик України, 2013. №5 (235). С. 24–31.

Kroviakov Sergii

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
Doctor of Technical Sciences, associate professor
Didrihsona str.,4 Odessa, Ukraine, 65029
skrovyakov@ukr.net
ORCID: 0000-0002-0800-0123

Mishutin Andrey

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
Doctor of Technical Sciences, professor
Didrihsona str.,4 Odessa, Ukraine, 65029
mishutin52@ukr.net
ORCID: 0000-0001-9512-6084

Chintea Lucia

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
Graduate student
Didrihsona str.,4 Odessa, Ukraine, 65029
chintea.lucia@gmail.com
ORCID: 0000-0001-7519-4987

For references:

Kroviakov S., Mishutin A., Chintea L. (2021). Multi-criteria optimization of the fiber concretes compositionS of rigid pavement. Mechanics and Mathematical Methods. 3 (1). 62 – 71

Для посилань:

Кровяков С. О., Мішутін А. В., Кінтя Л. Багатокритеріальна оптимізація складів фібробетонів жорсткого дорожнього покриття. Механіка та математичні методи, 2021. Т. 3. №. 1. С. 62–71.

UDC 624.04

STRESS STATE OF COMPRESSED REINFORCED CONCRETE ELEMENTS CONSIDERING CREEP AND INFLUENCE OF AN AGGRESSIVE ENVIRONMENT

M. Bekirova¹

¹*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract: Problems associated with the joint long-term action of load and aggressive environment, both in limiting and over-limiting states, are studied bad. Such a combination leads to degradation of materials and changes in the stress-strain state of reinforced concrete structures over time. In case of joint action, they can have mutually increasing damaging effect. Among the many environmental influences encountered, the most aggressive in relation to concrete on cement binder is the impact of sulfates, and in relation to steel reinforcement – the impact of chlorides.

It is shown that the stress-strain state of reinforced concrete compressed elements with regard to creep and influence of aggressive environment is formed in time.

The deformation in concrete and reinforced concrete compressed elements depends on the stress level. If the stresses are less than the long-term strength, the deformations in time are attenuated, when the stresses in concrete are greater than the long-term strength, the deformations increase. Reinforcement restrains deformations in concrete, while corrosive medium increases creep deformations.

When solving these problems we encounter internally statically indeterminate systems. The degree of static indeterminacy is greater than in the case of calculation of reinforced concrete structures without taking into account the influence of the external environment. When the process of soaking is considered, it is possible to consider the influence of the external environment as not aggressive.

A solution to the problem using the theory of elastic heredity has been obtained, but it can be shown that a solution using other theories - the theory of aging or the hereditary theory of aging - is also possible.

The above solution is true for reinforced concrete elements exposed to external influences at a sufficiently mature age, which can be considered one year or more from the date of manufacture of the structure.

Keywords: concrete, reinforcement, creep, long-term strength, aggressive environment, deformation, theory of elastic heredity.

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН СТИСНЕНИХ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З УРАХУВАННЯМ ПОВЗУЧОСТІ І ВПЛИВУ АГРЕСИВНОГО СЕРЕДОВИЩА

Бекірова М. М.¹

¹*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація: Задачи, связанные с совместным длительным действием нагрузки и агрессивной среды, как в предельных, так и запредельных состояниях, изучены значительно хуже. Такое сочетание приводит к деградации материалов и изменению напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций с течением времени. В случае совместного действия они могут обладать взаимно усиливающим повреждающим эффектом. Среди множества встречающихся воздействий среды наиболее агрессивны по отношению к бетону на цементном вяжущем воздействия сульфатов, а по отношению к стальной арматуре – воздействия хлоридов.

Показано, что напряженно-деформированное состояние железобетонных сжатых элементов с учетом ползучести и влияния агрессивной среды формируется во времени.

Деформация в бетонных и железобетонных сжатых элементах зависит от уровня напряжений. Если напряжения меньше длительной прочности, деформации во времени затухают, когда напряжения в бетоне больше длительной прочности, деформации увеличиваются. Арматура сдерживает деформации в бетоне, в то время как агрессивная среда увеличивает деформации ползучести.

При решении этих задач сталкиваемся с внутренне статически неопределенными системами. Степень статической неопределимости больше, чем в случае расчёта железобетонных конструкций без учёта влияния внешней среды. Когда рассматривается процесс замачивания, можно считать влияние внешней среды не агрессивным.

Получено решение задачи с использованием теории упругой наследственности, однако можно показать, что возможно решение и с применением других теорий – теории старения или наследственной теории старения.

Приведенное решение справедливо для железобетонных элементов, подверженных внешним воздействиям в достаточно зрелом возрасте, которым можно считать один год и более с момента изготовления конструкции.

Ключові слова: бетон, арматура, ползучість, довготривала міцність, агресивна середовище, деформація, теорія пружкої успадкованості.

1 INTRODUCTION

Building materials that are used in load-bearing structures have the property of creep, which, as we know, means the ability to deform over time under constant stresses. The problems of calculating structures in such a formulation have already been solved. It makes sense to consider cases of stresses change in time, namely periods of their increase.

Deformations and displacements increase with prolonged exposure. Over time, a limit state can occur. Creep in this case shows negative qualities. But not always, for example, during deformations caused by shrinkage, temperature changes, irregular settlement of supports, stresses are attenuated, relaxation occurs. In reinforced concrete structures there is a redistribution of forces. The forces in concrete, as the weaker material, are redistributed to the reinforcement.

Some building materials such as concrete, wood, plastics have aging properties. They change their physical and mechanical properties over time. In concrete, aging is a consequence of hardening of cement stone and manifests itself as an increase in strength and a decrease in deformability. A number of theories have been developed for the calculation of building structures taking into account creep, the main ones being the theory of elastic heredity, the theory of aging and the hereditary theory of aging [1].

2 LITERATURE DATA ANALYSIS AND PROBLEM FORMULATION

A great number of works are devoted to the study of concrete properties and its state in reinforced concrete elements under various operational influences. At the same time, problems associated with the joint long-term action of loading and aggressive medium, both in limiting and over-limiting states, are studied much worse [2]. This combination leads to degradation of materials and changes in the stress-strain state of reinforced concrete structures over time. In the case of joint action, they can have a mutually reinforcing damaging effect [3-4].

Let's note the works [5-14], where it is shown that among the occurring environmental influences the most aggressive in relation to the concrete on the cement binder is the impact of sulfates, and in relation to the steel reinforcement - the impact of chlorides.

The interest in the problem does not decrease, as evidenced by a number of modern publications. Thus, the creep of concrete at the macroscopic level and consideration of its influence on the structural behavior of the material in the mathematical apparatus of applied mechanics and numerical analysis are considered in [15]. The creep and durability of reinforced concrete structural elements is studied in [16, 17]. Similar issues, but for fiber concrete, are considered in [18]. A finite-element model based on a nonlinear relationship between stresses and strains in reinforced concrete, taking into account the peculiarities of its operation after cracking is proposed in [19]. The functional dependence describing this relationship changes, for example, as reinforcement corrosion develops. The problem of considering the time factor in calculations of reinforced concrete structures is devoted to [20]; the results of experimental studies of concretes at different levels of compressive stresses loaded at young and middle age are given.

The above brief review shows that the consideration of creep and the influence of aggressive environment in the work of reinforced concrete structures continues to be an urgent problem.

3 RESEARCH GOAL AND OBJECTIVES

The purpose of this work is to investigate the stress-strain state of compressed reinforced concrete elements, taking into account creep and the influence of aggressive environment.

4 RESEARCH RESULTS

Consider a compressed reinforced concrete rod with zones of symmetrical influence of corrosive environment in depth h_v (Fig. 1), the core of the rod creeps at the same time h_c and influence area h_v . If the reinforced concrete bar is operating at normal temperature, then the rebar will not creep.

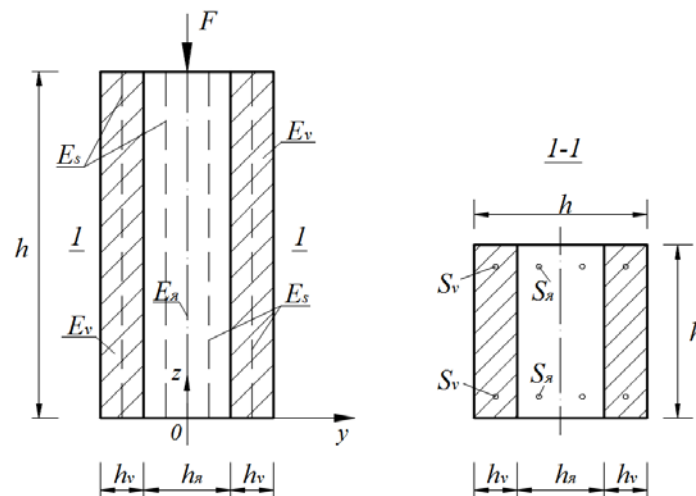


Fig. 1. Compressed reinforced concrete element with zones of symmetrical influence of aggressive environment h_v

Let's make an equation of equilibrium on the axis z

$$F = N_c + N_v + N_s \tag{1}$$

or through stresses $\sigma_{sc} = \sigma_{sv} = \sigma_s$.

$$F = (A_0 - A_v)\sigma_c + A_v \cdot \sigma_v + A_s \cdot \sigma_s.$$

Dividing (1) by A_0 :

$$\sigma_0 = (1 - \mu\nu)\sigma_c + \mu_v \cdot \sigma_v + \mu_s \cdot \sigma_s \cdot \sigma_0 \frac{F}{A_0}. \tag{2}$$

An equation with three unknowns is obtained, i.e. the problem is statically indeterminate. We must use the condition of joint deformation

$$\varepsilon_c = \varepsilon_v - \varepsilon_s. \tag{3}$$

The problem is solved in a physically linear formulation, taking into account creep [1].



$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_a(t)}{E_c(t)} \int_0^t \sigma_c(\tau) \frac{\partial \delta_c(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau;$$

$$\varepsilon_v(t) = \frac{\sigma_v(t)}{E_v(t)} \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \frac{\partial \delta_v(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s},$$

here $\delta(t, \tau)$ – total relative strain;

$$\delta_c(t, \tau) = \frac{1}{E_\gamma} + C_c(t, \tau); \quad \delta_v(t, \tau) = \frac{1}{E_\nu} + C_v(t, \tau), \quad (4)$$

$C(t, \tau)$ – creep factor.

In solving this problem, we will apply the theory of elastic heredity. Then $C(t, \tau)$ for the core and the impact zone has the form:

$$C(t, \tau) = C_0 [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \quad (5)$$

where C_0 – creep limit.

According to (3) $\gamma_c = \gamma_v = \gamma$.

Let's write the stresses through the resolvent

$$\sigma_{bc}(\tau) = E_c \left[\varepsilon_c(\tau) + \int_{\tau_1}^t \varepsilon_c(\tau) R_c(t, \tau) d\tau \right]. \quad (6)$$

By (3) $\varepsilon_c(t) = \varepsilon_s(\tau)$ instead of ε_c we substitute $\varepsilon_s = (\sigma_s/E_s) \cdot R_c$, take according to the creep measure $C_c(t, \tau) = C_{0c} [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$, then

$$R_c(t-\tau) = -\gamma \varphi_{0c} e^{-\gamma(1+\varphi_{0c})(t-\tau)}, \quad (7)$$

$\varphi_{0\gamma} = E_\gamma C_{0\gamma}$ – creep characteristic. Let's write down $r_\gamma = (1 + \varphi_{0\gamma})$ and substitute (7) into (6).

$$\sigma_c(\tau) = E_c \left[\frac{\sigma_c(\tau)}{E_s} - \gamma \varphi_{0c} \frac{1}{E_s} \int_{\tau_1}^t \sigma_s(\tau) \cdot e^{-r_c(t-\tau)} d\tau \right],$$

$$\sigma_c(\tau) = \alpha_{cs} \left[\sigma_s(\tau) - \gamma \varphi_{0c} \frac{1}{E_s} \int_{\tau_1}^t \sigma_s(\tau) \cdot e^{-r_c(t-\tau)} d\tau \right]. \quad (8)$$

Similarly write down $\sigma_v(\tau)$

$$\sigma_v(\tau) = \alpha_{vs} \left[\sigma_s(\tau) - \gamma \varphi_{0v} \frac{1}{E_s} \int_{\tau_1}^t \sigma_s(\tau) \cdot e^{-r_v(t-\tau)} d\tau \right]. \quad (9)$$

Substituting (8) and (9) into (2), we get one equation with one unknown $\sigma_s(\tau)$.

$$\sigma_0 = b_0 \sigma_s(\tau) - b_1 \int_{\tau_1}^t \sigma_s(\tau) e^{-r_c(t-\tau)} d\tau - b_2 \int_{\tau_1}^t \sigma_s(\tau) e^{-r_v(t-\tau)} d\tau, \quad (10)$$

where $b_0 = (1 - \mu_v) \alpha_{cs} + \mu_r \alpha_{sv} + \mu_s$, $b_1 = (1 - \mu_v) \gamma \varphi_{0c} \cdot \alpha_{cs}$, $b_2 = \mu_v \cdot \gamma \cdot \varphi_{0v} \cdot \alpha_{vs}$.

The integral equation (10) can be reduced to a differential equation if we differentiate twice by t [21].

Let us differentiate equation (10) by t .

$$\dot{\sigma}_0(t) = b_0 \dot{\sigma}_s(t) - b_1 \sigma_s(t) + r_c b_1 \int_{\tau_1}^t \sigma_s(\tau) \cdot e^{-r_c(t-\tau)} - b_2 \dot{\sigma}_s(t) + r_v b_2 \int_{\tau_1}^t \sigma_s(\tau) \cdot e^{-r_v(t-\tau)}. \quad (11)$$

Let's multiply equation (10) by r_c and summing with equation (11), the first integral is reduced. In equation (11), the left part of the derivative is $\dot{\sigma}_0(t)$. It means that force F can change its value over time – $F(t)$.

After summing up the equations, we get:

$$\dot{\sigma}_0(t) + r_c \sigma_0(t) = b_0 \dot{\sigma}_s(t) - b_3 \sigma_s(t) + b_4 \int_{\tau_1}^t \sigma_s(\tau) \cdot e^{-r_v(t-\tau)} d\tau, \quad (12)$$

where $b_3 = b_1 + b_2 - r_c b_0$; $b_4 = b_2(r_v - r_c)$.

Equation (12) is differentiated by t and summarize with equation (12), which will have to be multiplied by r_v .

The integrals are reduced and we obtain a differential equation with respect to $\sigma_s(t)$. Force F will be assumed to be independent of t , it's constant.

Omitting intermediate results, let us write the differential equation

$$b_0 \cdot \ddot{\sigma}_s(t) + b_5 \cdot \dot{\sigma}_s(t) + b_6 \cdot \sigma_s(t) = r_c r_v \sigma_0, \quad (13)$$

where $b_5 = b_0(r_v + r_c) - (b_1 + b_2)$;

$$b_6 = r_c r_v b_0 - b_1 r_v - b_2 r_c. \quad (14)$$

If $b_0 = 1$, we will get

$$\ddot{\sigma}_s(t) + b_7 \cdot \dot{\sigma}_s(t) + b_8 \cdot \sigma_s(t) = b_9 \cdot \sigma_0, \quad (15)$$

where

$$b_7 = \frac{b_5}{b_0}; \quad b_8 = \frac{b_6}{b_0}; \quad b_9 = \frac{r_c r_v}{b_0}. \quad (16)$$

Let's solve the equation (15)

$$\sigma_s(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3. \quad (17)$$

Stresses depend on two variables t and τ .

Equation (15) and its solution are written for old concrete when the creep is decaying. Thus C_1 and C_2 we determine from the initial conditions, C_3 at $t \rightarrow \infty$.

To determine λ let's substitute the solution of the homogeneous part $Ce^{\lambda t}$ into the homogeneous part of equation (15).

$\lambda^2 C e^{\lambda t} + b_7 \lambda C e^{\lambda t} + b_8 C e^{\lambda t} = 0$ and obtain an equation, by solving which we determine λ .

$$\lambda^2 + b_7 \lambda + b_8 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -0,5b_7 \pm \sqrt{0,25b_7^2 - b_8}.$$

The general solution of the homogeneous part of (15) will be

$$\sigma_s^0 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (18)$$

Partial solution with the right part $\bar{\sigma}_s(t \rightarrow \infty)$.

For $t \rightarrow \infty$ let's determine the long-term moduli of elasticity.



$$E_{bc}^l = \frac{E_{bc}}{(1 + \varphi_{0c})}; \quad E_{bv}^l = \frac{E_{bv}}{(1 + \varphi_{0v})}.$$

From the coincidence of deformations for $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\sigma_c(\infty)}{E_{bc}^l} = \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \sigma_c(\infty) = \frac{E_{bc}^l}{E_s} \sigma_s = \sigma_s \alpha_{cs}^l.$$

Similarly $\sigma_v(\infty) = \sigma_s \alpha_{vs}^l$.

$\sigma_c(\infty)$ and $\sigma_v(\infty)$ we substitute into equation (2).

$$\sigma_0 = (1 - \mu\nu)\sigma_s \alpha_{cs}^l + \mu\nu\sigma_s \alpha_{vs}^l + \mu\nu\sigma_s.$$

From this we find σ_s^l .

$$\sigma_s(\infty) = \frac{\sigma_0}{(1 - \mu\nu)\alpha_{cs}^l + \mu\nu\lambda_{vs} + \mu_s}. \quad (19)$$

5 DISCUSSION OF RESEARCH RESULTS

Stress $\sigma_s(\infty)$ for reinforced concrete rod means, that for $t \rightarrow \infty$, it is a time, when creep deformations are attenuated. it could be 10-20 years.

For such a time, the solution of this equation gives a concrete idea of how creep and corrosive environment affect the stress state of a reinforced concrete rod. but during design, care must be taken to ensure that the stresses in the concrete do not reach the level of the long-term strength of the concrete.

Thus, general solution:

$$\sigma_s(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \sigma_s(\infty). \quad (20)$$

The arbitrary constants are defined at $t = \tau_1$, that is, it is an elastic-momentary problem.

We obtain a system of equations

$$\begin{aligned} C_1 e^{\lambda_1 \tau_1} + C_2 e^{\lambda_2 \tau_1} &= \sigma_s(\tau_1) - \sigma_s(\infty), \\ \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 \tau_1} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 \tau_1} &= b_9 \sigma_s(\tau_1). \end{aligned} \quad (21)$$

When solving this system, we obtain

$$C_1 = \frac{\sigma_s(\tau_1)(b_9 - \lambda_2) + \sigma_s(\infty)\lambda_2}{b_7 + \sqrt{0,25b_7^2 - b_8}} e^{-\lambda_1 t}, \quad (22)$$

$$C_2 = \frac{\sigma_s(\tau_1)(b_9 - \lambda_1) + \sigma_s(\infty)\lambda_1}{-b_7 - \sqrt{0,25b_7^2 - b_8}} e^{-\lambda_2 t}. \quad (23)$$

Let's introduce notations and substitute $C_1 = b_{10} e^{-\lambda_1 t}$ and $C_2 = b_{11} e^{-\lambda_2 t}$ into equation (20),

where

$$\begin{aligned} b_{10} &= \frac{\sigma_s(\tau_1)(b_9 - \lambda_2) + \sigma_s(\infty)\lambda_2}{b_7 + \sqrt{0,25b_7^2 - b_8}}, \\ b_{11} &= \frac{\sigma_s(\tau_1)(b_9 - \lambda_1) + \sigma_s(\infty)\lambda_1}{-b_7 - \sqrt{0,25b_7^2 - b_8}}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\sigma_s(t, \tau) = b_{10} \cdot e^{-\lambda_1(t-\tau_1)} + b_{11} \cdot e^{-\lambda_2(t-\tau_1)} + \sigma_s(\infty). \quad (25)$$

By stresses $\sigma_s(t, \tau)$ let's determine the deformations

$$\varepsilon_s(t, \tau) = \frac{\sigma_s(t, \tau)}{E_s}. \quad (26)$$

The condition of joint deformation is also true in the case of prolonged deformation.

$$\varepsilon_c(t, \tau_1) = \varepsilon_s(t, \tau_1) = \frac{\sigma_s(t, \tau_1)}{E_s} = \frac{\sigma_c(t, \tau)}{E_c}, \quad (27)$$

$$\sigma_c(t, \tau_1) = \sigma_s(t, \tau_1) \frac{E_c}{E_s} = \sigma_c \alpha_{cs}, \quad (28)$$

$$\varepsilon_v(t, \tau_1) = \varepsilon_s(t, \tau_1) = \frac{\sigma_s(t, \tau)}{E_s} = \frac{\sigma_v(t_1, \tau)}{E_v}, \quad (29)$$

$$\sigma_c(t, \tau) = \sigma_s(t, \tau_1) = \frac{E_v}{E_s} = \sigma_s(t, \tau_1) \alpha_{vs}. \quad (30)$$

Stresses and strains increase over time. stresses should not be greater than a certain value and should remain constant over time.

Let this be the operating time t_E and stresses $\sigma_c(t_E)$ and $\sigma_v(t_E)$ no longer grow.

$$\varepsilon_v(t_E) = \sigma_v(t_E) \delta_v(t_E, \tau_2),$$

$$\varepsilon_s(t_E) = \frac{\sigma_s(t_E)}{E_s}.$$

We apply the condition of coincidence: $\varepsilon_c(t_E) = \varepsilon_v(t_E)$, $\sigma_c(t_E) \delta_c(t_E, \tau_1) = \sigma_v(t_E) \delta_v(t_E, \tau_1)$ we get

$$\sigma_v(t_E, \tau_1) = \sigma_c(t_E) \frac{\delta_c(t_E, \tau_1)}{\delta_v(t_E, \tau_1)}, \quad (30)$$

$$\frac{\sigma_s(t_E)}{E_s} = \sigma_c(t_E) \delta_c(t_E, \tau_1), \quad \sigma_s(t_E) = \sigma_c(t_E) \frac{\delta_c(t_E, \tau_1)}{E_s}. \quad (31)$$

Let's substitute the stress values in equation (1).

$$F_{t_E} = \left[(A_0 - A_b) \delta_c(t_E - \tau_1) + A_b \frac{\delta_c(t_E, \tau_1)}{\delta_v(t_E - \tau_1)} + \mu_s \frac{\delta_c(t_E, \tau_1)}{E_s} \right] \sigma_c(t_E, \tau_1). \quad (32)$$

If compressing force F_{t_E} will be determined by this formula, then the stresses will become constant from the moment t_E .

6 CONCLUSIONS

Thus, the stress-strain state of reinforced concrete compressed elements with regard for creep and influence of corrosive medium is formed in time. A solution of the problem using the theory of elastic heredity has been obtained, but it can be shown that a solution using other theories is also possible.

The above solution is true for reinforced concrete elements exposed to external influences at a sufficiently mature age, which can be considered one year or more from the date of the structure manufacture.

References

1. Ulitskiy, I. I., Chzhan, Ya. O., Golyshev A. B. (1967). *Teoriya i raschet zhelezobetonnykh sterzhnevnykh konstruksiy s uchetom dlitelnykh protsessov*. [Theory and calculation of reinforced concrete bar structures, taking into account long-term processes]. Kiev: Budivelnik. [in Russian].
2. Bondarenko, V. M., Kolchunov, V. I. (2013). *Kontseptsiya i napravleniya razvitiya teorii konstruktivnoy bezopasnosti zdaniy i sooruzheniy pri silovykh i sredovykh vozdeystviyakh*. [The concept and directions of development of the theory of constructive safety of buildings and structures under force and environmental influences]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitelstvo*. 2. 28–31. [in Russian].
3. Selyaev, V. P., Solomatov, V. I., Oshkina, L. M. (2001). *Khimicheskoe soprotivlenie napolnennykh tsementnykh kompozitov*. [Chemical resistance of filled cement composites]. Saransk: Izd-vo Mordov. un-ta. [in Russian].
4. Pukhonto, L. M. (2004). *Dolgovechnost zhelezobetonnykh konstruksiy inzhenernykh sooruzheniy: (silosov, bunkerov, rezervuarov, vodonapornykh bashen, podpornykh sten)*. [Durability of reinforced concrete structures of engineering structures: (silos, bunkers, tanks, water towers, retaining walls)] *Monografiya Izd-vo ASV*. [in Russian].
5. Vasilev, A. I., Podvalnyy, A. M. (2002). *Prognoz korrozii armatury zhelezobetonnykh konstruksiy avtodorozhnykh mostov v usloviyakh khloridnoy agressii i karbonizatsii*. [Prediction of Corrosion of Reinforcement for Reinforced Concrete Structures of Highway Bridges in Conditions of Chloride Aggression and Carbonization]. *Beton i zhelezobeton*. № 6. 27–32. [in Russian].
6. Dronov, A. B. (2017). *Prochnost i deformativnost zhelezobetonnykh izgibaemykh elementov s korroziionnymi povrezhdeniyami: dis. ... kand. tekhn. nauk: 05.23.01* [Strength and deformability of reinforced concrete bending elements with corrosion damage]. Belgorod. [in Russian].
7. Migunov, V. N. (2016). *Dlitelnye eksperimentalnye issledovaniya modeley zhelezobetonnykh konstruksiy s treshchinami v agressivnoy khloridsoderzhashchey srede: monogr.* [Long-term experimental studies of models of reinforced concrete structures with cracks in an aggressive chloride-containing environment]. Penza: PGUAS. [in Russian].
8. Ovchinnikov, I. I., Migunov, V. N., Ovchinnikov, I. G. (2014). *Modelirovanie kinetiki deformirovaniya armirovannykh konstruksiy v spetsialnykh ekspluatatsionnykh sredakh: monogr.* [Modeling the kinetics of deformation of reinforced structures in special operating environments]. Penza: PGUAS. [in Russian].
9. Popesko, A. I. (1996). *Rabotosposobnost zhelezobetonnykh konstruksiy, podverzhennykh korrozii*. [Efficiency of reinforced concrete structures subject to corrosion]. SPb.: SPb gos. arkh.- stroit. un-t. [in Russian].
10. Rozental, N. K., Stepanova, V. F., Chekhniy, G. V. (2017). *Khlорidy v betone i ikh vliyanie na razvitie korrozii stalnoy armatury*. [Chlorides in concrete and their influence on the development of corrosion of steel reinforcement]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitelstvo*. № 1. 92–96. [in Russian].
11. Selyaev, V. P., Selyaev, P. V., Alimov, M. F., Sorokin, Ye. V. (2017). *Otsenka ostatochnogo resursa zhelezobetonnykh izgibaemykh elementov, podverzhennykh deystviyu khlорidnoy korrozii*. [Estimation of the residual life of reinforced concrete bending elements exposed to chloride corrosion] *Stroitelstvo i rekonstruksiya*. № 6 (74). 49–58. [in Russian].
12. Smolyago, G. A., Dronov, A. B., Frolov, N. V. (2017). *Modelirovanie velichiny korroziionnykh povrezhdeniy armatury zhelezobetonnykh konstruksiy v usloviyakh khlорidnoy agressivnoy sredy*. [Modeling the magnitude of corrosion damage to reinforcement of reinforced concrete structures in

- a chloride aggressive environment]. *Izvestiya Yugo- Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta*. № 1 (70). 43–49. [in Russian].
13. Sorokin, Ye. V. (2014) *Raschet i prognozirovaniye dolgovechnosti zhelezobetonnykh konstruksiy*: dis. ... kand. tekhn. nauk: 05.23.01 [Calculation and forecasting of durability of reinforced concrete structures] Saransk. [in Russian].
14. Fedosov, S. V., Rumyantseva, V. Ye., Konovalova, V. S. (2016). Issledovanie protsessov korrozionnoy destruktzii zhelezobetonnykh izdeliy v agressivnykh sredakh s khlorid-ionami. [Investigation of the processes of corrosion destruction of reinforced concrete products in corrosive environments with chloride ions]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*. № 5 (58). 61–67. [in Russian].
15. England, G. L. (1980). Creep and temperature effects in concrete structures: reality and prediction. *Applied Mathematical Modelling*. Volume 4. Issue 4. 261–267.
16. Breslavskiy, D. V., Chuprynin, A. A., Sereda, N. V. (2015). Polzuchest zhelezobetonnykh elementov konstruksiy. [Creep of reinforced concrete structural members] *Vestnik Nats. tekhn. un-ta "KhPI" : sb. nauch. tr. Temat. vyp. : Dinamika i prochnost mashin*. [Bulletin of the National Technical University "KhPI": collection of articles. scientific. tr. Topic. no. : Dynamics and strength of machines]. Kharkov : NTU "KhPI". № 55 (1164). 22–25. [in Russian].
17. Chuprynin, A. A. (2016). Durability of reinforced concrete structural elements. [Durability of reinforced concrete structural elements]. *Budivnitsvo, konstruksiya, remont budivel ta sporud miskogo gospodarstva*. [Construction, construction, repair of buildings and structures of municipal economy]. Komunalne gospodarstvo mist. Vipusk 128. 5–9. [in Russian].
18. Nikola Tošić, Stanislav Aidarov and Albert de la Fuente (2020). Systematic Review on the Creep of Fiber-Reinforced Concrete. *Materials*. Basel. 13(22):5098. doi: 10.3390/ma13225098.
19. Yelizarov, S. V., Benin, A. V. (2004). Uchet polzuchesti betona i korrozii armatury pri raschete zhelezobetonnykh konstruksiy na seymstoykost. [Taking into account the creep of concrete and corrosion of reinforcement when calculating reinforced concrete structures for earthquake resistance]. *Izvestiya peterburgskogo universiteta putey soobshcheniya*. №2. 180–185. [in Russian].
20. Palivoda, O. A. (2019). Vrakhuvannya deformatsiy povzuchosti pri rozrakhunku zalizobetonnikh elementiv. [Taking into account creep deformations when calculating reinforced concrete elements]. *Naukovi visti Dalivskogo universitetu*. №16. [in Ukrainian].
21. Prokopovich, I. Ye. (1963). *Vliyanie dlitelnykh protsessov na napryazhennoe i deformirovannoe sostoyanie sooruzheniy*. [Influence of long processes on the stressed and deformed state of structures]. M.: Stroyizdat. [in Russian].

Література

1. Улицкий И. И., Чжан Я. О., Гольшев А. Б. Теория и расчёт железобетонных стержневых конструкций с учётом длительных процессов. Киев: Будівельник, 1967. 348с.
2. Бондаренко В. М., Колчунов В. И. Концепция и направления развития теории конструктивной безопасности зданий и сооружений при силовых и средовых воздействиях Промышленное и гражданское строительство, 2013. № 2. С. 28–31.
3. Селяев В. П., Соломатов В. И., Ошкина Л. М. Химическое сопротивление наполненных цементных композитов Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2001. 152 с.
4. Пухонто Л. М. Долговечность железобетонных конструкций инженерных сооружений: (силосов, бункеров, резервуаров, водонапорных башен, подпорных стен). Монография. М.: Изд-во АСВ, 2004. 424 с.
5. Васильев А. И., Подвальный А. М. Прогноз коррозии арматуры железобетонных конструкций автодорожных мостов в условиях хлоридной агрессии и карбонизации. Бетон и железобетон, 2002. № 6. С. 27–32
6. Дронов А. В. Прочность и деформативность железобетонных изгибаемых элементов с коррозионными повреждениями: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01. Белгород, 2017. 163 с.
7. Мигунов В.Н. Длительные экспериментальные исследования моделей железобетонных конструкций с трещинами в агрессивной хлоридсодержащей среде: моногр. Пенза: ПГУАС, 2016. 404 с.

8. Овчинников И. И., Мигунов В. Н., Овчинников И. Г. Моделирование кинетики деформирования армированных конструкций в специальных эксплуатационных средах: моногр. Пенза: ПГУАС, 2014. 280 с.
9. Попеско А.И. Работоспособность железобетонных конструкций, подверженных коррозии. СПб.: СПб гос. архит.-строит. ун-т, 1996. 182 с.
10. Розенталь Н. К., Степанова В. Ф., Чехний Г. В. Хлориды в бетоне и их влияние на развитие коррозии стальной арматуры. Промышленное и гражданское строительство, 2017. № 1. С. 92–96.
11. Селяев В. П., Селяев П. В., Алимов М. Ф., Сорокин Е. В. Оценка остаточного ресурса железобетонных изгибаемых элементов, подверженных действию хлоридной коррозии. Строительство и реконструкция, 2017. № 6 (74). С. 49–58.
12. Смоляго Г. А., Дронов А. В., Фролов Н. В. Моделирование величины коррозионных повреждений арматуры железобетонных конструкций в условиях хлоридной агрессивной среды. Известия Юго-Западного государственного университета, 2017. № 1 (70). С. 43–49.
13. Сорокин Е.В. Расчет и прогнозирование долговечности железобетонных конструкций: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 Саранск, 2014. 206 с.
14. Федосов С. В., Румянцева В. Е., Коновалова В. С. Исследование процессов коррозионной деструкции железобетонных изделий в агрессивных средах с хлорид-ионами. Вестник гражданских инженеров, 2016. № 5 (58). С. 61–67.
15. G. L. England. Creep and temperature effects in concrete structures: reality and prediction. Applied Mathematical Modelling. Volume 4. Issue 4. 1980. Pages 261–267.
16. Бреславский Д. В., Чупрынин А. А., Середа Н. В. Ползучесть железобетонных элементов конструкций. Вестник Нац. техн. ун-та "ХПИ" : сб. науч. тр. Темат. вып. : Динамика и прочность машин. Харьков : НТУ "ХПИ", 2015. № 55 (1164). С. 22–25.
17. Чупрынин А. А. Долговечность железобетонных элементов конструкций. Будівництво, конструкція, ремонт будівель та споруд міського господарства. Комунальне господарство міст, 2016. 128. С. 5–9.
18. Nikola Tošić, Stanislav Aidarov and Albert de la Fuente. Systematic Review on the Creep of Fiber-Reinforced Concrete. Materials. Basel. 2020. 13(22):5098. doi: 10.3390/ma13225098.
19. Елизаров С. В., Бенин А. В. Учет ползучести бетона и коррозии арматуры при расчете железобетонных конструкций на сейсмостойкость. известия петербургского университета путей сообщения, 2004. №2. С. 180–185.
20. Паливода О. А. Врахування деформацій повзучості при розрахунку залізобетонних елементів. Наукові вісті Даліського університету, 2019. №16.
21. Прокопович И. Е. Влияние длительных процессов на напряжённое и деформированное состояние сооружений. М.: Стройиздат, 1963 – 240с.

Bekirova Mariam

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
Ph.D., associate professor
Didrihsona str.,4 Odessa, Ukraine, 65029
bekirova.ogasa@gmail.com
ORCID: 0000-0002-6162-9967

For references:

Bekirova M. (2021). Stress state of compressed reinforced concrete elements considering creep and influence of an aggressive environment. Mechanics and Mathematical Methods. 3 (1). 72–82

Для посилань:

Бекірова М. М. Напружено-деформований стан стиснених залізобетонних елементів з урахуванням повзучості і впливу агресивного середовища. Механіка та математичні методи, 2021. Т. 3. №. 1. С. 72–82.

УДК 517.95

ПРО ПОРУШЕННЯ ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ СИСТЕМ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Кириченко В. В.¹, Лесіна Є. В.²

¹Національний технічний університет України "КПІ ім. І. Сікорського"

²Донецький національний технічний університет

Анотація: Вивчення питань коректної постановки граничних задач для диференціальних рівнянь та систем займає важливе місце в сучасних дослідженнях. Першорядним при розгляді коректності є питання однозначної розв'язності даної задачі. Зокрема, викликає інтерес проблема порушення єдиності розв'язку граничних задач для загальних диференціальних рівнянь в обмежених областях з алгебраїчною межею.

Вперше на властивість нетривіального розв'язання однорідної задачі Діріхле для неправильно еліптичних рівнянь другого порядку звернув увагу А. В. Біцадзе, побудувавши приклад рівняння з постійними комплексними коефіцієнтами, для якого згадана задача мала нульовий розв'язок. Р. А. Александрян отримав умову порушення єдиності розв'язку задачі Діріхле в одиничному крузі для гіперболічного рівняння у випадку, коли кути нахилу характеристик відрізняються знаком. В. П. Бурський, розглядаючи однорідну задачу Діріхле в одиничному крузі для рівнянь другого порядку з постійними комплексними коефіцієнтами і однорідним невідродженим символом, отримав критерій нетривіального розв'язання у вигляді π -іраціональності кута між характеристиками.

У даній роботі досліджується питання порушення єдиності розв'язку однорідної задачі Діріхле для системи безтипових диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку в модельній області – крузі. Вихідна система записана у вигляді рівняння з комутуючими матричними коефіцієнтами. Умова перестановки дозволяє отримати необхідну і достатню умову нетривіального розв'язання даної задачі у вигляді рівності нулю визначника, елементи якого виражаються через коефіцієнти рівняння. Така форма запису критерію дозволяє будувати приклади систем, ядро задачі Діріхле для яких є нетривіальним і нескінченновимірним. Основу дослідження складають інтегральна умова зв'язку асоційованих граничних L -слідів, а також функціональна схема, застосування якої зводить розкладання матриці-функції в ряд Фур'є до стандартного розкладання кожного з її елементів. Доведено теорему нетривіального розв'язання однорідної задачі Діріхле.

Ключові слова: задача Діріхле, асоційовані L -сліди розв'язку, векторно-поліноміальний розв'язок, ряд Фур'є, простір Соболева вектор-функцій.

ON THE UNIQUENESS VIOLATION OF THE DIRICHLET PROBLEM SOLUTION FOR SECOND-ORDER SYSTEMS

V. Kyrychenko¹, Ye. Lesina²

¹National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

²Donetsk National Technical University

Abstract: The study of the issues of the correct posedness of boundary value problems for differential equations and systems occupies an important place in modern research. When considering correctness, the question of unique solvability of this problem is of paramount importance. In particular, the problem of violation of the uniqueness of the solution of boundary value problems for general differential equations in bounded domains with algebraic boundary is of interest.

The property of nontrivial solvability of the homogeneous Dirichlet problem for incorrectly elliptic equations of the second order was first pointed out by A. V. Bitsadze, having constructed an example of an equation with constant complex obtained a condition for the violation of the uniqueness



of the solution to the Dirichlet problem in the unit disc for a hyperbolic equation in the case when the slope angles of the characteristics differ in sign. V. P. Burskii, considering the homogeneous Dirichlet problem in the unit disc for second-order equations with constant complex coefficients and a homogeneous non-degenerate symbol, obtained a criterion for nontrivial solvability in the form of π -irrationality of the angle between the characteristics.

In this paper, we investigate the question of violation of the uniqueness of the solution of the homogeneous Dirichlet problem for a system of typeless second-order partial differential equations in a model domain – a circle. The original system is written in the form of an equation with commuting matrix coefficients. The permutability condition allows one to obtain a necessary and sufficient condition for the nontrivial solvability of the problem under consideration in the form of equality to zero of the determinant, the elements of which are expressed in terms of the coefficients of the equation. This form of writing the criterion allows one to construct examples of systems for which the kernel of the Dirichlet problem is nontrivial and infinite-dimensional. The study was based on the integral condition for the connection of associated boundary L -traces, as well as a functional scheme, the application of which reduces the expansion of a matrix function in a Fourier series to a standard expansion of each of its elements. A theorem of nontrivial solvability of the homogeneous Dirichlet problem is proved.

Keywords: the Dirichlet problem, associated L -traces of a solution, vector-polynomial solution, Fourier series, the Sobolev space of vector-functions.

1 ВСТУП

Дослідженню властивості ньютеровості операторів граничних задач, що розглядаються для еліптичних диференціальних рівнянь, поклала початок робота Я. Б. Лопатинського [1], в якій зазначена умова зведення загальної граничної задачі в обмеженій області до еквівалентної системи інтегральних рівнянь. Пізніше була встановлена необхідність цієї умови [2], [3], [4], яка називається в даний час умовою Лопатинського.

Вперше ефект нетривіального розв'язання однорідної задачі Діріхле для диференціальних рівнянь другого порядку був виявлений А. В. Біцадзе. У його роботі [5] наведено приклад еліптичної системи диференціальних рівнянь, для якої однорідна задача Діріхле в крузі має нескінченний набір лінійно незалежних поліноміальних розв'язків. Згодом А. В. Біцадзе побудував ще один приклад системи з тією самою властивістю і ввів поняття слабо зв'язаної системи в довільній області з межею Ляпунова, простір розв'язків задачі Діріхле якої в даній області має скінченну розмірність [6]. Однак перевірка умови слабкої зв'язаності викликає труднощі навіть у випадку круга для скалярного рівняння.

Як показано В. П. Бурським в роботі [7], для єдиності розв'язку першої граничної задачі тип рівняння не має принципового значення. У статті [8] отримано критерій нетривіальної розв'язності однорідної задачі Діріхле в одиничному крузі для рівнянь другого порядку з постійними комплексними коефіцієнтами і однорідним (за порядком диференціювання) не виродженим символом у вигляді π -раціональності кута між комплексними характеристиками.

Критерій порушення єдиності розв'язку однорідної задачі Діріхле в одиничному крузі K для безтипового диференціального рівняння другого порядку

$$au''_{x_1x_1} + bu''_{x_1x_2} + cu''_{x_2x_2} = 0,$$

яке розглядається в [8], де a, b, c – комплексні квадратні матриці $n \times n$, $u \in H^{2,n}(K)$, $H^{2,n}(K) = [H^2(K)]^n$ – простір Соболева вектор-функцій, записано в достатньо складній формі. У зв'язку з цим виникла необхідність більш простого опису систем з порушенням єдиності, який було реалізовано в роботах [9], [10] за допомогою додаткової умови комутативності матриць-коефіцієнтів і метода двоїстості "рівняння–область" [11], [12], [13]. Результатом є необхідна і достатня умова, яка записана в вигляді рівності нулю визначника, елементи якого виражаються через коефіцієнти рівняння, і дозволяють будувати приклади систем, ядро задачі Діріхле для яких є нетривіальним та нескінченновимірним.

У даній роботі, з метою отримання критерію порушення єдиності розв'язку першої граничної задачі в одиничному крузі для систем диференціальних рівнянь другого порядку, використаний інший підхід. В основі дослідження лежить інтегральна умова зв'язку асоційованих граничних L -слідів розв'язку задачі Коші, сформульована і доведена в книзі [11], а також використовується наведена нижче функціональна схема, що зводить розкладання матриці-функції в ряд Фур'є до стандартного розкладу кожного елемента.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ПОПЕРЕДНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Для рівняння



$$Lu \equiv \left(\sin \phi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \phi_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \left(\sin \phi_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \phi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u = 0 \quad (1)$$

розглядається однорідна задача Діріхле

$$u|_{\partial K} = 0 \quad (2)$$

в просторі Соболева $H^{m,n}(K) = [H^m(K)]^n$ ($m \geq 2$) вектор-функцій, де $K = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1\}$ – одиничний круг с межею ∂K . Передбачається, що ϕ_1 та ϕ_2 – комутуючі комплексні невивроджені $n \times n$ -матриці, $\phi_0 = \phi_2 - \phi_1$ – їх різниця.

В [11] вивчалась задача Коші для рівняння (1):

$$u|_{\partial K} = \psi, \quad u'|_{\partial K} = \chi, \quad (3)$$

де $\psi \in H^{m-1/2,n}(\partial K)$, $\chi \in H^{m-3/2,n}(\partial K)$, ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі. При цьому було доведено, що L -сліди $P \in H^{m-1/2,n}(\partial K)$ і $C \in H^{m-3/2,n}(\partial K)$ розв'язку виражаються через звичайні сліди функції u на межі області наступним чином:

$$\begin{aligned} P &= -l(\nu(x))\psi(x), \\ C &= l(\nu(x))\chi(x) + [(v_1^2 - v_2^2) \sin(\phi_1 + \phi_2) + 2v_1v_2 \cos(\phi_1 + \phi_2)]\psi'_s + \\ &+ [(v_2^2 - v_1^2) \cos(\phi_1 + \phi_2) - 2v_1v_2 \sin(\phi_1 + \phi_2)]\psi. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут l – матричний символ диференціального оператора L , s – натуральний параметр, зростаючий в напрямку вектору $\tau = (-v_2, v_1)$. При дослідженні питання існування єдиного розв'язку задачі (1), (3) в просторі $H^{m,n}(K)$, була отримана умова зв'язку слідів ψ і χ (див. теорему 1, доведення якої наводиться в книжці [11]).

Теорема 1. Нехай вектор-функції $P \in H^{m-1/2,n}(\partial K)$ і $C \in H^{m-3/2,n}(\partial K)$ задовольняють наступному співвідношенню:

$$\int_{\partial K} [P(x(s))(-i\langle \nu, \bar{\xi} \rangle + C(x(s)))] \exp(-i\langle x, \bar{\xi} \rangle) ds_x = 0. \quad (5)$$

Тоді існує єдиний розв'язок $u \in H^{m,n}(K)$ задачі (1), (3), граничні дані ψ , χ якого пов'язані з функціями P і C рівностями (4). Тут $\langle a, b \rangle = a \cdot \bar{b} = a_1 \cdot \bar{b}_1 + a_2 \cdot \bar{b}_2$.

Перепишемо інакше інтегральне співвідношення (5), яке є умовою зв'язку асоційованих граничних L -слідів. Введемо вектори $\tilde{a}^j = (-\cos \phi_j, \sin \phi_j)$ з матричними компонентами і розкладемо експоненту $e^{-i\langle x, \bar{\xi} \rangle}$ при $\xi = \lambda \tilde{a}^j$ в ряд по λ . Тоді коефіцієнти ряду будуть пов'язані наступними умовами:

$$\int_{\partial K} [NP(x(s))(v \cdot \tilde{a}^j)Q'(x \cdot \tilde{a}^j) + C(x(s))(x \cdot \tilde{a}^j)^N] ds = 0, \quad \forall N \in \mathbf{Z}^+, \quad j = 1, 2,$$

додавши які, одержимо:

$$\int_{\partial K} [P(x(s))(v \cdot \tilde{a}^j)Q'(x \cdot \tilde{a}^j) + C(x(s))Q(x \cdot \tilde{a}^j)] ds = 0, \quad \forall Q \in \mathbf{C}[z], \quad j = 1, 2. \quad (6)$$

Рівність (5) в еквівалентній формі запису (6) є більш зручною для подальших обчислень. Зауважимо, що в одиничному крузі K нормаль $\nu(x) = x$, а натуральний



параметр s співпадає з кутовою координатою τ . Далі, $(\nu \cdot \tilde{a}^j) = (x \cdot \tilde{a}^j) = -\cos(\tau I + \phi_j)$, оскільки $x = (\cos \tau, \sin \tau)$.

3 ФУНКЦІОНАЛЬНА СХЕМА

Введемо простір $L_2^{n \times n}(0, 2\pi)$ квадратних матриць порядку n з елементами із звичайного простору Гільберта $L_2(0, 2\pi)$ і визначимо в ньому скалярний добуток

$$\forall F, G \in L_2^{n \times n}(0, 2\pi), \quad (F, G) = \frac{1}{\pi} \operatorname{tr} \int_0^{2\pi} F(t) \cdot G^*(t) dt, \quad (7)$$

який породжує норму

$$\|F\|^2 = \frac{1}{\pi} \operatorname{tr} \int_0^{2\pi} F(t) \cdot F^*(t) dt, \quad \forall F(t) \in L_2^{n \times n}(0, 2\pi).$$

Усі аксіоми скалярного добутку залишаються справедливими для виразу (7). Дійсно, полуторалінійність очевидна, антисиметричність випливає із відомих формул $(AB)^* = B^*A^*$ і $\operatorname{tr} A^* = \overline{\operatorname{tr} A}$ для довільних квадратних матриць A і B . Далі, нерівність $\|F\|^2 \geq 0$ не порушується, оскільки $(F \cdot F^* u, u) = (F^* u, F^* u) \geq 0$, а слід позитивно визначеної матриці – число додатне. Нарешті, рівність $\|F\|^2 = 0$ означає, що $\operatorname{tr}(F \cdot F^*(t)) = 0, \forall t$, в силу додатності сліду як суми власних значень оператора.

Разом з простором $L_2^{n \times n}(0, 2\pi)$, введемо для $m \in \mathbf{N}$ простір Соболева $H^{m, n \times n}(0, 2\pi)$ квадратних матриць порядку n і визначимо в ньому скалярний добуток і норму відповідно:

$$(F, G)_{H^{m, n \times n}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{tr} \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha F(t) \cdot \partial^\alpha G^*(t) \right] dt,$$

$$\|F\|_{H^{m, n \times n}}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{tr} \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha F(t) \cdot \partial^\alpha F^*(t) \right] dt.$$

Нижче буде показано, що застосування такої функціональної схеми зводить розкладання матриці-функції в ряд Фур'є до звичайного розкладання кожного з її елементів.

Система матриць-функцій $\{\cos k\tau I, \sin k\tau I\}_{k=0}^\infty$ є ортонормованою і повною в просторі $L_2^{n \times n}(0, 2\pi)$. Для перевірки ортонормованості достатньо підставити функції із вказаної системи в формулу (7) скалярного добутку и переконалися в справедливості співвідношень ортогональності.

Доведемо повноту системи $\{\cos k\tau I, \sin k\tau I\}_{k=0}^\infty$, а саме: покажемо, що для будь-якої функції $F(\tau) \in L_2^{n \times n}(0, 2\pi)$ знайдуться коефіцієнти F_k^c, F_k^s її розкладання в ряд Фур'є такі, що

$$\left\| F(\tau) - \sum_{k=0}^N \left[F_k^c \cos k\tau I + F_k^s \sin k\tau I \right] \right\| \rightarrow 0 \quad (8)$$

при $N \rightarrow \infty$.

Попередньо покажемо, що справедлива рівність:



$$\|F(\tau)\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \|F_{i,j}(\tau)\|^2. \quad (9)$$

Справді,

$$F \cdot F^* = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{f}_{11} & \bar{f}_{21} & \dots & \bar{f}_{n1} \\ \bar{f}_{12} & \bar{f}_{22} & \dots & \bar{f}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{f}_{1n} & \bar{f}_{2n} & \dots & \bar{f}_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} |f_{11}|^2 + \dots + |f_{1n}|^2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & |f_{21}|^2 + \dots + |f_{2n}|^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & |f_{n1}|^2 + \dots + |f_{nn}|^2 \end{pmatrix},$$

звідки слід отриманого підінтегрального виразу $F \cdot F^*$ в означенні норми дорівнює

$$\text{tr}(F \cdot F^*) = |f_{11}|^2 + |f_{12}|^2 + \dots + |f_{1n}|^2 + |f_{21}|^2 + |f_{22}|^2 + \dots + |f_{2n}|^2 + \dots +$$

$$|f_{n1}|^2 + |f_{n2}|^2 + \dots + |f_{nn}|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2 + \dots + |f_n|^2.$$

Отже, квадрат норми матриці-функції $F(\tau) \in L_2^{n \times n}(0, 2\pi)$ дорівнює сумі квадратів норм всіх її елементів $F_{ij}(\tau) \in L_2(0, 2\pi)$.

Скористаємося тим фактом, що будь-яку функцію $F_{ij}(\tau) \in L_2(0, 2\pi)$ можна розкласти в ряд Фур'є за ортонормованою та повною в просторі $L_2(0, 2\pi)$ системою тригонометричних функцій $\{\cos k\tau, \sin k\tau\}_{k=0}^{\infty}$:

$$F(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(F_k^c)_{ij} \cos k\tau + (F_k^s)_{ij} \sin k\tau \right].$$

Тут $(F_k^c)_{ij}, (F_k^s)_{ij}$ – коефіцієнти розкладання, значення яких, як відомо з гармонійного аналізу, дорівнюють відповідно

$$(F_k^c)_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos k\tau \cdot F_{ij}(\tau) d\tau; \quad (F_k^s)_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin k\tau \cdot F_{ij}(\tau) d\tau.$$

Неважко помітити, що множення кожного елемента $F_{ij}(\tau)$ матриці $F(\tau)$ на число $\cos k\tau$ рівносильно множенню матриці-функції $F(\tau)$ на матрицю $\cos k\tau I$. Ті ж міркування залишаються справедливими при множенні на $\sin k\tau$. Це спостереження дозволяє записати рівності, з яких визначаються матриці F_k^c, F_k^s :

$$F_k^c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos k\tau \cdot F(\tau) d\tau; \quad F_k^s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin k\tau \cdot F(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Саме матриці (10) є шуканими коефіцієнтами розкладання матриці-функції $F(\tau)$ в ряд Фур'є по системі $\{\cos k\tau I, \sin k\tau I\}_{k=0}^{\infty}$:

$$F(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} [F_k^c \cos k\tau I + F_k^s \sin k\tau I].$$

Тепер доведення повноти системи $\{\cos k\tau I, \sin k\tau I\}_{k=0}^{\infty}$ завершує наступне твердження, яке випливає з доведених вище рівностей (8), (9).

Твердження. *Нехай*

$$F_N(\tau) = \sum_{k=0}^N [F_k^c \cos k\tau I + F_k^s \sin k\tau I],$$

$$F_{N,ij}(\tau) = \sum_{k=0}^N [F_k^c \cos k\tau + F_k^s \sin k\tau].$$

Тоді

$$\|F_N(\tau)\|_{L_2^{n \times n}(0, 2\pi)} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|F_{N,ij}(\tau)\|_{L_2(0, 2\pi)} \rightarrow 0.$$

Отже, система $\{\cos k\tau I, \sin k\tau I\}_{k=0}^{\infty}$ утворює базис в просторі $L_2^{n \times n}(0, 2\pi)$. При цьому

$$\begin{aligned} \|F(\tau)\|_{L_2^{n \times n}(0, 2\pi)}^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{tr} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (F_k^c \cos k\tau I + F_k^s \sin k\tau I) \times \right. \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} (F_k^c * \cos k\tau I + F_k^s * \sin k\tau I) \left. \right] d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} [\text{tr}(F_k^c \cdot F_k^{c*}) + \text{tr}(F_k^s \cdot F_k^{s*})], \\ \|F\|_{H^{m, n \times n}}^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} [\text{tr}(F_k^c \cdot F_k^{c*}) + \text{tr}(F_k^s \cdot F_k^{s*}) + \text{tr}(k^2 F_k^c \cdot F_k^{c*}) + \text{tr}(k^2 F_k^s \cdot F_k^{s*}) + \dots + \\ &+ \text{tr}(k^{2m} F_k^c \cdot F_k^{c*}) + \text{tr}(k^{2m} F_k^s \cdot F_k^{s*})] = \sum_{k=0}^{\infty} (1 + k^2 + \dots + k^{2m}) (\text{tr}(F_k^c \cdot F_k^{c*}) + \text{tr}(F_k^s \cdot F_k^{s*})). \end{aligned}$$

Але, в силу оцінки $c_1(1+k^2)^m \leq 1+k^2 + \dots + k^{2m} \leq c_2(1+k^2)^m$, де c_1 и c_2 – деякі константи, остання норма еквівалентна наступній:

$$\|F\|_{H^{m, n \times n}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (1+k^2)^m (\text{tr}(F_k^c \cdot F_k^{c*}) + \text{tr}(F_k^s \cdot F_k^{s*})).$$

Твердження доведено.

Для подальшого викладу нам знадобиться система матриць-функцій $\{\cos k(\tau I + \phi_1), \sin k(\tau I + \phi_1^*) I\}_{k=0}^{\infty}$. Ця система ортогональна в просторі $L_2^{n \times n}(0, 2\pi)$, що перевіряється підстановкою в формулу (7) скалярного добутку. Доведемо повноту введеної системи.

Спочатку визначимо коефіцієнти f_k^c, f_k^s розкладання функції $F(\tau)$ в ряд Фур'є за системою $\{\cos k(\tau I + \phi_1), \sin k(\tau I + \phi_1^*) I\}_{k=0}^{\infty}$. Вище було показано, що справедливе співвідношення (8), причому коефіцієнти F_k^c, F_k^s явно виражаються через $F(\tau)$ за допомогою формул (10). Знайдемо за відомими F_k^c, F_k^s коефіцієнти f_k^c, f_k^s :

$$\begin{aligned} f_k^c &= [\cos k(\phi_1 - \phi_1^*)]^{-1} (F_k^c \cos k\phi_1^* - F_k^s \sin k\phi_1^*); \\ f_k^s &= [\cos k(\phi_1 - \phi_1^*)]^{-1} (F_k^c \sin k\phi_1 + F_k^s \cos k\phi_1), \end{aligned}$$



які задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} f_k^c \cos k\phi_1 + f_k^s \sin k\phi_1^* = F_k^c, \\ -f_k^c \sin k\phi_1 + f_k^s \cos k\phi_1^* = F_k^s. \end{cases}$$

Підставивши в співвідношення (8) матриці F_k^c, F_k^s , які виражені через f_k^c, f_k^s , і виконуючи елементарні перетворення, отримаємо необхідну повноту:

$$\left\| F(\tau) - \sum_{k=0}^N \left[f_k^c \cos k(\tau I + \phi_1) + f_k^s \sin k(\tau I + \phi_1^*) \right] \right\| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Таким чином, справедливо розкладання:

$$F(\tau) = \sum_{k=0}^N \left[f_k^c \cos k(\tau I + \phi_1) + f_k^s \sin k(\tau I + \phi_1^*) \right].$$

4 ТЕОРЕМА ПОРУШЕННЯ ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОРОДНОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ

Розкладемо функції $P(x(\tau)), C(x(\tau))$ в ряд Фур'є за системою $\{\cos k(\tau I + \phi_1), \sin k(\tau I + \phi_1^*)\}_{k=0}^{\infty}$, яка є повною і ортогональною в просторі $H^{m,n \times n}(0, 2\pi)$:

$$\begin{aligned} P(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[P_k^T \cos k(\tau I + \phi_1) + P_k^U \sin k(\tau I + \phi_1^*) \right]; \\ C(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[C_k^T \cos k(\tau I + \phi_1) + C_k^U \sin k(\tau I + \phi_1^*) \right], \end{aligned}$$

де P_k^T, C_k^T – коефіцієнти при косинусах, P_k^U, C_k^U – коефіцієнти при синусах у вказаних розкладаннях.

Підставимо отримані для $P(\tau)$ і $C(\tau)$ розкладання в рівність (6), а в якості полінома Q візьмемо поліном Чебишева першого роду $T_N(\cos \alpha) = \cos N\alpha$, враховуючи при цьому, що $Q' = N \cdot U_{N-1}(\cos \alpha)$, де $U_{N-1}(\cos \alpha) = \sin N\alpha / \sin \alpha$ – поліном Чебишева другого роду. В результаті підстановки будемо мати:

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \left[-N \cdot \frac{\sin N(\tau I + \phi_j)}{\sin(\tau I + \phi_j)} \cdot \cos(\tau I + \phi_j) \times \sum_{k=0}^{\infty} \left(P_k^T \cos k(\tau I + \phi_1) + P_k^U \sin k(\tau I + \phi_1^*) \right) + \right. \\ \left. + \cos(\tau I + \phi_j) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(C_k^T \cos k(\tau I + \phi_1) + C_k^U \sin k(\tau I + \phi_1^*) \right) \right] d\tau = 0, \quad j=1, 2. \end{aligned} \quad (11)$$

В рівності (11) нескладно показати, використавши відомий вираз для ядра Діріхле

$$\frac{\sin(N + \frac{1}{2})A}{\sin \frac{A}{2}} = 1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos kA,$$

що

$$\frac{\sin kB}{\sin B} = \begin{cases} 1 + 2(\cos 2B + \cos 4B + \dots + \cos(k-1)B), & k = 2l + 1; \\ 2(\cos B + \cos 3B + \dots + \cos(k-1)B), & k = 2l. \end{cases}$$

Отже, співвідношення $\sin N(\tau I + \phi_j) / \sin(\tau I + \phi_j)$ перетворюється в суму косинусів, причому кожний доданок в цій сумі при множенні на $\cos(\tau I + \phi_j)$ дає добуток, який представляється у вигляді півсуми косинусів суми і різниці відповідних аргументів.

Виконавши всі необхідні перетворення, остаточно отримаємо:

$$-\left[C_N^T \cdot I + C_N^U \cdot \sin N(\phi_1^* - \phi_1) \right] = \quad (12)$$

$$= N \cdot \sum_{k=0}^N (-\delta_{kN} + 2\alpha(N-k)) \cdot \left[P_k^T \cdot I + P_k^U \cdot \sin k(\phi_1^* - \phi_1) \right], \text{ при } j=1;$$

$$-\left[C_N^T \cdot \cos N\phi_0 + C_N^U \cdot \sin N(\phi_1^* - \phi_1 - \phi_0) \right] = \quad (13)$$

$$= N \cdot \sum_{k=0}^N (-\delta_{kN} + 2\alpha(N-k)) \cdot \left[P_k^T \cdot \cos k\phi_0 + P_k^U \cdot \sin k(\phi_1^* - \phi_1 - \phi_0) \right], \text{ при } j=2.$$

Тут δ_{kN} – символ Кронекера, $\alpha(2l) = 1$, $\alpha(2l+1) = 0$. Введемо позначення:

$$g_1 = N \cdot \sum_{k=0}^N (-\delta_{kN} + 2\alpha(N-k)) \cdot \left[P_k^T \cdot I + P_k^U \cdot \sin k(\phi_1^* - \phi_1) \right];$$

$$g_2 = N \cdot \sum_{k=0}^N (-\delta_{kN} + 2\alpha(N-k)) \cdot \left[P_k^T \cdot \cos k\phi_0 + P_k^U \cdot \sin k(\phi_1^* - \phi_1 - \phi_0) \right].$$

Визначаючи з рівнянь (12), (13) коефіцієнти C_N^T , C_N^U розкладання функції $C(\tau)$ в ряд Фур'є, приходимо до наступних рівностей:

$$\begin{cases} D_N \cdot C_N^T = g_1 \cdot \sin N(\phi_1^* - \phi_1 - \phi_0) - g_2 \cdot \sin N(\phi_1^* - \phi_1), \\ D_N \cdot C_N^U = -g_1 \cdot \cos N\phi_0 + g_2, \end{cases} \quad (14)$$

де $D_N = \sin N\phi_0 \cdot \cos N(\phi_1^* - \phi_1)$ – матриця порядку n . Зауважимо, що

$$\cos N(\phi_1^* - \phi_1) = \text{ch}(2N \text{Im } \phi_1), \text{ де } \text{Im } \phi_1 = -\frac{\phi_1^* - \phi_1}{2i}.$$

Тому $D_N = \sin N\phi_0 \cdot \text{ch}(2N \text{Im } \phi_1)$.

Повернемося до задачі Діріхле (1), (2). При $\psi = 0$, $P(\tau) = 0$, а це означає, що $g_1 = g_2 = 0$. В цьому випадку система (14) перетворюється до вигляду:

$$\begin{cases} \sin N\phi_0 \cdot \text{ch}(2N \text{Im } \phi_1) \cdot C_N^T = 0, \\ \sin N\phi_0 \cdot \text{ch}(2N \text{Im } \phi_1) \cdot C_N^U = 0. \end{cases}$$

Отже, якщо $\det D_N \neq 0$, $\forall N$, то $C_N^T = C_N^U = 0$, $\forall N$, і, таким чином, $C(\tau) \equiv 0$. При цьому розв'язок однорідної задачі Діріхле тривіальний. В іншому випадку, коли знайдеться таке N , що матриця D_N виявиться виродженою, пара $P(\tau) = 0$, $C(\tau) = \sum_k \left[C_{kN}^T \cos kN(\tau I + \phi_1) + C_{kN}^U \sin kN(\tau I + \phi_1^*) \right]$ буде породжувати (в силу теореми 1) розв'язок однорідної задачі Діріхле $u \in H^{m,n}(K)$.

Зауважимо, що виродженість матриці $D_N = \sin N\phi_0 \cdot \text{ch}(2N \text{Im } \phi_1)$ рівносильна рівності нулю визначника $\det(\sin N\phi_0) = 0$, так як $\det(\text{ch}(2N \text{Im } \phi_1)) \geq 1$. Дійсно, оскільки $2N \text{Im } \phi_1$ – самосопряжена і, як наслідок, нормальна матриця, то вона унітарно подібна

діагональній матриці, тобто існує унітарний оператор Q , який зводить $2N \operatorname{Im} \phi_1$ до діагонального вигляду $Q^{-1}(2N \operatorname{Im} \phi_1)Q$ [14], [15]. При цьому, очевидно, виконується рівність: $\operatorname{ch}[Q^{-1}(2N \operatorname{Im} \phi_1)Q] = Q^{-1} \operatorname{ch}[2N \operatorname{Im} \phi_1]Q$. Отже,

$$\det(\operatorname{ch}[2N \operatorname{Im} \phi_1]) = \det(\operatorname{ch}[Q^{-1}(2N \operatorname{Im} \phi_1)Q]) = \prod_{k=1}^n \operatorname{ch} \lambda_k \geq 1,$$

так як $\operatorname{ch} \lambda_k \geq 1, \forall k$, де λ_k – дійсні власні значення матриці $\operatorname{ch}(2N \operatorname{Im} \phi_1)$.

Таким чином, доведена наступна теорема єдиності розв'язку задачі Діріхле.

Теорема 2. *Задача Діріхле (1), (2) має не більше одного розв'язку в просторі $H^{m,n}(K)$, $m \geq 2$, тоді і тільки тоді, коли $\det(\sin N \phi_0) \neq 0$. В іншому випадку однорідна задача Діріхле має нескінченну кількість векторно-поліноміальних розв'язків.*

5 ВИСНОВКИ

У даній роботі отримано критерій порушення єдиності розв'язку першої граничної задачі в одиничному крузі для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку. Дослідження базується на інтегральній умові зв'язку асоційованих граничних L -слідів розв'язку задачі Коші, яка сформульована і доведена в книзі [11]. Викладена функціональна схема, застосування якої зводить розкладання матриці-функції в ряд Фур'є до стандартного розкладу кожного з її елементів. Необхідна і достатня умова нетривіального розв'язання однорідної задачі Діріхле для безтипового диференціального рівняння другого порядку з комутуючими матричними коефіцієнтами представляється у вигляді рівності нулю детермінанта, елементи якого явно виражаються через зазначені матриці.

Література

1. Лопатинский Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. Укр. матем. журнал, 1953. Т. 5. № 2. С. 123–151.
2. Агранович М. С., Дынин А. С. Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области. Докл. АН СССР, 1962. Т. 146. № 3. С. 511–514.
3. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. Comm. Pure Appl. Math., 1964. Vol. 17. № 1. pp. 35–92.
4. Волевич Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем. Матем. сборник, 1995. Т. 68. Вып. 110. № 3. – С. 373–416.
5. Бицадзе А. В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными. Усп. матем. наук., 1948. 6. С. 211–212.
6. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: ФМ, 1959. 164 с.
7. Бурский В. П. О единственности решения некоторых граничных задач для дифференциальных уравнений в области с алгебраической границей. Укр. матем. журнал, 1993. 45. № 7. С. 898–906.
8. Бурский В. П. О нарушении единственности решения задачи Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка в круге. Матем. заметки, 1999. №1. С. 23–27.
9. Бурский В. П., Лесина Е. В., Самойлова О. В. О нарушении единственности решения задачи Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка в круге. Нелинейные граничные задачи, 2003. 13. С. 56–62.

- 10.Лесіна Є. В. Про задачу Діріхле для диференціального рівняння з комутуючими матричними коефіцієнтами. Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка (серія «Математика. Механіка»). Київ, вип.1 (33). 2015. С.32–37.
- 11.Бурский В. П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 2002. 316 с.
- 12.Кириченко Е. В. О решении одной краевой задачи в многоугольнике. Труды ИПММ, 2007. 13. С. 103–109.
- 13.Бурский В. П. Двойственность уравнение–область в задаче Дирихле для общих дифференциальных уравнений в пространстве L_2 . Труды МИАН, 306. 2019. С. 41–51.
- 14.Маркус М. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. Минск Х. М: Наука, 1972. 232 с.
- 15.Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М: Наука, 1966. 576 с.

References

1. Lopatinsky, Ya. B. (1953). Ob odnom sposobe privedeniya granichnykh zadach dlya sistem differentsialnykh uravnenii ellipticheskogo tipa k regulyarnym integralnym uravneniyam. [On a method for reducing boundary value problems for systems of differential equations of elliptic type to regular integral equations]. *Ukr. matem. zhurnal*. 5. № 2. 123–151. [in Russian].
2. Agranovich, M. S., Dynin, A. S. (1962). Obschie kraevye zadachi dlya ellipticheskikh sistem v mnogomernoy oblasti. [General boundary value problems for elliptic systems in a multidimensional domain]. *Dokl. AN SSSR*. 146. № 3. 511–514. [in Russian].
3. Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg L. (1964). Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. *Comm. Pure Appl. Math.* Vol. 17. № 1. P. 35–92.
4. Volevich, L. R.(1995). Razreshimost kraevykh zadach dlya obschikh ellipticheskikh system. [Solvability of boundary value problems for general elliptic systems] *Matem. sbornik*. [Mathematical collection]. 68. 110. № 3. 373–416. [in Russian].
5. Bitsadze, A. V. (1948). O edinstvennosti resheniya zadachi Dirichlet dlya ellipticheskikh uravnenii s chastnymi proizvodnymi. [On the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for elliptic partial differential equations]. *Usp. mat. nauk*. 6. 211–212. [in Russian].
6. Bitsadze, A. V. (1993). *Uravneniya smeshannogo tipa*. [Mixed type equations]. М.: FM. 1959. [in Russian].
7. Burskii, V. P. (1993). O edinstvennosti resheniya nekotorykh granichnykh zadach dlya differentsialnykh uravnenii v oblasti s algebraicheskoi granitse. [On the uniqueness of the solution of some boundary value problems for differential equations in a domain with an algebraic boundary]. *Ukr. matem. zhurnal*. 45. № 7. 898–906. [in Russian].
8. Burskii, V. P. (1999). O narushenii edinstvennosti resheniya zadachi Dirichlet dlya sistem differentsialnykh uravnenii vtorogo poryadka v krughe. [On the violation of the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for systems of second-order differential equations in a circle] *Matem. zametki*. 1. 23–27. [in Russian].
9. Burskii, V. P., Lesina E. V., Samoiloova O. V. (2003). O narushenii edinstvennosti resheniya zadachi Dirichlet dlya sistem differentsialnykh uravnenii vtorogo poryadka v krughe. [On the violation of the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for systems of second-order differential equations in a circle]. *Nelineinye granichnye zadachi*. 13. 56–62. [in Russian].
- 10.Lesina, E. V. (2015). Pro zadachu Dirichlet dlya dyferentsialnogo rivnyannya z komutuyuchymy matrychnymy koefitsientamy. [On the Dirichlet problem for a differential equation with commuting matrix coefficients]. *Visnyk KNU im. Tarasa Shevchenka (seriya «Matematyka. Mehanika»)*. Kyiv. 1 (33). 32–37. [in Ukrainian].
- 11.Burskii, V. P. (2002). Metody issledovaniya granichnykh zadach dlya obschikh differentsialnykh uravnenii. [Methods for studying boundary value problems for general differential equations]. Kiev: *Naukova dumka*. [in Russian].
- 12.Kirichenko, E. V. (2007). O reshenii odnoi kraevoi zadachi v mnogougolnike. [On the solution of one boundary value problem in a polygon]. *Trudy IPMM*. 13. 103–109. [in Russian].



13. Burskii, V. P. (2019). Dvoistvennost uravneniye-oblast v zadache Dirichlet dlya obshchikh differentsialnykh uravnenii v prostranstve L_2 . [The equation – domain duality in the Dirichlet problem for general differential equations in the space L_2]. *Trudy MIAN*. 306. 41–51. [in Russian].
14. Markus, M. (1972). *Obzor po teorii matrits i matrchnykh neravenstv*. [Review on the theory of matrices and matrix inequalities]. M: Nauka. [in Russian].
15. Gantmaher, F. R. (1966). *Teoriya matrits*. [Matrix theory]. M: Nauka. [in Russian].

Кириченко Віктор Вікторович

Національний технічний університет України "КПІ ім. І. Сікорського"

к.ф.-м.н., доцент

пр. Перемоги, 37, Київ, Україна, 03056

v.kurychenko@kpi.ua

ORCID: 0000-0002-2387-2261

Лесіна Євгенія Вікторівна

Донецький національний технічний університет

к.ф.-м.н., доцент

пл. Шибанкова, 2, Покровськ, Україна, 85300

eugenia.lesina@donntu.edu.ua

ORCID: 0000-0002-9803-6727

Для посилань:

Кириченко В. В., Лесіна Є. В. Про порушення єдиності розв'язку задачі Діріхле для систем другого порядку. *Механіка та математичні методи*, 2021. Том 3. Вип. 1. С. 83–94.

For references:

Kurychenko V., Lesina Ye. (2021). On the uniqueness violation of the Dirichlet problem solution for second-order systems. *Mechanics and Mathematical Methods*. 3 (1). 83–94.

UDC 624.04

MODAL ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE AND FIBER CONCRETE BEAMS

T. Makovkina¹, M. Surianinov¹, O. Chuchmai¹

¹*Odesa state academy of civil engineering and architecture*

Abstract. Analytical, experimental and numerical results of determination of natural frequencies and forms of oscillations of reinforced concrete and fiber concrete beams are given. Modern analytical, numerical and experimental methods of studying the dynamics of reinforced concrete and fiber concrete beams are analyzed. The problem of determining the natural frequencies and forms of oscillations of reinforced concrete and fiber concrete beams at the initial modulus of elasticity and taking into account the nonlinear diagram of deformation of materials is solved analytically. Computer modeling of the considered constructions in four software complexes is done and the technique of their modal analysis on the basis of the finite element method is developed. Experimental researches of free oscillations of the considered designs and the comparative analysis of all received results are carried out. It is established that all involved complexes determine the imaginary frequency and imaginary form of oscillations. The frequency spectrum calculated by the finite element method is approximately 4% lower than that calculated analytically; the results of the calculation in SOFiSTiK differ by 2% from the results obtained in the PC LIRA; the discrepancy with the experimental data reaches 20%, and all frequencies calculated experimentally, greater than the frequencies calculated analytically or by the finite element method. This rather significant discrepancy is explained, according to the authors, by the incorrectness of the used dynamic model of the reinforced beam. The classical dynamics of structures is known to be based on the theory of linear differential equations, and the oscillations of structures are considered in relation to the unstressed initial state. It is obvious that in the study of free and forced oscillations of reinforced concrete building structures such an approach is unsuitable because they are physically nonlinear systems. The concept of determining the nonlinear terms of these equations is practically not studied. Numerous experimental researches and computer modeling for the purpose of qualitative and quantitative detection of all factors influencing a spectrum of natural frequencies of fluctuations are necessary here.

Keywords: beam, concrete, fiber concrete, dynamics, modal analysis, oscillation frequency, oscillations shape, model, finite element method, PC LIRA-SAPR, ANSYS

МОДАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ТА ФІБРОБЕТОННИХ БАЛОК

Маковкіна Т. С.¹, Сур'янінов М. Г.¹, Чучмай О. М.¹

¹*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація. Наведені аналітичні, експериментальні та чисельні результати визначення власних частот і форм коливань залізобетонних та фібробетонних балок. Проаналізовані сучасні аналітичні, чисельні та експериментальні методи дослідження динаміки залізобетонних та фібробетонних балок. Розв'язано аналітично задачу визначення власних частот і форм коливань залізобетонних та фібробетонних балок при початковому модулі пружності та з урахуванням нелінійної діаграми деформування матеріалів. Виконано комп'ютерне моделювання розглянутих конструкцій у чотирьох програмних комплексах і розроблено методику їх модального аналізу на базі методу скінчених елементів. Виконані експериментальні дослідження вільних коливань розглянутих конструкцій та здійснений порівняльний аналіз усіх отриманих результатів. Встановлено, що усі задіяні комплекси визначають уявну частоту і уявну форму коливань. Спектр частот, обчислений методом скінчених елементів, приблизно на 4 % нижчий, чим обчислений аналітично; результати розрахунку в SOFiSTiK на 2 % відрізняються від результатів, отриманих в ПК ЛІРА;



розбіжність з експериментальними даними досягає 20 %, причому, усі частоти, обчислені експериментально, більші частот, обчислених аналітично або методом скінчених елементів. Така досить значна розбіжність пояснюється, на думку авторів, некоректністю використовуваної динамічної моделі армованої балки. Класична динаміка споруд, як відомо, ґрунтується на теорії лінійних диференціальних рівнянь, а коливання конструкцій розглядаються щодо ненапруженого вихідного стану. Очевидно, що при дослідженні вільних і вимушених коливань залізобетонних будівельних конструкцій такий підхід непридатний, оскільки вони є фізично нелінійними системами. Концепція визначення нелінійних членів цих рівнянь практично не вивчена. Тут необхідні численні експериментальні дослідження та комп'ютерне моделювання з метою якісного і кількісного виявлення всіх факторів, що впливають на спектр власних частот коливань.

Ключові слова: балка, бетон, фібробетон, динаміка, модальний аналіз частота коливань, форма коливань, модель, метод скінчених елементів, ПК ЛІРА-САПР, ANSYS

1 INTRODUCTION

A large number of both theoretical and experimental works of domestic and foreign scientists are devoted to the study of the behavior of reinforced concrete structures under the static action of external loads. Problems of dynamics of beams, however, as well as other reinforced concrete structures, are covered much worse.

This state is obviously explained by the fact that the dynamic calculations of reinforced concrete structures are associated with the solution of a range of issues: determining the parameters of dynamic loads; limit states and methods of their rationing; accounting for changes in strength characteristics and deformable characteristics of concrete and reinforcement; determination of forces in constructions, etc.

A significant contribution to the nature of changes in the dynamic parameters of reinforced concrete structures is the nature of reinforcement. This fact is well known, but has not yet been thoroughly studied either quantitatively or qualitatively.

Some authors argue, for example, that the real contribution of reinforcing concrete beams is several times higher than the contribution obtained by calculations according to existing theoretical methods. And the influence of dispersed reinforcement, in particular, steel fiber, on the dynamic parameters has been studied even less. Incidentally, to increase the fracture toughness, many researchers suggest using steel fiber. Steel fiber concrete is effective in construction in earthquake-prone areas due to increased resistance to dynamic loads [1-2]. Despite the growing interest in reinforced concrete and the corresponding increase in publications, the available data are contradictory, have some incompleteness, which allows us to give only a general assessment of the results presented in them.

When solving almost any problem of dynamics there is a need to determine the natural frequencies and forms of oscillations (or, as they say, modal analysis of the system), which is natural, because these parameters determine the behavior of the system and other types of dynamic influences. With regard to structures made of materials with a linear nature of deformation, many practically important problems have been solved. But the dynamics of structures made of reinforced concrete and fiber concrete - materials with a nonlinear deformation pattern - is obviously not sufficiently studied. Therefore, research in this direction is actual.

2 REFERENCE ANALYSIS AND PROBLEM FORMULATION

The number of publications on this topic should be considered quite limited. Papers [3, 4] present the results of experimental studies of reinforced concrete beams on supports with different stiffness under transverse static and short-term dynamic loading. The resistance of structures on inclined sections at different span of the cut is considered.

In [5] the solution of the problem of strength of reinforced concrete beams under the action of transverse and longitudinal dynamic loads is given. Theoretical studies of the stress-strain state in the cross section of a rectilinear beam structure loaded transversely evenly distributed by dynamic loading and longitudinal compressive forces are performed. Dynamic loads change over time according to given laws. At loading the advance entry of one loading in relation to another is possible. The structure performs oscillations (longitudinal and transverse), which may be accompanied by multiple changes in the sign of deformation.

In [6] a comparison of these experiments to determine the frequencies of natural oscillations of reinforced concrete beams with cracks according to the method developed on the numerical-analytical version of BEM using diagrams of deformation of sections constructed using SNiP 2.03.01-84 [7].

The destruction of reinforced concrete columns and beams under impulse loading is numerically and experimentally studied in [8]. The behavior of concrete is described taking into account the different mechanical and strength characteristics of the material in tension and compression. The behavior of steel reinforcement is modeled by an elastic-plastic medium. Numerical simulation is performed by the finite element method in a three-dimensional formulation.

In [9] experimental researches of the reinforced concrete elements having zone reinforcement from steel fiber in a compressed zone of section and strong reinforcement in the stretched zone, at short-term dynamic bending are carried out. New experimental data characterizing the process of resistance of steel-reinforced concrete elements with mixed reinforcement are obtained, the peculiarities of deformation, crack formation and destruction of such structures under intensive dynamic loading are revealed. Prerequisites and method of calculation of bending steel-reinforced concrete structures with mixed reinforcement at short-term dynamic loading are formulated.

The ratio of elastic moments, deflections and frequencies of natural oscillations of a reinforced concrete clamped beam were considered by Zharnytsky V. I. and Ivanov S. S. [10]. Reinforced concrete beam clamped at one end and hinged at the other; the ratio of elastic moments, deflections and frequencies of natural oscillations are also given in the work of Ivanov S. S. [11].

3 PURPOSE AND OBJECTIVES OF THE RESEARCH

The purpose of this work is analytical, experimental and numerical determination of natural frequencies and forms of oscillations of reinforced concrete and fiber concrete beams.

To achieve this goal it was necessary to solve the following tasks:

1. Analyze modern analytical, numerical and experimental methods for studying the dynamics of reinforced concrete and fiber concrete beams.
2. Solve analytically the problem of determining the natural frequencies and forms of oscillations of reinforced concrete and fiber concrete beams.
3. Perform computer modeling of the considered structures and develop a method of their modal analysis based on the finite element method.
4. Perform experimental studies of free oscillations of the considered structures and comparative analysis of all obtained results.

4 RESEARCH RESULTSS

Experimental and analytical determination of natural frequencies and oscillation forms of reinforced concrete and fiber concrete beams.

A series of reinforced concrete and reinforced concrete beams with the same reinforcement by rod reinforcement was made in the laboratory of the Department of Structural Mechanics of Odesa state academy of civil engineering and architecture (Fig. 1).

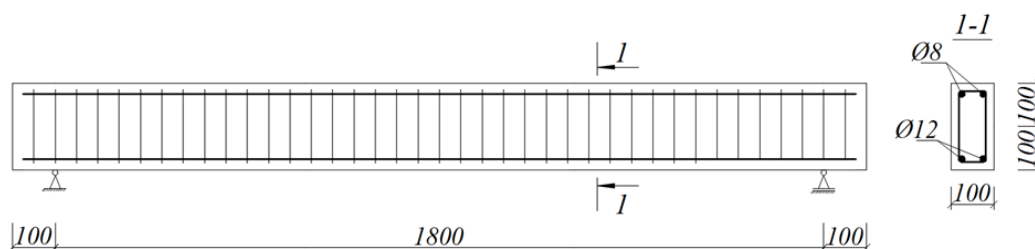


Fig. 1. Reinforcement of beams by rod reinforcement

Previously completed studies, during which the optimum characteristics of fibrous concrete mixture were determined and tests were performed to determine the mechanical properties of concrete and fiber concrete.

To do this, the cubic strength of concrete and reinforced concrete was determined on samples of 100x100x100 mm. The percentage of dispersed reinforcement varied and was 0,5 %, 1,0 % and 1,5 %, also fraction of coarse aggregate (crushed stone) was ≤ 10 mm in one testing series and ≤ 20 mm – in second. At the same time, the cubic strength of ordinary concrete at the same size of large aggregate was determined. A total of 8 series of tests were performed on 9 samples each.

The experiments used steel fiber (Fig. 2) with curved ends, which is produced by the Ukrainian association "Stalkanat-Silur" in accordance with the European standard EN 14889-1: 2006 [12].

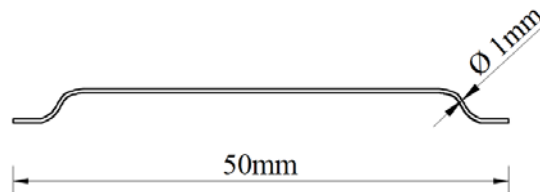


Fig. 2. Steel fiber with curved ends

Processing of the results of this test stage showed that the optimal characteristics of the fiber concrete mixture is a matrix with a large aggregate of 10 mm (the cubic strength was significantly higher than the size of crushed stone 10 mm in all series of experiments) at 1.0% fiber reinforcement, because the higher the percentage of fiber reinforcement, the increase in cubic strength was insignificant. This composition of the mixture was adopted for the manufacture of beams.

Plot of $\sigma - \varepsilon$ is shown in Fig. 3.

In the first section, the diagram is linear, so the tangent of the angle of inclination to the horizontal axis is the initial modulus of elasticity.

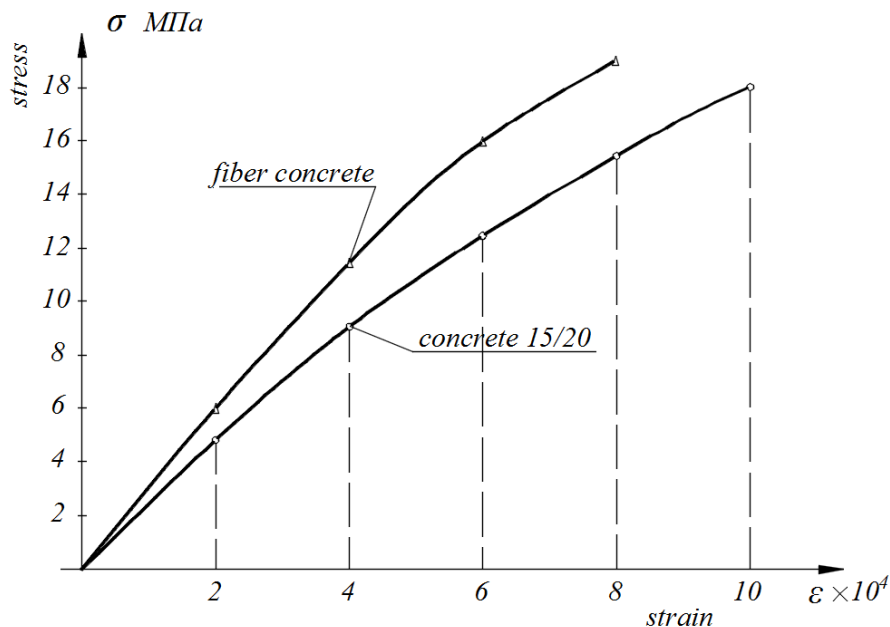


Fig. 3. Plot $\sigma - \varepsilon$

Analytical values of frequencies are calculated by known formulas of classical dynamics [13, 14].

To conduct experimental research, a test bench *MODAL-2*, was developed, the general scheme of which and the principle of operation are described in detail in our previous works [15, 16].

Table 1 shows experimental and analytical data on the first three frequencies for concrete and reinforced concrete beams. The natural frequencies determined experimentally are significantly higher than the theoretical ones.

Table 1

Experimental and analytical results.

| Material | Frequency, s^{-1} | Experiment | Calculation | Discrepancy, % |
|--------------------------|---------------------|------------|-------------|----------------|
| Concrete | ω_1 | 979,23 | 826,74 | 15,6 |
| | ω_2 | 4032,80 | 3306,98 | 18,0 |
| | ω_3 | 9420,23 | 7440,70 | 21,0 |
| Fiber concrete, 1,0 % | ω_1 | 1071,96 | 898,76 | 16,1 |
| | ω_2 | 4419,03 | 3595,05 | 18,6 |
| | ω_3 | 10214,62 | 8088,87 | 20,8 |

Computer modeling and finite element modal analysis

Four computer complexes - LIRA-CAD [17], SCAD [18], ANSYS [19] and SOFiSTiK [20] were used for computer modeling of reinforced concrete and fibroconcrete beams and further determination of natural frequencies and forms of oscillations.

Based on them, computer models of concrete and fiber concrete beams with the same reinforcement with rod reinforcement were built.

Fig. 4 shows the forms of natural oscillations obtained in ANSYS.

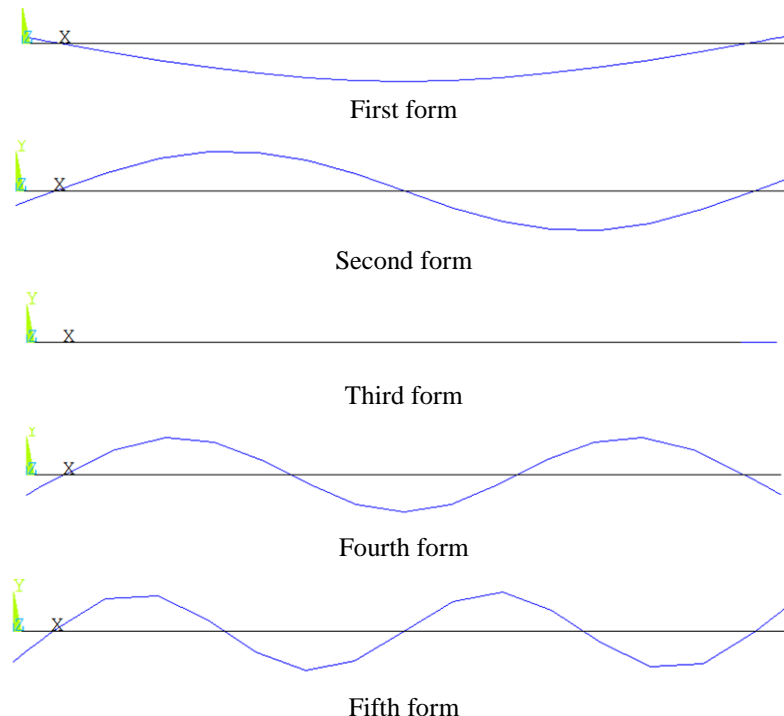


Fig. 4. Forms of natural oscillations obtained in ANSYS

Similar forms of natural oscillations are obtained in three other software packages.

The values of natural frequencies of concrete and fiber-reinforced concrete beams, calculated in four software packages, are given in tables 2, 3.

Table 2

Comparison of the results of calculation of natural frequencies of reinforced concrete beam.

| Frequency | LIRA-SAPR | SCAD | ANSYS | SOFiSTiK |
|-----------|-----------|----------|----------|----------|
| 1 | 820,82 | 820,82 | 820,08 | 789,25 |
| 2 | 3265,57 | 3259,13 | 3250,14 | 3139,65 |
| 3 | 3860,0 | 3812,40 | 3831,0 | 3711,85 |
| 4 | 7279,58 | 7188,43 | 7209,18 | 7159,29 |
| 5 | 12749,66 | 11364,11 | 12659,30 | 12259,82 |

Table 3

Comparison of the results of calculation of natural frequencies of the fiber concrete beam.

| Frequency | LIRA-SAPR | SCAD | ANSYS | SOFiSTiK |
|-----------|-----------|----------|----------|----------|
| 1 | 867,08 | 867,00 | 866,28 | 833,73 |
| 2 | 3470,50 | 3461,22 | 3455,48 | 3337,06 |
| 3 | 4080,60 | 4021,67 | 4051,64 | 3923,43 |
| 4 | 7808,29 | 7772,56 | 7727,86 | 7507,05 |
| 5 | 13477,53 | 12096,22 | 13386,41 | 12959,54 |

The above results of calculations were obtained at the initial modulus of elasticity, i.e. correspond to the state of the beams without external load.

Unlike structures made of linearly deformed material, where the modulus of elasticity is assumed to be constant throughout the life cycle of the structure, in reinforced concrete and fiber concrete structures the modulus of elasticity is a variable and decreases with increasing load.

In the first case, when $E = const$, in classical dynamics, the natural frequency spectrum is considered constant. This spectrum, its own forms of oscillations and attenuation rates are individual characteristics of any system, and do not depend on external influences. All three of these dynamic factors are of paramount importance because they determine the behavior of the system under any other types of oscillations - forced, seismic, parametric.

In the second case, all three parameters are variable, and directly depend on the loads applied to the system. This means that all dynamic calculations of reinforced concrete and fiber concrete structures must be "tied" to a nonlinear deformation diagram.

At the next stage, the first three natural frequencies of oscillations of reinforced concrete and fiber-reinforced concrete beams are analytically calculated taking into account the nonlinear deformation diagram. To do this, the beams were gradually loaded with evenly distributed on the upper surface of the loads to the level of maximum stresses that correspond to the characteristic points of the diagram - deformations $\varepsilon_1 = 2 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 4 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_3 = 6 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_4 = 8 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_5 = 10 \cdot 10^{-4}$. Thick metal plates were used as cargoes.

Computer modeling and numerical calculations taking into account the nonlinear diagram of material deformation are performed in two programs.

Their results are given in Table 4 (concrete) and Table 5 (fiber concrete).

Table 4

The natural frequencies of the reinforced concrete beam at the characteristic points of the diagram.

| E | $2,5 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ | | $2,25 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ | | $2,05 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ | | $1,94 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ | |
|-----|------------------------------|----------|-------------------------------|----------|-------------------------------|----------|-------------------------------|----------|
| № | LIRA | SOFiSTiK | LIRA | SOFiSTiK | LIRA | SOFiSTiK | LIRA | SOFiSTiK |
| 1 | 761,6 | 732,3 | 505,2 | 485,8 | 430,8 | 414,4 | 263,8 | 253,9 |
| 2 | 2982,0 | 2867,4 | 1978,0 | 1900,1 | 1686,9 | 1624,0 | 1033,0 | 993,3 |
| 3 | 3607,6 | 3468,8 | 2393,0 | 2301,0 | 2040,8 | 1962,3 | 1249,7 | 1202,8 |
| 4 | 6483,8 | 6240,4 | 4300,8 | 3071,4 | 3667,8 | 3530,1 | 2246,1 | 2159,6 |
| 5 | 10859,2 | 10441,3 | 7203,4 | 6923,1 | 6143,1 | 5918,2 | 3761,8 | 3620,6 |

Table 5

The natural frequencies of the fiber concrete beam at the characteristic points of the diagram.

| E | $3 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ | | $2,88 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ | | $2,67 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ | | $2,38 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ | |
|-----|----------------------------|----------|-------------------------------|----------|-------------------------------|----------|-------------------------------|----------|
| № | LIRA | SOFiSTiK | LIRA | SOFiSTiK | LIRA | SOFiSTiK | LIRA | SOFiSTiK |
| 1 | 662,6 | 637,1 | 520,3 | 501,0 | 419,5 | 403,4 | 252,1 | 242,4 |
| 2 | 2597,3 | 2498,1 | 2052,6 | 1975,6 | 1642,3 | 1580,6 | 1005,9 | 968,1 |
| 3 | 3138,2 | 3014,4 | 2479,5 | 2384,6 | 1986,4 | 1910,0 | 1211,4 | 1165,5 |
| 4 | 5642,2 | 5430,2 | 4463,5 | 4291,8 | 3571,3 | 3433,9 | 2187,0 | 2102,9 |
| 5 | 9455,2 | 9092,3 | 7471,6 | 7191,5 | 5975,6 | 5746,1 | 3658,5 | 3520,7 |

5 RESEARCH RESULTS DISCUSSION

Similar results (quite a significant discrepancy between analytical and experimental data) were obtained by some other authors. Attempts to explain the observed difference by the fact that the analytical formulas for the frequencies of transverse oscillations take into account the moment of inertia of the rod, which in the case of rod reinforcement or dispersed reinforcement must be calculated by special methods, fail. The algorithm for calculating the geometric characteristics of the so-called induced cross section is well known and is given in the numerous literature on reinforced concrete structures, however, based on the formulas of this algorithm, the effect of moment of inertia on oscillations will not be as significant as observed in the experiment.

A more important explanation, in our opinion, is the incorrectness of the used dynamic model of the reinforced beam. The classical dynamics of structures is known to be based on the theory of linear differential equations, and the oscillations of structures are considered with respect to the unstressed initial state. It is obvious that in the study of free and forced oscillations of reinforced concrete building structures such an approach is unsuitable because they are physically nonlinear systems. There are very few publications on the physically nonlinear dynamics of reinforced concrete structures, and the main attention is paid to methods for solving nonlinear equations of motion, and the concept of determining nonlinear terms of these equations is practically not studied. Numerous experimental researches and computer modeling for the purpose of qualitative and quantitative detection of all factors influencing a spectrum of natural frequencies of fluctuations are necessary here.

6 CONCLUSIONS

Despite the fact that all four software packages implement the finite element method, the process of solving the problem in each of them has its own characteristics, which slightly, but still affect the result. The main ones are: first, different finite elements are involved in different programs; secondly, the processes of construction of a finite-element grid differ and, as a consequence, the number of finite elements with the same geometric model of the structure.

All involved complexes determine the imaginary frequency and imaginary form of oscillations (the third in Fig. 4). This effect is noted in the works of many researchers as one of the disadvantages of the finite element method.

Analysis of the above tables and the results of analytical calculations and experimental data shows the following:

- the frequency spectrum calculated by the finite element method (PC LIRA) is approximately 4% lower than calculated analytically;
- the results of the calculation in SOFiSTiK differ by 2% from the results obtained in the PC LIRA;
- the discrepancy with the experimental data reaches 20%, and all frequencies calculated experimentally, higher frequencies calculated analytically or by the finite element method.

References

1. Gafarova, N. Ye. (2016). Fibrobeton dlya seysmopasnykh rayonov stroitelstva. [Fiber concrete for seismic areas of construction]. *Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh i fundamentalnykh issledovaniy*. № 9-2. 179–181. [in Russian].
2. Wille, K., El-Tawil, S., Naaman, A.E. (2014). Properties of strain hardening ultra high performance fiber reinforced concrete (UHP-FRC) under direct tensile loading. *Cement and Concrete Composites*. Vol. 48. 53–66.
3. Kumpyak, O.G., Kokorin, D. N. (2011). Eksperimentalnye issledovaniya zhelezobetonnykh balok na podatlivykh oporakh po naklonnym secheniyam pri kratkovremennom dinamicheskom nagruzhении. [Experimental researches of reinforced concrete beams on pliable supports on inclined sections at short-term dynamic loading]. *Vestnik TGASU. Stroitelnye konstruktsii zdaniya i sooruzheniya*. №1. 116–129. [in Russian].
4. Kumpyak, O. G., Galyautdinov, Z. R. (2016). Issledovanie dinamicheskogo deformirovaniya zhelezobetonnykh plit na podatlivykh oporakh. [Investigation of the dynamic deformation of reinforced concrete slabs on yielding supports]. *Tomskiy gosudarstvennyy arkhitekturno-stroitelnyy universitet*. 108–115. [in Russian].
5. Belikov, A. A., Zharnitskiy, V. I. (2011). Uprugoplasticheskie kolebaniya zhelezobetonnykh balok pri deystvii poperechnoy i prodolnoy dinamicheskikh nagruzok. [Elastoplastic vibrations of reinforced concrete beams under the action of transverse and longitudinal dynamic loads]. *Vestnik MGSU*. №2. 145–147. [in Russian].
6. Chaykovskiy, R. E. (2009). Sobstvennyye kolebaniya zhelezobetonnykh balok s treshchinami. [Natural vibrations of reinforced concrete beams with cracks]. *Sbornik nauchnykh trudov Poltavskogo natsionalnogo tekhnicheskogo universiteta im. Yu. Kondratyuka. Otrasleye mashinostroenie, stroitelstvo*. №. 2. 50–55. [in Russian].
7. SNiP 2.03.01-84*(1996). «*Betonnye i zhelezobetonnye konstruktsii*». [Concrete and Reinforced Concrete Structures]. M.: TsNIIP Gosstroya RF. [in Russian].
8. Radchenko, P. A., Batuev, S. P., Radchenko, P. A., Plevkov, V. S. (2013). Issledovanie razrusheniya zhelezobetonnykh konstruktsiy pri dinamicheskikh nagruzkakh. [Investigation of the destruction of reinforced concrete structures under dynamic loads]. *Tomskiy gosudarstvennyy arkhitekturno-stroitelnyy universitet*. T.18. № 4. 1578–1579. [in Russian].
9. Utkin, D. G. (2015). Deformirovanie izgibaemykh stalefibrozhelezobetonnykh elementov so smeshannym armirovaniem pri kratkovremennom dinamicheskom nagruzhении. [Deformation of bent steel-fiber-reinforced concrete elements with mixed reinforcement under short-term dynamic loading]. *Vestnik TGASU*. № 5. 80–89. [in Russian].

10. Zharnitskiy, V.I., Ivanov, S.S. (2003). Sootnoshenie uprugikh momentov, progiby i chastoty sobstvennykh kolebaniy zhelezobetonnoy zashchemlennoy balki. [Ratio of elastic moments, deflections and natural frequencies of a reinforced concrete restrained beam]. *Seysmostoykoe stroitelstvo. Bezopasnost sooruzheniy*. № 1. 14–19. [in Russian].
11. Ivanov, S.S. Zhelezobetonnyaya balka, zashchemlennaya na odnom kontse i sharnirno opertaya na drugom: sootnoshenie uprugikh momentov, progiby i chastoty sobstvennykh kolebaniy. [Reinforced concrete beam, pinched at one end and pivotally supported at the other: the ratio of elastic moments, deflections and natural vibration frequencies]. *Seysmostoykoe stroitelstvo Bezopasnost sooruzheniy*. № 1. 17–19. [in Russian].
12. EN 14889-1:2006: *Fibres for concrete. Steel fibres. Definitions, specifications and conformity*.
13. Babakov, I. M. (2004). *Teoriya kolebaniy*. [Oscillation theory]. Ucheb. Posobie. 4-e izd., ispr. Moscow: Drofa. [in Russian].
14. Vasilenko, M. V., Alekseychuk, O. M. (2004). *Teoriya kolivan i stiykosti rukhu*. [Theory of kolivan and stiykosti ruhu]. Kiev: Vishcha shkola. [in Ukrainian].
15. Sur'yaninov, M. G., Makovkina, T. S. (2019). Analitichni i eksperimentalni doslidzhennya vilnikh kolivan stalefibrobetonnykh balok. [Analytical and experimental studies of free oscillations of reinforced concrete beams]. *Lutsk: Naukovi Notatki*. № 66. 351–355. [in Ukrainian].
16. Sur'yaninov, M. G., Makovkina, T. S. (2019). Eksperimentalnye issledovaniya svobodnykh kolebaniy zhelezobetonnykh i fibrobetonnykh balok. [Experimental studies of free oscillations of reinforced concrete and fiber concrete beams]. *Visnik ODABA, Zbirnik naukovikh prats*. №74. 75–81. [in Russian].
17. Gorodetskiy, D. A., Barabash, M. S., Vodopyanov, R.Yu. i dr. (2015). *Programmnyy kompleks LIRA-SAPR 2015*. [LIRA-CAD 2015 software package]. Uchebnoe posobie pod red. akademika RAASN A.S. Gorodetskogo. Moscow. [in Russian].
18. Semenov, A. A., Startseva, L. V., Malyarenko, A. A., Poryvaev, I. A. (2016). *Stroitel'naya mekhanika (spetskurs). Primenenie PK SCAD Office dlya resheniya zadach dinamiki i ustoychivosti sterzhnevyykh sistem*. [Construction mechanics (special course). Application of SCAD Office PC for solving problems of dynamics and stability of rod systems]. Moskva: Izd-vo SKAD SOFT: Izd. Dom ASV. [in Russian].
19. Lazareva, D. V., Soroka, M. M., Shilyaev, O. S. (2020). *Priyomi roboti z PK ANSYS pri rozv'yazanni zadach mekhaniki*. [Techniques of working with ANSYS PC when solving mechanics problems]. Pid redaktsieyu M.G. Sur'yaninova: monografiya. Odesa: ODABA. [in Ukrainian].
20. Kukhtin, V. N., Bulaev, I. V., Baranov, I.S. (2015). *Primenenie raschetnogo kompleksa SOFiSTiK dlya rascheta mostovykh konstruksiy: uchebnoe posobie*. [Application of the SOFiSTiK calculation complex for the calculation of bridge structures: a textbook]. Moskva.: MADI. [in Russian].

Література

- 1 Гафарова Н. Е. Фибробетон для сейсмоопасных районов строительства. *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований*, 2016. № 9-2. С. 179-181.
- 2 Wille K., El-Tawil S., Naaman A.E. Properties of strain hardening ultra high performance fiber reinforced concrete (UHP-FRC) under direct tensile loading. *Cement and Concrete Composites*. 2014. Vol. 48. pp. 53-66.
- 3 Кумпяк О. Г., Кокорин Д. Н. Экспериментальные исследования железобетонных балок на податливых опорах по наклонным сечениям при кратковременном динамическом нагружении. *Вестник ТГАСУ. Строительные конструкции здания и сооружения*, 2011. №1. С. 116–129.
- 4 Кумпяк О. Г., Галяутдинов З. Р. Исследование динамического деформирования железобетонных плит на податливых опорах. *Томский государственный архитектурно-строительный университет*, 2016. С. 108–115.
- 5 Беликов А. А., Жарницкий В. И. Упругопластические колебания железобетонных балок при действии поперечной и продольной динамических нагрузок. *Вестник МГСУ*, 2011. №2. С. 145–147.

- 6 Чайковский Р. Э. Собственные колебания железобетонных балок с трещинами. Сборник научных трудов Полтавского национального технического университета им. Ю. Кондратюка. Отраслевое машиностроение, строительство, 2009. Вып. 2. С. 50–55.
- 7 СНиП 2.03.01-84* «Бетонные и железобетонные конструкции». М.: ЦНИИП Госстроя РФ, 1996.
- 8 Радченко П. А., Батуев С. П., Радченко П. А., Плевков В. С. Исследование разрушения железобетонных конструкций при динамических нагрузках. Томский государственный архитектурно-строительный университет, 2013 Т.18. Вып.4. С. 1578–1579.
- 9 Уткин Д. Г. Деформирование изгибаемых сталефиброжелезобетонных элементов со смешанным армированием при кратковременном динамическом нагружении. Вестник ТГАСУ, 2015. № 5. С. 80–89.
- 10 Жарницкий В. И., Иванов С. С. Соотношение упругих моментов, прогибы и частоты собственных колебаний железобетонной защемленной балки. Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений, 2003. № 1. С. 14-19.
- 11 Иванов С.С. Железобетонная балка, защемленная на одном конце и шарнирно опертая на другом: соотношение упругих моментов, прогибы и частоты собственных колебаний. Сейсмостойкое строительство Безопасность сооружений, 2003. № 1. С. 17-19.
- 12 EN 14889-1:2006: Fibres for concrete. Steel fibres. Definitions, specifications and conformity.
- 13 Бабаков И.М. Теория колебаний: учеб. пособие. 4-е изд., испр. М.: Дрофа, 2004. 591 с.
- 14 Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху. К.: Вища школа, 2004. 525 с.
- 15 Сур'янінов М. Г., Маковкіна Т. С. Аналітичні і експериментальні дослідження вільних коливань сталефібробетонних балок. Наукові Нотатки. Вип. 66. Луцьк, 2019. С. 351-355.
- 16 Сурьянинов Н. Г., Маковкина Т. С. Экспериментальные исследования свободных колебаний железобетонных и фибробетонных балок. Вісник ОДАБА. Збірник наукових праць, №74. 2019. С. 75-81.
- 17 Городецкий Д. А., Барабаш М. С., Водопьянов Р. Ю. и др. Программный комплекс ЛИРА-САПР 2015. Учебное пособие под ред. академика РААСН А. С. Городецкого. М., 2015. 376 с.
- 18 Семенов А. А., Старцева Л. В., Маляренко А. А., Порываев И. А. Строительная механика (спекурс). Применение ПК SCAD Office для решения задач динамики и устойчивости стержневых систем. Москва: Изд-во СКАД СОФТ: Изд. Дом АСВ, 2016. 255 с.
- 19 Лазарєва Д. В., Сорока М. М., Шилєєв О. С. Прийоми роботи з ПК ANSYS при розв'язанні задач механіки. Під редакцією М.Г. Сур'янінова: монографія. Одеса: ОДАБА, 2020. 432 с.
- 20 Кухтин В. Н., Булаев И. В., Баранов И. С. Применение расчетного комплекса SOFiStiK для расчета мостовых конструкций: учебное пособие. М.: МАДИ, 2015. 136 с.

Tatiana Makovkina

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, postgraduate
Didrihsona str., 4, Odessa, Ukraine 65029tata.makovkina1993@gmail.com
ORCID: 0000-0002-2628-5724

Mykola Surianinov

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Doctor of Technical Science, Professor
Didrihsona str., 4, Odessa, Ukraine 65029, sng@ogasa.org.ua, ORCID: 0000-0003-2592-5221

Oleksander Chuchmai

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Ph.D., Senior Lecturer
Didrihsona str., 4, Odessa, Ukraine 65029, alexsandrch14061983@gmail.com
ORCID: 0000-0002-5856-623X

For references:

Мakovkina Т., Surianinov М., Chuchmai О. (2021). Modal analysis of reinforced concrete and fiber concrete beams. *Mechanics and Mathematical Methods*. 3 (1). 95–105

Для посилань:

Маковкіна Т. С., Сур'янінов М. Г., Чучмай О. М. Модальний аналіз залізобетонних та фібробетонних балок. *Механіка та математичні методи*, 2021. Том 3. Вип. 1. С. 95–105

UDC 514.765.1+512.813.4

PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES WITH A SPECIAL RIEMANN TENSOR

O. Lesechko¹, T. Shevchenko¹

¹*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract: The paper considers pseudo-Riemannian spaces, the Riemann tensor of which has a special structure. The structure of the Riemann tensor is given as a combination of special symmetric and obliquely symmetric tensors. Tensors are selected so that the results can be applied in the theory of geodesic mappings, the theory of holomorphic-projective mappings of Kähler spaces, as well as other problems arising in differential geometry and its application in general relativity, mechanics and other fields.

Through the internal objects of pseudo-Riemannian space, others are determined, which are studied depending on what problems are solved in the study of pseudo-Riemannian spaces. By imposing algebraic or differential constraints on internal objects, we obtain special spaces. In particular, if constraints are imposed on the metric we will have equidistant spaces. If on the Ricci tensor, we obtain spaces that allow φ (Ric)-vector fields, and if on the Einstein tensor, we have almost Einstein spaces.

The paper studies pseudo-Riemannian spaces with a special structure of the curvature tensor, which were introduced into consideration in I. Mulin paper. Note that in his work these spaces were studied only with the requirement of positive definiteness of the metric. The proposed approach to the specialization of pseudo-Riemannian spaces is interesting by combining algebraic requirements for the Riemann tensor with differential requirements for its components.

In this paper, the research is conducted in tensor form, without restrictions on the sign of the metric. Depending on the structure of the Riemann tensor, there are three special types of pseudo-Riemannian spaces. The properties which, if necessary, satisfy the Riemann tensors of pseudoriman space and the tensors which determine the structure of the curvature tensor are studied.

In all cases, it is proved that special tensors satisfy the commutation conditions together with the Ricci tensor. The importance and usefulness of such conditions for the study of pseudo-Riemannian spaces is widely known. Obviously, the results can be extended to Einstein tensors. Proven theorems allow us to effectively investigate spaces with constraints on the Ricci tensor.

Keywords: pseudo-Riemannian spaces, geodesic mapping, the Ricci tensor.

ПСЕВДОРІМАНОВІ ПРОСТОРИ ЗІ СПЕЦІАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ ТЕНЗОРА РІМАНА

Лесечко О. В.¹, Шевченко Т. І.¹

¹*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація: В роботі розглянуті псевдоріманові простори, тензор Рімана яких, має спеціальну структуру. Структура тензора Рімана задається як комбінація спеціальних симетричних та косиметричних тензорів. Вибрані тензори так, щоб результати можна було застосувати в теорії геодезичних відображень, теорії голоморфно-проективних відображень келерових просторів, а також інших задачах, що виникають в диференціальній геометрії та при її застосуванні в загальній теорії відносності, механіці та інших областях.

Через внутрішні об'єкти псевдоріманового простору визначаються інші, які вивчаються в залежності від того, які задачі розв'язуються при дослідженні псевдоріманових просторів. Накладаючи обмеження алгебраїчного чи диференціального характеру на внутрішні об'єкти, отримуємо спеціальні простори. Зокрема, якщо обмеження накладаються на метрику будемо мати еквідистантні простори. Якщо на тензор Річчі, отримаємо простори, що допускають



$\varphi(\text{Ric})$ -векторні поля, а якщо на тензор Ейнштейна, то будемо мати майже ейнштейнові простори.

В роботі вивчаються псевдоріманові простори зі спеціальною структурою тензора кривини, які були введені в розгляд в статті І. Муліна. Зауважимо, що в його роботі вказані простори вивчалися лише з вимогою додатної визначеності метрики. Запропонований підхід до спеціалізації псевдоріманових просторів цікавий поєднанням алгебраїчних вимог на тензор Рімана з диференціальними вимогами на його складові.

В даній роботі дослідження ведуться в тензорній формі, без обмежень на знак метрики. В залежності від структури тензора Рімана виділені три спеціальні типи псевдоріманових просторів. Вивчаються властивості, яким за необхідністю задовольняють тензори Річчі псевдоріманового простору та тензори, які визначають структуру тензора кривини.

У всіх випадках доведено, що спеціальні тензори задовольняють разом з тензором Річчі умовам комутації. Важливість і корисність таких умов для досліджень псевдоріманових просторів широко відома. Очевидно, що результати можуть бути поширені на тензори Ейнштейна. Доведені теореми дозволяють ефективно досліджувати простори з обмеженнями на тензор Річчі.

Ключові слова: псевдоріманові пространства, геодезические отображения, тензор Річчі.

1 INTRODUCTION

The work treats special pseudo-Riemannian spaces V_n having a metric tensor g_{ij} .

Object, which are calculated basing on the metric tensor g_{ij} , are called inner objects of the space V_n .

They include Christoffel's symbols of the first kind

$$2\Gamma_{ijk} = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}, \quad (1)$$

and those of the second kind

$$\Gamma_{ij}^h = g^{\alpha h} \Gamma_{ij\alpha}, \quad (2)$$

Riemann tensor

$$R_{ijk}^h = \partial_j \Gamma_{ik}^h + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^h - \partial_k \Gamma_{ij}^h - \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{k\alpha}^h, \quad (3)$$

Ricci tensor

$$R_{ij\alpha}^\alpha = R_{ij}, \quad (4)$$

scalar curvature

$$R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}, \quad (5)$$

here g^{ij} are elements of invertible matrix for a metric tensor g_{ij} .

These objects lay a foundation for definition of other objects, which come in focus of our attention depending on the problem we are currently solving, for example Einstein tensor.

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}. \quad (6)$$

Imposing some limitations of algebraic or differential kind on the inner objects, we are able to define special pseudo-Riemannian limitations, namely: limitations imposed on the metric result in equidistant spaces [2], on the Ricci tensor – spaces permitting $\varphi(Ric)$ -vector fields [6, 9], on Einstein tensor – quasi-Einstein spaces [8, 14, 15].

A profound review of special pseudo-Riemannian spaces with limitations imposed on the Riemann tensor can be found in the work [21].

This paper treats pseudo-Riemannian spaces with a curvature tensor having a particular structure. They were introduced in the article [19].

Let us note, that the latter work was centered on the spaces limited by request of positive-definite metrics [17, 20, 22, 23].

Here, we carry out our research without any limitations on a sign of a metric.

2 TYPES OF SPECIAL PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES

I. Mulin in the work [19] introduced the following three types of special Riemannian spaces

I type:

$$R_{ijkl} = \alpha(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) + \beta(u_{ik}u_{jl} - u_{il}u_{jk}) + \gamma(v_{ik}v_{jl} - v_{il}v_{jk}), \quad (7)$$

here α, β, γ are some constants and symmetrical tensors u_{ij} and v_{ij} comply with conditions

$$u_{ij,k} = \sigma_k^1 g_{ij} + \sigma_k^2 u_{ij} + \sigma_k^3 v_{ij}, \quad (8)$$



$$v_{ij,k} = \tau_k^1 g_{ij} + \tau_k^2 u_{ij} + \tau_k^3 v_{ij}, \quad (9)$$

here $\sigma_i^1, \sigma_i^2, \sigma_i^3, \tau_i^1, \tau_i^2, \tau_i^3$ are some vectors, comma – a sign of covariant derivative by connectivity V_n

II type:

$$R_{ijkl} = \alpha(p_{ik}p_{jl} - p_{il}p_{jk}) + \beta(s_{ik}s_{jl} - s_{jk}s_{il} + \lambda s_{ij}s_{kl}), \quad (10)$$

here α, β are some constants; p_{ij}, s_{ij} are symmetric and skew symmetric tensors, respectively, that comply with conditions

$$p_{ij,k} = \sigma p_{ij}, \quad (11)$$

$$s_{ij,k} = \tau_k s_{ij}, \quad (12)$$

here σ_i, τ_i are some vectors.

III type:

$$R_{ijkl} = \alpha(r_{ik}r_{jl} - r_{jk}r_{il} + \lambda r_{ij}r_{kl}) + \beta(s_{ik}s_{jl} - s_{jk}s_{il} + \mu s_{ij}s_{kl}), \quad (13)$$

here $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ are scalars; r_{ij}, s_{ij} are skew symmetrical tensors selected in such a way that

$$r_{ij,k} = \rho_k^1 r_{ij} + \rho_k^2 s_{ij}, \quad (14)$$

$$s_{ij,k} = \theta_k^1 r_{ij} + \theta_k^2 s_{ij}, \quad (15)$$

here $\rho_i^1, \rho_i^2, \theta_i^1, \theta_i^2$ are some vectors.

3 PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES OF THE FIRST TYPE

Integrability conditions (8) and (9) take a shape of the following

$$u_{\alpha i} R_{jkl}^{\alpha} + u_{\alpha j} R_{ikl}^{\alpha} = g_{ij} \left(\sigma_{kl}^1 - \sigma_{lk}^1 + \sigma_k^2 \sigma_l^1 - \sigma_l^2 \sigma_k^1 + \tau_l^3 \sigma_k^1 - \tau_k^3 \sigma_l^1 \right) + \\ + u_{ji} \left(\sigma_{kl}^2 - \sigma_{lk}^2 + \sigma_k^3 \tau_l^2 - \sigma_l^3 \tau_k^2 \right) + v_{ji} \left(\sigma_{kl}^3 - \sigma_{lk}^3 + \sigma_k^2 \sigma_l^3 - \sigma_l^2 \sigma_k^3 + \sigma_k^3 \tau_l^3 - \sigma_l^3 \tau_k^3 \right), \quad (16)$$

$$v_{\alpha i} R_{jkl}^{\alpha} + v_{\alpha j} R_{ikl}^{\alpha} = g_{ij} \left(\tau_{kl}^1 - \tau_{lk}^1 + \tau_k^2 \sigma_l^1 - \tau_l^2 \sigma_k^1 + \tau_k^3 \tau_l^1 - \tau_l^3 \tau_k^1 \right) + \\ + u_{ji} \left(\tau_{kl}^2 - \tau_{lk}^2 + \tau_k^2 \sigma_l^2 - \tau_l^2 \sigma_k^2 + \tau_k^3 \tau_l^2 - \tau_l^3 \tau_k^2 \right) + v_{ji} \left(\tau_{kl}^3 - \tau_{lk}^3 + \tau_k^2 \sigma_l^3 - \tau_l^2 \sigma_k^3 \right), \quad (17)$$

here $\sigma_{ij}^{\alpha} = \sigma_{i,j}^{\alpha}; \tau_{ij}^{\alpha} = \tau_{i,j}^{\alpha}; \alpha = 1, 2, 3$.

Wrapping (16) and (17) by indices i, j , we get, respectively

$$\sigma_{kl}^1 - \sigma_{lk}^1 + \sigma_k^2 \sigma_l^1 - \sigma_l^2 \sigma_k^1 + \tau_l^3 \sigma_k^1 - \tau_k^3 \sigma_l^1 = -\frac{u}{n} A_{kl} - \frac{v}{n} B_{kl}, \quad (18)$$

$$\tau_{kl}^1 - \tau_{lk}^1 + \tau_k^2 \sigma_l^1 - \tau_l^2 \sigma_k^1 + \tau_k^3 \tau_l^1 - \tau_l^3 \tau_k^1 = -\frac{u}{n} C_{kl} - \frac{v}{n} D_{kl}, \quad (19)$$

where



$$\begin{aligned}
 A_{kl} &= \sigma_{kl}^2 - \sigma_{lk}^2 + \sigma_k^3 \tau_l^2 - \sigma_l^3 \tau_k^2, \\
 B_{kl} &= \sigma_{kl}^3 - \sigma_{lk}^3 + \sigma_k^2 \sigma_l^3 - \sigma_l^2 \sigma_k^3 + \sigma_k^3 \tau_l^3 - \sigma_l^3 \tau_k^3, \\
 C_{kl} &= \tau_{kl}^2 - \tau_{lk}^2 + \tau_k^2 \sigma_l^2 - \tau_l^2 \sigma_k^2 + \tau_k^3 \tau_l^2 - \tau_l^3 \tau_k^2, \\
 D_{kl} &= \tau_{kl}^3 - \tau_{lk}^3 + \tau_k^3 \sigma_l^3 - \tau_l^3 \sigma_k^3, \\
 u &= u_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}; \quad v = v_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}.
 \end{aligned}$$

Then, (16) and (17) can be re-written as follows

$$u_{\alpha i} R_{jkl}^\alpha + u_{\alpha j} R_{ikl}^\alpha = a_{ij} A_{kl} + b_{ij} B_{kl}, \quad (20)$$

$$v_{\alpha i} R_{jkl}^\alpha + v_{\alpha j} R_{ikl}^\alpha = a_{ij} C_{kl} + b_{ij} D_{kl}, \quad (21)$$

here

$$a_{ij} = u_{ij} - \frac{u}{n} g_{ij}; \quad b_{ij} = v_{ij} - \frac{v}{n} g_{ij}.$$

Cycling (20) and (21) by indices i, k, l

$$u_{\alpha i} R_{jkl}^\alpha + u_{\alpha k} R_{jli}^\alpha + u_{\alpha l} R_{jik}^\alpha = a_{ij} A_{kl} + a_{kj} A_{li} + a_{li} A_{ik} + b_{ij} B_{kl} + b_{kj} B_{li} + b_{lj} B_{ik}, \quad (22)$$

$$v_{\alpha i} R_{jkl}^\alpha + v_{\alpha k} R_{jli}^\alpha + v_{\alpha l} R_{jik}^\alpha = a_{ij} C_{kl} + a_{kj} C_{li} + a_{li} C_{ik} + b_{ij} D_{kl} + b_{kj} D_{li} + b_{lj} D_{ik}. \quad (23)$$

Wrapping by indices i, j , we obtain, respectively

$$u_{\alpha i} R_k^\alpha - u_{\alpha k} R_l^\alpha = a_{l\alpha} A_k^\alpha - a_{k\alpha} A_l^\alpha + b_{l\alpha} B_k^\alpha - b_{k\alpha} B_l^\alpha, \quad (24)$$

$$v_{\alpha i} R_k^\alpha - v_{\alpha k} R_l^\alpha = a_{l\alpha} C_k^\alpha - a_{k\alpha} C_l^\alpha + b_{l\alpha} D_k^\alpha - b_{k\alpha} D_l^\alpha, \quad (25)$$

where $A_j^i = A_{\alpha j} g^{\alpha i}$; $B_j^i = B_{\alpha j} g^{\alpha i}$; $C_j^i = C_{\alpha j} g^{\alpha i}$; $D_j^i = D_{\alpha j} g^{\alpha i}$.

Taking into account (7) the equation (20) can be written down in the following form.

$$\begin{aligned}
 &\alpha(u_{ik} g_{jl} - u_{il} g_{jk} + u_{jk} g_{il} - u_{jl} g_{ik}) + \beta(u_{i\alpha} u_k^\alpha u_{jl} - u_{i\alpha} u_l^\alpha u_{jk} + u_{j\alpha} u_k^\alpha u_{il} - u_{j\alpha} u_l^\alpha u_{ik}) + \\
 &+ \gamma(u_{i\alpha} v_k^\alpha v_{jl} - u_{i\alpha} v_l^\alpha v_{jk} + u_{j\alpha} v_k^\alpha v_{il} - u_{j\alpha} v_l^\alpha v_{ik}) = a_{ij} A_{kl} + b_{ij} B_{kl}.
 \end{aligned} \quad (26)$$

Wrapping the latter by indices j, k and alternating by indices i, l :

$$a_{\alpha i} A_k^\alpha - a_{k\alpha} A_l^\alpha + b_{l\alpha} B_k^\alpha - b_{k\alpha} B_l^\alpha = 0. \quad (27)$$

Analogous equation can be obtained also for the equations (25).

Substituting it into (24) and (25), it is easy to see that the following statement is true.

Lemma 1. *Tensors u_{ij} and v_{ij} satisfy the conditions*

$$u_{\alpha i} R_j^\alpha - u_{\alpha j} R_i^\alpha = 0, \quad (28)$$

$$v_{\alpha i} R_j^\alpha - v_{\alpha j} R_i^\alpha = 0. \quad (29)$$

4 PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES OF THE SECOND TYPE

Integrability conditions (11) and (12) are as follows

$$p_{\alpha i} R_{jkl}^\alpha + p_{\alpha j} R_{ikl}^\alpha = (\sigma_{k,l} - \sigma_{l,k}) p_{ij}, \quad (30)$$

$$s_{\alpha j} R_{ikl}^\alpha + s_{i\alpha} R_{jkl}^\alpha = (\tau_{k,l} - \tau_{l,k}) s_{ij}. \quad (31)$$

Wrapping (30) by indices i, j , we can see that, when $p = p_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \neq 0$, then

$$\sigma_{k,l} - \sigma_{l,k} = 0, \tag{32}$$

or, in other words vector σ_i a gradient vector with a necessity. Then, equation (30), can be re-written in the following form

$$p_{\alpha i} R_{jkl}^{\alpha} + p_{\alpha j} R_{ikl}^{\alpha} = 0. \tag{33}$$

Cycling (10) by indices j, k, l and taking into account the properties of Ricci tensor, reducing terms, we obtain

$$(2 - \lambda)(s_{ik}s_{jl} + s_{ij}s_{lk} + s_{il}s_{kj}) = 0. \tag{34}$$

When $\lambda = 2$, then (10) takes the following shape

$$R_{ijkl} = \alpha(p_{ik}p_{jl} - p_{il}p_{jk}) + \beta(s_{ik}s_{jl} - s_{jk}s_{il} + 2s_{ij}s_{kl}). \tag{35}$$

Wrapping by indices j, k , we arrive at

$$R_{il} = \alpha(p_{i\alpha}p_l^{\alpha} - p_{il}p) + 3\beta s_{i\alpha}s_l^{\alpha}, \tag{36}$$

here $p_j^i = p_{\alpha j}g^{\alpha i}$; $s_j^i = s_{\alpha j}g^{\alpha i}$.

When the equation (34) contains $\lambda \neq 2$, then

$$s_{ik}s_{jl} + s_{ij}s_{lk} + s_{il}s_{kj} = 0. \tag{37}$$

Let us select vectors ξ^j and ξ^l , in such a way, that $s_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\xi^{\beta} = 1$, then, basing on the (37), we get

$$s_{ik} = a_i b_k - a_k b_i, \tag{38}$$

where $a_i = s_{\alpha i}\xi^{\alpha}$; $b_i = s_{\alpha i}\eta^{\alpha}$.

Let us substitute (38) in (10), we obtain

$$R_{ijkl} = \alpha(p_{ik}p_{jl} - p_{il}p_{jk}) + \beta(\lambda + 1)s_{ij}s_{kl}. \tag{39}$$

Lemma 2. Riemann tensor obtains a form of (35) or (39) for the spaces of the second type.

Cycling (33) by indices j, k, l , we obtain

$$p_{\alpha j} R_{ikl}^{\alpha} + p_{\alpha k} R_{ilj}^{\alpha} + p_{\alpha l} R_{ijk}^{\alpha} = 0. \tag{40}$$

Wrapping by indices i, k , we get

$$p_{\alpha i} R_j^{\alpha} - p_{\alpha j} R_i^{\alpha} = 0. \tag{41}$$

By an application of the approach, which was used to study spaces of the first type, we are able to see:

$$s_{\alpha i} R_j^{\alpha} - s_{\alpha j} R_i^{\alpha} = 0. \tag{42}$$

5 PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES OF THE THIRD TYPE

Cycling (13) and applying the above-mentioned methods, we get three main cases

a) when $\lambda = \mu = 2$

$$R_{ijkl} = \alpha(r_{ik}r_{jl} - r_{jk}r_{il} + 2r_{ij}r_{kl}) + \beta(s_{ik}s_{jl} - s_{jk}s_{il} + 2s_{ij}s_{kl}). \tag{43}$$

b) when $\lambda = 2, \mu \neq 2$

$$R_{ijkl} = \alpha(r_{ik}r_{jl} - r_{jk}r_{il} + 2r_{ij}r_{kl}) + \beta(\mu + 1)s_{ij}s_{kl}. \quad (44)$$

c) when $\lambda \neq 2, \mu \neq 2$

$$R_{ijkl} = \alpha(\lambda + 1)r_{ij}r_{kl} + \beta(\mu + 1)s_{ij}s_{kl}. \quad (45)$$

Integrability conditions for equations (14) and taking account (15), we get

$$r_{\alpha j} R_{ikl}^{\alpha} + r_{i\alpha} R_{jkl}^{\alpha} = \left(\rho_{k,l}^1 - \rho_{l,k}^1 + \rho_k^2 \Theta_l^1 - \rho_l^2 \Theta_k^1 \right) r_{ij} + \left(\rho_{k,l}^2 - \rho_{l,k}^2 + \rho_k^1 \rho_l^1 - \rho_l^1 \rho_k^1 + \rho_k^2 \Theta_l^2 - \rho_l^2 \Theta_k^2 \right) s_{ij}. \quad (46)$$

Analogous conditions can be obtained for the tensor s_{ij} , applying expressions (15) and (14).

Applying the methods, which were used for the first and the second type, and taking into account the equations (43), (44), (45) we can see for every case that

$$r_{\alpha i} R_j^{\alpha} - r_{\alpha j} R_i^{\alpha} = 0, \quad (47)$$

$$s_{\alpha i} R_j^{\alpha} - s_{\alpha j} R_i^{\alpha} = 0. \quad (48)$$

Thus, the following statement is true:

Theorem. The following conditions (47), (48) are true for pseudo-Riemannian spaces of the third type.

6 CONCLUSIONS

The work is devoted to the study of pseudo-Riemannian spaces with the Riemann tensor of a particular structure. Riemann tensor's structure is defined by combinations of special symmetric and skew symmetric tensors. The tensors are selected in such a way, which would permit the application of results in the theory of geodesic mappings, theory of holomorphic projective mappings of Kahler spaces and in other geometric problems [1, 3, 7, 10, 16].

It is proved for every type of these spaces that the special tensors jointly with Ricci tensor are connected by a relation of commutation. These conditions are extremely important for a study of pseudo-Riemannian spaces, namely they can be fruitfully applied for the latter [11, 12, 13]. The further research should proceed by extension of these conditions to the Einstein tensors.

References

1. Bolsinov, A. V., Kiosak, V. A., Matveev, V. S. (2009). A Fubini Theorem for pseudo-Riemannian metrics. *Journal of the London Mathematical Society*. 80 (2). 341–356.
2. Evtushik, L., Kiosak, V., Mikes, J. (2010). The mobility of Riemannian spaces with respect to conformal mappings onto. *Einstein spaces Russian Mathematics*. 54(80). 29–33.
3. Fedorova, A., Kiosak, V., Matveev, V., Rosemann, S. (2012). The only Kahler manifold with degree of mobility at least 3 is $(\mathbb{C}P(n), g_{\text{Fubini-Study}})$. *Proceedings of the London Mathematical Society*. Volume 105. Issue 1. 153–188. <https://doi.org/10.1112/plms/pdr053>
4. Gladish, B. I., Prishlyak, O. O. (2016). Functions with nondegenerated critical points on the boundary of the surface. *Ukrainian Math. J.* 68(1). 29–40.
5. Gladish, B. I., Prishlyak, O. O. (2017). Topology of functions with isolated critical points on the boundary of a 2-dimensional manifold. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)*. 13. 50. doi: 10.3842/SIGMA.2017.050
6. Hinterleitner, I., Kiosak, V. (2008). $\varphi(\text{Ric})$ Vector Fields in Riemannian Spaces. *Archivum mathematicum*. Brno. 44(5). 385–390.
7. Hinterleitner, I., Kiosak, V. (2010). Special Einstein's equations on Kahler manifolds. *Archivum Mathematicum*. 46(5). 333–337.

8. Kiosak, V. A. (2012). On the conformal mappings of quasi-Einstein spaces. *Journal of Mathematical Sciences*. United States. 184(1). 12–18.
9. Kiosak, V., Hinterleitner, I. (2009). $\varphi(\text{Ric})$ -Vector Fields on Conformally Flat Spaces. *Proceedings of American Institute of Physics*. 1191(98). 98–103. <https://doi.org/10.1063/1.3275604>.
10. Kiosak, V. A., Kovalova, V. S. (2020). Geodesic mappings of quasi-Einstein spaces with a constant scalar curvature. *Matematychni Studii*. 53(2). 212–217. <https://doi.org/10.30970/ms.53.2.212-217>.
11. Kiosak, V., Lesechko, O., Savchenko, O. (2018). Mappings of Spaces with Affine Connection. *17th Conference on Applied Mathematics. APLIMAT 2018 – Proceedings*. Bratislava. 563–569.
12. Kiosak, V., Matveev, V. (2014). There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor. *Journal of Geometry and Physics*. 78. 1–11. [doi:10.1016/j.geomphys.2014.01.002](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.01.002).
13. Kiosak, V. A., Matveev, V. S., Mikes, J., Shandra, I. G. (2010). On the degree of geodesic mobility for Riemannian metrics. *Mathematical Notes*. 87(4). 586–587. <https://doi.org/10.1134/S0001434610030375>.
14. Kiosak, V., Savchenko, A., Gudyreva, O. (2019). On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Proceedings*. 2164 (040001). <https://doi.org/10.1063/1.5130793>.
15. Kiosak, V., Savchenko, A., Kovalova, G. (2020). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I. *Proceedings of the International Geometry Center*. 13 (1). 35–48. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v13i1.1711>.
16. Kiosak, V., Savchenko, A., Shevchenko, T. (2018). Holomorphically Projective Mappings of Special Kahler Manifolds. *AIP Conference Proceedings*. 2025 (08004). <https://doi.org/10.1063/1.5064924>.
17. Lesechko, O., Latysh, O., Kamienieva, A. (2019). Models of Mechanical Systems Preserving the Weyl Tensor. *AIP Conference Proceedings*. 2164 (040002). [doi:10.1063/1.5130794](https://doi.org/10.1063/1.5130794).
18. Mikes, J., Hinterleitner, I., Kiosak, V. A. (2006). On the Theory of Geodesic Mappings of Einstein Spaces and their Generalizations. *AIP Conference Proceedings*. 861 (2006). 428–435. <https://doi.org/10.1063/1.2399606>.
19. Mulin, I.G. (1973). On some classes of Riemannian spaces with a special structure of the curvature tensor. *Ukrainskii geometricheskii sbornik*. 14. 56–64.
20. Prishlyak, O. O. (2007). Complete topological invariants of Morse-Smale flows and handle decompositions of 3-manifolds. *Journal of Mathematical Sciences*.
21. Sinyukov, N. S. (1979). *Geodezicheskie otobrazheniya rimanovykh prostranstv*. [Geodesic mappings of Riemannian spaces]. Moskva: Nauka. [in Russian].
22. Vasilenko, A. T., Lesechko, A. V. (1996). Nonlinear nonaxisymmetric deformation of composite shells of revolution. *Journal of Mathematical Sciences*. 79 (6). 1458–1461.
23. Zarichnyi, M., Savchenko, A., Kiosak, V. (2019). Strong topology on the set of persistence diagrams. *AIP Conference Proceedings*. 2164 (040006). <https://doi.org/10.1063/1.5130798>.

Література

1. Bolsinov A. V., Kiosak V. A., Matveev V. S. A Fubini Theorem for pseudo-Riemannian metrics. *Journal of the London Mathematical Society*. 2009. 80(2). pp. 341–356.
2. Evtushik L., Kiosak V., Mikes J. The mobility of Riemannian spaces with respect to conformal mappings onto Einstein spaces *Russian Mathematics*. 2010. 54 (80). pp.29–33.
3. Fedorova A., Kiosak V., Matveev V., Rosemann S. The only Kahler manifold with degree of mobility at least 3 is $(\mathbb{C}P(n), g_{\text{Fubini-Study}})$. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2012. Volume 105. Issue 1. pp. 153–188. <https://doi.org/10.1112/plms/pdr053>
4. Gladish B. I., Prishlyak O. O. Functions with nondegenerated critical points on the boundary of the surface. *Ukrainian Math J*. 2016. 68(1). pp. 29–40.
5. Gladish B. I., Prishlyak O. O. Topology of functions with isolated critical points on the boundary of a 2-dimensional manifold. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)*. 2017. 13. 50. [doi: 10.3842/SIGMA.2017.050](https://doi.org/10.3842/SIGMA.2017.050)
6. Hinterleitner I., Kiosak V. $\varphi(\text{Ric})$ Vector Fields in Riemannian Spaces. *Archivum mathematicum*. Brno. 2008. 44(5). pp. 385–390.

7. Hinterleitner I., Kiosak V. Special Einstein's equations on Kahler manifolds. *Archivum Mathematicum*. 2010. 46(5). pp. 333–337.
8. Kiosak V. A. On the conformal mappings of quasi-Einstein spaces. *Journal of Mathematical Sciences*. United States. 2012. 184(1). pp. 12–18.
9. Kiosak V. Hinterleitner I. $\varphi(\text{Ric})$ -Vector Fields on Conformally Flat Spaces. *Proceedings of American Institute of Physics*. 2009. 1191(98). pp. 98–103. <https://doi.org/10.1063/1.3275604>.
10. Kiosak V. A., Kovalova V. S. Geodesic mappings of quasi-Einstein spaces with a constant scalar curvature. *Matematychni Studii*. 2020. 53(2). pp. 212–217. <https://doi.org/10.30970/ms.53.2.212-217>.
11. Kiosak V., Lesechko O., Savchenko O. Mappings of Spaces with Affine Connection. 17th Conference on Applied Mathematics. APLIMAT 2018 - Proceedings, Bratislava. 2018. pp. 563–569.
12. Kiosak V., Matveev V. There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor. *Journal of Geometry and Physics*. 2014. 78. pp. 1–11. doi:10.1016/j.geomphys.2014.01.002.
13. Kiosak V. A., Matveev V. S., Mikes J., Shandra I. G. On the degree of geodesic mobility for Riemannian metrics. *Mathematical Notes*. 2010. 87(4). pp. 586–587. <https://doi.org/10.1134/S0001434610030375>.
14. Kiosak V., Savchenko A., Gudyreva O. On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Proceedings*. 2019. 2164 (040001). <https://doi.org/10.1063/1.5130793>.
15. Kiosak V., Savchenko A., Kovalova G. Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2020. 13 (1), pp. 35–48. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v13i1.1711>.
16. Kiosak V., Savchenko A., Shevchenko T. Holomorphically Projective Mappings of Special Kahler Manifolds. *AIP Conference Proceedings*. 2018. 2025 (08004). <https://doi.org/10.1063/1.5064924>.
17. Lesechko O., Latysh O., Kamienieva A. Models of Mechanical Systems Preserving the Weyl Tensor. *AIP Conference Proceedings*. 2019. 2164 (040002). doi:10.1063/1.5130794.
18. Mikes J., Hinterleitner I., Kiosak V. A. On the Theory of Geodesic Mappings of Einstein Spaces and their Generalizations. *AIP Conference Proceedings*. 2006. 861 (2006). pp. 428–435. <https://doi.org/10.1063/1.2399606>.
19. Mulin I.G. On some classes of Riemannian spaces with a special structure of the curvature tensor. *Ukrainskii geometricheskii sbornik*. 1973. 14. pp. 56–64.
20. Prishlyak O. O. Complete topological invariants of Morse-Smale flows and handle decompositions of 3-manifolds. *Journal of Mathematical Sciences*. 2007.
21. Синюков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 256 с.
22. Vasilenko A. T., Lesechko A. V. Nonlinear nonaxisymmetric deformation of composite shells of revolution. *Journal of Mathematical Sciences*. 1996. 79 (6). pp. 1458-1461.
23. Zarichnyi M., Savchenko A., Kiosak V. Strong topology on the set of persistence diagrams. *AIP Conference Proceedings*. 2019. 2164 (040006). <https://doi.org/10.1063/1.5130798>.

Lesechko Oleksandr

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Ph.D., Associate professor
Didrihsona str., 4Ukraine 65029, a.lesechko@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2352-6174

Shevchenko Tatiana

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Ph.D., Associate professor
Didrihsona str., 4Ukraine 65029, shevat11@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7304-1706

For references:

Lesechko O, Shevchenko T. (2021). Pseudo-riemannian spaces with a special Riemann tensor. *Mechanics and Mathematical Methods*. 3 (1). 106–114.

Для посилань:

Лесечко О.В., Шевченко Т.І. Псевдоріманові простори зі спеціальною структурою тензора Рімана. *Механіка та математичні методи*, 2021. Т. 3. № 1. С. 106–114.

Наукове видання

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ
MECHANICS AND MATHEMATICAL METHODS

Науковий журнал

(українською, російською та англійською мовами)

Відповідальний за випуск: Ковров А. В.

Підписано до друку 22.06.2021 р.
Формат 60×84/8 Папір офісний Гарнітура Times
Цифровий друк. Ум.-друк. арк. 13,49.
Наклад 50 прим. Зам. №21-16Е

Видавець і виготовлювач:

Одеська державна академія будівництва та архітектури
Свідоцтво ДК № 4515 від 01.04.2013 р.
Україна, 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 4.
тел.: (048) 729-85-34, e-mail: rio@ogasa.org.ua

Надруковано в авторській редакції з готового оригінал-макету
в редакційно-видавничому відділі ОДАБА