УДК 517.95

ПРО ПОРУШЕННЯ ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ СИСТЕМ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Кириченко В. В.[1]**, Лесіна Є. В.**[2]
[1]*Національний технічний університет України "КПІ ім. І. Сікорського"*
[2]*Донецький національний технічний університет*

Анотація: Вивчення питань коректної постановки граничних задач для диференціальних рівнянь та систем займає важливе місце в сучасних дослідженнях. Першорядним при розгляді коректності є питання однозначної розв'язності даної задачі. Зокрема, викликає інтерес проблема порушення єдиності розв'язку граничних задач для загальних диференціальних рівнянь в обмежених областях з алгебраїчною межею.

Вперше на властивість нетривіального розв'язання однорідної задачі Діріхле для неправильно еліптичних рівнянь другого порядку звернув увагу А. В. Біцадзе, побудувавши приклад рівняння з постійними комплексними коефіцієнтами, для якого згадана задача мала нульовий розв'язок. Р. А. Александрян отримав умову порушення єдиності розв'язку задачі Діріхле в одиничному крузі для гіперболічного рівняння у випадку, коли кути нахилу характеристик відрізняються знаком. В. П. Бурський, розглядаючи однорідну задачу Діріхле в одиничному крузі для рівнянь другого порядку з постійними комплексними коефіцієнтами і однорідним невиродженим символом, отримав критерій нетривіального розв'язання у вигляді π-ірраціональності кута між характеристиками.

У даній роботі досліджується питання порушення єдиності розв'язку однорідної задачі Діріхле для системи безтипових диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку в модельній області – крузі. Вихідна система записана у вигляді рівняння з комутуючими матричними коефіцієнтами. Умова перестановки дозволяє отримати необхідну і достатню умову нетривіального розв'язання даної задачі у вигляді рівності нулю визначника, елементи якого виражаються через коефіцієнти рівняння. Така форма запису критерію дозволяє будувати приклади систем, ядро задачі Діріхле для яких є нетривіальним і нескінченновимірним. Основу дослідження складають інтегральна умова зв'язку асоційованих граничних L-слідів, а також функціональна схема, застосування якої зводить розкладання матриці-функції в ряд Фур'є до стандартного розкладання кожного з її елементів. Доведено теорему нетривіального розв'язання однорідної задачі Діріхле.

Ключові слова: задача Діріхле, асоційовані L-сліди розв'язку, векторно-поліноміальний розв'язок, ряд Фур'є, простір Соболєва вектор-функцій.

ON THE UNIQUENESS VIOLATION OF THE DIRICHLET PROBLEM SOLUTION FOR SECOND-ORDER SYSTEMS

V. Kyrychenko[1]**, Ye. Lesina**[2]
[1]*National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"*
[2]*Donetsk National Technical University*

Abstract: The study of the issues of the correct posedness of boundary value problems for differential equations and systems occupies an important place in modern research. When considering correctness, the question of unique solvability of this problem is of paramount importance. In particular, the problem of violation of the uniqueness of the solution of boundary value problems for general differential equations in bounded domains with algebraic boundary is of interest.

The property of nontrivial solvability of the homogeneous Dirichlet problem for incorrectly elliptic equations of the second order was first pointed out by A. V. Bitsadze, having constructed an example of an equation with constant complex obtained a condition for the violation of the uniqueness

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2021-3-1-83-94

of the solution to the Dirichlet problem in the unit disc for a hyperbolic equation in the case when the slope angles of the characteristics differ in sign. V. P. Burskii, considering the homogeneous Dirichlet problem in the unit disc for second-order equations with constant complex coefficients and a homogeneous non-degenerate symbol, obtained a criterion for nontrivial solvability in the form of π-irrationality of the angle between the characteristics.

In this paper, we investigate the question of violation of the uniqueness of the solution of the homogeneous Dirichlet problem for a system of typeless second-order partial differential equations in a model domain – a circle. The original system is written in the form of an equation with commuting matrix coefficients. The permutability condition allows one to obtain a necessary and sufficient condition for the nontrivial solvability of the problem under consideration in the form of equality to zero of the determinant, the elements of which are expressed in terms of the coefficients of the equation. This form of writing the criterion allows one to construct examples of systems for which the kernel of the Dirichlet problem is nontrivial and infinite-dimensional. The study was based on the integral condition for the connection of associated boundary L-traces, as well as a functional scheme, the application of which reduces the expansion of a matrix function in a Fourier series to a standard expansion of each of its elements. A theorem of nontrivial solvability of the homogeneous Dirichlet problem is proved.

Keywords: the Dirichlet problem, associated L-traces of a solution, vector-polynomial solution, Fourier series, the Sobolev space of vector-functions.

1 ВСТУП

Дослідженню властивості ньотеровості операторів граничних задач, що розглядаються для еліптичних диференціальних рівнянь, поклала початок робота Я. Б. Лопатинського [1], в якій зазначена умова зведення загальної граничної задачі в обмеженій області до еквівалентної системи інтегральних рівнянь. Пізніше була встановлена необхідність цієї умови [2], [3], [4], яка називається в даний час умовою Лопатинського.

Вперше ефект нетривіального розв'язання однорідної задачі Діріхле для диференціальних рівнянь другого порядку був виявлений А. В. Біцадзе. У його роботі [5] наведено приклад еліптичної системи диференціальних рівнянь, для якої однорідна задача Діріхле в крузі має нескінченний набір лінійно незалежних поліноміальних розв'язків. Згодом А. В. Біцадзе побудував ще один приклад системи з тією самою властивістю і ввів поняття слабо зв'язаної системи в довільній області з межею Ляпунова, простір розв'язків задачі Діріхле якої в даній області має скінченну розмірність [6]. Однак перевірка умови слабкої зв'язаності викликає труднощі навіть у випадку круга для скалярного рівняння.

Як показано В. П. Бурським в роботі [7], для єдиності розв'язку першої граничної задачі тип рівняння не має принципового значення. У статті [8] отримано критерій нетривіальної розв'язності однорідної задачі Діріхле в одиничному крузі для рівнянь другого порядку з постійними комплексними коефіцієнтами і однорідним (за порядком диференціювання) невиродженим символом у вигляді π-раціональності кута між комплексними характеристиками.

Критерій порушення єдиності розв'язку однорідної задачі Діріхле в одиничному крузі K для безтипового диференціального рівняння другого порядку

$$au''_{x_1x_1}+bu''_{x_1x_2}+cu''_{x_2x_2}=0,$$

яке розглядається в [8], де a,b,c – комплексні квадратні матриці $n\times n$, $u\in H^{2,n}(K)$, $H^{2,n}(K)=\left[H^2(K)\right]^n$ – простір Соболєва вектор-функцій, записано в достатньо складній формі. У зв'язку з цим виникла необхідність більш простого опису систем з порушенням єдиності, який було реалізовано в роботах [9], [10] за допомогою додаткової умови комутативності матриць-коефіцієнтів і метода двоїстості "рівняння–область" [11], [12], [13]. Результатом є необхідна і достатня умова, яка записана в вигляді рівності нулю визначника, елементи якого виражаються через коефіцієнти рівняння, і дозволяють будувати приклади систем, ядро задачі Діріхле для яких є нетривіальним та нескінченновимірним.

У даній роботі, з метою отримання критерію порушення єдиності розв'язку першої граничної задачі в одиничному крузі для систем диференціальних рівнянь другого порядку, використаний інший підхід. В основі дослідження лежить інтегральна умова зв'язку асоційованих граничних *L*-слідів розв'язку задачі Коші, сформульована і доведена в книзі [11], а також використовується наведена нижче функціональна схема, що зводить розкладання матриці-функції в ряд Фур'є до стандартного розкладу кожного елемента.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ПОПЕРЕДНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Для рівняння

$$Lu \equiv \left(\sin\phi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\phi_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\sin\phi_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\phi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)u = 0 \qquad (1)$$

розглядається однорідна задача Діріхле

$$u\big|_{\partial K} = 0 \qquad (2)$$

в просторі Соболєва $H^{m,n}(K) = \left[H^m(K)\right]^n$ $(m \geq 2)$ вектор-функцій, де $K = \left\{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1\right\}$ – одиничний круг с межею ∂K. Передбачається, що ϕ_1 та ϕ_2 – комутуючі комплексні невироджені $n \times n$-матриці, $\phi_0 = \phi_2 - \phi_1$ – їх різниця.

В [11] вивчалась задача Коші для рівняння (1):

$$u\big|_{\partial K} = \psi, \quad u'_\nu\big|_{\partial K} = \chi, \qquad (3)$$

де $\psi \in H^{m-1/2,n}(\partial K)$, $\chi \in H^{m-3/2,n}(\partial K)$, ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі. При цьому було доведено, що L-сліди $P \in H^{m-1/2,n}(\partial K)$ і $C \in H^{m-3/2,n}(\partial K)$ розв'язку виражаються через звичайні сліди функції u на межі області наступним чином:

$$\begin{aligned} &P = -l(\nu(x))\psi(x), \\ &C = l(\nu(x))\chi(x) + [(\nu_1^2 - \nu_2^2)\sin(\phi_1 + \phi_2) + 2\nu_1\nu_2\cos(\phi_1 + \phi_2)]\psi'_s + \\ &+[(\nu_2^2 - \nu_1^2)\cos(\phi_1 + \phi_2) - 2\nu_1\nu_2\sin(\phi_1 + \phi_2)]\psi. \end{aligned} \qquad (4)$$

Тут l – матричний символ диференціального оператора L, s – натуральний параметр, зростаючий в напрямку вектору $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$. При дослідженні питання існування єдиного розв'язку задачі (1), (3) в просторі $H^{m,n}(K)$, була отримана умова зв'язку слідів ψ і χ (див. теорему 1, доведення якої наводиться в книжці [11]).

Теорема 1. *Нехай вектор-функції* $P \in H^{m-1/2,n}(\partial K)$ *і* $C \in H^{m-3/2,n}(\partial K)$ *задовольняють наступному співвідношенню:*

$$\int_{\partial K} \left[P(x(s))(-i\langle \nu, \xi\rangle + C(x(s))\right]\exp(-i\langle x, \xi\rangle)ds_x = 0. \qquad (5)$$

Тоді існує єдиний розв'язок $u \in H^{m,n}(K)$ *задачі (1), (3), граничні дані* ψ, χ *якого пов'язані з функціями P і C рівностями (4). Тут* $\langle a, b\rangle = a \cdot \bar{b} = a_1 \cdot \bar{b}_1 + a_2 \cdot \bar{b}_2$.

Перепишемо інакше інтегральне співвідношення (5), яке є умовою зв'язку асоційованих граничних L-слідів. Введемо вектори $\tilde{a}^j = (-\cos\phi_j, \sin\phi_j)$ з матричними компонентами і розкладемо експоненту $e^{-i(x,\xi)}$ при $\xi = \lambda\tilde{a}^j$ в ряд по λ. Тоді коефіцієнти ряду будуть пов'язані наступними умовами:

$$\int_{\partial K} \left[NP(x(s))(\nu \cdot \tilde{a}^j)Q'(x \cdot \tilde{a}^j) + C(x(s))(x \cdot \tilde{a}^j)^N\right]ds = 0, \quad \forall N \in \mathbf{Z}^+, \ j = 1, 2,$$

додавши які, одержимо:

$$\int_{\partial K} \left[P(x(s))(\nu \cdot \tilde{a}^j)Q'(x \cdot \tilde{a}^j) + C(x(s))Q(x \cdot \tilde{a}^j)\right]ds = 0, \ \forall Q \in \mathbf{C}[z], \ j = 1, 2. \qquad (6)$$

Рівність (5) в еквівалентній формі запису (6) є більш зручною для подальших обчислень. Зауважимо, що в одиничному крузі K нормаль $\nu(x) = x$, а натуральний параметр s співпадає з кутовою координатою τ. Далі, $(\nu \cdot \tilde{a}^j) = (x \cdot \tilde{a}^j) = -\cos(\tau I + \phi_j)$, оскільки $x = (\cos\tau, \ \sin\tau)$.

3 ФУНКЦІОНАЛЬНА СХЕМА

Введемо простір $L_2^{n\times n}(0,2\pi)$ квадратних матриць порядку n з елементами із звичайного простору Гільберта $L_2(0,2\pi)$ і визначимо в ньому скалярний добуток

$$\forall F,G \in L_2^{n\times n}(0,2\pi), \ \ (F,G) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{tr}\int_0^{2\pi} F(t)\cdot G^*(t)dt\,, \tag{7}$$

який породжує норму

$$\|F\|^2 = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{tr}\int_0^{2\pi} F(t)\cdot F^*(t)dt, \ \ \forall F(t) \in L_2^{n\times n}(0,2\pi)\,.$$

Усі аксіоми скалярного добутку залишаються справедливими для виразу (7). Дійсно, полуторалінійність очевидна, антисиметричність випливає із відомих формул $(AB)^* = B^* A^*$ і $\mathrm{tr}\,A^* = \overline{\mathrm{tr}\,A}$ для довільних квадратних матриць A і B. Далі, нерівність $\|F\|^2 \ge 0$ не порушується, оскільки $(F\cdot F^*u,u) = (F^*u, F^*u) \ge 0$, а слід позитивно визначеної матриці – число додатне. Нарешті, рівність $\|F\|^2 = 0$ означає, що $\mathrm{tr}(F\cdot F^*(t)) = 0, \ \forall t$, в силу додатності сліду як суми власних значень оператора.

Разом з простором $L_2^{n\times n}(0,2\pi)$, введемо для $m \in \mathbf{N}$ простір Соболєва $H^{m,n\times n}(0,2\pi)$ квадратних матриць порядку n і визначимо в ньому скалярний добуток і норму відповідно:

$$(F,G)_{H^{m,n\times n}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{tr}[\sum_{|\alpha|\le m} \partial^\alpha F(t)\cdot \partial^\alpha G^*(t)]dt\,,$$

$$\|F\|^2_{H^{m,n\times n}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{tr}[\sum_{|\alpha|\le m} \partial^\alpha F(t)\cdot \partial^\alpha F^*(t)]dt\,.$$

Нижче буде показано, що застосування такої функціональної схеми зводить розкладання матриці-функції в ряд Фур’є до звичайного розкладання кожного з її елементів.

Система матриць-функцій $\left\{\cos k\tau I, \, \sin k\tau I\right\}_{k=0}^{\infty}$ є ортонормованою і повною в просторі $L_2^{n\times n}(0,2\pi)$. Для перевірки ортонормованості достатньо підставити функції із вказаної системи в формулу (7) скалярного добутку и переконатися в справедливості співвідношень ортогональності.

Доведемо повноту системи $\left\{\cos k\tau I, \, \sin k\tau I\right\}_{k=0}^{\infty}$, а саме: покажемо, що для будь-якої функції $F(\tau) \in L_2^{n\times n}(0,2\pi)$ знайдуться коефіцієнти F_k^c, F_k^S її розкладання в ряд Фур’є такі, що

$$\left\| F(\tau) - \sum_{k=0}^{N}\left[F_k^c \cos k\tau I + F_k^s \sin k\tau I\right] \right\| \to 0 \tag{8}$$

при $N \to \infty$.

Попередньо покажемо, що справедлива рівність:

$$\|F(\tau)\|^2=\sum_{i,j=1}^{n}\|F_{i,j}(\tau)\|^2 . \tag{9}$$

Справді,

$$F\cdot F^*=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \overline{f}_{11} & \overline{f}_{21} & \dots & \overline{f}_{n1} \\ \overline{f}_{12} & \overline{f}_{22} & \dots & \overline{f}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{f}_{1n} & \overline{f}_{2n} & \dots & \overline{f}_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} |f_{11}|^2+\dots+|f_{1n}|^2 & & \dots \\ \dots & |f_{21}|^2+\dots+|f_{2n}|^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & & |f_{n1}|^2+\dots+|f_{nn}|^2 \end{pmatrix},$$

звідки слід отриманого підінтегрального виразу $F\cdot F^*$ в означенні норми дорівнює

$$\mathrm{tr}(F\cdot F^*)=|f_{11}|^2+|f_{12}|^2+\dots+|f_{1n}|^2+|f_{21}|^2+|f_{22}|^2+\dots+|f_{2n}|^2+\dots+$$
$$|f_{n1}|^2+|f_{n2}|^2+\dots+|f_{nn}|^2=|f_1|^2+|f_2|^2+\dots+|f_n|^2 .$$

Отже, квадрат норми матриці-функції $F(\tau)\in L_2^{n\times n}(0,2\pi)$ дорівнює сумі квадратів норм всіх її елементів $F_{ij}(\tau)\in L_2(0,2\pi)$.

Скористаємося тим фактом, що будь-яку функцію $F_{ij}(\tau)\in L_2(0,2\pi)$ можна розкласти в ряд Фур'є за ортонормованою та повною в просторі $L_2(0,2\pi)$ системою тригонометричних функцій $\{\cos k\tau,\ \sin k\tau\}_{k=0}^{\infty}$:

$$F(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(F_k^c\right)_{ij}\cos k\tau+\left(F_k^s\right)_{ij}\sin k\tau\right].$$

Тут $\left(F_k^c\right)_{ij}$, $\left(F_k^s\right)_{ij}$ – коефіцієнти розкладання, значення яких, як відомо з гармонійного аналізу, дорівнюють відповідно

$$\left(F_k^c\right)_{ij}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos k\tau\cdot F_{ij}(\tau)d\tau;\ \ \left(F_k^s\right)_{ij}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin k\tau\cdot F_{ij}(\tau)d\tau .$$

Неважко помітити, що множення кожного елемента $F_{ij}(\tau)$ матриці $F(\tau)$ на число $\cos k\tau$ рівносильно множенню матриці-функції $F(\tau)$ на матрицю $\cos k\tau I$. Ті ж міркування залишаються справедливими при множенні на $\sin k\tau$. Це спостереження дозволяє записати рівності, з яких визначаються матриці F_k^c, F_k^s :

$$F_k^c=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos k\tau\cdot F(\tau)d\tau;\ \ F_k^s=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin k\tau\cdot F(\tau)d\tau . \tag{10}$$

Саме матриці (10) є шуканими коефіцієнтами розкладання матриці-функції $F(\tau)$ в ряд Фур'є по системі $\{\cos k\tau I,\ \sin k\tau I\}_{k=0}^{\infty}$:

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2021-3-1-83-94

$$F(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[F_k^c\cos k\tau I+F_k^s\sin k\tau I\right].$$

Тепер доведення повноти системи $\left\{\cos k\tau I,\,\sin k\tau I\right\}_{k=0}^{\infty}$ завершує наступне твердження, яке випливає з доведених вище рівностей (8), (9).

Твердження. *Нехай*

$$F_N(\tau)=\sum_{k=0}^{N}\left[F_k^c\cos k\tau I+F_k^s\sin k\tau I\right],$$

$$F_{N,ij}(\tau)=\sum_{k=0}^{N}\left[F_k^c\cos k\tau+F_k^s\sin k\tau\right].$$

Тоді

$$\left\|F_N(\tau)\right\|_{L_2^{n\times n}(0,2\pi)}\to 0\quad\Leftrightarrow\quad\left\|F_{N,ij}(\tau)\right\|_{L_2(0,2\pi)}\to 0.$$

Отже, система $\left\{\cos k\tau I,\,\sin k\tau I\right\}_{k=0}^{\infty}$ утворює базис в просторі $L_2^{n\times n}(0,2\pi)$. При цьому

$$\left\|F(\tau)\right\|^2_{L_2^{n\times n}(0,2\pi)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{tr}[\sum_{k=0}^{\infty}\left(F_k^c\cos k\tau I+F_k^s\sin k\tau I\right)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\left(F_k^c*\cos k\tau I+F_k^s*\sin k\tau I\right)]d\tau=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\mathrm{tr}(F_k^c\cdot F_k^c*)+\mathrm{tr}(F_k^s\cdot F_k^s*)\right],$$

$$\left\|F\right\|^2_{H^{m,n\times n}}=\sum_{k=0}^{\infty}[\mathrm{tr}(F_k^c\cdot F_k^c*)+\mathrm{tr}(F_k^s\cdot F_k^s*)+\mathrm{tr}(k^2F_k^c\cdot F_k^c*)+\mathrm{tr}(k^2F_k^s\cdot F_k^s*)+\ldots+$$

$$+\mathrm{tr}(k^{2m}F_k^c\cdot F_k^c*)+\mathrm{tr}(k^{2m}F_k^s\cdot F_k^s*)]=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+k^2+\ldots+k^{2m}\right)\left(\mathrm{tr}(F_k^c\cdot F_k^c*)+\mathrm{tr}(F_k^s\cdot F_k^s*)\right).$$

Але, в силу оцінки $c_1(1+k^2)^m\le 1+k^2+\ldots+k^{2m}\le c_2(1+k^2)^m$, де c_1 и c_2 – деякі константи, остання норма еквівалентна наступній:

$$\left\|F\right\|^2_{H^{m,n\times n}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+k^2\right)^m\left(\mathrm{tr}(F_k^c\cdot F_k^c*)+\mathrm{tr}(F_k^s\cdot F_k^s*)\right).$$

Твердження доведено.

Для подальшого викладу нам знадобиться система матриць-функцій $\left\{\cos k\left(\tau I+\phi_1\right),\,\sin k\left(\tau I+\phi_1^*\right)I\right\}_{k=0}^{\infty}$. Ця система ортогональна в просторі $L_2^{n\times n}(0,2\pi)$, що перевіряється підстановкою в формулу (7) скалярного добутку. Доведемо повноту введеної системи.

Спочатку визначимо коефіцієнти f_k^c, f_k^s розкладання функції $F(\tau)$ в ряд Фур'є за системою $\left\{\cos k\left(\tau I+\phi_1\right),\,\sin k\left(\tau I+\phi_1^*\right)I\right\}_{k=0}^{\infty}$. Вище було показано, що справедливе співвідношення (8), причому коефіцієнти F_k^c, F_k^s явно виражаються через $F(\tau)$ за допомогою формул (10). Знайдемо за відомими F_k^c, F_k^s коефіцієнти f_k^c, f_k^s :

$$f_k^c=\left[\cos k(\phi_1-\phi_1^*)\right]^{-1}\left(F_k^c\cos k\phi_1^*-F_k^s\sin k\phi_1^*\right);$$

$$f_k^s=\left[\cos k(\phi_1-\phi_1^*)\right]^{-1}\left(F_k^c\sin k\phi_1+F_k^s\cos k\phi_1\right),$$

які задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} f_k^c \cos k\phi_1 + f_k^s \sin k\phi_1^* = F_k^c, \\ -f_k^c \sin \phi_1 + f_k^s \cos k\phi_1^* = F_k^s. \end{cases}$$

Підставивши в співвідношення (8) матриці F_k^c, F_k^s , які виражені через f_k^c, f_k^s , і виконуючи елементарні перетворення, отримаємо необхідну повноту:

$$\left\| F(\tau) - \sum_{k=0}^{N} \left[f_k^c \cos k\left(\tau I + \phi_1\right) + f_k^s \sin k\left(\tau I + \phi_1^*\right)\right] \right\| \to 0, \quad N \to \infty .$$

Таким чином, справедливо розкладання:

$$F(\tau) = \sum_{k=0}^{N} \left[f_k^c \cos k\left(\tau I + \phi_1\right) + f_k^s \sin k\left(\tau I + \phi_1^*\right)\right].$$

4 ТЕОРЕМА ПОРУШЕННЯ ЄДИНОСТІ РОЗВ’ЯЗКУ ОДНОРОДНОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ

Розкладемо функції $P(x(\tau)), C(x(\tau))$ в ряд Фур’є за системою $\left\{\cos k\left(\tau I + \phi_1\right), \sin k\left(\tau I + \phi_1^*\right) I\right\}_{k=0}^{\infty}$, яка є повною і ортогональною в просторі $H^{m,n\times n}(0, 2\pi)$:

$$P(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[P_k^T \cos k\left(\tau I + \phi_1\right) + P_k^U \sin k\left(\tau I + \phi_1^*\right)\right];$$

$$C(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[C_k^T \cos k\left(\tau I + \phi_1\right) + C_k^U \sin k\left(\tau I + \phi_1^*\right)\right],$$

де P_k^T, C_k^T – коефіцієнти при косинусах, P_k^U, C_k^U – коефіцієнти при синусах у вказаних розкладаннях.

Підставимо отримані для $P(\tau)$ і $C(\tau)$ розкладання в рівність (6), а в якості полінома Q візьмемо поліном Чебишева першого роду $T_N(\cos\alpha) = \cos N\alpha$, враховуючи при цьому, що $Q' = N \cdot U_{N-1}(\cos\alpha)$, де $U_{N-1}(\cos\alpha) = \sin N\alpha / \sin\alpha$ – поліном Чебишева другого роду. В результаті підстановки будемо мати:

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \Bigg[& -N \cdot \frac{\sin N(\tau I + \phi_j)}{\sin(\tau I + \phi_j)} \cdot \cos(\tau I + \phi_j) \times \sum_{k=0}^{\infty} \left(P_k^T \cos k\left(\tau I + \phi_1\right) + P_k^U \sin k\left(\tau I + \phi_1^*\right)\right) + \\ & + \cos(\tau I + \phi_j) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(C_k^T \cos k\left(\tau I + \phi_1\right) + C_k^U \sin k\left(\tau I + \phi_1^*\right)\right) \Bigg] d\tau = 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{11}$$

В рівності (11) нескладно показати, використавши відомий вираз для ядра Діріхле

$$\frac{\sin(N + \frac{1}{2})A}{\sin \frac{A}{2}} = 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos kA,$$

що

$$\frac{\sin kB}{\sin B} = \begin{cases} 1 + 2\left(\cos 2B + \cos 4B + \ldots + \cos(k-1)B\right), & k = 2l + 1; \\ 2\left(\cos B + \cos 3B + \ldots + \cos(k-1)B\right), & k = 2l. \end{cases}$$

Отже, співвідношення $\sin N(\tau I+\phi_j)/\sin(\tau I+\phi_j)$ перетворюється в суму косинусів, причому кожний доданок в цій сумі при множенні на $\cos(\tau I+\phi_j)$ дає добуток, який представляється у вигляді півсуми косинусів суми і різниці відповідних аргументів.

Виконавши всі необхідні перетворення, остаточно отримаємо:

$$-\left[C_N^T\cdot I+C_N^U\cdot\sin N(\phi_1^*-\phi_1)\right]= \tag{12}$$

$$=N\cdot\sum_{k=0}^{N}\left(-\delta_{kN}+2\alpha(N-k)\right)\cdot\left[P_k^T\cdot I+P_k^U\cdot\sin k(\phi_1^*-\phi_1)\right],\ \text{при } j=1;$$

$$-\left[C_N^T\cdot\cos N\phi_0+C_N^U\cdot\sin N(\phi_1^*-\phi_1-\phi_0)\right]= \tag{13}$$

$$=N\cdot\sum_{k=0}^{N}\left(-\delta_{kN}+2\alpha(N-k)\right)\cdot\left[P_k^T\cdot\cos k\phi_0+P_k^T\cdot\sin k(\phi_1^*-\phi_1-\phi_0)\right],\ \text{при } j=2.$$

Тут δ_{kN} – символ Кронекера, $\alpha(2l)=1,\quad \alpha(2l+1)=0$. Введемо позначення:

$$g_1=N\cdot\sum_{k=0}^{N}\left(-\delta_{kN}+2\alpha(N-k)\right)\cdot\left[P_k^T\cdot I+P_k^U\cdot\sin k(\phi_1^*-\phi_1)\right];$$

$$g_2=N\cdot\sum_{k=0}^{N}\left(-\delta_{kN}+2\alpha(N-k)\right)\cdot\left[P_k^T\cdot\cos k\phi_0+P_k^U\cdot\sin k(\phi_1^*-\phi_1-\phi_0)\right].$$

Визначаючи з рівнянь (12), (13) коефіцієнти C_N^T, C_N^U розкладання функції $C(\tau)$ в ряд Фур'є, приходимо до наступних рівностей:

$$\begin{cases} D_N\cdot C_N^T=g_1\cdot\sin N(\phi_1^*-\phi_1-\phi_0)-g_2\cdot\sin N(\phi_1^*-\phi_1), \\ \qquad D_N\cdot C_N^U=-g_1\cdot\cos N\phi_0+g_2, \end{cases} \tag{14}$$

де $D_N=\sin N\phi_0\cdot\cos N(\phi_1^*-\phi_1)$ – матриця порядку *n*. Зауважимо, що

$$\cos N(\phi_1^*-\phi_1)=\mathrm{ch}(2N\,\mathrm{Im}\,\phi_1),\ \text{де}\ \mathrm{Im}\,\phi_1=-\frac{\phi_1^*-\phi_1}{2i}.$$

Тому $D_N=\sin N\phi_0\cdot\mathrm{ch}(2N\,\mathrm{Im}\,\phi_1)$.

Повернемося до задачі Діріхле (1), (2). При $\psi=0$, $P(\tau)=0$, а це означає, що $g_1=g_2=0$. В цьому випадку система (14) перетворюється до вигляду:

$$\begin{cases} \sin N\phi_0\cdot\mathrm{ch}(2N\,\mathrm{Im}\,\phi_1)\cdot C_N^T=0, \\ \sin N\phi_0\cdot\mathrm{ch}(2N\,\mathrm{Im}\,\phi_1)\cdot C_N^U=0. \end{cases}$$

Отже, якщо $\det D_N\neq 0,\ \forall N$, то $C_N^T=C_N^U=0,\ \forall N$, і, таким чином, $C(\tau)\equiv 0$. При цьому розв'язок однорідної задачі Діріхле тривіальний. В іншому випадку, коли знайдеться таке *N*, що матриця D_N виявиться виродженою, пара $P(\tau)=0$, $C(\tau)=\sum_k\left[C_{kN}^T\cos kN(\tau I+\phi_1)+C_{kN}^U\sin kN(\tau I+\phi_1^*)\right]$ буде породжувати (в силу теореми 1) розв'язок однорідної задачі Діріхле $u\in H^{m,n}(K)$.

Зауважимо, що виродженість матриці $D_N=\sin N\phi_0\cdot\mathrm{ch}(2N\,\mathrm{Im}\,\phi_1)$ рівносильна рівності нулю визначника $\det(\sin N\phi_0)=0$, так як $\det(\mathrm{ch}(2N\,\mathrm{Im}\,\phi_1))\geq 1$. Дійсно, оскільки $2N\,\mathrm{Im}\,\phi_1$ – самоспряжена і, як наслідок, нормальна матриця, то вона унітарно подібна діагональній матриці, тобто існує унітарний оператор Q, який зводить $2N\,\mathrm{Im}\,\phi_1$ до діагонального вигляду $Q^{-1}(2N\,\mathrm{Im}\,\phi_1)Q$ [14], [15]. При цьому, очевидно, виконується рівність: $\mathrm{ch}\left[Q^{-1}(2N\,\mathrm{Im}\,\phi_1)Q\right]=Q^{-1}\,\mathrm{ch}\left[2N\,\mathrm{Im}\,\phi_1\right]Q$. Отже,

$$\det(\mathrm{ch}\left[2N\,\mathrm{Im}\,\phi_1\right])=\det(\mathrm{ch}\left[Q^{-1}\left(2N\,\mathrm{Im}\,\phi_1\right)Q\right])=\prod_{k=1}^{n}\mathrm{ch}\,\lambda_k\geq 1,$$

так як $\mathrm{ch}\,\lambda_k\geq 1,\ \forall k$, де λ_k – дійсні власні значення матриці $\mathrm{ch}(2N\,\mathrm{Im}\,\phi_1)$.

Таким чином, доведена наступна теорема єдиності розв’язку задачі Діріхле.

Теорема 2. *Задача Діріхле (1), (2) має не більше одного розв’язку в просторі* $H^{m,n}(K)$, $m\geq 2$, *тоді і тільки тоді, коли* $\det(\sin N\phi_0)\neq 0$. *В іншому випадку однорідна задача Діріхле має нескінченну кількість векторно-поліноміальних розв’язків.*

5 ВИСНОВКИ

У даній роботі отримано критерій порушення єдиності розв’язку першої граничної задачі в одиничному крузі для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку. Дослідження базується на інтегральній умові зв'язку асоційованих граничних L-слідів розв’язку задачі Коші, яка сформульована і доведена в книзі [11]. Викладена функціональна схема, застосування якої зводить розкладання матриці-функції в ряд Фур'є до стандартного розкладу кожного з її елементів. Необхідна і достатня умова нетривіального розв'язання однорідної задачі Діріхле для безтипового диференціального рівняння другого порядку з комутуючими матричними коефіцієнтами представляється у вигляді рівності нулю детермінанта, елементи якого явно виражаються через зазначені матриці.

Література

1. Лопатинский Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. Укр. матем. журнал, 1953. Т. 5. № 2. С. 123–151.
2. Агранович М. С., Дынин А. С. Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области. Докл. АН СССР, 1962. Т. 146. № 3. С. 511–514.
3. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. Comm. Pure Appl. Math.. 1964. Vol. 17. № 1. pp. 35–92.
4. Волевич Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем. Матем. сборник, 1995. Т. 68. Вып. 110. № 3. – С. 373–416.
5. Бицадзе А. В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными. Усп. матем. наук., 1948. 6. С. 211–212.
6. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: ФМ, 1959. 164 с.
7. Бурский В. П. О единственности решения некоторых граничных задач для дифференциальных уравнений в области с алгебраической границей. Укр. матем. журнал, 1993. 45. № 7. С. 898–906.
8. Бурский В. П. О нарушении единственности решения задачи Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка в круге. Матем. заметки, 1999. №1. С. 23–27.
9. Бурский В. П., Лесина Е. В., Самойлова О. В. О нарушении единственности решения задачи Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка в круге. Нелинейные граничные задачи, 2003. 13. С. 56–62.

10.Лесіна Є. В. Про задачу Діріхле для диференціального рівняння з комутуючими матричними коефіцієнтами. Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка (серія «Математика. Механіка»). Київ, вип.1 (33). 2015. С.32–37.
11.Бурский В. П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 2002. 316 с.
12.Кириченко Е. В. О решении одной краевой задачи в многоугольнике. Труды ИПММ, 2007. 13. С. 103–109.
13.Бурский В. П. Двойственность уравнение–область в задаче Дирихле для общих дифференциальных уравнений в пространстве L2. Труды МИАН, 306. 2019. С. 41–51.
14.Маркус М. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. Минк Х. М: Наука, 1972. 232 с.
15.Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М: Наука, 1966. 576 с.

References

1. Lopatinsky, Ya. B. (1953). Ob odnom sposobe privedeniya granichnykh zadach dlya sistem differentsialnykh uravnenii ellipticheskogo tipa k regulyarnym integralnym uravneniyam. [On a method for reducing boundary value problems for systems of differential equations of elliptic type to regular integral equations]. *Ukr. matem. zhurnal*. 5. № 2. 123–151. [in Russian].
2. Agranovich, M. S., Dynin, A. S. (1962). Obschie kraeviye zadachi dlya ellipticheskikh sistem v mnogomernoy oblasti. [General boundary value problems for elliptic systems in a multidimensional domain]. *Dokl. AN SSSR*. 146. № 3. 511–514. [in Russian].
3. Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg L. (1964). Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. *Comm. Pure Appl. Math*. Vol. 17. № 1. P. 35–92.
4. Volevich, L. R.(1995). Razreshimost kraevykh zadach dlya obschikh ellipticheskikh system. [Solvability of boundary value problems for general elliptic systems] *Matem. sbornik*. [Mathematical collection]. 68. 110. № 3. 373–416. [in Russian].
5. Bitsadze, A. V. (1948). O edinstvennosti resheniya zadachi Dirichlet dlya ellipticheskikh uravnenii s chastnymi proizvodnymi. [On the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for elliptic partial differential equations]. *Usp. mat. nauk*. 6. 211–212. [in Russian].
6. Bitsadze, A. V. (1993). *Uravneniya smeshannogo tipa*. [Mixed type equations]. M.: FM. 1959. [in Russian].
7. Burskii, V. P. (1993). O edinstvennosti resheniya nekotorykh granichnykh zadach dlya differentsialnykh uravnenii v oblasti s algebraicheskoi granitsei. [On the uniqueness of the solution of some boundary value problems for differential equations in a domain with an algebraic boundary]. *Ukr. matem. zhurnal*. 45. № 7. 898–906. [in Russian].
8. Burskii, V. P. (1999). O narushenii edinstvennosti resheniya zadachi Dirichlet dlya sistem differentsialnykh uravnenii vtorogo poryadka v kruge. [On the violation of the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for systems of second-order differential equations in a circle] *Matem. zametki*. 1. 23–27. [in Russian].
9. Burskii, V. P., Lesina E. V., Samoilova O. V. (2003). O narushenii edinstvennosti resheniya zadachi Dirichlet dlya sistem differentsialnykh uravnenii vtorogo poryadka v kruge. [On the violation of the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for systems of second-order differential equations in a circle]. *Nelineinye granichnye zadachi*. 13. 56–62. [in Russian].
10. Lesina, E. V. (2015). Pro zadachu Dirichlet dlya dyferentsialnogo rivnyannya z komutuyuchymy matrychnymy koefitsientamy. [On the Dirichlet problem for a differential equation with commuting matrix coefficients]. *Visnyk KNU im. Tarasa Shevchenka (seriya «Matematyka. Mehanika»*). Kyiv. 1 (33). 32–37. [in Ukranian].
11. Burskii, V. P. (2002). Metody issledovaniya granichnykh zadach dlya obschikh differentsialnykh uravnenii. [Methods for studying boundary value problems for general differential equations]. Kiev: *Naukova dumka*. [in Russian].
12. Kirichenko, E. V. (2007). O reshenii odnoi kraevoi zadachi v mnogougolnike. [On the solution of one boundary value problem in a polygon]. *Trudy IPMM*. 13. 103–109. [in Russian].

13. Burskii, V. P. (2019). Dvoistvennost uravneniye–oblast v zadache Dirichlet dlya obschikh differentsialnykh uravnenii v prostranstve L2. [The equation – domain duality in the Dirichlet problem for general differential equations in the space L2]. *Trudy MIAN*. 306. 41–51. [in Russian].
14. Markus, M. (1972). *Obzor po teorii matrits i matrichnych neravenstv*. [Review on the theory of matrices and matrix inequalities]. M: Nauka. [in Russian].
15. Gantmaher, F. R. (1966). *Teoriya matrits*. [Matrix theory]. M: Nauka. [in Russian].

Кириченко Віктор Вікторович
Національний технічний університет України "КПІ ім. І. Сікорського"
к.ф.-м.н., доцент
пр. Перемоги, 37, Київ, Україна, 03056
v.kyrychenko@kpi.ua
ORCID: 0000-0002-2387-2261

Лесіна Євгенія Викторівна
Донецький національний технічний університет
к.ф.-м.н., доцент
пл. Шибанкова, 2, Покровськ, Україна, 85300
eugenia.lesina@donntu.edu.ua
ORCID: 0000-0002-9803-6727

Для посилань:
Кириченко В. В., Лесіна Є. В. Про порушення єдиності розв'язку задачі Діріхле для систем другого порядку. Механіка та математичні методи, 2021. Том 3. Вип. 1. С. 83–94.

For references:
Kyrychenko V., Lesina Ye. (2021). On the uniqueness violation of the Dirichlet problem solution for second-order systems. Mechanics and Mathematical Methods. 3 (1). 83–94.