

ISSN 2618-0650 (Print)  
ISSN 2664-1364 (Online)

---

**Механіка**



**та математичні методи**

---

**Mechanics  
and Mathematical Methods**

**Науковий журнал  
The scientific journal**

**III/2/2021**

УДК 531 : 51-7 (05)  
М55

# МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

Науковий журнал



Засновник і видавець:

**Одеська державна академія будівництва та архітектури**

**Том III  
№2  
2021**

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: Серія КВ №23478–13318 Р від 13.07.2018 р.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
Серія ДК №4515 від 01.04.2013 р.

**М55**      **Механіка та математичні методи** : науковий журнал. — Одеса : ОДАБА, 2021. — Том III. — Вип. №2. — 116 с.

В науковому журналі публікуються статті і огляди за спеціальностями:

- 111 Математика;
- 112 Статистика;
- 113 Прикладна математика;
- 121 Інженерія програмного забезпечення;
- 122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології;
- 124 Системний аналіз;
- 131 Прикладна механіка;
- 192 Будівництво та цивільна інженерія.

---

**Рекомендовано до друку Вченою радою Одеської державної академії будівництва та архітектури, протокол №5 від 23.12.2021 р.**

---

**Адреса:**    редакція журналу «Механіка та математичні методи»  
Одеська державна академія будівництва та архітектури  
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029

**Телефони:** (048)723-23-10, (048)7323402, (048)7298626

**E-mail:** mmm@ogasa.org.ua

**Web:** mmm-journal.com.ua

---

УДК 531 : 51-7 (05)  
М55

ISSN 2618-0650 (Print)  
ISSN 2664-1364 (Online)

Одеська державна академія  
будівництва та архітектури, 2021

---

## Склад редакційної колегії:

**Головний редактор:** Ковров А. В., к.т.н., проф., ректор Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

**Заступники головного редактора:**

Крутії Ю. С., д.т.н., проф., проректор з науково-педагогічної роботи Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Сур'янінов М. Г., д.т.н., проф., завідувач кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

**Відповідальний секретар:** Кіосак В. А., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

- Бербюк В. Є. д.ф.-м.н., проф., професор кафедри механіки та морських наук, Технічний університет Чалмерса, Гетеборг, Швеція;
- Ватуля Г. Л., д.т.н., проф., професор кафедри будівельної механіки та гідравліки Українського державного університету залізничного транспорту, Харків, Україна;
- Горик О. В., д.т.н., проф., завідувач кафедри загальнотехнічних дисциплін Полтавської державної аграрної академії, Полтава, Україна;
- Карпюк В. М., д.т.н., проф., професор кафедри залізобетонних конструкцій та транспортних споруд Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Куріазопоулос А., к.т.н., доц., професор кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Кода Е., д.т.н., проф., декан факультету будівництва та інженерії середовища Варшавського природничого університету, Варшава, Польща;
- Кононов Ю. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач відділу теорії керуючих систем інституту прикладної математики та механіки НАН України, Слав'янск, Україна;
- Кривий О. Ф., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики Національного університету "Одеська морська академія", Одеса, Україна;
- Круглов В. Є., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна;
- Кучер М. К., д.т.н., проф., завідувач відділу конструкційних матеріалів інституту проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна;
- Лесечко О. В., к.ф.-м.н., доц., завідувач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Лещенко Д. Д., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри теоретичної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Ляшенко Т. В., д.т.н., проф., професорка кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Максимович О. В., д.т.н., проф., професорка кафедри зварювального виробництва, діагностики та відновлення металоконструкцій Національного університету "Львівська політехніка", Львів, Україна;
- Пастернак Я. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна;
- Пневматікос Н., к.т.н., доц., доцент кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Попов В. Г., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри вищої математики Національного університету "Одеська морська академія", Одеса, Україна;
- Савченко О. Г., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, Херсон, Україна;
- Трач В. М., д.т.н., проф., завідувач кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування, Рівне, Україна;
- Шваб'юк В. І., д.т.н., проф., професор кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна.

Технічний редактор: Головата Злата Олександрівна

Лінгвістичний радник з англійської мови: Мар'яно Яніна Георгіївна, к.ф.н, доц.

ІТ підтримка: Вандинський Віктор Юрійович

---

## The composition of the editorial board:

**Chief Editor:** Kovrov A., Ph.D., Professor, Rector of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

**Deputy Chief Editor:**

Krutii Yu., Doctor of Technical Science, Professor, Pro-rector for Research of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

Suryaninov M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

**Assistant Editor:** Kiosak V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Higher Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

- Berbyuk V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor in Mechanical Systems, Division of Dynamics, Department of Mechanics and Maritime Sciences Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden;
- Vatulia G., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Structural Mechanics and Hydraulics Department, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine;
- Goryk O., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Basic Technical Disciplines Department, Poltava State Agrarian Academy, Poltava, Ukraine;
- Karpyuk V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Reinforced Concrete Constructions and Transport Constructions, Odessa, Ukraine;
- Kyriazopoulos A., Ph.D., Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Koda E., Doctor of Technical Science, Professor, Dean of Construction and Environmental Engineering Faculty, University of Life Sciences, Warsaw, Poland;
- Kononov Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Control-system Theory Division, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Slavyansk, Ukraine;
- Kryvyi O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Higher Mathematics Department, National University "Odessa Maritime Academy", Odessa, Ukraine;
- Kruglov V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Chair of Methods of Mathematical Physics Odessa I. I. Mechnikov National University, Odessa, Ukraine;
- Kucher M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Materials Division, G. S. Pisarenko Institute for Problems of Strength, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine;
- Lesechko O., Ph.D., Associate Professor, Head of Higher Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Leshchenko D., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Lyashenko T., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Information Technology and Applied Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Maksymovych O., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Welding Engineering, Diagnostics and Rebuilding of Metal Structures, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine;
- Pasternak Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Applied Mathematics and Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine;
- Pnevmatikos N., Ph.D., Associate Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Popov V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Higher Mathematics Department, National University "Odessa Maritime Academy", Odessa, Ukraine;
- Savchenko O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Algebra, Geometry and Mathematical Analysis Department, Kherson State University, Kherson, Ukraine;
- Trach V., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Bridges and Tunnels, Strength of Materials and Structural Mechanics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine;
- Shvabyuk V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Engineering Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine.

Technical Editor: Holovata Zlata

Linguistic Adviser in English language: Maryanko Yanina, Ph.D., Associate Professor

IT Support: Vandynskiy Viktor

---

## ЗМІСТ

<b>Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О.</b> Деякі задачі про рух твердого тіла у середовищі з опором.....	6
<b>N. Rashkevich, A. Pastukhova, V. Konoval, V. Slovinskyi</b> Formation of mathematical apparatus of methods of fire and explosion safety control of landfill .....	18
<b>A. Kovalov, Y. Otrosh, V. Tomenko, V. Slovinskyi</b> Evaluation of fire resistance of fire protected steel structures by calculation and experimental method.....	29
<b>V. Fomin, I. Fomina</b> Spatial problems of dynamic stability of frame structures.....	40
<b>A. Bespalova, O. Dashkovskaya, O. Faizulyna, V. Lebedev, T. Chumachenko</b> Cutting stone building materials with cut wheels of cubic boron nitride.....	52
<b>I. Korneieva, D. Kirichenko, O. Shylyiaiev</b> Experimental studies of deformability and fracture resistance of airfield slabs on models.....	64
<b>Лимар О. О.</b> Власні частоти коливань пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею у прямокутному каналі.....	75
<b>S. Bekshaev</b> Some problems of optimization and control of the natural frequencies of an elastically supported rigid body.....	88
<b>Святенко Я. І.</b> Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа та пружних шарнірів.....	103

---

## CONTENT

<b>D. Leshchenko, T. Kozachenko</b> Some problems about the motion of a rigid body in a resistive medium.....	6
<b>N. Rashkevich, A. Pastukhova, V. Konoval, V. Slovinskyi</b> Formation of mathematical apparatus of methods of fire and explosion safety control of landfill.....	18
<b>A. Kovalov, Y. Otrosh, V. Tomenko, V. Slovinskyi</b> Evaluation of fire resistance of fire protected steel structures by calculation and experimental method .....	29
<b>V. Fomin, I. Fomina</b> Spatial problems of dynamic stability of frame structures.....	40
<b>A. Bespalova, O. Dashkovskaya, O. Faizulyna, V. Lebedev, T. Chumachenko</b> Cutting stone building materials with cut wheels of cubic boron nitride.....	52
<b>I. Korneieva, D. Kirichenko, O. Shylyaiiev</b> Experimental studies of deformability and fracture resistance of airfield slabs on models.....	64
<b>O. Lyamar</b> Eigenfrequencies of oscillations of a plate which separates a two-layer ideal fluid with a free surface in a rectangular channel.....	75
<b>S. Bekshaev</b> Some problems of optimization and control of the natural frequencies of an elastically supported rigid body.....	88
<b>Ya. Sviatenko</b> On stabilization of unstable rotation in the resisting medium of the Lagrange gyroscope using the second gyroscope and elastic hinges.....	103

УДК 531.381

## ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ПРО РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ

Лещенко Д. Д.<sup>1</sup>, Козаченко Т. О.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Анотація:** Однією з класичних тем теоретичної механіки є динаміка обертових твердих тіл. У вісімнадцятому і дев'ятнадцятому століттях важливі аспекти руху твердого тіла, що обертається, вивчалися видатними математиками, такими як Ейлер, Якобі, Пуансо, Лагранж і Ковалевська. Проте вивчення динаміки обертових тіл, як і раніше актуально для таких застосувань, як динаміка супутників, гіростатів, космічних та літальних апаратів, теорії гіроскопів, сучасних технологій, навігації, космічної техніки та багатьох інших областей.

Ціла низка досліджень присвячена динаміці твердого тіла в середовищі з опором. Наявність швидкості власного обертання твердого тіла обумовлює появу дисипативних моментів, що викликають гальмування твердого тіла. Такі моменти залежать від властивостей середовища з опором, у якому відбувається рух тіла, від властивостей поверхні тіла та розподілу мас у твердому тілі, а також від характеристик руху тіла. Тому залежність моменту сил опору від орієнтації твердого тіла та його кутової швидкості може бути досить складною і вимагає розгляду руху середовища навколо твердого тіла у загальному випадку.

У нашій роботі ми обмежимося деякими досить простими співвідношеннями, які можуть якісно описувати опір обертанню твердого тіла при невеликих кутових швидкостях та використовуються у науковій літературі. При складанні рівнянь руху твердого тіла, що рухається у в'язкому середовищі, необхідно враховувати природу сили опору, що створюється рухом твердого тіла. Еволюція обертань твердого тіла під дією дисипативних збурюючих моментів вивчалася в багатьох статтях та книгах. Задачі про рух твердого тіла відносно нерухомої точки в середовищі з опором описуються нелінійними динамічними рівняннями Ейлера. В деяких випадках одержано аналітичний розв'язок задачі, коли моменти сил зовнішнього опору пропорційні відповідним проекціям кутової швидкості твердого тіла. Залежність дисипативного моменту сил опору від вектора кутової швидкості обертання твердого тіла найчастіше передбачається лінійною. У статті розглядається рух твердого тіла з довільними моментами інерції під впливом зовнішніх моментів сил опору середовища.

**Ключові слова:** тверде тіло, середовище з опором, випадок Ейлера, випадок Лагранжа.

## SOME PROBLEMS ABOUT THE MOTION OF A RIGID BODY IN A RESISTIVE MEDIUM

D. Leshchenko<sup>1</sup>, T. Kozachenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract:** The dynamics of rotating rigid bodies is a classical topic of study in mechanics. In the eighteenth and nineteenth centuries, several aspects of a rotating rigid body motion were studied by famous mathematicians as Euler, Jacobi, Poinso, Lagrange, and Kovalevskya. However, the study of the dynamics of rotating bodies of still important for applications such as the dynamics of satellite-gyrost, spacecraft, re-entry vehicles, theory of gyroscopes, modern technology, navigation, space engineering and many other areas.

A number of studies are devoted to the dynamics of a rigid body in a resistive medium. The presence of the velocity of proper rotation of the rigid body leads to the appearance of dissipative torques causing the braking of the body rotation. These torques depend on the properties of resistant medium in which the rigid body motions occur, on the body shape, on the properties of the surface of the rigid body and the distribution of mass in the body and on the characters of the rigid body motion.



Therefore, the dependence of the resistant torque on the orientation of the rigid body and its angular velocity can be quite complicated and requires consideration of the motion of the medium around the body in the general case. We confine ourselves in this paper to some simple relations that can qualitatively describe the resistance to rigid body rotation at small angular velocities and are used in the literature.

In setting up the equations of motion of a rigid body moving in viscous medium, we need to consider the nature of the resisting force generated by the motion of the rigid body. The evolution of rotations of a rigid body influenced by dissipative disturbing torques were studied in many papers and books. The problems of motion of a rigid body about fixed point in a resistive medium described by nonlinear dynamic Euler equations. An analytical solution of the problem when the torques of external resistance forces are proportional to the corresponding projections of the angular velocity of the rigid body is obtained in several works. The dependence of the dissipative torque of the resistant forces on the angular velocity vector of rotation of the rigid body is assumed to be linear. We consider dynamics of a rigid body with arbitrary moments of inertia subjected to external torques include small dissipative torques.

**Keywords:** rigid body, resistive medium, Euler's case, Lagrange's case.



## 1 ВСТУП

Дослідження задач динаміки твердого тіла відносно центра мас становить значний інтерес у теоретичному та прикладному аспектах. Рівняння, що описують рухи твердого тіла під впливом зовнішніх і внутрішніх моментів сил різної фізичної природи, істотно нелінійні, а їх аналіз представляє серйозні математичні труднощі.

Для подолання цих труднощів широко використовуються підходи, що ґрунтуються на ідеї малого параметра. Це – методи регулярних та сингулярних збурень, метод усереднення. Вони дозволяють досить повно дослідити задачі у випадках, коли обертання тіла близьке до рухів Ейлера-Пуансо та Лагранжа-Пуассона.

В даний час є велика бібліографія, присвячена дослідженню збурених рухів твердого тіла відносно центра мас та дослідженням у динаміці космічних та інших літальних апаратів, гіроскопічних систем, інших технічних об'єктів.

Наразі є значна потреба у написанні та публікації оглядової статті, присвяченій дослідженню проблем динаміки твердого тіла у середовищі з опором. Цей огляд не претендує на повноту і відповідає, насамперед, науковим інтересам авторів.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Проблема еволюції обертань твердого тіла відносно центра мас здавна привертає увагу механіків і математиків. Дослідження обертання важкого твердого тіла почалося в середині XVIII століття і продовжується до наших днів. В останні десятиліття здобуто багато розв'язків задач, запропоновані нові форми рівнянь, розвинуті нові методи їх досліджень.

У роботах, що розглядаються, досліджуються збурені обертальні рухи твердого тіла відносно центра мас під дією моментів сил опору. Такі задачі виникають у зв'язку з вивченням руху супутників відносно центра мас, у питаннях орієнтації та стабілізації космічних апаратів, у динаміці гіроскопів. Диференціальні рівняння цих систем нелінійні та їх дослідження зустрічають серйозні математичні труднощі. Асимптотичні методи є потужним апаратом дослідження проблем динаміки твердого тіла.

## 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Основна мета цієї статті полягає у дослідженні еволюції руху твердого тіла відносно центра мас під дією моментів сил опору. Встановлення впливу моментів сил опору середовища на кількісні та якісні властивості збурених рухів твердого тіла відносно центра мас, які близькі до випадків Ейлера та Лагранжа. При цьому основна увага приділяється роботам, у яких розв'язання поставлених задач проводиться за допомогою методу усереднення.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. ЗАГАЛЬНІ ФІЗИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Розглянемо задачу, що призводить до інтегрування динамічних рівнянь Ейлера. Наявність швидкості власного обертання тіла зумовлює появу дисипативних моментів, які викликають гальмування обертання тіла.

Компоненти моменту сил опору відносно осей, які зв'язані з тілом, залежать від компонент  $p$ ,  $q$ ,  $r$  кутової швидкості обертання тіла. Залежність дисипативного моменту сил опору від вектора кутової швидкості обертання тіла є лінійною. Відповідно до [1], запишемо у зв'язаній з тілом системі координат вирази для

компонент вектора моменту сил в'язкого тертя

$$\mathbf{L}^r = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Тут  $I_{ij}$  – коефіцієнти моменту сил опору обертанню тіла. Ціла низка досліджень присвячена динаміці твердого тіла в середовищі з опором. У роботах Л. Д. Акуленка, Д. Д. Лещенка, Ф. Л. Черноуська, А. Л. Рачинської [2, 3] розглянуто швидкий рух навколо нерухомої точки несиметричного твердого тіла або супутника в середовищі з опором.

Найчастіше різними авторами при дослідженні руху твердого тіла у середовищі з опором розглядається випадок діагональної дисипації (концепція Грінхілла-Зоммерфельда) [5]. У цих випадках маємо тверде тіло, з довільним розподілом мас  $J = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ , де  $J$  – матриця моментів інерції системи, та діагональною матрицею дисипації  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . Тут  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – постійні коефіцієнти пропорційності, що залежать від властивостей середовища.

Дійсно, момент сил опору залежить взагалі не лише від фізичних властивостей середовища, але й від розподілу мас, тобто конфігурації системи. Однією з найпростіших систем такого виду є система Грінхілла [5-11], для якої  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ .

Припустимо, що у динамічних рівняннях Ейлера

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_2)qr &= L_x, \\ A_2 \dot{q} + (A_1 - A_3)rp &= L_y, \\ A_3 \dot{r} + (A_2 - A_1)pq &= L_z. \end{aligned} \quad (2)$$

Опір повітря, що діє на тіло, можна представити парою прикладених сил. При цьому проекції моменту цієї пари на головні осі інерції пропорційні величинам  $A_1 p, A_2 q$  і  $A_3 r$ . Відповідно маємо [5-11]

$$L_x = -\lambda A_1 p, \quad L_y = -\lambda A_2 q, \quad L_z = -\lambda A_3 r. \quad (3)$$

Тут  $\lambda$  – деякий коефіцієнт пропорційності, що залежить від властивостей середовища. Припущення (3) накладає деякі обмеження на форму поверхні та кутову швидкість тіла.

Значимо, що за умов (3) систему (2) можна звести до звичайних динамічних рівнянь Ейлера за допомогою підстановок [6-8, 12]

$$p = e^{-\lambda t} p_1, \quad q = e^{-\lambda t} q_1, \quad r = e^{-\lambda t} r_1. \quad (4)$$

З переходом до нового параметра  $t_1 = \lambda^{-1}(e^{-\lambda t} - 1)$  приходимо до рівнянь, аналогічних випадку Ейлера

$$\begin{aligned} A_1 \frac{dp}{dt_1} + (A_3 - A_2)q_1 r_1 &= 0, \\ A_2 \frac{dq_1}{dt_1} + (A_1 - A_3)r_1 p_1 &= 0, \\ A_3 \frac{dr_1}{dt_1} + (A_2 - A_1)p_1 q_1 &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

які, як відомо, інтегруються в еліптичних функціях Якобі.

При вивченні руху твердого тіла у випадку Лагранжа ( $A_1 = A_2$ ) у середовищі з опором динамічні рівняння з урахуванням (3) записуються у вигляді

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1)qr &= mgl \sin \theta \cos \varphi - \lambda A_1 p, \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3)rp &= -mgl \sin \theta \sin \varphi - \lambda A_1 q, \\ A_3 \dot{r} &= -\lambda A_3 r. \end{aligned} \quad (6)$$

За допомогою підстановок [12]

$$p_1 = e^{\lambda t} p, \quad q_1 = e^{\lambda t} q, \quad r_1 = e^{\lambda t} r$$

отримаємо систему вигляду

$$\begin{aligned} -\lambda A_1 \frac{dp_1}{dt_1} + (A_3 - A_1)q_1 r_1 &= mgl \sin \theta \cos \varphi, \\ -\lambda A_1 \frac{dq_1}{dt_1} + (A_1 - A_3)r_1 p_1 &= -mgl \sin \theta \sin \varphi, \\ -\lambda A_3 \frac{dr_1}{dt_1} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Система (7) еквівалентна рівнянням руху твердого тіла у випадку Лагранжа.

Вважаючи в рівняннях (2)  $A_1 = A_2$ , припустимо, що праві частини цих рівнянь мають вигляд

$$L_x = -ap, \quad L_y = -bq, \quad L_z = -cr. \quad (8)$$

У разі симетричного тіла відмінність у величинах коефіцієнтів  $a$  та  $b$  при силах природного опору середовища, пропорційних проекціям  $p$  та  $q$  кутової швидкості тіла на рівнозначні в даному випадку осі  $x$  і  $y$  малоімовірно. Тому зазвичай розглядається випадок

$$L_x = -ap, \quad L_y = -aq, \quad L_z = -cr. \quad (9)$$

Можна, проте уявити симетричне тіло, що обертається, оснащене двома моментними датчиками, розташованими на взаємно перпендикулярних осях  $x$  і  $y$ , які формують моменти, пропорційні величинам  $p$  і  $q$  (з точністю до збурюючих обставин) [5]. У цьому випадку коефіцієнти  $a$  і  $b$ , що залежать від параметрів моментних датчиків, можуть бути прийняті різними.

У роботах [13-15] момент сил тертя приймається спрямованим протилежно до вектора кутової швидкості і дорівнює

$$\mathbf{L}^r = \lambda \boldsymbol{\omega}, \quad (10)$$

де  $\lambda$  – деяка стала. Якщо враховується тертя повітря, то постійна  $\lambda$  залежить від форми тіла і від щільності повітря. З аеродинамічної точки зору було б правильніше вважати момент сил тертя повітря пропорційним квадрату кутової швидкості  $\boldsymbol{\omega}$ .

Для нас істотним є те, що вираз (10) встановлює головну особливість, яка полягає в тому, що сила тертя повітря спрямована проти руху. Досвід показує, що результати, отримані на основі такого припущення про закон тертя, зазвичай підтверджуються значно ширше, ніж можна очікувати, виходячи з характеру прийнятого припущення [13].

У [8] наголошується, що тверде тіло, що обертається в повітряному середовищі,

частиною захоплює його за собою, внаслідок чого кінетична енергія тіла розсіюється. Характер опору залежить від форми поверхні тіла і проблема, яка поставлена з усією строгістю, була б складною. За наближеною схемою, зазначеною Клейном і Зоммерфельдом [8, 16], передбачається, що опір середовища може бути представлений двома парами, моменти яких пропорційні екваторіальній і осьовій складових кутової швидкості динамічно симетричного твердого тіла  $\omega$  і спрямовані протилежно їм.

У цьому випадку рівняння руху динамічно симетричного твердого тіла в середовищі з опором записують у вигляді

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1)qr &= -a^2 A_1 p, \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3)rp &= -a^2 A_1 q, \\ A_3 \dot{r} &= -c^2 A_3 r. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут  $A_1, A_2$  – моменти інерції тіла відносно екваторіальних осей,  $A_3$  – момент інерції відносно осі фігури  $z$ ;  $a, c$  – сталі.

У роботі [17] досліджується рух навколо центра мас несиметричного твердого тіла, на яке діє два малих збурюючих моменти: постійний у зв'язаних з тілом осях і лінійний дисипативний, що містить доданки, які квадратично залежать від кутової швидкості.

Рівняння руху твердого тіла під дією постійного моменту і моментів, що лінійно і квадратично залежать від кутової швидкості мають вигляд

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_2)qr &= L_1 - N_1 p, \\ A_2 \dot{q} + (A_1 - A_3)rp &= L_2 - N_2 q, \\ A_3 \dot{r} + (A_2 - A_1)pq &= L_3 - N_3 r - Q_3 r^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Тут  $L_1, L_2, L_3$  – постійні,  $N_1, N_2, N_3, Q_3$  – додатні.

Як додатки можна назвати задачі про підтримку кутової швидкості гіроскопа за допомогою моменту, пропорційного різниці квадратів фактичної та необхідної кутової швидкості [17-20].

Рівняння руху несиметричного гіроскопа під дією моменту, що залежить від кутової швидкості, мають вигляд [18-20]

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_2)qr &= c(p_0^2 - p^2), \\ A_2 \dot{q} + (A_1 - A_3)rp &= 0, \\ A_3 \dot{r} + (A_2 - A_1)pq &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

або

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_2)qr &= 0, \\ A_2 \dot{q} + (A_1 - A_3)rp &= 0, \\ A_3 \dot{r} + (A_2 - A_1)pq &= \varepsilon(r_0^2 - r^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Тут  $p_0$  – задана величина, яка має наближатися до  $p$ ,  $\varepsilon$  – малий параметр.

У роботах [18, 20] розглядаються демпфуюча дія реактивного струменя ракети на її рух. У [18] досліджено рух динамічно симетричного тіла, у якого струмінь продуктів горіння викидається двигуном вздовж осі симетрії. У статті [20] розглядається рух динамічно несиметричного тіла, а напрямок реактивного струменя збігається з головними осями інерції корабля. Рівняння руху ракети в проекціях на її головні осі інерції мають вигляд



$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_2)qr &= -\varepsilon Sp, \\ A_2 \dot{q} + (A_1 - A_3)rp &= -\varepsilon Sq, \\ A_3 \dot{r} + (A_2 - A_1)pq &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Тут  $S$  – додатна конструктивна стала, що характеризує демпфуючу дію реактивного струменя ракети,  $\varepsilon$  – малий параметр.

Опір може передбачатися квадратичним по відношенню до кутової швидкості. У роботі [21] момент сил опору середовища представлений у вигляді [22]

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \{-p|p|, -q|q|, -r|r|\}, \quad (16)$$

де  $\mathbf{I} = (I_{ij})$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – матриця постійних коефіцієнтів аеродинамічного опору обертанню тіла,  $p, q, r$  – проекції вектора кутової швидкості тіла на осі.

У статтях [23, 24] розглядається збурений рух асиметричного твердого тіла, що обертається, та космічного апарата на круговій орбіті під дією малого аеродинамічного моменту, пропорційного кутовій швидкості тіла. Передбачається також, що один з моментів інерції КА є періодичною функцією часу. Кінетичний момент тіла відносно центра мас записується як

$$\mathbf{G} = I\boldsymbol{\omega} = A_1(t)p\mathbf{i} + A_2q\mathbf{j} + A_3r\mathbf{k}. \quad (17)$$

Тут  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – одинарні вектори системи координат, що зв'язані з КА.

При русі КА в середовищі з малим опором, момент сил опору пропорційний кутовій швидкості тіла

$$\mathbf{L} = -\lambda\boldsymbol{\omega} = -\lambda(p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}). \quad (18)$$

Тут  $\lambda$  – коефіцієнт в'язкого тертя.

При дослідженні збурених рухів твердого тіла, близьких до випадку Лагранжа, в середовищі з опором збурюючі моменти  $\varepsilon M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ( $\varepsilon \ll 1$  – малий параметр, що характеризує величину збурень) мають вигляд [4, 25, 26]

$$L_x = -ap, \quad L_y = -aq, \quad L_z = -cr, \quad a, c > 0, \quad (19)$$

де  $a, c$  – деякі постійні коефіцієнти пропорційності, що залежать від властивостей середовища та форми тіла. У роботах [4, 25, 26] лінійно-дисипативні збурюючі моменти, що діють на тверде тіло з боку зовнішнього середовища записуються у вигляді (6).

У статті [28] враховуються сили дисипації, сумарні моменти яких відносно осей  $Ox, Oy$  і  $Oz$  пропорційні проекціям  $p, q$  і  $r$  кутової швидкості тіла та записуються наступним чином:

$$L_x = -\lambda A_1 p, \quad L_y = -\lambda A_2 q, \quad L_z = -\lambda_1 A_3 r, \quad (20)$$

де  $\lambda$  і  $\lambda_1$  – деякі постійні, що залежать від форми поверхні тіла.

У роботах [29, 30] задача про рух твердого тіла в середовищі з опором розглядається як розвиток задачі про рух важкого твердого тіла навколо нерухомої точки у випадку Лагранжа. Прикладом такого тіла є космічний апарат, що спускається в атмосфері планети. Малі демпфуючі моменти пропорційні проекціям кутової швидкості.

У статті [31] розглядається рух осесиметричного твердого тіла навколо нерухомої точки під дією відновлюючого моменту, що залежить від повільного часу

$\tau = \varepsilon t$  ( $\varepsilon \ll 1$ ) і кута нутації  $\theta$ , спрямованого вздовж осі  $Oz$ , і малих демпфуючих моментів  $\varepsilon I_x(\tau, \theta)p$ ,  $\varepsilon I_y(\tau, \theta)q$ ,  $\varepsilon I_z(\tau, \theta)r$ , спрямованих по осях  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ .

У роботах [32, 33] при вивченні збуреного руху твердого тіла, близького до випадку Лагранжа, під дією зовнішнього середовища розглядаються збурюючі лінійно-дисипативні моменти, що повільно змінюються у часі:

$$L_x = -a(\tau)p, L_y = -a(\tau)q, L_z = -c(\tau)r, a(\tau), c(\tau) > 0, \tau = \varepsilon t, \varepsilon \ll 1. \quad (21)$$

Тут  $a(\tau)$ ,  $c(\tau)$  – функції, які інтегруються та залежать від властивостей середовища та форми тіла. Причому в [32] досліджуються збурені рухи твердого тіла, близькі до випадку Лагранжа, під дією моменту, який повільно змінюється в часі. В роботі [33] розглядається еволюція обертань твердого тіла під впливом нестационарних відновлюючого та збурюючого моментів.

У статті [34] досліджуються збурені обертальні рухи твердого тіла, близькі до регулярної прецесії у випадку Лагранжа, під дією відновлюючого моменту, який залежить від повільного часу та кута нутації, а також збурюючого моменту, що повільно змінюється в часі. Тіло передбачається швидко закрученим, а відновлюючий і збурюючий моменти передбачаються малими з певною ієрархією малості компонентів. Вважається, що зовнішнє середовище, що діє на тверде тіло, повільно змінює властивості в'язкості внаслідок зміни густини, температури, складу середовища. Збурюючі моменти є лінійно-дисипативними та мають вигляд

$$L_x = -\varepsilon I_1(\tau)p, L_y = -\varepsilon I_1(\tau)q, L_z = -\varepsilon I_3(\tau)r. \quad (22)$$

Тут  $I_1(\tau)$ ,  $I_3(\tau)$  – додатні функції, які інтегруються на проміжку  $\tau \sim 1$ .

У роботі [35] розглядається рух симетричного важкого твердого тіла з нерухою точкою під дією сил тертя, обумовлених навколишнім дисипативним середовищем. Повний момент сили тертя  $\mathbf{L}^r$ , що діє на тіло, вважається малим та антипаралельним вектору кутової швидкості тіла  $\boldsymbol{\omega}$ . Вважається що

$$\mathbf{L}^r = -\lambda \mathbf{F}(|\boldsymbol{\omega}|^2) \boldsymbol{\omega}, \quad (23)$$

де  $\lambda$  – мала, додатна безрозмірна стала, функція  $\mathbf{F}$  задовольняє умовам:  $\mathbf{F}(x)$  – Липшицева, неперервна та додатна для  $x > 0$ , а також  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{1/2} \mathbf{F}(x) = 0$ .

У роботі [36] досліджується обертальний рух динамічно несиметричного твердого тіла відносно центра мас під дією моменту сил опору. Проводиться чисельне моделювання кривої годографа вектора кінетичного моменту у тривимірному просторі. У статтях [37, 38] досліджено стійкість рівномірного обертання вовчка Лагранжа з рідиною в середовищі, що чинить опір, з урахуванням заданого постійного моменту та одержані умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опором.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Інтерес до проблем динаміки твердого тіла значно посилюється у другій половині ХХ століття у зв'язку з розвитком ракетно-космічної техніки, зростанням швидкостей та маневреності літаків, створенням гіроскопічних систем. Дослідження руху супутників та космічних апаратів відносно центра мас важливе для створення систем управління орієнтацією, стабілізації руху, для вирішення практичних задач космонавтики. У проаналізованих роботах досліджується рух твердого тіла в середовищі, що діє на тіло внаслідок моментів, які залежать від його кутової швидкості. Розглянуто випадки

одночасного впливу моментів сил тяжіння та опору. Досліджено задачі про рух супутника відносно центра мас під дією гравітаційного моменту та моменту сил опору.

## 6 ВИСНОВКИ

У всіх роботах, розглянутих у статті, наведено та проаналізовано вихідні рівняння, проведено процедуру їх розв'язування. В результаті аналізу одержаних рівнянь встановлено кількісні та якісні особливості рухів, дано опис еволюції рухів тіла. Виклад у роботах ілюструється рядом прикладів.

## Література

1. Beletsky V. V. Motion of an Artificial Satellite about its Center of Mass. Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1966.
2. Akulenko L. D., Leshchenko D.D., Chernousko F.L. Fast motion of a heavy rigid body about a fixed point in a resistive medium. *Mechanics of Solids*. 1982. 17(3). P. 1–8.
3. Akulenko L. D., Leshchenko D.D., Rachinskaya A.L. Evolution of the satellite fast rotation due to the gravitational torque in a dragging medium. *Mechanics of Solids*. 2008. 43(2). P. 173–184.
4. Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. DEvolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer. Cham. 2017.
5. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 288 с.
6. Appel P. *Traite de Mechanique Rationnelle*. Gauthier–Villars. Paris. 1953.
7. Macmillan W. D. *Theoretical Mechanics. Dynamics of Rigid Bodies*. New York. Mc Graw-Hill. 1936.
8. Булгаков Б. В. *Прикладная теория гироскопов*. М.: Изд-во МГУ, 1976. 401 с.
9. Greenhill A. G. *The Application of Elliptic Functions*. London, New York. Macmilan and Co. 1892.
10. Routh E. J. *Advanced Dynamics of a System of Rigid Bodies*. Dover. New York. NY. 2005.
11. Кошляков В. Н. О некоторых частных случаях интегрирования динамических уравнений Эйлера, связанных с движением гироскопа в сопротивляющейся среде. *Прикладная математика и механика*, 1953. Т.17(2). С. 137–148.
12. Padova E. Sul moto di rotazione di un corpo rigidi. *Atti. Accad. Di Tirino*. 1885-1886. V.XXI. P. 38–47.
13. Граммель Р. Гироскоп. Его теория и применения. М.: Изд-во ин. литер., 1952. Т.1. 351 с.
14. Gray A. A. *Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion*. N.Y.: Dover. 1959.
15. Runau B., Rimrott F. P. T. Axialsymmetrisch Kreisel mit viskoser Grenzschtreibung. *Technische Mechanik*. 1984. B.14. H.3-4. P. 213–220.
16. Klein F., Sommerfeld A. *The Theory of the Top*. V. III. Perturbations, Astronomical and Geophysical Applications. Boston. MA: Birkhauser. 2012.
17. Пивоваров М. Л. О движении гироскопа с малым самовозбуждением. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*, 1985. №6. С. 23–27.
18. Magnus K. *Kreisel. Theorie und Anwendungen*. Springer. Berlin. 1971.
19. Leimanis E. *The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies About a Fixed Point*. Berlin. Springer. 1965.
20. Pivovarov M. L., Ferreira L. O., Lopes R. V. F. Rigid body rotation evolution due to disturbing torque which is known in a body frame. *Acta Mechnica*. 1999. 133. № 1–4. P. 239–246.
21. Медведев А. В. О движении твердого тела с неподвижной точкой в сопротивляющейся среде. *Прикладная механика*, 1989. Т.25. №6. С. 117–120.
22. Блехман И. И., Бутенин Н. В., Ганиев Р. Ф. и др. *Колебания нелинейных механических систем*. М.: Машиностроение, 1979. 351 с. (Вибрация в технике в 6 т.; Т.2)
23. Inarrea M., Lanchares V., Rothos V. M., Salas J. P. Chaotic rotations of an asymmetric body with time dependent moments of inertia and viscous drag. *Intrenational Journal of Bifucation and Chaos*. 2003. 13 (2). P. 393–409.
24. Inarrea M., Lanchares V. Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2006. 41(1). P. 86–100.

25. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Chernousko F. L. Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1979. 43(5). P. 829–837.
26. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Chernousko F. L. Perturbed motions of a rigid body that are close to regular precession. *Mechanics of Solids*. 1986. 21(5). P. 1–8.
27. Koshlyakov V. N. On stability of motion of a symmetric body placed on a vibrating base. *Ukr. Math. J.* 1995. 47(12). P. 1898–1904.
28. Sidorenko V. V. Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium. *Journal of Nonlinear Science*. 1994. 4(1). P. 35–57.
29. Aslanov V. S. *Rigid Body Dynamics for Space Applications*. Oxford. Butterworth Heinemann. 2017.
30. Заболотнов Ю. М., Любимов В. В. Нелинейные резонансные эволюционные эффекты при движении твердого тела вокруг неподвижной точки. *Прикладная математика и механика*, 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 410–417.
31. Кузмак Г. Е. Движение осесимметричного твердого тела около неподвижной точки под воздействием моментов, медленно изменяющихся во времени. *Известия АН СССР. Механика и машиностроение*, 1961. №4. С. 65–78.
32. Akulenko L. D., Zinkevich Ya. S., Kozachenko T. A., Leshchenko D. D. The evolution of motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2017. 82(2). P. 79–84.
33. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques. *Nonlinear Dynamics*. 2021. 103 (2). P. 1517–1528.
34. Akulenko L. D., Kozachenko T. A., Leshchenko D. D. Evolution of rotations of a rigid body under the action of restoring and control moments. *Journal of Computer and System Sciences International*. 2002. 41(5). P. 868–874.
35. Simpson H. C., Gunzburger M. D. A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*. 1986. 37(6). P. 867–894.
36. Рачинская А. Л. Вращение твердого тела в среде с сопротивлением. *Вісник ОНУ. Математика і механіка*, 2014. Т. 19. Вип. 3 (23). С. 84–92.
37. Кононов Ю. М., Василенко В. Ю. Про стійкість обертання під дією постійного моменту дзиги Лагранжа з ідеальною рідиною в середовищі, що чинить опір. *Праці ПММ НАН України*, 2019. Т. 33. С. 122–131.
38. Кононов Ю. М. Про стійкість рівномірного обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опором під дією постійного моменту. *Прикладна механіка*, 2021. Т. 57. №4. С. 68–77.

## References

1. Beletsky, V. V. (1966). *Motion of an Artificial Satellite about its Center of Mass*. Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem.
2. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Chernousko, F. L. (1982). Fast motion of a heavy rigid body about a fixed point in a resistive medium. *Mechanics of Solids*. 17(3). 1–8.
3. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L. (2008). Evolution of the satellite fast rotation due to the gravitational torque in a dragging medium. *Mechanics of Solids*. 43(2). 173–184.
4. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*. Springer, Cham.
5. Koshlyakov, V. N. (1985). *Zadachi dinamiki tverdogo tela i prikladnoj teorii giroskopov: Analiticheskie metody* [Problems in Dynamics of Solid Bodies and in Applied Gyroscope Theory: Analytical Methods]. Nauka, Moskva. [in Russian].
6. Appel, P. (1953). *Traite de Mechanique Rationnelle*. Gauthier–Villars. Paris.
7. Macmillan, W. D. (1936). *Theoretical Mechanics. Dynamics of Rigid Bodies*. New York. Mc Graw-Hill.
8. Bulgakov, B. V. (1976). *Prikladnaya teoriya giroskopov* [Applied Theory of Gyroscopes]. 3rd edn. Moscow State Univ. Moscow. [in Russian].
9. Greenhill, A. G. (1892). *The Application of Elliptic Functions*. London, New York. Macmillan and Co.



10. Routh, E. J. (2005). *Advanced Dynamics of a System of Rigid Bodies*. Dover. New York. NY.
11. Koshlyakov, V. N. (1953). O nekotoryih chastnyih sluchayah integrirovaniya dinamicheskikh uravneniy Eylera, svyazannyih s dvizheniem giroskopa v soprotivlyayushcheysya srede [On some particular cases of integration the dynamic Euler equations as applied to the motion of a gyroscope in a resistive medium]. *Prikladnaya matematika i mehanika*. 17(2). 137–148. [in Russian].
12. Padova, E. Sul moto di rotazione di un corpo rigidi. *Atti. Accad. Di Tirino*. 1885-1886. V.XXI. 38–47.
13. Grammel, R. (1950). *Der Kreisel. Seine Theorie und Seine Anwendungen*. Erster Band. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag
14. Gray, A. A. (1959). *Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion*. N.Y.: Dover.
15. Runau B., Rimrott F. P. T. (1984). Axialsymmetrisch Kreisel mit viskoser Grenzschichtreibung. *Technische Mechanik*. B.14. H.3-4. 213–220.
16. Klein, F., Sommerfeld, A. (2012). *The Theory of the Top. V. III. Perturbations, Astronomical and Geophysical Applications*. Boston, MA: Birkhauser.
17. Pivovarov, M. L. (1985). O dvizhenii giroskopa s malyim samovozbuzhdeniem [The motion of a gyroscope with low self-excitation]. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela*. 6. 23–27. [in Russian].
18. Magnus, K. (1971). *Kreisel. Theorie und Anwendungen*. Springer, Berlin.
19. Leimanis, E. (1965). *The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies About a Fixed Point*. Berlin: Springer.
20. Pivovarov, M. L., Ferreira, L. O., Lopes, R. V. F. (1999). Rigid body rotation evolution due to disturbing torque which is known in a body frame. *Acta Mechanica*. 133. No 1–4. 239–246.
21. Medvedev, A. V. (1989). O dvizhenii tverdogo tela s nepodvizhnoi tochkoj v soprotivlyayushcheysya srede [The motion of a rapidly spun gyroscope under the influence of constant torque in a resistive medium]. *Prikladnaya mekhanika*. 1989. 25(6). 117–120. [in Russian].
22. Blekhman, I. I., Butenin, N. V., Ganiev, R. F. i dr. *Kolebaniya nelineinykh mekhanicheskikh sistem* [Oscillations of nonlinear mechanical systems]. M.: Mashinostroenie, 1979. (Vibratsiyi v tekhnike 6(2)). [in Russian].
23. Inarrea, M., Lanchares, V., Rothos, V. M., Salas, J. P. (2003). Chaotic rotations of an asymmetric body with time dependent moments of inertia and viscous drag. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 13 (2). 393–409.
24. Inarrea, M., Lanchares, V. (2006). Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 41(1). 86–100.
25. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Chernousko, F. L. (1979). Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 43(5). 829–837.
26. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Chernousko, F. L. (1986). Perturbed motions of a rigid body that are close to regular precession. *Mechanics of Solids*. 21(5). 1–8.
27. Koshlyakov, V. N. (1995). On stability of motion of a symmetric body placed on a vibrating base. *Ukr. Math. J*. 47(12). 1898–1904.
28. Sidorenko, V. V. (1994). Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium. *Journal of Nonlinear Science*. 4(1). 35–57.
29. Aslanov, V. S. (2017). *Rigid Body Dynamics for Space Applications*. Oxford Butterworth Heinemann.
30. Zabolotnov, Yu. M., Liubymov, V. V. Nelineinye rezonansnye evolyutsionnye efekty pri dvizhenii tverdogo tela vokrug nepodvizhnoi tochki [Nonlinear resonant evolutionary effects when a rigid body moves around a fixed point]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2002. 66(3). 410–417. [in Russian].
31. Kuzmak, G. E. (1961). Dvizhenie osesimmetrichnogo tverdogo tela okolo nepodvizhnoy tochki pod vozdeystviem momentov, medlenno izmenyayushchisya vo vremeni [Motion of an axially symmetric rigid body about a fixed point under the influence of torques slowly changing in time]. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR OTN. Mekhanika i mashinostroyeniye*. 4. 65–78. [in Russian].
32. Akulenko, L. D., Zinkevich, Ya. S., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2017). The evolution of motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 82(2). 79–84.

33. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2021). Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques. *Nonlinear Dynamics*. 103(2). 1517–1528.
34. Akulenko, L. D., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2002). Evolution of rotations of a rigid body under the action of restoring and control moments. *Journal of Computer and System Sciences International*. 41(5). 868–874.
35. Simpson, H. C., Gunzburger, M. D. (1986). A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*. 37(6). 867–894.
36. Rachinskaya, A. L. (2014). Vrashchenye tverdogo tela v srede s soprotivlenyem [Rotation of a rigid body in a medium with resistance]. *Visnyk ONY. Matematika i mekhanika*. 19(3) (23). 84–92. [in Russian].
37. Kononov, Yu. N., Vasylenko, V. Yu. (2019). Pro stійkist obertannja pid dijeju postijnogo momentu dzygi Lagranzha z idealnoju ridynnoju v seredovyshhi, shho chynyt opir [On the stability of the rotation under the action of constant moment Lagrangian top with perfect fluid in a resisting medium]. *Proc. IAMM NASU*. 33. 122–131. [in Ukrainian].
38. Kononov, Yu. N. (2021). Pro stійkist rivnomirnoho obertannia nesymetrychnoho tverdogo tila u seredovyshchi z oporom pid diieiu postijnogo momentu [On the stability of the uniform rotations of the asymmetric rigid body in the resistive medium und the action of constant moment]. *Prykladna mekhanika*. 57(4). 68–77. [in Ukrainian].

**Лещенко Дмитро Давидович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.ф.-м.н., професор  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029  
leshchenko\_d@ukr.net,  
ORCID: 0000-0003-2436-221X

**Козаченко Тетяна Олександрівна**

Одеська державна академія будівництва та архітектури, к.ф.-м.н., доцент  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029  
kushpil.t.a@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-9034-3776

*Для посилань:*

Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Деякі задачі про рух твердого тіла у середовищі з опором. Механіка та математичні методи, 2021. Т. 3. № 2. С. 6–17.

*For references:*

Leshchenko D., Kozachenko T. (2021). Some problems about the motion of a rigid body in a resistive medium. *Mechanics and Mathematical Methods*. 3 (2). 6–17

UDC 621.03.9

## FORMATION OF MATHEMATICAL APPARATUS OF METHODS OF FIRE AND EXPLOSION SAFETY CONTROL OF LANDFILL

N. Rashkevich<sup>1</sup>, A. Pastukhova<sup>1</sup>, V. Konoval<sup>2</sup>, V. Slovinskyi<sup>3</sup>

<sup>1</sup>National University of Civil Protection of Ukraine

<sup>2</sup>Cherkassy State Technological University

<sup>3</sup>Cherkasy Scientific Research Forensic Centre of the Ministry of Internal Affairs in Ukraine

**Abstract:** The authors analyze the fire and explosion hazards of solid waste disposal facilities, taking into account current trends in the introduction of biogas (methane) collection and utilization systems. Methane is considered an alternative energy source for power plants. The authors determined the initial and limiting conditions of the mathematical apparatus of the method of combating fire and explosion hazards of solid waste disposal facilities based on the results of analysis and synthesis of factors of occurrence and spread of man-caused danger, existing mathematical models, and methods of counteracting man-caused danger. This is the basis for the further development of appropriate emergency response techniques. During the analysis, the authors found that humidity, the temperature of the landfill (household waste), the presence of sufficient oxygen at some point in time initiate the formation of explosive concentrations of methane in the array and contribute to the spread of hazards in landfills or dumps. The specific weight of the organic component, the value of the density of the array, the height of the landfill affect the process of counteracting the danger, namely the prevention of dangerous events and prevention of emergency from the object to the highest level of distribution (local level), primarily in the first group priorities, such as the number of victims and injured civilians and specialists of the units of the State Emergency Service of Ukraine. The team of authors has defined a system of equations of connection of the existence of the mathematical device taking into account initial and boundary conditions. A system of communication equations is determined taking into account the initial and boundary conditions of the mathematical apparatus, which allows to further develop a control algorithm for emergency response related to fire and explosion hazardous landfills close to settlements.

**Keywords:** solid waste, fire and explosion hazard, mathematical apparatus, initial conditions, boundary conditions.

## ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ МЕТОДИКИ ПРОТИДІЇ ПОЖЕЖОВИБУХОНЕБЕЗПЕЦІ ОБ'ЄКТІВ ЗАХОРОНЕННЯ ПОБУТОВИХ ВІДХОДІВ

Рашкевич Н. В.<sup>1</sup>, Пастухова А. А.<sup>1</sup>, Коновал В. М.<sup>2</sup>, Словінський В. К.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Національний університет цивільного захисту України

<sup>2</sup>Черкаський державний технологічний університет

<sup>3</sup>Черкаський науково-дослідний експертно-криміналістичний центр МВС України

**Анотація:** Авторами в роботі проаналізовано пожежовибухонебезпеку об'єктів захоронення твердих побутових відходів з урахуванням сучасних тенденцій впровадження систем збору та утилізації біогазу (метану). Метан розглядається як альтернативне джерело енергії для енергетичних установок. За результатами аналізу та синтезу факторів виникнення та поширення техногенної небезпеки, наявних математичних моделей та методик протидії техногенній небезпеці що викладені в нормативній літературі, науковій періодиці за останні роки визначено початкові та граничні умови існування математичного апарату методики протидії пожежовибухонебезпеці об'єктів захоронення твердих побутових відходів, що є основою для подальшої розробки відповідної методики протидії надзвичайній ситуації. У ході

аналізу авторами встановлено, що вологість, температура масиву звалищних ґрунтів (побутових відходів), наявність у достатній кількості кисню у певний момент часу ініціюють утворення пожежовибухонебезпечної концентрації метану в масиві та сприяють поширенню небезпеці на полігонах або звалищах за наслідками впливу, як на довкілля, так й людей. Питома вага органічної складової, значення щільності масиву, висота захоронення відходів впливають на процес протидії небезпеці, а саме запобігання виникнення небезпечної події та попередження переростання надзвичайної ситуації з об'єктового на найбільш високий рівень поширення (місцевий рівень), в першу чергу за наслідками першої групи пріоритетності, як то кількість жертв та постраждалих цивільних осіб та фахівців підрозділів Державної служби України з надзвичайних ситуацій. Колективом авторів визначено систему рівнянь зв'язку існування математичного апарату з урахуванням початкових та граничних умов. Система зв'язку дозволяє у подальшому розробити керуючий алгоритм методики протидії надзвичайній ситуації, яка пов'язана з пожежовибухонебезпекою об'єктів захоронення твердих побутових відходів, що наближені до населених пунктів.

**Ключові слова:** побутові відходи, пожежовибухонебезпека, математичний апарат, початкові умови, граничні умови.

## 1 INTRODUCTION

Areas of landfills and dumps for solid waste are increasing every year and approaching settlements [1, 2]. Combustion processes are constantly taking place at these facilities. However, the problem of fires and explosions is especially acute. Waste combustion occurs not only on the surface of landfills but also in the depths of waste accumulation masses [3]. The main consequences of the hazard include both the pollution of environmental components, a significant area of their distribution, and a significant number of dead, injured, people with impaired living conditions. Minimization of these consequences is a priority in the activities of the State Emergency Service of Ukraine. Thus, the solution to the problem of ensuring fire and explosion safety of solid waste disposal facilities becomes relevant.

## 2 ANALYSIS OF LITERATURE DATA AND PROBLEM STATEMENT

Research has shown that the scientific community, for the most part, considers landfills as sources of environmental pollution regularly, as well as as a result of an emergency (emergency) or a hazardous event (NP) related to fire and explosion hazards. In [4] it was noted that an important characteristic in assessing the fire and explosion hazard of solid waste disposal facilities (SMW) is the morphological composition of waste. Some scientists [5, 6] in support of statistics [1, 2] note that the largest category of waste is food and green waste. Food and green waste are raw materials for the formation of biogas (methane), which can burn and explode. SMW are a heterogeneous mixture in which almost all chemical elements are present both in pure form and in the form of various compounds. The most common chemical elements are carbon and hydrogen [7]. Studies [8] showed the pyrotechnic characteristics of SMW samples. In practice, it is impossible to eliminate the combustible component of waste at the landfill. Considering the morphological composition, the authors [5–7] focus on the calorific value of waste to use it as a raw material for the formation of an alternative energy source. The interest in biogas as an alternative energy source is growing every year in the world [8]. The main components of biogas are methane (on average up to 60% of the total composition), carbon dioxide, nitrogen impurities, hydrogen sulfide, oxygen, hydrogen and other gases [9]. But it should be borne in mind that the composition of SMW, which are sent for disposal, is influenced by many factors (climatic conditions, seasonality, living standards, level of secondary raw materials market), which impose restrictions on the reliable and safe production of quality methane in biogas.

Much of the work of scientists is devoted to the study of optimal conditions for the maximum formation of combustible methane gas in the biogas in the burial sites of SMW. In works [10–12] the optimal range of humidity (60–80%), temperatures (35–40 °C for mesophilic activity and 50–65 °C for thermophilic activity) is given. However, compliance with the optimal values of the factors of formation of the maximum amount of methane can increase the emergence of man-made hazards - reducing the stability of the waste mass due to excessive moisture, or the formation of voids due to waste incineration at high temperatures.

The most common causes of fires are an increase in the oxygen content of the waste due to the violation of landfill technology (insufficient sealing or insulation layer, the placement of excessive amounts of waste), the excess of biogas collection. The use of large volumes of water during extinguishing can lead to a portion of the oxygen in the thickness of the waste and enhance the processes of aerobic decomposition – the formation of flammable explosive gas – methane. Studies [13] have shown that the increase in temperature in the SMW array depends on humidity, morphological composition, activated carbon content, density, heat capacity, thermal conductivity and thermal conductivity of waste. Modelling of thermal processes in the waste array shows the patterns of origin and development of combustion

processes. Under certain conditions, the rate of heat release of the oxidation reaction of combustible substances may exceed the rate of heat loss, which leads to a continuous increase in the temperature of the substance and its ignition [4].

Forecasting and prevention of fires at landfills, as a factor in reducing stability [14], is extremely difficult due to the different specific heat of waste. Until the fire or smoke came to the surface, it is almost impossible to detect the source of ignition visually [15, 16]. Also, the results of modelling the temperature distribution in the waste massif at different temperatures of the combustion source [17] indicate the impossibility of accurate detection on the surface by contact methods of underground fire. The state of development of phytocenoses can be used as an indicator of underground fire, but, unfortunately, low efficiency. The above-mentioned works emphasize the fire and explosion hazards at the landfills but do not fully disclose the issue of increasing the level of man-made safety.

In works [18, 19] the mathematical apparatus of the method of prevention of emergencies of cascade type of propagation, associated with the landslide of landfills at the landfill with liquidation-intensive technological equipment. The mathematical model consists of analytical equations of dependence of the number of dead, injured, people with impaired living conditions on the physical properties of landfill soils, such as humidity, density, temperature, and technological indicators of existing power equipment. The condition for the existence of the proposed model is a set of initial and boundary conditions for non-outgrowth of the consequences of emergencies outside the object level of hazard distribution, taking into account the maximum amount of methane in the biogas. However, given not only the hazard associated with landfill landslides, but the unresolved part of the problem is also the lack of a comprehensive and effective method of counteracting the emergency associated with fire and explosion of landfill sites close to settlements where fire, the explosion can be considered as the initiating factors of the shift. Thus, there is a need to determine the conditions for the formation of the mathematical apparatus, which adequately describes the process of preventing an emergency or preventing an emergency related to fire and explosion of solid waste disposal facilities for further development of appropriate methods of combating hazard to civilians and specialists of divisions of the Stater Civil Emergency Service of Ukraine.

### **3 PURPOSE AND OBJECTIVES OF RESEARCH**

The work aims to determine the conditions for the formation of the mathematical apparatus of the method of counteracting the emergency associated with fire and explosion hazards of landfill close to settlements.

To achieve this goal it is necessary to solve the following scientific problems:

- to determine the initial and limit conditions of existence of the mathematical apparatus of the method of counteracting the emergency related to fire and explosion hazard of landfill;
- to determine the basic equations of connection of the mathematical apparatus of the method of counteraction the emergency related to fire and explosion hazard of landfill.

### **4 RESEARCH RESULTS**

There are probabilities of occurrence of both hazardous event and emergencies at the landfills, which are characterized by the size of the consequences. Methane, as a component of landfill gas (biogas), is a hazardous factor in the occurrence and spread of fire, explosion – hazardous event or emergency.

Mathematical modelling is the main tool for studying the process of methane generation. To calculate the gas-energy potential of biogas (methane), a significant number of mathematical models have been developed: Tabasaran-Rettenberger, B. Weber, LandGEM, AKG. KD Pamfilova, AM Shaimova and others. The most important factors for the study of

methane generation are humidity, morphological composition, active carbon content, density, the temperature in the waste mass, storage height, service life of the object.

The optimal approach to obtaining complete and reliable assessment data, methane generation forecast is to combine the results of mathematical modelling with field research. However, the use of direct field measurement methods is limited. The limitations are due to their complexity and high cost.

Explosives at landfills undergo complex physical, chemical and biological transformations with the release of landfill gas.

The initial volume after unloading the SMW on the burial map is significantly reduced due to self-sealing. To reduce the volume occupied, the waste is compacted with the help of special heavy equipment (bulldozers, rollers) - the density reaches  $1 \text{ t/m}^3$ . The formed substrate has anomalous geophysical characteristics, anomalous engineering and geological parameters, as well as inhomogeneous filtration properties and poor drainage. The higher the density (microbiological life in such material slows down), the less gas is formed, and the reduction of waste fractions increases gas formation.

Among the chemical processes at the landfills of SMW are redox and photochemical reactions, hydrolysis and depolymerization, the formation of sparingly soluble and complex compounds.

Biodegradation occurs under the action of a large number of microorganisms. The main place is occupied by bacteria, which provide the beginning of the process of decomposition of organic matter and a rapid temperature rise. First, a group of mesophilic bacteria develops, and after heating the waste medium, a group of thermophilic bacteria begins to actively develop, which can break down more stable organic compounds. It should be borne in mind that some chemicals (such as heavy metals) are toxic and inhibitors of microorganisms.

Aerobic decomposition takes place in the upper layers of the burial massif at a depth of 50–80 cm and is usually quite short, as its duration is limited by the amount of oxygen. This stage is characterized by the formation of carbon dioxide, water, nitrates, nitrites, nitrogen, organic residues and large amounts of heat. As the waste is compacted and isolated by the soil, the aerobic phase of microbiological decomposition tends to become anaerobic-aerobic microorganisms go into an anaerobic state. This is caused by insufficient oxygen supply to the waste layer to meet the conditions of the aerobic process.

Anaerobic decomposition is slower and is accompanied by an order of magnitude less heat release. In the hydrolysis phase under the action of bacteria is the decomposition of easily degradable and hydrolysis of cellulose-containing waste. In the acetogenic (acidic) phase – further decomposition of cellulose with the formation of low molecular weight acids, alcohols. The environment in the body of the landfill becomes very acidic. Acids reduce the hydrogen index, which contributes to the decomposition of easily and moderately decomposable waste. Acids together with moisture release nutrients for methane-forming microorganisms. Then comes the methanogenic phase in which the acids formed in the acetogenic phase decompose, with significant methane formation. Over time, the amount of nutrients decreases and the process of methane formation attenuates. Anaerobic microorganisms receive the energy necessary for life as a result of the decomposition of organic matter. The proportion of the organic component of SMW (paper, wood, textiles, plant and food residues) determines the number of micronutrients required for methane-forming microorganisms.

Humidity is a necessary factor for the activity of many microorganisms, including methane-forming ones. The solubility of carbon dioxide in water is higher than the solubility of methane, so the high humidity of SMW increases the methane content in the gas phase. The actual moisture content in the array is determined by the initial humidity of solid waste, measures to comply with disposal technologies.

Temperature, like humidity, is a determining factor in bacterial activity. Mesophilic groups of methane-forming bacteria actively work at temperatures up to 40 °C, thermophilic - up to 70 °C. The optimal temperature value for the efficient process of methane formation is in the range of 30–40 °C. The level of gas formation decreases significantly when the value of the optimal temperature changes [12].

Taking into account the analysis of factors contributing to the formation of methane in the landfill gas (biogas), the initial conditions of hazard are described by expression (1):

$$\begin{cases} w(t) = w_0 \\ T(t) = T_0 \\ O_2(t) = O_{2_0} . \end{cases} \quad (1)$$

Thus, the initial conditions are the mathematical apparatus of counteraction to the emergency connected with the fire safety of objects of protection of SMW which are close to settlements, is a set of value of moisture.  $w$ , the temperature of the landfill massif (dump)  $T$ , the presence of sufficient oxygen  $O_2$ , which at a certain point in time  $t$  initiate the formation of explosive concentrations of methane in the array and the spread of hazard as a result of exposure.

The boundary conditions for counteracting the hazard are described by expression (2):

$$\begin{cases} C_{start} \leq C \leq C_{fin} \\ \rho_{start} \leq \rho \leq \rho_{fin} \\ h_{start} \leq h \leq h_{fin} . \end{cases} \quad (2)$$

Thus, the boundary conditions for the existence of the mathematical apparatus of the method of counteracting the emergency associated with fire and explosion hazards of landfills, close to settlements, is a set of interval values of the specific gravity of the organic component  $C$ , density  $\rho$ , height of waste disposal  $h$ , which affect the process of counteracting the hazard.

Taking into account modern domestic scientific approaches in the field of civil protection of Ukraine and the relevant regulatory framework (Order of the Ministry of Internal Affairs of Ukraine dated 06.08.2018 № 658 «On Approval of Classification Features of Emergencies», National Classifier of Ukraine «Emergency Classifier» DK 019: 2010, Resolution of the Cabinet of Ministers of 24.03.2004 № 368 «On approval of the Procedure for classification of emergencies by their levels»), emergencies are a conditional level of emergency, which is achieved by one or more dominant features, in terms of the level of threat and/or countermeasures of the Stater Civil Emergency Service of Ukraine (CES of Ukraine). The number of negative consequences of the emergency should include: the number of victims  $q_1$  and the number of victims  $q_2$ , as a consequence of the priority group; the number of people with impaired living conditions  $q_3$  and the amount of damage caused  $q_4$  – are consequences of the second priority group; emergency zone  $q_5$  and the costs of emergency response  $q_6$  – are consequences of the third priority group.

Given the above, the implementation of emergency response methods related to fire and explosion hazards of solid waste disposal facilities should ensure the absence of damage to both civilians and specialists of the CES of Ukraine. This can be achieved through the development and compliance with effective organizational, operational, informational measures based on the mathematical apparatus – are general equation (3):



$$Q(t) = f(w, \rho, T, O_2, C, h, t). \quad (3)$$

In case  $Q(t) = HE$  – the prevention of hazardous event (negative consequences did not occur), analytical equation (3), describes the relationship between the dependence of explosive methane concentration on humidity  $w$ , density  $\rho$ , temperature  $T$ , and the presence of sufficient oxygen  $O_2$ , organic component  $C$  in the massif of landfill soils (SMW), height  $h$  and time  $t$  waste decomposition. In case  $Q(t) = ES$  – the warning of emergency situation (territory of hazard distribution, expenses for liquidation of consequences, the size of the caused damage, number of dead, victims, persons with disturbance of living conditions did not reach local level), analytical equation (3), describes the connection of dependence of the number of dead and injured persons as a consequence of the first level of priority.

The basic communication equations of the mathematical apparatus of the emergency response method are a system (4), the condition of existence is a set of initial conditions (1) of hazard and boundary conditions (2) to prevent and prevent the spread of hazard associated with physicochemical properties landfill (SMW):

$$\begin{cases} Q_{\text{prev}}(t) = f_{\text{prev}}(w, \rho, T, O_2, C, h, t), \text{ providing } q_{1...6} = 0; \\ Q_{\text{war}}(t) = f_{\text{war}}(w, \rho, T, O_2, C, h, t), \text{ providing } q_{1...6}^{ob} \leq q_{1...6} < q_{1...6}^{local}, q_{1...6} \neq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Thus, a system of communication equations is defined taking into account the initial and boundary conditions of the mathematical apparatus, which allows to further develop a control algorithm for emergency response methods related to fire and explosion hazards of landfills close to settlements.

## 5 DISCUSSION OF RESEARCH RESULTS

According to the results of analysis and synthesis of factors of occurrence and spread of fire and explosion hazards at landfill, set out in the regulatory literature in the field of civil safety, scientific sources, statistical reports, it is established that today there is no effective mathematical apparatus that adequately describes the process of hazardous events and prevention of emergencies related to fire and explosion hazard of these objects, close to settlements. A warning is to prevent an emergency from escalating from an objective to the highest level of distribution (local), primarily as a result of the priority group, such as the number of victims and injured.

SMW storage facilities are so-called biochemical reactors, in which landfill gas (biogas) is formed due to anaerobic decomposition of the organic component. The bulk of biogas is made up of gases - methane and carbon dioxide. Methane is a more hazardous component in terms of solving civil security problems. Fire and explosive gas collection and utilization systems are widely used in landfills or dumps. However, it should be additionally taken into account that the process of decomposition of the organic component of SMW takes place unevenly with different intensities: aerobic decomposition with the release of carbon dioxide may predominate on one part of the object, and intensive methane on the other. Oxygen binds carbon and prevents the formation of methane.

Management of waste decomposition processes based on the regulation of physical and chemical properties of landfills (SMW) helps to reduce man-made hazards. It is not always advisable to implement technologies for the collection and utilization of biogas at landfills, while the issue of fire and explosion safety remains relevant. When choosing the appropriate technology to reduce the risk of landfills, it is necessary to take into account: morphological composition - the percentage of the organic component; time and height of burial; guarantees of waste delivery (their composition and quantity); distance to the electrical network; availability near the final consumer for direct use of biogas; opportunity for capital and

operating costs for technology implementation; availability of suppliers of equipment and services; availability and qualification of operators for operation and maintenance of equipment.

In the course of the research, a mathematical basis for the development of emergency response methods related to fire and explosion hazards of landfills close to settlements, the implementation of which will prevent hazardous event or warning emergencies - to limit the spread of hazard from the object level to more high (local), to protect civilians and specialists of the CES of Ukraine from damage.

## 6 CONCLUSIONS

1. The initial and limiting conditions of existence of the mathematical apparatus of the method of counteraction the emergency related to fire and explosion hazard of of landfill are defined. The initial conditions for the existence of the mathematical apparatus of the emergency response method associated with fire and explosion hazards of solid waste are the conditions of man-made hazards that change over time, namely humidity, the temperature of landfill (solid waste), the presence of sufficient oxygen at a certain point in time initiate the emergence of hazard – the formation of explosive concentrations of methane in the array and the spread of hazard as a result of exposure. The limiting conditions for the existence of the mathematical apparatus of the emergency response method are the conditions for preventing and preventing the spread of man-made hazards, namely the specific weight of the organic component, the density of the array, the height of waste disposal affect the hazard response process. The above list is sufficient to address issues of civil safety – combating fire and explosion hazards of landfill, to protecting civilians and specialists of the Civil Service of Ukraine for Emergencies.

Scientific work is further aimed at establishing the area of effective solutions for the selection of variations of solutions of individual problems to assess these indicators of the initial and boundary conditions of the mathematical apparatus in the development of appropriate methods.

2. The system of communication equations is defined taking into account initial and boundary conditions of existence of the mathematical device that allows developing further the control algorithm and the technique of counteraction the emergency related to fire and explosion hazard of landfills close to settlements. The process of counteracting the emergency includes a set of measures aimed at preventing the occurrence of fire-explosive concentrations of methane, and with the already existing hazard to limit the number of injured and dead.

## References

1. Kaza, S., Yao, L. Bhada-Tata, P., Van Woerden, F. (2018). *What a Waste 2.0: A Global Snapshot of Solid Waste Management to 2050*. Urban Development. Washington. DC: World Bank. doi.org/10.1596/978-1-4648-1329-0.
2. Eurostat. *Municipal waste by waste management operations*. (2021). Env\_wasmun. Luxembourg. [https://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/show.do?dataset=env\\_wasmun&lang=en](https://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/show.do?dataset=env_wasmun&lang=en).
3. *World Fire Statistics*. International Association of Fire and Rescue Service. URL: <http://www.ctif.org/ctif/world-fire-statistics>.
4. Sereda, T. G., Mihaylova, M. A., Shalaeva, E. V. (2013). Problemyi pozharnoy bezopasnosti poligonov tvYordyih byitovyih othodov. [Fire safety problems of solid waste landfills]. *Ekologiya i bezopasnost v tehnosfere: sovremennyye problemyi i puti resheniya*. Tomsk. 336–341. [in Russian].
5. Suthar, S., Singh, P. (2015). Household solid waste generation and composition in different family size and socio-economic groups: A case study. *Sustainable Cities and Society*. 14. 56–63. doi.org/10.1016/j.scs.2014.07.004.
6. Kotsyuba, I. G. (2016). Doslidzhennya sezonnoii zmini morfologichnogo skladu tverdyh pobutovyih vidhodiv mista Zhitomira. [Pre-season change of the morphological warehouse of solid

- by-run entrances to the town of Zhitomir]. *Visnik NUVGP. Seriya «Tehnichni nauky»*. 3(75). 300–307. [in Ukrainian].
7. Götze, R., Boldrin, A., Scheutz, C., Fruergaard, Astrup Thomas. (2016). Physico-chemical characterisation of material fractions in household waste: Overview of data in literature. *Waste Management*. 49. 3–14. doi.org/10.1016/j.wasman.2016.01.008.
  8. *Statistical Report 2018*. (2018). Annual Statistical Report of the European Biogas Association. Belgium.
  9. Aghdam, E. F., Scheutz, C., Kjeldsen, P. (2019). Impact of meteorological parameters on extracted landfill gas composition and flow. *Waste Management*. Vol. 87. 905–914. doi.org/10.1016/j.wasman.2018.01.045
  10. Arsova, L. (2010). *Anaerobic digestion of food waste: current status, problems and an alternative product*. Berlin, Germany: Columbia University.
  11. Majdinasab, A., Yuan, Q. (2017). Performance of the biotic systems for reducing methane emissions from landfill sites: A review. *Ecological Engineering*. 104. 116–130. doi.org/10.1016/j.ecoleng.2017.04.015.
  12. *Proekt Tasis - Sovershenstvovanie sistemy upravleniya tverdymi bytovymi othodami v Donetskoy oblasti Ukrainyi*. [Taxis project - Improving the solid waste management system in the Donetsk region of Ukraine]. (2004). Posobie po monitoringu poligonov TBO. Thales E&C – GKW – Consult. [in Russian].
  13. Hanson, J. L., Yeşiller, N., Oettle, N. K. (2010). Spatial and Temporal Temperature Distributions in Municipal Solid Waste Landfills. *Journal of Environmental Engineering*. 136. 8. doi:10.1061/(ASCE)EE.1943-7870.0000202
  14. Faitli, J., Magyar, T., Erdélyi, A., Murányi, A. (2014). Characterization of thermal properties of municipal solid waste landfills. *Waste Management*. Vol. 36. 213–221. doi.org/10.1016/j.wasman.2014.10.028
  15. Frid, V., Doudkinski, D., Liskevich, G., Shafran, E., Averbakh, A., Korostishevsky, N., Prihodko, L. (2009). Geophysical-geochemical investigation of fire-prone landfills. *Environ Earth Sci*. 60 (4). 787–798. doi: 10.1007/s12665-009-0216-0.
  16. Musilli, A. (2016). *Landfill elevated internal temperature detection and landfill fire index assessment for fire monitoring*. Theses and Dissertations. Rowan University. <https://rdw.rowan.edu/etd/2340>
  17. Popovich, V. V., DomInIk, A. M. (2015). Osoblyvosti temperaturnogo polya smittezvalysch. [Features of the temperature field of landfills]. *Naukovo-tehnIchniy zbirnik: «Komunalne gospodarstvo mist»*. 120 (1). 209–212. [in Ukrainian].
  18. Rashkevich, N. V. (2020). Rozrobka keruyuchogo alorytmu metodyky poperedzhennya nadzvychnykh sytuatsiy na poligonitverdyh pobutovykh vidhodiv z likvidatsiynym energoemnim tehnologichnym ustatkuvanniam. [Development of a control algorithm for emergency prevention methods at the landfill for solid waste with liquidation-intensive technological equipment]. *Naukovo-tehnIchniy zbirnik: «Komunalne gospodarstvo mist»*. 3. 156. 188–194. doi: 10.33042/2522-1809-2020-3-156-188-194. [in Ukrainian].
  19. Divizinyuk, M., Mirnenko, V., Rashkevich, N., Shevchenko, O. (2020). Rozrobka laboratorno-eksperimentalnoii ustanovky dlya perevirky dostovirnosti matematichnoii modelita rozroblenoii na ii osnovi metodyky poperedzhennya nadzvychnykh sytuatsiy na poligonah tverdych pobutovykh vidhodiv z tehnologichnim likvidatsiynym energoemnim ustatkuvanniam. [Development of a laboratory-experimental setup to verify the reliability of a mathematical model and developed on its basis methods of emergency prevention at landfills for solid waste with technological liquidation equipment]. *Social Development and Security*. 10. (5). 15–27. doi: 10.33445/sds.2020.10.5.2. [in Ukrainian].

## Література

1. Kaza S., Yao L. Bhada-Tata P., Van Woerden F. What a Waste 2.0: A Global Snapshot of Solid Waste Management to 2050. Urban Development. Washington, DC: Word Bank. 2018. 38 p. doi.org/10.1596/978-1-4648-1329-0.
2. Eurostat. Municipal waste management operations. 2021. 25 p.  
URL: [http://aPss0.eurostat.ec.europa.eu/nui/show.do?dataset=env\\_wasmun](http://aPss0.eurostat.ec.europa.eu/nui/show.do?dataset=env_wasmun).

3. World Fire Statistics. International Association of Fire and Rescue Service. URL: <http://www.ctif.org/ctif/world-fire-statistics>.
4. Серєда Т. Г., Михайлова М. А., Шалаєва Е. В. Проблемы пожарной безопасности полигонов твёрдых бытовых отходов. Экология и безопасность в техносфере: современные проблемы и пути решения, Томск. 2013. С. 336–341. URL: <https://www.lib.tpu.ru/fulltext/c/2013/C52/105.pdf>.
5. Suthar S., Singh P. Household solid waste generation and composition in different family size and socio-economic groups: A case study. *Sustainable Cities and Society*. 2015. 14. P. 56–63. doi.org/10.1016/j.scs.2014.07.004.
6. Коцюба І. Г. Дослідження сезонної зміни морфологічного складу твердих побутових відходів міста Житомира. Вісник НУВГП. Серія «Технічні науки», 2016. Вип. 3(75). С. 300–307.
7. Ramona Götze Alessio Boldrin Charlotte Scheutz Thomas Fruergaard Astrup. Physico-chemical characterisation of material fractions in household waste: Overview of data in literature. *Waste Management*. 2016. 49. 3–14. doi.org/10.1016/j.wasman.2016.01.008.
8. Statistical Report 2018. Annual Statistical Report of the European Biogas Association. 2018. 18 p. URL: <https://www.europeanbiogas.eu/eba-statistical-report-2018>.
9. Aghdam E. F., Scheutz C., Kjeldsen P. Impact of meteorological parameters on extracted landfill gas composition and flow. *Waste Management*. 2019. Vol. 87. P. 905–914. doi.org/10.1016/j.wasman.2018.01.045
10. Arsova L. Anaerobic digestion of food waste: current status, problems and an alternative product [M.S. thesis] Berlin, Germany: Columbia University. 2010. 77 p.
11. Majdinasab A., Yuan Q. Performance of the biotic systems for reducing methane emissions from landfill sites: A review. *Ecological Engineering*. 2017. 104. 116–130. doi.org/10.1016/j.ecoleng.2017.04.015.
12. Проект Тасис - Совершенствование системы управления твердыми бытовыми отходами в Донецкой области Украины. Пособие по мониторингу полигонов ТБО, Thales E&C – GKW – Consult. 271 с.
13. Hanson J. L., Yeşiller N., Oettle N. K. Oettle Spatial and Temporal Temperature Distributions in Municipal Solid Waste Landfills. *Journal of Environmental Engineering*. 2010. 136. 8. doi:10.1061/(ASCE)EE.1943-7870.0000202.
14. Faitli J., Magyar T., Erdélyi A., Murányi A. Characterization of thermal properties of municipal solid waste landfills. *Waste Management*. 2015. Vol. 36. P. 213–221. doi.org/10.1016/j.wasman.2014.10.028.
15. Frid V., Doudkinski D., Liskevich G., Shafran E., Averbakh A., Korostishevsky N., Prihodko L. Geophysical-geochemical investigation of fire-prone landfills. *Environ Earth Sci*. 2010. 60. P. 787–798. doi: 10.1007/s12665-009-0216-0.
16. Musilli A. Landfill elevated internal temperature detection and landfill fire index assessment for fire monitoring. *Theses and Dissertations*. 2016. 168 p. <https://rdw.rowan.edu/etd/2340>
17. Попович В. В., Домінік А. М. Особливості температурного поля сміттєзвалищ. Науково-технічний збірник: «Комунальне господарство міст», 2015. № 120 (1). С. 209–212.
18. Рашкевич Н. В. Розробка керуючого алгоритму методики попередження надзвичайних ситуацій на полігоні твердих побутових відходів з ліквідаційним енергоємним технологічним устаткуванням. Науково-технічний збірник «Комунальне господарство міст», 2020. Т. 3. № 156. С. 188–194. doi: 10.33042/2522-1809-2020-3-156-188-194.
19. Дівізійнюк М., Мірненко В., Рашкевич Н., Шевченко О. Розробка лабораторно-експериментальної установки для перевірки достовірності математичної моделі та розробленої на її основі методики попередження надзвичайних ситуацій на полігонах твердих побутових відходів з технологічним ліквідаційним енергоємним устаткуванням. *Social Development and Security*, 2020. Vol. 10. № 5. С. 15–27. doi: 10.33445/sds.2020.10.5.2.

**Rashkevic Nina**

National University of Civil Protection of Ukraine  
PhD, lecturer of the Department  
Chernyshevskaya str., 94, Kharkiv, Ukraine, 61023  
[nine291085@gmail.com](mailto:nine291085@gmail.com)



ORCID: 0000-0001-5124-6068

**Pastukhova Anastasia**

National University of Civil Protection of Ukraine  
Cadet  
Chernyshevska str., 94, Kharkiv, Ukraine, 61023  
anastasia13177@gmail.com

ORCID: 0000-0002-5677-4203

**Konoval Volodymyr**

Ph.D, Associate Professor  
Cherkassy State Technological University  
Shevchenko boul., 460, Cherkassy, Ukraine, 18006  
konovalvolodymyr2019@mail.com

ORCID: 0000-0002-6740-6617

**Slovinskyi Vitalii**

Cherkasy Scientific Research Forensic Centre of the Ministry of Internal Affairs in Ukraine  
PhD, Deputy Head of Department  
Pasterivs'ka str., 94, Cherkasy, Ukraine, 18034  
vkslovinskyi@ukr.net

ORCID: 0000-0002-6194-3171

*For references:*

Rashkevich N., Pastukhova A., Konoval V., Slovinskyi V. (2021). Formation of mathematical apparatus of methods of fire and explosion safety control of landfill. *Mechanics and Mathematical Methods*. 3 (2). 18 – 28.

*Для посилань:*

Рашкевич Н. В., Пастухова А. А., Коновал В. М., Словінський В. К. Формування математичного апарату методик протидії пожежовибухонебезпеці об'єктів захоронення побутових відходів. *Механіка та математичні методи*, 2021. Т. 3. №. 2. С. 18–28.

UDC 614.841.332

## EVALUATION OF FIRE RESISTANCE OF FIRE PROTECTED STEEL STRUCTURES BY CALCULATION AND EXPERIMENTAL METHOD

A. Kovalov<sup>1</sup>, Y. Otrosh<sup>1</sup>, V. Tomenko<sup>2</sup>, V. Slovinskyi<sup>3</sup>

<sup>1</sup>National University of Civil Defence of Ukraine

<sup>2</sup>Cherkasy Institute of Fire Safety of National University of Civil Defence of Ukraine

<sup>3</sup>Cherkasy Scientific Research Forensic Centre of the Ministry of Internal Affairs in Ukraine

**Abstract:** Based on the developed geometric, physical, computer and finite element model, the fire resistance of fire-resistant steel structures was evaluated by calculation and experimental method. The adequacy of the developed computational-experimental method for assessing the fire resistance of fire-resistant steel structures in assessing the fire resistance of a fire-resistant I-beam steel column was verified. The results of tests for fire resistance of steel columns with fire-retardant coating at standard temperature of the fire without the load applied to them (temperature in the furnace, temperature in certain places on the surface of fire-retardant steel columns, the behavior of the investigated fire-retardant coating). The analysis of tests on fire resistance of fire-resistant steel columns exposed to fire at standard temperature (temperature in the furnace, temperature in places of measurement of temperature on a surface of columns, behavior of a fire-retardant covering) is carried out. A computer model of the «steel column – reactive flame retardant coating» system has been built for numerical simulation of non-stationary heating of such a system. Simulation of non-stationary heating of the system «steel column – fire-retardant coating» in the software package FRIEND with the specified parameters (geometric model, thermal effects, initial and boundary conditions, properties of system materials). The reliability of the results of numerical modeling with real experimental data on the duration of fire exposure at the standard temperature of the fire to reach the critical temperature of steel. Based on the comparison of experimental results and numerical simulations, a conclusion is made about the adequacy of the developed model to the real processes that occur when heating fire-retardant steel columns without applying a load under fire conditions at standard fire temperature. The efficiency of the proposed calculation and experimental method for assessing the fire resistance of fire-resistant steel structures has been confirmed.

**Keywords:** fire resistance, method of fire resistance assessment, fire protection, fire protection ability, fire protective coatings, steel structures.

## ОЦІНЮВАННЯ ВОГНЕСТІЙКОСТІ ВОГНЕЗАХИЩЕНИХ СТАЛЕВИХ КОНСТРУКЦІЙ РОЗРАХУНКОВО-ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМ МЕТОДОМ

Ковальов А. І.<sup>1</sup>, Отрош Ю. А.<sup>1</sup>, Томенко В. І.<sup>2</sup>, Словінський В. К.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Національний університет цивільного захисту України

<sup>2</sup>Черкаський інститут пожежної безпеки ім. Героїв Чорнобиля НУЦЗ України

<sup>3</sup>Черкаський науково-дослідний експертно-криміналістичний центр МВС України

**Анотація:** На основі розроблених геометричної, фізичної, комп'ютерної та скінченно-елементної моделі здійснено оцінювання вогнестійкості вогнезахисених сталевих конструкцій розрахунково-експериментальним методом. Проведено перевірку адекватності розробленого розрахунково-експериментального методу оцінювання вогнестійкості вогнезахисених сталевих конструкцій при оцінюванні вогнестійкості вогнезахисеної двотаврової сталевій колони. Представлено результати випробувань на вогнестійкість сталевих колон з вогнезахисним покриттям при стандартному температурному режимові пожежі без



прикладеного до них навантаження (температура в печі, температура у визначених місцях на поверхні вогнезахисних сталевих колон, поведінка досліджуваного вогнезахисного покриття). Проведено аналіз випробувань на вогнестійкість вогнезахисних сталевих колон, що піддавалися впливу пожежі за стандартним температурним режимом (температура в печі, температура у місцях вимірювання температури на поверхні колон, поведінка вогнезахисного покриття). Побудовано комп'ютерну модель системи «сталеві колон – реактивне вогнезахисне покриття» для чисельного моделювання нестационарного прогріву такої системи. Проведено моделювання нестационарного прогріву системи «сталеві колон – вогнезахисне покриття» в програмному комплексі FRIEND з заданими параметрами (геометрична модель, теплові впливи, початкові та граничні умови, властивості матеріалів системи). Проведено оцінку достовірності результатів чисельного моделювання з реальними експериментальними даними щодо тривалості вогневого впливу за стандартним температурним режимом пожежі до досягнення критичної температури сталі. На основі порівняння результатів експерименту та чисельного моделювання зроблено висновок про адекватність розробленої моделі реальним процесам, що відбуваються при нагріванні вогнезахисних сталевих колон без прикладення навантаження в умовах вогневого впливу за стандартного температурного режиму пожежі. Підтверджена працездатність запропонованого розрахунково-експериментального методу оцінювання вогнестійкості вогнезахисних сталевих конструкцій.

**Ключові слова:** вогнестійкість, метод оцінювання вогнестійкості, вогнезахист, вогнезахисна здатність, вогнезахисні покриття, сталеві конструкції.

## 1 INTRODUCTION

Despite technical advances in construction and fire-fighting technologies, the latter has not become less dangerous. Fires claim thousands of lives and cause billions in damage. About 51% of all fires in the world occur in buildings and structures and transport. At the same time, 90% of all fire victims die on the premises.

These factors create a need to protect people from the impact of the identified threats. One of the most dangerous factors is fires in buildings and structures. Ensuring the safety of people and property must be performed taking into account all stages of the life cycle of facilities, such as scientific support and monitoring, design, construction, operation, as well as to exclude fires. Preventing the occurrence of fire allows technical means and organizational measures, in which the probability of occurrence and development of fire does not exceed the standard allowable value. The condition for reducing the irreversible consequences of fires at various facilities is the preservation of the bearing capacity of buildings, structures of technological structures and communications.

These stability requirements are provided by a set of measures provided for both production technology and the use of effective fire-retardant coatings for fire protection of building structures.

Therefore, in the context of globalization and increasing threats to humans, the first place is played by maintaining the resilience of buildings and structures in the event of fires and other natural disasters, as well as preserving their functional purpose after such impacts.

## 2 ANALYSIS OF LITERATURE DATA AND PROBLEM STATEMENT

Many well-known scientists have dealt with the issues of fire resistance assessment of fire-resistant steel structures. In [1], the authors developed two models of steel beams using ANSYS and OpenSEES programs, which take into account the constant mechanical load and the influence of fire temperature but do not take into account the presence of fire protection systems and their impact on modelling accuracy. The authors in [2] propose to use in the calculation of the temperature of fire-resistant steel structures in case of a fire a constant value of the thermal conductivity of the reactive fire-retardant coating, as it does not affect the accuracy of the calculations. However, as is known, the greatest accuracy of calculations is at the value of the thermal conductivity of the fire-retardant coating, which depends on the temperature. In [3] the results of the test for fire resistance of unprotected steel beams in comparison with simple and improved calculation methods given in EN 1993-1-2 are presented. The results showed the difference between the experimental and calculated temperature values obtained by FEM analysis. [4] presents a method for assessing the fire resistance of fire-resistant reactive fire-retardant coatings of steel structures. The method can be used to predict the behaviour of fire-retardant steel structures in different conditions (change in the coefficient of a cross-section of steel, coating thickness and type of fire exposure). However, there are no reliable data on the versatility of the method, including for passive fire-retardant coatings and the influence of climatic factors. In [5] experimental and calculated data on the determination of the temperature of steel plates with a fire-retardant covering in the conditions of fire influence on a standard fire have resulted. The authors analyze the possibility of using samples of reduced size and shape other than the size and shape of standardized samples of steel structures to assess the fire resistance of fire-resistant steel structures. In [6] we consider the results of experimental tests of steel plates of different sizes with water-based flame retardant coating, aimed at studying the thermal properties and the ratio of temperature and thickness of the coating in tests of steel plates of different thicknesses at standard temperature or slow-moving fire. However, the issues of the influence



of fire temperature regimes on the accuracy of fire resistance assessment of fire-resistant steel structures have not been fully investigated.

The conducted analysis allows to state the tendency to spread the application of the calculation-experimental method for estimating the limits of fire resistance of fire-resistant steel building structures and fire-retardant ability of coatings for such structures. This method allows taking into account the values of thermophysical characteristics of fire-retardant coatings not only as constant values but also as a function of temperature. This allows to increase the accuracy of the method and take into account the processes of heat transfer in the fire-resistant steel structure under the influence of different temperature regimes of fire.

Thus, the unsolved part of the problem is the lack of effective methods for assessing the fire resistance of fire-resistant steel building structures with scientifically sound parameters of fire protection systems in the form of both reactive and passive fire-retardant coatings. Solving this problem will increase the accuracy of estimating fire-resistant steel structures with sufficient accuracy for engineering calculations using the results of fire resistance tests, which are fully correlated with the results of numerical simulations in modern software packages.

### 3 THE PURPOSE AND OBJECTIVES OF THE STUDY

The work aims to assess the fire resistance of fire-resistant steel structures using the developed calculation and experimental method.

To achieve this goal needed to solve the following tasks:

- to analyze the results of tests for fire resistance of 2 fire-retardant steel columns;
- to build a physical, geometric, computer model of non-stationary heating of a fire-retardant steel column, in which to take into account and build:
  - the geometry of the object under study;
  - finite element model;
  - thermal effects on the structure;
- choose the calculation algorithm for processing the obtained experimental data.

### 4 ANALYSIS OF FIRE RESISTANCE TEST RESULTS

The test was subjected to 2 steel columns of I-beam section HEB 200 (thickness 6.1 mm), height 2 m. The columns were treated with flame retardant “Amotherm Steel Wb” after the pre-application of soil GF-021. Three thermocouples were placed on each sample according to [7], as shown in Fig. 1.

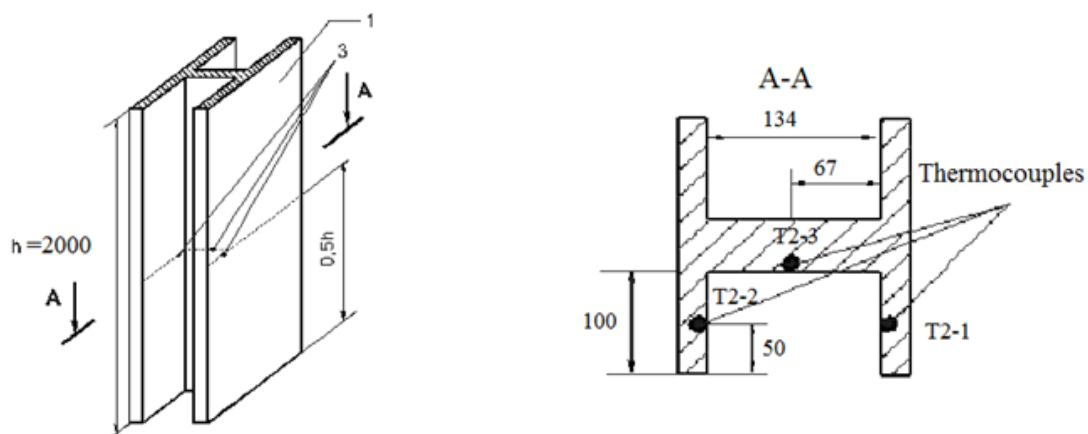
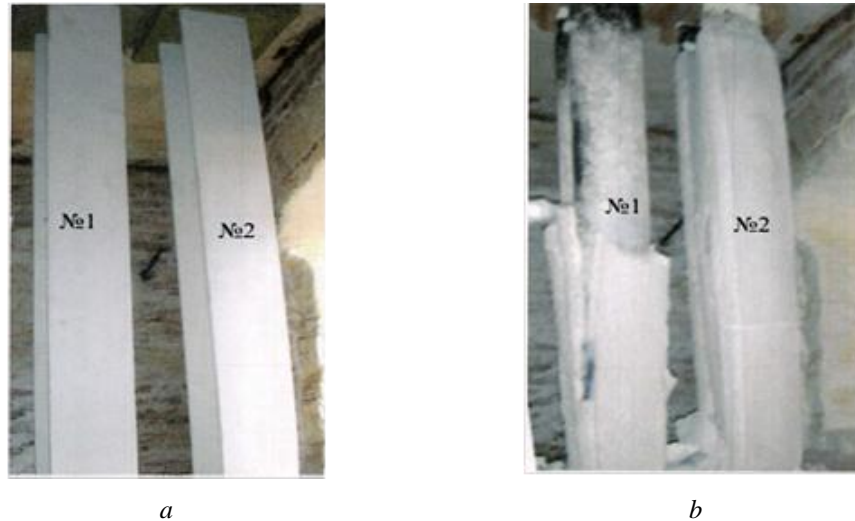


Fig. 1. Diagram of the location of thermocouples on samples of columns that are tested without load

The flame retardant was applied by mechanization and manually. The average coating thickness was 2.927 mm. The experiment was performed at an air temperature of 27°C, relative humidity of 54%. The average thickness of the coating of flame retardant “Amotherm Steel Wb” was (dry state without soil) 2.928 mm on the sample № 1 and 2.925 mm – on the sample № 2. Fig. 2 shows the types of samples in the furnace before (a) and after (b) the tests.



**Fig. 2.** Types of samples in the furnace before (a) and after (b) the tests

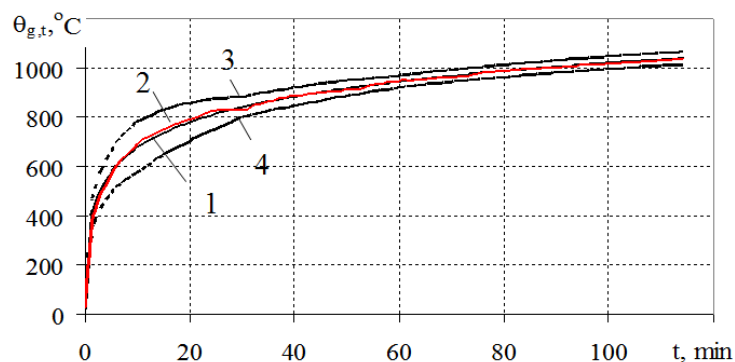
A special test furnace and metrological calibrated measuring equipment were used for the tests.

The temperature of the fire was determined by the formula:

$$\Theta_g = 20 + 345 \lg(8t + 1), \quad (1)$$

where  $\Theta_g$  – the temperature of the gas environment in the fire compartment, °C;  $t$  – time, min.

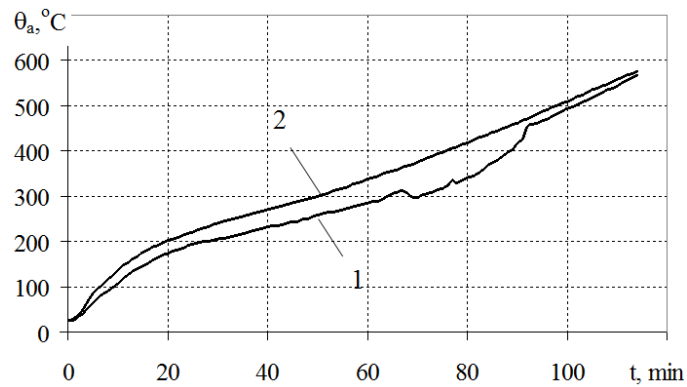
The temperature in the furnace was reproduced according to the standard temperature of the fire (Fig. 3).



**Fig. 3.** Dependence of temperature in the furnace on the duration of fire influence: 1 – a curve of a standard temperature mode, 2 – a real curve of change of temperature in the furnace; 3 – the maximum values of temperature in the furnace are admissible at tests; 4 – the minimum values of temperature in the furnace are admissible at tests

The volume swelling coefficient of the Amotherm Steel Web coating was 38.3 cm<sup>3</sup>/g (conditional linear swelling factor 47.9).

The dependence of the average temperatures of the samples of steel columns with the investigated fire-retardant coating on the time of fire exposure to the standard temperature of the fire is shown in Fig. 4.



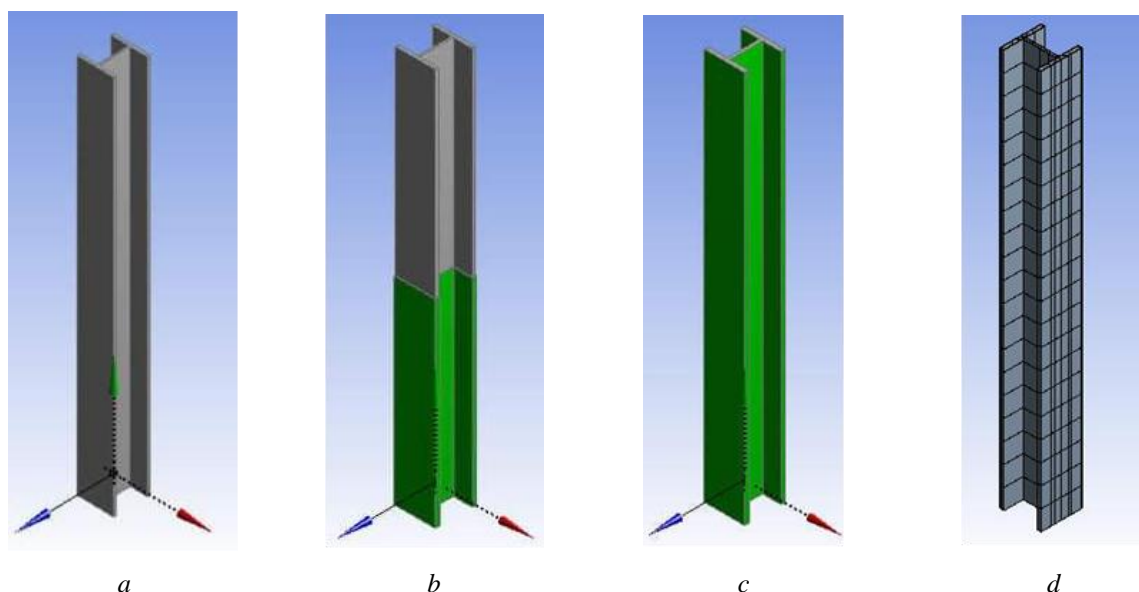
**Fig. 4.** Dependence of average temperatures of samples of fire-retardant steel columns on the time of fire exposure according to the standard temperature of the fire: 1 – sample column № 1; 2 – sample column № 2

As shown in Fig. 4 temperature dependences were compared with the results of computer simulation of non-stationary heating of a fire-retardant steel column, performed using FRIEND software.

These temperatures were compared with the results of computer simulations of non-stationary heating of a fire-retardant steel column, performed using FRIEND software. To compare the simulation results with the experimental determination of the temperature of the steel column in certain places under fire conditions according to the standard temperature of the fire, we took the values of the column sample temperature № 2 (Fig. 4, curve 2), which warmed up the most.

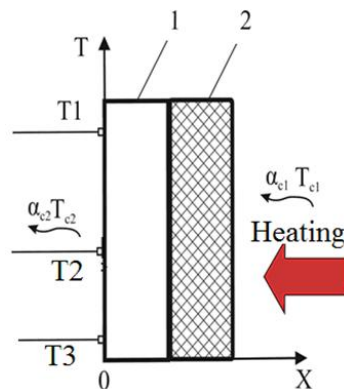
## 5 CONSTRUCTION OF MODELS OF NON-STATIONARY HEATING OF FIRE-RETARDANT STEEL COLUMN

The computer model of the thermal state of the investigated fire-retardant column was built on the basis that the column is heated in the furnace on four sides equally. Therefore, each surface of the column is considered as a two-layer system consisting of a layer of steel and a layer of fire-retardant coating of appropriate thickness. This model allows the calculation of the temperature distribution at all spatial points of the layers over time and, in particular, at the locations of thermocouples not only by the standard temperature of the fire but also by other alternative fire modes (Fig. 5).



**Fig. 5.** Construction of geometric (a, b, c) and finite element model (d) of fire-retardant steel column

A physical model of the system “steel structure - fire-retardant coating” has been developed (Fig. 6).



**Fig. 6.** Physical model of the thermal state in the system "fire-retardant coating - steel plate": 1 – steel plate; 2 – fire-retardant coating

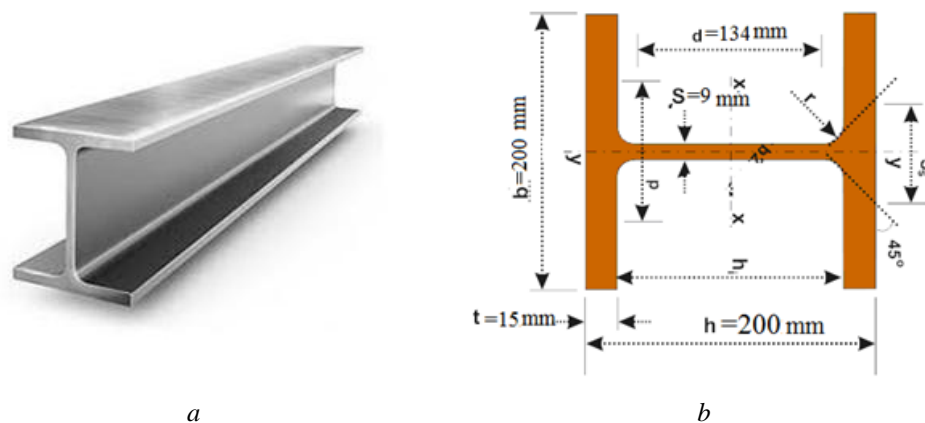
This physical model takes into account that the heating surface of the fire-retardant coating is heated by a convective-beam mechanism from hot gases in a furnace with a temperature  $\theta_{g,t}$ . Inside the system “fire-retardant coating - steel plate - thermal insulation” heat is transferred by thermal conductivity. The condition of ideal thermal contact between the layers of the system is accepted. From an unheated surface of thermal insulation heat exchange occurs by convection.

It is proposed to check the adequacy of the developed method for assessing the fire resistance of fire-resistant steel structures on samples of reduced size in the form of steel plates coated from one surface with a reactive flame retardant, forming a fire-retardant coating on the protected surface (Fig. 6).

## 6 CHECKING THE ADEQUACY OF THE DEVELOPED METHOD FOR ASSESSING THE FIRE RESISTANCE OF FIRE-RESISTANT STEEL STRUCTURES

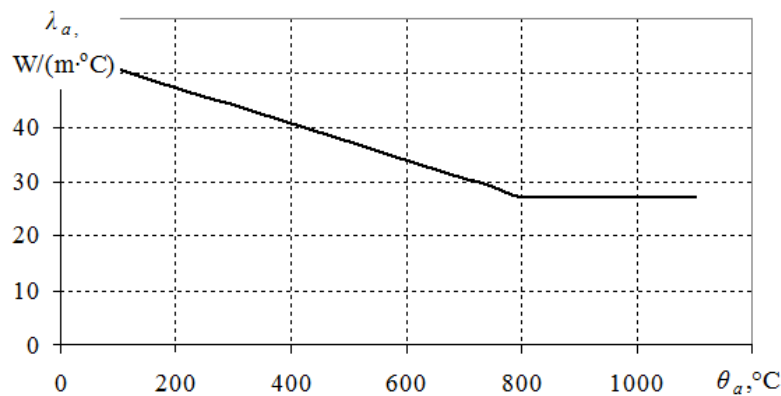
Thermophysical characteristics of the investigated fire-retardant coating for use in calculations of non-stationary heating of a fire-retardant steel column were defined in [8]: thermal conductivity coefficient as a function of temperature and constant value of specific volume heat capacity  $105 \text{ J/m}^3 \cdot ^\circ\text{C}$ .

The geometric dimensions of the column for modeling its thermal state are shown in Fig. 7.

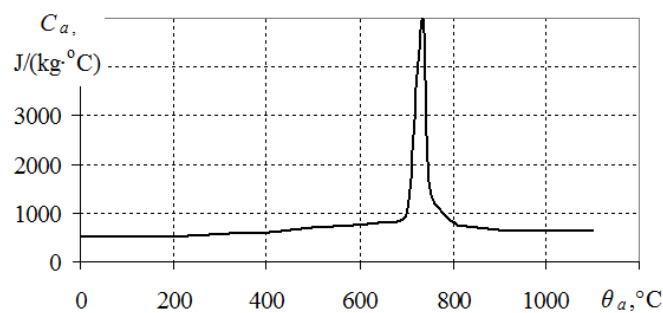


**Fig. 7.** Steel column: a – general view; b – geometric dimensions

Thermal conductivity  $\lambda_a$  and the specific heat of steel ca asked according to [9] and Fig. 8, 9.



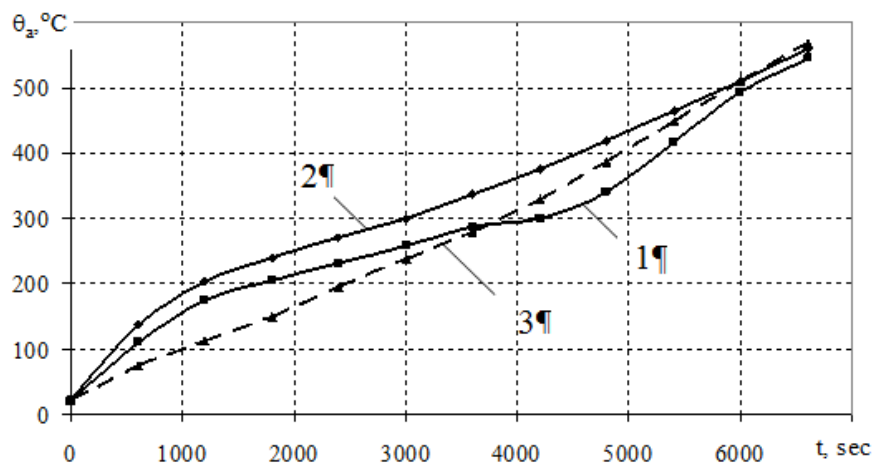
**Fig. 8.** Dependence of the thermal conductivity of steel on temperature



**Fig. 9.** Dependence of heat capacity of steel on temperature

The number of nodes of the numerical model was 15 nodes (10 nodes for steel structure and 5 nodes for fire protection coating) in spatial coordinates with a time step of 60 sec.

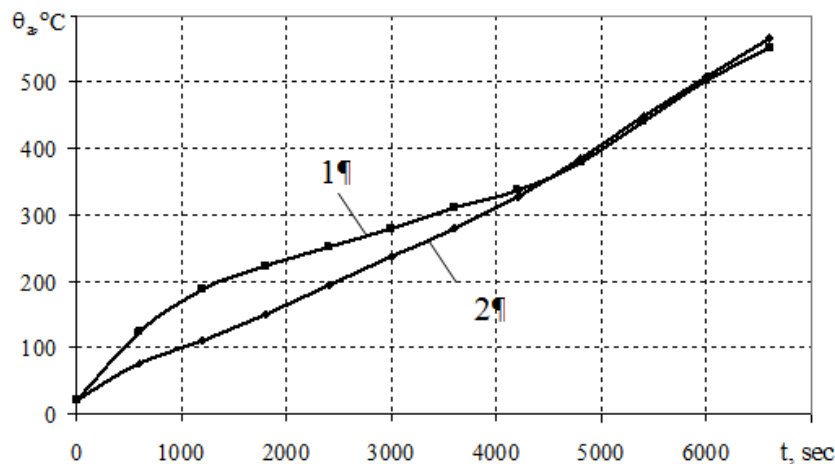
As a result of numerical modelling by solving direct problems of thermal conductivity, the calculated values of heating of a fire-retardant steel column were obtained, which are shown in Fig. 10.



**Fig. 10.** Dependence of temperature of fire-protected steel columns on time of fire influence on a standard temperature mode of a fire: 1 – the experimental curve of heating of column № 1; 2 – the experimental heating curve of column № 2; 3 – curve calculated as a result of numerical simulation

As can be seen from Fig. 10, calculated as a result of numerical simulation, the curve of the dependence of the heating temperature of the fire-retardant steel column on the time of fire coincides with the experimental curves. It was found that the best convergence and,

accordingly, the smallest allowable deviation range have the dependences of the column temperature №1 with the temperatures that are calculated as a result of numerical simulations. Thus, the largest error in measuring temperatures is observed at 20 minutes of calculation and is 63°C. When comparing the results of numerical simulations with the results of tests for fire resistance of the fire-retardant column №2, such an error for 20 minutes was 92°C. It can be concluded that when using the results of tests for fire resistance of fire-retardant steel columns at the standard temperature of the fire, it is necessary to take the average value of the test results of two steel columns. Subsequently, the results of the average values of heating of two fire-retardant steel columns were used for comparison, as shown in Fig. 11.



**Fig. 11.** Dependence of the average temperature of fire-retardant steel columns №1 and №2 on the time of fire exposure according to the standard temperature of the fire: 1 – the experimental heating curve of columns №1 and №2; 2 – curve calculated as a result of numerical simulation

From Fig. 11 it follows that the experimental curve of the average temperature values of fire-retardant steel columns №1 and №2 and the curve calculated as a result of numerical simulation have a satisfactory convergence. The results of experimental studies and numerical analysis in the FRIEND program for a time interval of 20-40 minutes differ significantly in all control points, but later this difference is stabilized, and until the end of the experiment does not exceed 10.0%, which can be considered an acceptable result. All this indicates the correctness of setting the initial and boundary conditions, the construction of mathematical and physical models of thermal processes in the system “steel structure - fire-retardant coating”. Ultimately, proves the efficiency of the developed method for assessing the fire resistance of fire-resistant steel structures and the adequacy of real processes that occur when heating fire-resistant steel columns without applying a load under fire conditions at standard fire temperatures.

## 7 CONCLUSIONS

1. Geometric, physical, computer and finite element models for assessing the fire resistance of fire-resistant steel structures have been developed. The peculiarity of the developed models is taking into account the thermophysical characteristics of steel structures and fire-retardant coatings that depend on temperature, as well as taking into account the peculiarities of the formation of temperature regimes of fire.

2. Based on the offered models based on the developed calculation-experimental method of estimation of fire resistance of fire-resistant steel columns of I-section without the loading applied to them is estimated.

3. It is established that the best convergence and, accordingly, the smallest allowable deviation range have the dependences of the column temperature №1 with the temperatures

that are calculated as a result of numerical simulations. Thus, the largest error in measuring temperatures is observed at 20 minutes of calculation and is 63°C. When comparing the results of numerical simulations with the results of tests for fire resistance of the fire-retardant column №2, such an error for 20 minutes was 92°C. It is concluded that when using the results of tests for fire resistance of fire-retardant steel columns at the standard temperature of the fire, it is necessary to take the average value of the test results of two steel columns.

4. It is established that for the accuracy of fire resistance assessment of fire-resistant steel structures it is necessary to use the average values of temperatures of two fire-resistant steel columns. The best convergence of the results of experimental and calculated determination of the heating temperature of fire-retardant steel columns, which is not more than 10% of the allowable deviation. The efficiency of the proposed calculation and experimental method for assessing the fire resistance of fire-resistant steel structures and its adequacy to real processes in non-stationary heating of fire-resistant steel columns in the standard temperature of the fire.

## References

1. Džolev, I., Radujković, A., Cvetkovska, M., Ladinović, Đ., & Radonjanin, V. (2016, April). Fire analysis of a simply supported steel beam using Opensees and Ansys Workbench. In 4th International Conference *Contemporary Achievements in Civil Engineering*. Subotica. 22. 315–322.
2. Li, G. Q., Han, J., Lou, G. B., Wang, Y. C. (2016). Predicting intumescent coating protected steel temperature in fire using constant thermal conductivity. *Thin-Walled Structures*. 98. 177–184. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.03.008>.
3. Łukomski, M., Turkowski, P., Roszkowski, P., Papis, B. (2017). Fire Resistance of Unprotected Steel Beams-Comparison between Fire Tests and Calculation Models. In *Procedia Engineering*. 172. 665–672. Elsevier Ltd. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.02.078>.
4. Cirpici, B. K., Wang, Y. C., Rogers, B. (2016). Assessment of the thermal conductivity of intumescent coatings in fire. *Fire Safety Journal*. 81. 74–84. <https://doi.org/10.1016/j.firesaf.2016.01.011>.
5. Novak, S., Drizhd, V., Dobrostan, O., Maladyka, L. (2019). Influence of testing samples' parameters on the results of evaluating the fireprotective capability of materials. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2(10–98). 35–42. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.164743>.
6. De Silva, D., Bilotta, A., Nigro, E. (2019). Experimental investigation on steel elements protected with intumescent coating. *Construction and Building Materials*. 205. 232–244. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.01.223>.
7. DSTU B. 1.1-17: 2007 *Zakhyst vid pozhezhi. Vohnnezakhysni pokryttia dlia budivelnnykh nesuchykh metalevykh konstruktsii. Metod vyznachennia vohnnezakhysnoi zdatnosti*. [Fire protection. Fire-retardant coatings for building load-bearing metal structures. Method for determining the fire retardant ability]. (ENV 13381 4: 2002, NEQ). [in Ukrainian].
8. Kovalov, A., Slovinskyi, V., Udianskyi, M., Ponomarenko, I., Anszczak, M. Research of fireproof capability of coating for metal constructions using calculation-experimental method. In *Materials Science Forum*. 2020. Vol. 1006 MSF. 3–10. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.1006.3>.
9. ENV 1993-1-2:2005. Eurocode 3. *Design of steel structures. Part 1.2, general rules – Structural fire design*. The European Union Per Regulation 305/2011. Directive 98/34/EC. Directive 2004/18/EC.

## Література

1. Džolev, I., Radujković, A., Cvetkovska, M., Ladinović, Đ., Radonjanin, V. Fire analysis of a simply supported steel beam using Opensees and Ansys Workbench. In 4th International Conference *Contemporary Achievements in Civil Engineering*, Subotica. 2016. Vol. 22. P. 315–322.

2. Li, G. Q., Han, J., Lou, G. B., Wang, Y. C. Predicting intumescent coating protected steel temperature in fire using constant thermal conductivity. *Thin-Walled Structures*. 2016. Vol 98. P. 177–184.
3. Łukomski, M., Turkowski, P., Roszkowski, P., Papis, B. Fire Resistance of Unprotected Steel Beams-Comparison between Fire Tests and Calculation Models. In *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 172. P. 665–672. Elsevier Ltd.
4. Cirpici, B. K., Wang, Y. C., Rogers, B. Assessment of the thermal conductivity of intumescent coatings in fire. *Fire Safety Journal*. 2016. Vol. 81. P. 74–84.
5. Novak, S., Drizhd, V., Dobrostan, O., Maladyka. Influence of testing samples' parameters on the results of evaluating the fireprotective capability of materials. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. Vol. 2(10–98). P. 35–42.
6. De Silva, D., Bilotta, A., Nigro, E. Experimental investigation on steel elements protected with intumescent coating. *Construction and Building Materials*. 2019. Vol. 205. P. 232–244.
7. ДСТУ Б В 1.1–17:2007 Захист від пожежі. Вогнезахисні покриття для будівельних несучих металевих конструкцій. Метод визначення вогнезахисної здатності. [Чинний від 2008–01–01], 2009. 105 с.
8. Kovalov, A., Slovinskyi, V., Udianskyi, M., Ponomarenko, I., Anszczak, M. Research of fireproof capability of coating for metal constructions using calculation-experimental method. In *Materials Science Forum*. 2020. Vol. 1006 MSF. P. 3–10.
9. ENV 1993-1-2:2005. Eurocode 3, Design of steel structures, Part 1.2, general rules – Structural fire design. The European Union Per Regulation 305/2011. Directive 98/34/EC. Directive 2004/18/EC81 p.

**Andrii Kovalov**

National University of Civil Defence of Ukraine  
Ph.D., Senior Research  
Chernyshevska str., 94, Kharkiv, Ukraine, 61023  
kovalev27051980@gmail.com  
ORCID 0000-0002-6525-7558

**Yurii Otrosh**

National University of Civil Defence of Ukraine  
Doctor of Technical Sciences, Professor  
Chernyshevska str., 94, Kharkiv, Ukraine, 61023  
yuriyotrosh@gmail.com  
ORCID 0000-0003-0698-2888

**Vitalii Tomenko**

Cherkasy Institute of Fire Safety of National University of Civil Defence of Ukraine  
Ph.D., Associate Professor  
Onoprienka str., 8 Cherkasy, Ukraine, 18034  
firech1996@gmail.com  
ORCID 0000-0001-7139-9141

**Vitaliy Slovinskyi**

Cherkasy Scientific Research Forensic Centre of the Ministry of Internal Affairs in Ukraine  
Ph.D.  
Pasterovska str., 104 Cherkasy, Ukraine, 18000  
vetal130971@ukr.net  
ORCID 0000-0002-6194-3171

*For references:*

Kovalov A., Otrosh Y., Tomenko V., Slovinskyi V. (2021). Evaluation of fire resistance of fire protected steel structures by calculation and experimental method. *Mechanics and Mathematical Methods*. 3 (2). 29 – 39

*Для посилань:*

Ковальов А. І., Отрош Ю. А., Томенко В. І., Словінський В. К. Оцінювання вогнестійкості вогнезахисених сталевих конструкцій розрахунково-експериментальним методом. *Механіка та математичні методи*, 2021. Т. 3. №. 2. С. 29–39.



UDC 539.4:624.01

## SPATIAL PROBLEMS OF DYNAMIC STABILITY OF FRAME STRUCTURES

V. Fomin<sup>1</sup>, I. Fomina<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract:** Periodic longitudinal forces in structural elements caused by operational or seismic influences, at certain values of the parameters of these forces can cause the occurrence and growing of transverse oscillations of these elements. This phenomenon is called parametric resonance or loss of dynamic stability. In the works of N. M. Belyaev, N. M. Krylov, M. M. Bogolyubov, E. Mettler, V. N. Chelomey, V. V. Bolotin flat problems of dynamic stability of frame structures were investigated. In this paper the modified Bolotin's method, proposed to solve flat problems of dynamic stability of frames, is used. Instead of the deformation method used by V. V. Bolotin to construct analytical expressions of deflections of frame rods, in the modified method the numerical-analytical method of boundary elements is used. The article proposes a method for constructing domains of dynamic instability of frames in the space of parameters (frequency and amplitude) of seismic and operational dynamic influences that cause longitudinal forces in the rods, which periodically change over time and lead to unlimited growth of transverse oscillations amplitudes in the domains of instability. The proposed method is demonstrated in example, which considers the spatial problem of dynamic stability of a П-shaped frame with two concentrated masses located on it, which are under the action of vertical periodic forces. These forces create periodic longitudinal forces in the vertical rods of the frame. Areas of dynamic instability of the frame were constructed.

Taking into account the destructive effect of oscillations is important for practical application. The most dangerous destructive effect of oscillations is observed in earthquakes and explosions. The study of this action makes it possible to avoid undesirable consequences of oscillations by limiting their level and to solve important practical problems of the dynamics of structures. Solving dynamics problems is a difficult problem. Dynamic calculation of structures provides their bearing capacity under the combined action of static and dynamic loads.

**Keywords:** reinforced concrete frames, dynamic instability, domains of instability.

## ПРОСТОРОВІ ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОЇ СТАБІЛЬНОСТІ КАРКАСНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Фомін В. М.<sup>1</sup>, Фоміна І. П.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація:** Періодичні поздовжні сили в елементах конструкцій, викликані експлуатаційними або сейсмічними впливами, при певних значеннях параметрів цих сил можуть викликати виникнення і зростання поперечних коливань цих елементів. Це явище називається параметричним резонансом або втратою динамічної стійкості. У працях Н. М. Беляєва, Н. М. Крилова, М. М. Боголюбова, Є. Метлера, В. Н. Челомєя, В. В. Болотіна досліджено плоскі проблеми динамічної стійкості каркасних конструкцій. У даній роботі використано модифікований метод Болотіна, запропонований для вирішення плоских задач динамічної стійкості фреймів. Замість методу деформації, використаного В. В. Болотіним для побудови аналітичних виразів прогинів стержнів каркаса, у модифікованому методі використовується чисельно - аналітичний метод граничних елементів. У статті запропоновано метод побудови областей динамічної нестійкості каркасів у просторі параметрів (частоти та амплітуди) сейсмічних та експлуатаційних динамічних впливів, що викликають поздовжні сили в стрижнях, які періодично змінюються з часом і приводять до необмеженого зростання поперечних коливань. амплітуди в областях нестійкості. Запропонований метод

продемонстровано на прикладі, який розглядає просторову задачу динамічної стійкості П-подібної рами з розташованими на ній двома зосередженими масами, які перебувають під дією вертикальних періодичних сил. Ці сили створюють періодичні поздовжні сили у вертикальних стрижнях рами. Побудовано ділянки динамічної нестійкості каркаса.

Урахування руйнівної дії коливань має важливе значення для практичного застосування. Найбільш небезпечна руйнівна дія коливань спостерігається при землетрусах та вибухах. Дослідження цієї дії дає можливість уникнути небажаних наслідків коливань шляхом обмеження їх рівня та вирішити важливі практичні проблеми динаміки споруд. Розв'язання задач динаміки є складною проблемою. Динамічний розрахунок споруд забезпечує їх несучою здатністю при спільній дії статичних та динамічних навантажень.

**Ключові слова:** залізобетонні каркаси, динамічна нестійкість, області нестійкості.

## 1 INTRODUCTION

The problem of studying the dynamic stability of building structures is actual due to the fact that the load transmitted through the floors from the equipment or through the crane beams to the columns of the industrial building frames is mainly harmonic in nature, as a result of which harmonic longitudinal forces arise in the construction columns. At certain values of the amplitudes and frequencies of these forces, this can lead to the emergence and buildup of transverse vibrations of the vertical rods of structures, and, therefore, to the possibility of their de-struction.

## 2 ANALYSIS OF LITERATURE DATA AND PROBLEM STATEMENT

The first work in the field of structure dynamic stability investigation was published by N. M. Belyaev in 1924 [1]. It raised and solved the problem of dynamic stability of a rod supported by hinges at its ends, i.e. the conditions for the appearance and rise of the rod transverse vibrations under the action of a periodic longitudinal force were investigated. It was shown that the values of the frequency and amplitude of the longitudinal force, at which an unlimited increase in the amplitude of the rod transverse vibrations is observed, form continuous regions in the space of these parameters, which are called instability domains. In 1935 N. M. Krilov and N. N. Bogolyubov [2], and E. Mettler [3] in 1940 continued research by N. M. Belyaev, having investigated the problem of the rod dynamic stability with arbitrary fixing at its ends. In the book of V. N. Chelomei [4], published in 1939, the problems of dynamic stability for rods of variable cross-section, for rods with initial deflection, and also for multi-span rods were considered. In 1953-1956 V. V. Bolotin [5,6] published a number of works devoted to the dynamic stability of rods, beams and frames. At the Kiev National University of Civil Engineering and Architecture, Bolotin's research in this area was continued [7-8].

It should be noted that in the above works, plane problems of dynamic stability of frames were investigated. In the work of N. A. Nikolaenko and Yu. P. Nazarov [9], the spatial problem of dynamic stability of a frame structure model, consisting of absolutely solid horizontal plates (modeling intermediate floors) connected by a system of geometrically nonlinear vertical rods was solved. However, for longterm structures, this model becomes not enough accurate. Therefore, in this work, to study the spatial problem of the dynamic stability of a frame structure, a model is adopted in the form of a mechanical system consisting of a weightless frame and concentrated masses located at its nodes (note that this type of model is used when calculating structures for seismic effects), and modified Bolotin's method, proposed in [5] for solving plane problems of frame dynamic stability, is used. Moreover, instead of the deformation method used by V. V. Bolotin to construct analytical expressions for frame rod deflections, the numerical-analytical boundary elements method is used [10].

## 3 PURPOSE AND OBJECTIVES OF THE RESEARCH

The aim of this work is to study the spatial problem of dynamic stability of structures using a model of a structure in the form of a mechanical system consisting of a weightless frame and concentrated masses located in its nodes (note that this type of model is used in normative calculation of structures for seismic effects).

## 4 RESEARCH RESULTS

In this paper the modified method by V. V. Bolotin, is used, which was proposed in [5] to solve flat problems of dynamic stability of frames. In this case, instead of the method of deformation used by V. V. Bolotin to construct analytical expressions of deflections of frame rods, the numerical-analytical method of boundary elements is used [10]. Let's number the frame rods and enter on each of the rods a local rectangular coordinate system  $x_k, y_k, z_k$  ( $k$  – rod number, axis  $x_k$  is directed along the axis of the rod). In addition, we introduce the global abscissa  $s$  of the frame points as follows:  $s = x_1$  for the points of the axis of the first rod,  $s = \sum_{j=1}^{k-1} l_j + x_k$  for points of the axis of the rod with the number  $k > 1$  ( $l_j$  – the length of the  $j$ -th rod). We will find dynamic deflections of rods of a frame in the following form:

$$\mathbf{v}(s, t) = \sum_{i=1}^n w_i(t) \Phi_i(s). \quad (1)$$

$n$  – the number of degrees of freedom of the abovementioned mechanical system. Here, in contrast to [5]  $\mathbf{v}(s, t)$  is not a scalar function, but a vector:

$$\mathbf{v}(s, t) = \begin{bmatrix} v_y(s, t) \\ v_z(s, t) \\ \Theta(s, t) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$v_y$  – deflection of the rod at a point with abscissa  $s$  in the direction of the  $y$ -axis of the local coordinate system,  $v_z$  – in the  $z$ -axis direction of this system,  $\Theta$  – the angle of rotation of the cross section),  $w_i(t)$  are scalar functions,  $\Phi_i(s)$  are three-dimensional vector functions:

$$\Phi_i(s) = \begin{bmatrix} \Phi_{i,1}(s) \\ \Phi_{i,2}(s) \\ \Phi_{i,3}(s) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

In [5] it is stated that as  $\Phi_i(s)$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) we can take functions with the help of linear combinations of which we can approximate the forms of free vibrations of the structure. In particular, you can use the functions of deflections of the frame from the action of forces  $F_i$  ( $F_i = 1\kappa H$ ,  $i=1,2,\dots,n$ ), applied to concentrated masses. Considering  $w_i(t)$  as generalized coordinates, we compose the Lagrange equation for this problem

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial w_i} \right) + \frac{\partial}{\partial w_i} (U - T) = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

where  $T$  and  $U$  are kinetic and potential energy of the frame with a system of concentrated masses located on it,  $Q_i$  are generalized forces.

The kinetic energy of the system is equal to the sum of the kinetic energies of the concentrated masses:



$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r m_j [v_y^2(s_j, t) + v_z^2(s_j, t)], \quad (5)$$

( $r$  is the quantity of concentrated masses). Taking into account formulas (1) – (3) we obtain

$$\frac{\partial T}{\partial w_i} = \sum_{j=1}^r m_j [\Phi_{i,1}(s_j) \sum_{k=1}^n w_k(t) \Phi_{k,1}(s_j) + \Phi_{i,2}(s_j) \sum_{k=1}^n w_k(t) \Phi_{k,2}(s_j)] \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Changing the order of summation by  $j$  and  $k$ , we obtain

$$\frac{\partial T}{\partial w_i} = \sum_{k=1}^n f_{ik} w_k(t), \quad (7)$$

where

$$f_{ik} = \sum_{j=1}^r m_j [\Phi_{i,1}(s_j) \Phi_{k,1}(s_j) + \Phi_{i,2}(s_j) \Phi_{k,2}(s_j)]. \quad (7a)$$

The potential energy of each of the frame rods consists of the potential bending energies of the rod in the planes  $xy$  and  $xz$  of the local coordinate system and the potential energy of rotation around the axis of the rod. Therefore, the potential energy of the frame is determined from the ratio

$$U(t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^L E(s) J_z(s) [v_y''(s, t)]^2 ds + \int_0^L E(s) J_y(s) [v_z''(s, t)]^2 ds + \int_0^L G(s) J_p(s) [\Theta'(s, t)]^2 ds \right\}. \quad (8)$$

Here the stroke means a derivative by  $s$ ,  $J_p(s)$  is the polar moment of inertia of the cross section relative to the center of intersection,  $E(s)$  and  $G(s)$  are the moduli of elasticity and shearing of the material of the frame rods,  $L$  is the total length of the frame rods. After substituting the relationship (1) into (8) and differentiation by  $w_i$  we get

$$\frac{\partial U}{\partial w_i} = \sum_{k=1}^n r_{i,k} w_k(t), \quad (9)$$

where

$$r_{i,k} = \int_0^L E(s) J_z(s) \Phi_{i,1}''(s) \Phi_{k,1}''(s) ds + \int_0^L E(s) J_y(s) \Phi_{i,2}''(s) \Phi_{k,2}''(s) ds + \int_0^L G(s) J_p(s) \Phi_{i,3}'(s) \Phi_{k,3}'(s) ds. \quad (9a)$$

The work of the external distributed transverse load is determined as follows:

$$V = \int_0^L [q_y(s, t) v_y(s, t) + q_z(s, t) v_z(s, t)] ds, \quad (10)$$

( $q_y, q_z, v_y, v_z$  are components of loads and deflections of rods in the corresponding local coordinate systems). Generalized forces can be found from the relations  $Q_i = \partial V / \partial w_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). From (1) it follows that

$$Q_i(t) = \int_0^L [q_y(s, t) \Phi_{i,1}(s) + q_z(s, t) \Phi_{i,2}(s)] ds \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (11)$$

Making in (11) integration by parts, we obtain

$$Q_i(t) = -\int_0^L \left[ Q_y(s,t) \frac{\partial \Phi_{i,1}(s)}{\partial s} + Q_z(s,t) \frac{\partial \Phi_{i,2}(s)}{\partial s} \right] ds \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (12)$$

Here  $Q_y(s,t)$  and  $Q_z(s,t)$  are components of the transverse force in the cross sections of the rods.

We limit ourselves by solving problems of dynamic stability under the action of vertical variable forces applied to concentrated masses. The influence of the longitudinal forces that arise in the rods of the frame on their bending deformation is taken into account by the ratio [5].

$$Q_y(s,t) = -N(s,t)v'_y(s), Q_z(s,t) = -N(s,t)v'_z(s).$$

We consider the case when the forces acting on concentrated masses change synchronously by time

$$P_j(t) = (\alpha + \beta \cos \psi t) P_{0,j} \quad (j=1, 2, \dots, r), \quad (13)$$

( $\alpha$  and  $\beta$  are positive scalar parameters). It is assumed that  $\alpha$  is less than the critical value, i.e. that the structure under the action of static forces  $\alpha P_{0,j} (j=1, 2, \dots, r)$  is in a position of stable equilibrium. From (13) it follows that for the longitudinal forces in the rods of the frame there is the following relationship:

$$N(s,t) = (\alpha + \beta \cos \psi t) N_0(s), \quad (14)$$

where  $N_0(s)$  is the system of longitudinal forces in the rods of the frame caused by forces  $P_{0,j} (j=1, 2, \dots, r)$ .

It follows from (13) and (14), that

$$Q_i(t) = (\alpha + \beta \cos \psi t) \int_0^L N_0(s) [v'_y(s) \Phi'_{i,1}(s) + v'_z(s) \Phi'_{i,2}(s)] ds \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Using the expansion (1), we obtain

$$Q_i(t) = (\alpha + \beta \cos \psi t) \sum_{k=1}^n s_{ik} w_k(t) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (15)$$

$$s_{ik} = \int_0^L N_0(s) [\Phi'_{i,1}(s) \Phi'_{k,1}(s) + \Phi'_{i,2}(s) \Phi'_{k,2}(s)] ds \quad (i, k=1, 2, \dots, n). \quad (15a)$$

Substitution of (7), (10) and (15) into the Lagrange equation (4) leads to a system of differential equations

$$\sum_{k=1}^n f_{ik} \ddot{w}_k(t) + \sum_{k=1}^n [r_{ik} - (\alpha + \beta \cos \psi t) s_{ik}] w_k(t) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (16)$$

which in matrix form can be written as follows:

$$F \ddot{\mathbf{w}} + [\mathbf{R} - (\alpha + \beta \cos \psi t) \mathbf{S}] \mathbf{w} = 0. \quad (17)$$

If  $\beta = 0$ , i.e. when forces  $P_j (j=1, 2, \dots, r)$  are constant, the system of equations (18) in this case

$$F \ddot{\mathbf{w}} + [\mathbf{R} - \alpha \mathbf{S}] \mathbf{w} = 0, \quad (18)$$

determines the free vibrations of the frame, the rods of which are loaded with longitudinal constant forces. Substitution  $w = W \sin \Omega t$  into (18) allows us to construct the equation of frequencies of free vibrations of such a frame:

$$\det(\mathbf{R} - \alpha \mathbf{S} - \Omega^2 \mathbf{F}) = 0. \quad (19)$$

To study the dynamic stability of the structure, it is necessary to use a system of differential equations (17) with coefficients that periodically depend on time. By multiplying this system by  $\mathbf{R}^{-1}$ , we bring it to the following form:

$$\mathbf{C}\ddot{w} + [\mathbf{E} - (\alpha + \beta \cos \psi t)\mathbf{A}]w = 0. \quad (20)$$

Here  $\mathbf{C} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{E}$  is the unit matrix. The boundaries of the main domains of instability in the first approximation are determined from equality [5]

$$\det \left[ \mathbf{E} - \left( \alpha \pm \frac{1}{2}\beta \right) \mathbf{A} - \frac{1}{4}\psi^2 \mathbf{C} \right] = 0. \quad (21)$$

Note that in [5] the main domains of instability are areas in the plane of parameters  $\beta$ ,  $\psi$  (at a fixed value  $\alpha$ ), boundaries of which at  $\beta = 0$  converge at points  $\psi_k = 2\Omega_k$  ( $\Omega_k$  is one of the frequencies of free vibrations of the frame loaded by constant longitudinal forces. In (21) the plus sign corresponds to the lower boundary of the area, and the minus sign  $-$  to the upper one.

We will demonstrate the proposed technique on a specific example.

**Example.** The spatial problem of dynamic stability of a  $\Pi$ -shaped frame with two masses  $M_1$  and  $M_2$  under the action of two vertical forces  $P_1(t)$  and  $P_2(t)$  is considered (Fig.1).

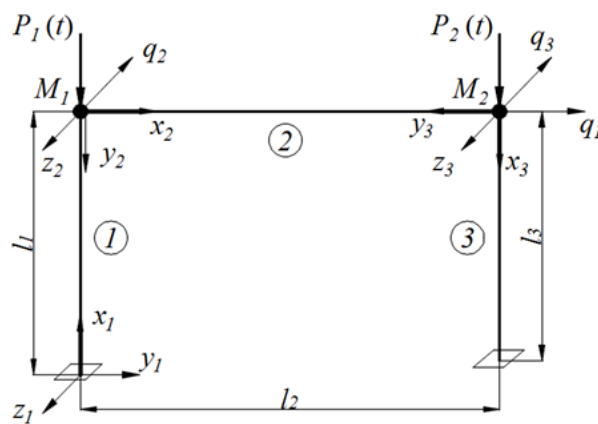
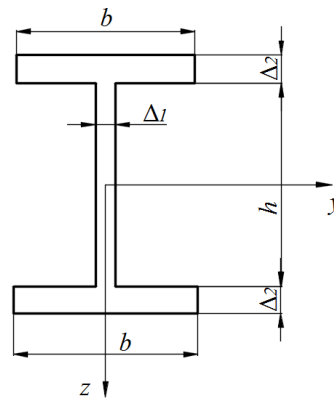


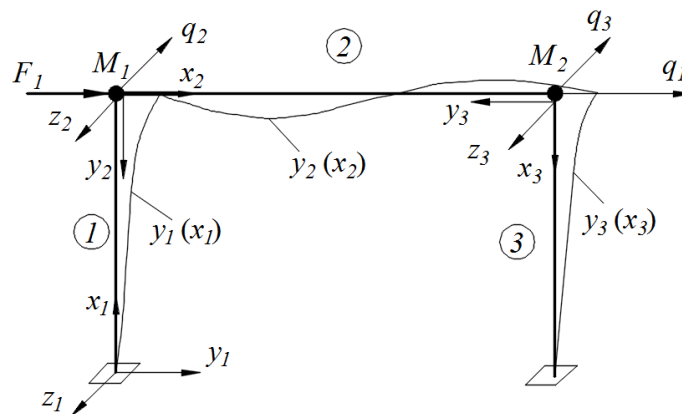
Fig.1. Frame scheme

The drawing shows the axes of the local coordinate systems  $x_k, y_k, z_k$  ( $k=1,2,3$ ) on each of the frame rods. Material point system  $M_1, M_2$  has three degrees of freedom. They correspond to the axes of the generalized coordinate system  $q_1, q_2, q_3$ . Construction parameters:  $l_1 = l_3 = 6 \text{ m}$ ,  $l_2 = 10 \text{ m}$ . Material point masses:  $m_1 = m_2 = 50T$ . Bar cross-section dimensions (Fig. 2):  $b = 0.3m$ ,  $h = 0.5 \text{ m}$ ,  $\delta_1 = 0.01 \text{ m}$ ,  $\delta_2 = 0.02 \text{ m}$ . Steel modulus of elasticity  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ , shear modulus  $G = 0.8 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ .



**Fig. 2.** Cross-section of frame rods

To build functions  $\Phi_i(s)$  ( $i=1,2,3$ ) we use the boundary element method [10]. We apply to the point  $M_1$  force  $F_1$  ( $F_1=1\kappa H$ ) in the direction of the axis  $q_1$ . Fig. 3 schematically depicts the deformed state of the frame caused by the action of this force.



**Fig. 3.** Deformed state of the frame under the action of force  $F_1$

Analytical expressions of functions  $y_1(x_1)$ ,  $y_2(x_2)$ ,  $y_3(x_3)$  have the following form:

$$y_1(x_1) = 1.73676 \cdot 10^{-4} x_1 - 2.14557 \cdot 10^{-5} x_1^3;$$

$$y_2(x_2) = 1.2758 \cdot 10^{-4} x_2 - 6.35216 \cdot 10^{-5} x_2^2 + 5.94676 \cdot 10^{-6} x_2^3;$$

$$y_3(x_3) = -1.65993 \cdot 10^{-3} + 2.53013 \cdot 10^{-4} x_3 + 1.84731 \cdot 10^{-4} x_3^2 - 3.60596 \cdot 10^{-5} x_3^3.$$

Notice, that  $z_i(x_i) = 0$ ,  $\Theta_i(x_i) = 0$  ( $i=1,2,3$ ). Thus, the components of the function  $\Phi_1(s)$  are presented as follows:

$$\Phi_{1,1}(s) = y_1(s) \text{ at } s \leq l_1;$$

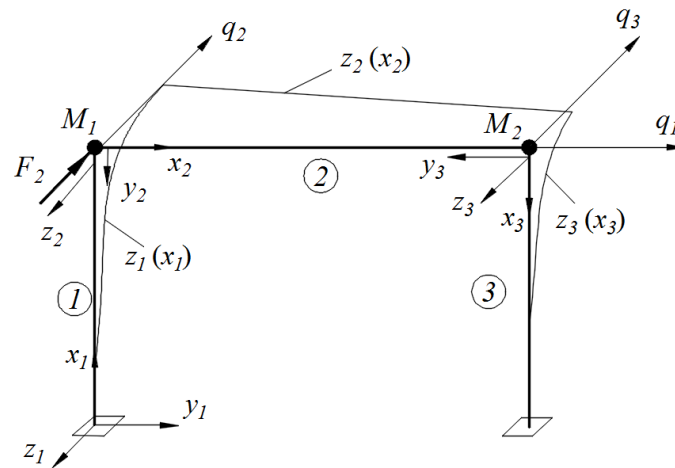
$$\Phi_{1,1}(s) = y_2(s - l_1) \text{ at } l_1 < s \leq l_1 + l_2;$$

$$\Phi_{1,1}(s) = y_3(s - l_1 - l_2) \text{ at } s > l_1 + l_2;$$

$$\Phi_{1,2}(s) = \Phi_{1,3}(s) = 0 \text{ at all } s.$$

We apply to the point  $M_1$  force ( $F_2 = 1 \kappa H$ ) in the direction of the axis  $q_2$ . Fig. 4 shows the deformed state of the frame caused by this force.





**Fig. 4.** Deformed state of the frame under the action of force  $F_2$

Analytical expressions of functions  $z_i(x_i)$ ,  $\psi_i(x_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) have the following form:

$$z_1(x_1) = -1.96667 \cdot 10^{-3} \cdot x_1^2 + 1.64014 \cdot 10^{-4} \cdot x_1^3;$$

$$\Theta_1(x_1) = 3.14744 \cdot 10^{-4} x_1;$$

$$z_2(x_2) = -2.86665 \cdot 10^{-2} + 1.57372 \cdot 10^{-3} x_2 + 2.67950 \cdot 10^{-4} x_2^2 - 2.33619 \cdot 10^{-5} x_2^3;$$

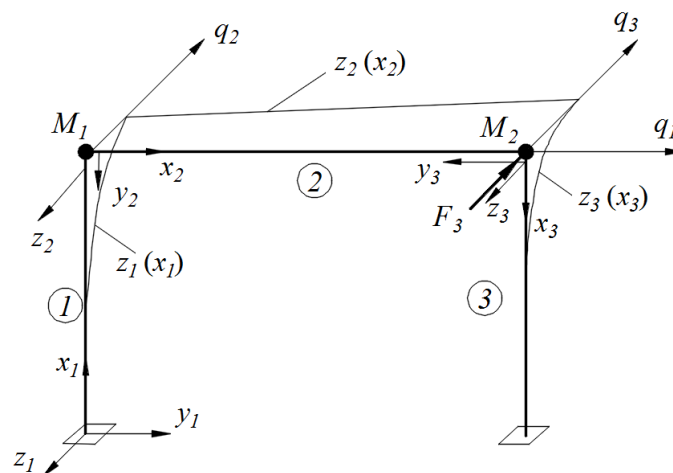
$$\Theta_2(x_2) = 7.36569 \cdot 10^{-3} - 1.43481 \cdot 10^{-4} x_2;$$

$$z_3(x_3) = -1.08878 \cdot 10^{-2} + 6.21784 \cdot 10^{-3} x_3 - 4.93534 \cdot 10^{-4} x_3^2 - 2.33692 \cdot 10^{-5} x_3^3;$$

$$\Theta_3(x_3) = -1.37543 \cdot 10^{-3} + 3.43858 \cdot 10^{-4} x_3,$$

wherein  $y_i(x_i) = 0 (i = 1, 2, 3)$ .

We now apply to the point  $M_2$  the force  $F_3 (F_3 = 1 \kappa H)$  in the direction of the axis  $q_3$ . The deformed state of the frame caused by this force is shown in Fig. 4.



**Fig. 4.** Deformed state of the frame under the action of force  $F_3$

Analytical expressions of functions  $z_i(x_i)$ ,  $\Theta_i(x_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$z_1(x_1) = -8.42278 \cdot 10^{-4} x_1^2 + 2.57682 \cdot 10^{-5} \cdot x_1^3, \quad \Theta_1(x_1) = -3.63105 \cdot 10^{-4} x_1;$$

$$z_2(x_2) = -1.78359 \cdot 10^{-2} - 1.81553 \cdot 10^{-3} x_2 - 3.09121 \cdot 10^{-4} x_2^2 + 2.57601 \cdot 10^{-5} x_2^3;$$

$$\Theta_2(x_2) = 6.49016 \cdot 10^{-3} + 1.32498 \cdot 10^4 x_2;$$

$$z_3(x_3) = -3.89547 \cdot 10^{-2} + 7.55014 \cdot 10^{-3} x_3 + 4.55755 \cdot 10^{-4} x_3^2 - 1.61615 \cdot 10^{-4} x_3^3;$$

$$\Theta_3(x_3) = 1.81553 \cdot 10^{-3} - 3.63105 \cdot 10^{-4} x_3, \quad y_i(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Function components  $\Phi_k(s)$  ( $k = 2, 3$ ) are presented as follows:

$$\Phi_{k,1}(s) = 0 \text{ at all } s;$$

$$\Phi_{k,2}(s) = z_1(s), \quad \Phi_{k,3}(s) = \Theta_1(s) \text{ at } s \leq l_1;$$

$$\Phi_{k,2}(s) = z_2(s - l_1), \quad \Phi_{k,3}(s) = \Theta_2(s - l_1) \text{ at } l_1 < s \leq l_1 + l_2;$$

$$\Phi_{k,2}(s) = z_3(s - l_1 - l_2), \quad \Phi_{k,3}(s) = \Theta_3(s - l_1 - l_2) \text{ at } s > l_1 + l_2.$$

Next, we proceed to the definition of the elements of the matrices  $F$ ,  $R$  and  $S$ , using formulas (7a), (9a), (15a). Solving equation (19), we find the frequencies of free vibrations of the frame with a system of weights loaded with longitudinal constant forces  $P_{0,j}$  ( $P_{0,j}$  are cargo weights  $M_j$ ,  $j = 1, 2$ ). Then, using (21), we construct the boundaries of the main domains of instability (Fig. 5).

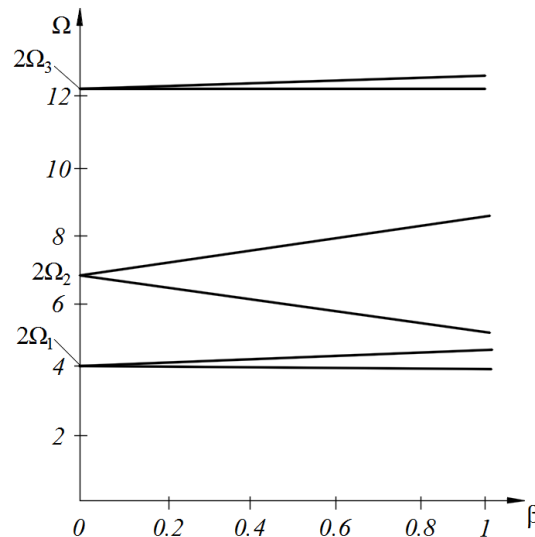


Fig. 5. The main regions of instability of the frame

## 5 DISCUSSION OF RESEARCH RESULTS

When designing buildings and structures, it is necessary to take into account the possibility of the occurrence of resonances between the dynamic loads acting on the structure, caused by seismic and industrial influences, and free vibrations of the structure. But besides the usual resonances, it is necessary to take into account the parametric resonances associated with the frequencies of the variable longitudinal forces created by the indicated dynamic influences. For this, domains of dynamic instability should be constructed in the space of these parameters. When these parameters enter into the domains, the appearance and buildup of transverse vibrations of structural elements is observed, i.e. the phenomenon of dynamic stability loss occurs.

## 6 CONCLUSIONS

The article proposes a method for constructing domains of dynamic instability for a structure in the form of a steel frame. When the parameters enter into these domains, the

the emergence of spatial vibrations of the structure is observed.

## References

1. Belyaev, N. M. (1924). Ustoychivost prizmaticheskikh sterzhney pod deystviem peremennykh prodolnykh sil. [Stability of prismatic rods under the action of variable longitudinal forces]. *Ingenerniye sooruzheniya i stroitel'naya mehanika*. Moskva. Put'. 149–167. [in Russian].
2. Krylov, N. M., Bogolyubov, N. N. (1935). Issledovanie yavleniy rezonansa pri poperechnykh kolebaniyakh sterzhney, nakhodyashchikhsya pod vozdeystviem periodicheskikh normalnykh sil, prilozhennykh k odnomu iz kontsov sterzhnya [Investigation of resonance phenomena during transverse vibrations of rods under the influence of periodic normal forces applied to one of the ends of the rod]. *Issledovaniye kolebaniy konstruksiy*. Kharkov–Kiyev. NTI. 25–42. [in Russian].
3. Mettler, E. (1940). Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Axiallast. *Mitt. Forsch. Anst.Gffii-Konzern*. 8. 17–39.
4. Chelomey, V. N. (1939). *Dinamicheskaya ustoychivost elementov aviatsionnykh konstruksiy*. [Dynamic stability of elements of aircraft structures]. Moskva. Aeroflot. [in Russian].
5. Bolotin, V. V. (1956). *Dinamicheskaya ustoychivost uprugikh system*. [Dynamic stability of elastic systems]. Moskva. Gosudarstvennoe izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoy literatury. [in Russian].
6. Bolotin, V. V. (1956). Voprosy obshchey teorii uprugoy ustoychivosti. [Questions of the general theory of elastic stability]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. T. 20. V. 5. 561–577. [in Russian].
7. Gotsulyak, Ye. O., Dekhtyaryuk, Ye. S., Lukyanchenko, O. D., Borysehko, V. H. (2005). Pobudova redukovanikh rivnyan dinamichnoї stiykosti ploskoї formi zginu pruzhnykh system. [Derivation of dynamic stability reduced equations of elastic systems plane bending modes]. *Opir materialiv i teoriya sporud*. K.: KNUBA. 77. 65–77. [in Ukrainian].
8. Lukyanchenko O. D., Vorona Yu. V., Kostina O. V. (2014). Parametric resonance in statically indeterminate frames. Determination of materials and theory of construction. K.: KNUBA. 93. 91–99.
9. Nikolaenko, N.A., Nazarov, Yu.P. (1988). *Dinamika i seysmostoykost sooruzheniy*. [Dynamics and seismic resistance of structures]. Moskva. Stroyizdat. [in Russian].
10. Daschenko, A. F., Kolomiyets, L. V., Orobey, V. F., Surianinov, N. G. (2010). *Chislennno-analiticheskiy metod granichnykh elementov*. [Numerical-analytical boundary elements method]. Odessa. VMV. [in Russian].

## Література

1. Беляев Н. М. Устойчивость призматических стержней под действием переменных продольных сил. Инженерные сооружения и строительная механика. М.: Путь, 1924. С. 149–167.
2. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Исследование явлений резонанса при поперечных колебаниях стержней, находящихся под воздействием периодических нормальных сил, приложенных к одному из концов стержня. В кн. Исследование колебания конструкций. Сб. статей, Харьков–Киев. НТИ. С. 25–42.
3. Mettler E. Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Axiallast. *Mitt. Forsch., Anst.Gffii-Konzern*. 1940. 8. P. 17–39.
4. Челомей В. Н. Динамическая устойчивость элементов авиационных конструкций. Москва. Аэрофлот, 1939. 80 с.
5. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Москва. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 600 с.
6. Болотин В. В. Вопросы общей теории упругой устойчивости. Прикладная математика и механика, 1956. Т. 20. Вып. 5. С. 561–577.
7. Гоцуляк Є. О., Дехтярюк Є. С., Лук'яненко О. О., Борисенко В. Г. Побудова редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем. Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2005. Вип.77. С. 65–77.
8. Lukyanchenko O. D., Vorona Yu. V., Kostina O. V. Parametric resonance in statically indeterminate frames. Determination of materials and theory of construction. K.: KNUBA. 2014. V. 93. P. 91–99.

9. Николаенко Н. А., Назаров Ю. П. Динамика и сейсмостойкость сооружений. М.: Стройиздат, 1988. 308 с
10. Дащенко А. Ф., Коломиец Л. В., Оробей В. Ф., Сурьянинов Н. Г. Численно-аналитический метод граничных элементов. Одесса: ВМВ, 2010. Т.1 – 415 с., Т.2 – 510 с.

**Фомін Володимир Михайлович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.т.н., професор  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029  
vmfomin39@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-4814-6415

**Фоміна Інна Петрівна**

Одеська державна академія будівництва та архітектури, старший викладач  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029  
fomina@ogasa.org.ua  
ORCID: 0000-0001-7366-1537

*For references:*

Fomin V., Fomina I. (2021). Spatial problems of dynamic stability of frame structures. Mechanics and Mathematical Methods. 3 (2). 40–51.

*Для посилань:*

Фомін В. М., Фоміна І. П. Просторові задачі динамічної стабільності каркасних конструкцій. Механіка та математичні методи, 2021. Т. 3. №. 2. С. 40–51.

UDC 621.923.4:621.793.74

## CUTTING STONE BUILDING MATERIALS WITH CUT WHEELS OF CUBIC BORON NITRIDE

A. Beshpalova<sup>1</sup>, O. Dashkovskaya<sup>1</sup>, O. Faizulyna<sup>1</sup>, V. Lebedev<sup>2</sup>, T. Chumachenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

<sup>2</sup>Odessa Polytechnic National University

**Abstract:** The advantage of cutting stone building materials with SSM (synthetic superhard materials) wheels is that, first of all, it is possible to obtain high processing productivity and dimensional stability, which are 3..5 and 50...100 times higher than those of traditional tools based on carborundum, respectively.

The study of the process of cutting stone materials with CBN (cubic boron nitride) wheels is aimed at establishing force dependences, determining the cutting power and heating temperature of the cutting disc during operation.

The forces were measured using a tensometric dynamometer UDM-50. To measure and calculate the cutting temperature, a thermoelectric method based on the formation of practically not inertial microthermocouples during cutting was used.

The temperature to which the CBN cutting wheel on a metal base is heated is a limiting factor in processing, since when heated to a temperature of 600°C, the strength of the wheel decreases by half, which can cause its rupture under the action of centrifugal forces, as well as loss of stability and jamming during cutting. In the present study, the wheel temperature was measured after one minute of continuous operation.

The values of the component of the cutting force PY, depending on the processing modes, can reach values of the order of 70 N. The values of the component of the cutting force PZ, depending on the processing modes, can reach values of 45 N. The cutting power can be 2800W.

The temperature resistance of the wheel (heating time of the wheel up to 600°C) when cutting dry is maximum 28 minutes, when grinding with cooling of the cutting zone with negative temperature air from a Ranque-Hilsch tube, the temperature resistance is 35 minutes, with ejector cooling of sprayed coolant 37 minutes and with jet-pressure cooling it is 40 minutes. The maximum cutting length is respectively 0.7: 0.8; 0.9 and 2m. The cutting power is 600...2800W.

**Keywords:** stone building materials, cutting, synthetic superhard materials, cut-off wheel, cubic boron nitride, cutting forces, wheel temperature.

## РОЗРІЗАННЯ КАМ'ЯНИХ БУДІВЕЛЬНИХ МАТЕРІАЛІВ ВІДРІЗНИМИ КРУГАМИ З КУБІЧНОГО НІТРИДУ БОРУ

Беспалова А. В.<sup>1</sup>, Дашковська О. П.<sup>1</sup>, Файзуліна О. А.<sup>1</sup>, Лебедєв В. Г.<sup>2</sup>, Чумаченко Т. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

<sup>2</sup>Одеський національний університет «Одеська політехніка»

**Анотація:** Перевага розрізання кам'яних будівельних матеріалів кругами СНМ (синтетичні надтверді матеріали) полягає, насамперед, у можливості отримувати високу продуктивність обробки та розмірної стійкості, що перевищують аналогічні показники традиційних інструментів на основі карборунду відповідно в 3...5 і 50...100 разів.

Дослідження процесу розрізання кам'яних матеріалів кругами з КНБ спрямоване на встановлення силових залежностей, визначення потужності різання і температури нагрівання відрізного диску під час роботи.

Сили вимірювалися за допомогою тензометричного динамометра УДМ-50. Для вимірювання та розрахунку температури різання у роботі використаний термоелектричний метод, заснований на утворенні практично безінерційних мікротермопарів у процесі різання.

Температура, до якої нагрівається ріжучий круг на металевій основі, є лімітуючим фактором обробки, оскільки при нагріванні до температури 600°C міцність круга зменшується вдвічі, що може викликати його розрив під дією відцентрових сил, а також втрату стійкості та заклинювання при різанні. У цьому дослідженні температура круга вимірювалася після хвилини безперервної роботи.

Значення складової сили різання  $P_Y$  в залежності від режимів обробки можуть досягати значень порядку 70N. Значення складової сили різання  $P_Z$ , залежно від режимів обробки, можуть досягати значень 45N. Потужність різання може становити 2800Вт.

Температурна стійкість круга (час нагрівання круга до 600°C) при розрізанні всуху становить максимально 28 хвилин, при шліфуванні з охолодженням зони різання повітрям негативної температури з трубки Ранка-Хілша температурна стійкість складає 35 хвилин, і при струменево-напірному охолодженні становить 40 хвилин. Максимальна довжина різання становить відповідно величини 0,7; 0,8; 0,9 та 2м. Потужність різання становить величини 600...2800Вт.

**Ключові слова:** кам'яні будівельні матеріали, розрізання, синтетичні надтверді матеріали, відрізний круг, кубічний нітрид бору, сили різання, температура круга.

## 1 INTRODUCTION

During the reconstruction and repair of buildings and structures and the restoration of old buildings or cultural monuments, it becomes necessary to cut, form new holes in the walls, make cut slots, correct deformed parts, eliminate those structural elements that have collapsed or have undergone significant wear over time and chemical influence of the external environment.

Also, it is often necessary to strengthen structures that have great destruction. In this case, it is necessary to introduce auxiliary structures into walls, foundations and floors, for which it is necessary to punch openings and nests in them, where reinforcing elements are inserted. Such work is often performed in shell limestone, concrete, reinforced concrete, hard materials - granite, basalt, etc. by cutting or making cuts to the required size with cutting wheels made of synthetic superhard materials. (SSM-synthetic diamond, cubic boron nitride).

The advantage of cutting stone building materials with SSM wheels is that, first of all, it is possible to obtain high processing productivity and dimensional stability, exceeding those of traditional tools based on carborundum by a factor of 3...5 and 50...100, respectively. For example, if the productivity of cutting hard stone with carborundum discs is on average 100...150cm<sup>3</sup>/min, then with diamond and CBN discs it is 400-600cm<sup>3</sup>/min. At the same time, the accuracy of the operation and the quality of the processed surface are significantly increased. The surface obtained after cutting does not need further polishing, which is very important when carrying out repair work.

The negative aspects of this process are the limitation of the operating time of the wheel due to its heating, which leads to a loss of strength and an increase in the consumption of the layer from the SSM due to the high heating of the cutting wheel and to the loss of the ability to control the process due to intense dust formation, which sharply reduces the visibility of the production area. All this makes it necessary to periodically interrupt the cutting process.

The process of cutting stone materials with diamond cut-off wheels is currently well studied, while the process of cutting these materials with CBN wheels is practically not studied, although CBN has a number of significant advantages.

CBN is a superhard synthetic material consisting of nitrogen and boron atoms forming a tetragonal crystal lattice similar to the crystal lattice of diamond. It has high hardness - up to 9500kgf/mm<sup>2</sup> (about 5% less than diamond), high heat resistance (1400°C), chemically inert with respect to carbon-containing materials and more durable than diamond (bending strength up to 100kgf/mm<sup>2</sup>), (Table 1 [1]).

**Table 1**

Comparative properties of abrasive materials.

Material	Microhardness ×10 <sup>2</sup> , MPa	Temperature stability, °C
Diamond	1000	650–700
CBN	850–950	1100–1300

The tool life of CBN discs is 2-3 times higher than that of diamond discs.

Since CBN has a high temperature stability, then obviously the operating time of the cutting wheel on a metal bond will depend only on heating of the wheel to a temperature of 600°C at which the strength of the metal disk decreases by 2 times and there is a real danger of the disk breaking.

Therefore, the study of the process of cutting stone materials with CBN wheels should be aimed at establishing power dependencies, at determining the cutting power and heating temperature of the cutting disc during operation. To do this, it is necessary to determine the patterns of change in cutting forces, cutting power, heating temperature of the cutting disc, and also to determine the productivity (length of the cut) for the period of operation before the

disc is heated to a temperature of about 600°C.

## 2 LITERATURE REVIEW

It should be noted that in the modern literature there is no clear data on cutting with these wheels. It is noted that the contact temperature of grinding is generally lower than when grinding with conventional ceramic wheels. There is little information on cutting forces, temperature, and cutting power when cutting with CBN wheels of stone and ceramic materials, and they are contradictory.

So in work [2] new CBN wheels are considered and some questions of their application are considered. However, the issues of cutting stone materials are not considered.

In work [3] the process of grinding with CBN wheels is considered in detail.

However, the process of cutting stone materials with these wheels is not considered. The authors of [4] consider the issues of grinding high-ductility alloys with CBN wheels. However, this work does not touch upon the issues of cutting stone materials.

Work [1] is devoted to the study of processing by grinding with CBN wheels of aluminum alloys. The cutting of stone materials and ceramics has not been investigated.

The article [5] discusses the issues of grinding without cooling with CBN wheels of various alloys. However, the issue of cutting of stone materials and ceramics is not considered. In addition, the authors measure not the grinding temperature, but the average temperature of the part before and after grinding, which provides little information of process.

The authors of the research in publication [6] consider the issues of grinding with highly porous CBN wheels, but the issues of cutting stone materials and ceramics are not considered.

In [7], the process of grinding with highly porous CBN wheels is considered in terms of minimizing the number of edits, and high porosity is considered as a means of delivering coolant to the cutting zone. The issues of cutting stone materials and ceramics are not considered.

The issues of grinding difficult-to-machine materials with CBN wheels - titanium and nickel alloys, as well as the issues of determining the most advantageous porosity of the wheel from the point of view of maintaining grain holding forces by the binder are considered in [8]. It was shown that the best results were shown by a porosity of 30%. The issue of cutting stone materials and ceramics has not been studied.

The authors of [9] investigate the process of profile gear grinding with highly porous abrasive wheels. Data on a decrease in cutting power and an increase in the accuracy of ground gears have been recorded. However, in this work only abrasive wheels are considered and there is no information about the cutting of stone materials and ceramics.

In [10], numerical and mathematical models are considered for determining the thermomechanical state of structurally inhomogeneous materials. Simulation of thermomechanical processes makes it possible to obtain a criterion relation for the condition of a balanced state of a defect depending on the gradients of the contact temperature. However, the work does not specifically address the processes of cutting with CBN wheels.

The purpose of work [11] is to study the processes of heat transfer during abrasive processing of parts by constructing the temperature field of the system grinding wheel - workpiece for various characteristics of the grinding mode. But in this work, the issue of modeling the cutting process in relation to stone materials is not considered.

It can be concluded that, despite the large number of works carried out on the study of the grinding process with CBN wheels, the issues of cutting stone materials have not been clarified. The issue of grinding ceramics has practically not been considered.

It can be argued that at present there are no recommendations for cutting stone materials with CBN wheels that would provide the highest thermal resistance of the wheel.



### 3 RESEARCH METHODOLOGY

Based on the foregoing, in this work, mathematical modeling of the process of stone materials by CBN circles was carried out with a point experimental verification of the results.

The main goals set in this work are as follows:

1. Investigate the energy characteristics of the process - cutting power and cutting forces.
2. Investigate the thermodynamic characteristics of the process - temperatures, heating of the circle and the thermal resistance of the circle
3. Determine the processing performance depending on the characteristics of the wheels and cutting modes.

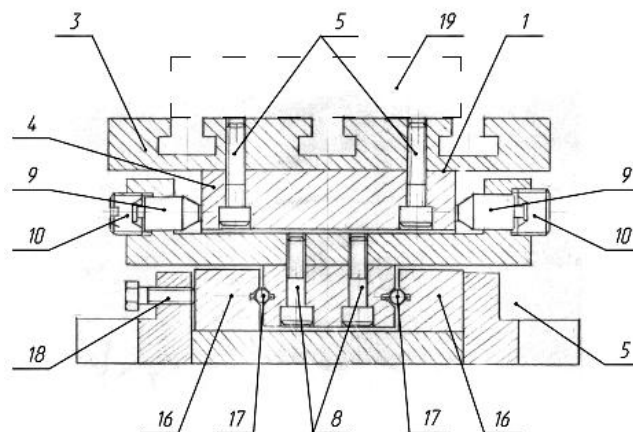
#### **Methodological features of the study.**

##### *Measuring cutting forces.*

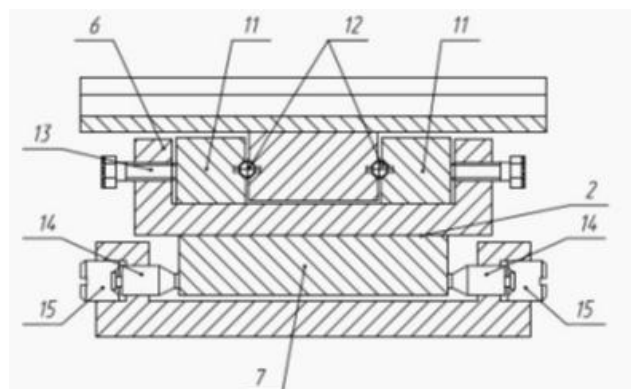
In this work, the cutting forces, in addition to mathematical modeling, were determined experimentally, which made it possible to check the mathematical model and obtain real values of the forces.

The forces were measured using a tensometric dynamometer UDM-50.

The principle of operation of the device is as follows: A general view of the dynamometer and a cross-section of a general view are shown in Fig. 1 and Fig. 2 respectively.



**Fig. 1.** Longitudinal section of the general view of the dynamometer



**Fig. 2.** Cross section of the general view of the dynamometer

The principle of operation of a two-component dynamometer for measuring the components of the cutting force is as follows.

The dynamometer is installed on the machine, after which the workpiece 19 is fixed on the loading tool 1, the preload of the strain gauges 9 and strain gauges 14 is carried out using

the pins 10 and pins 15; rigid fixation of the prismatic guides 11 and the prismatic guides 16 is carried out using the tightening bolts 13 and the tightening bolts 18. Under the action of the cutting force, which is decomposed into the measured components, the corresponding load tables 1 and 2 move. The load tables 1 and 2 move longitudinally through the steel balls 12 and 17 along the prismatic guides 11 and 16 act on the strain gauges 9 and strain gauges 14. The signal is output to a detachable chassis (not shown in the drawing) connected to an amplifier.

The device makes it possible to provide the ability to accurately measure the components of the cutting force regardless of the position of the workpiece on the loading table relative to the center of the dynamometer, which ultimately increases the ease of use and visibility of tests.

We calibrate the device with weights along the vertical and horizontal components. The signal from the amplifier is fed to the ADC, after which it is displayed on the tablet.

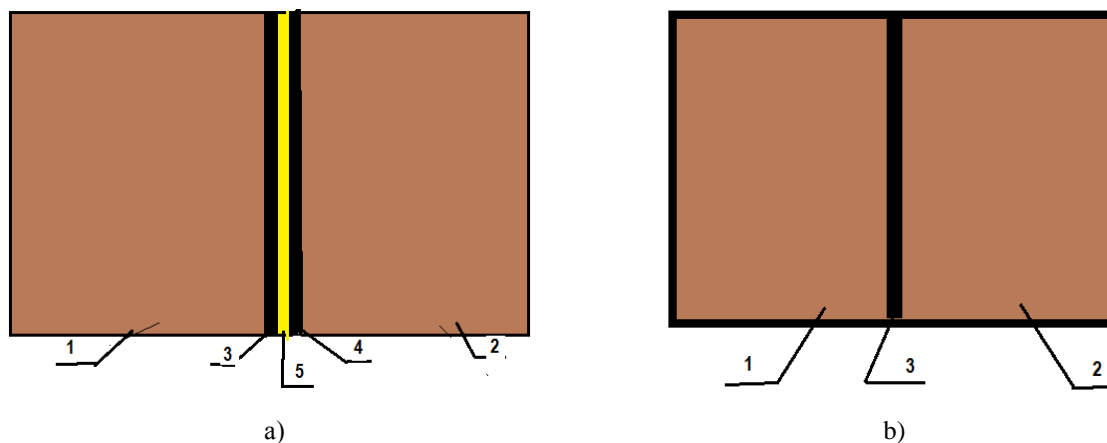
*Cutting temperature measurement.*

To measure and calculate the indicated data, a thermoelectric method based on the formation of practically not inertial microthermocouples during cutting was used.

Considering that almost all stone materials are non-conductive in temperature measurements, the method of artificial thermocouple is applied. One electrode is a steel foil and a constantan foil is used as the second electrode. The thickness of the foil leaves is from 6...20 microns, and the distance between them is of the order of 40 microns or less, depending on the thickness of the capacitor paper, which isolates them from each other. In order for a stable formation of a thermal junction to occur during cutting, the thermoelectrodes are annealed at a temperature 1000...1100°C for 30 min. The ends are brought to the surface and welded together during cutting. As a result, a thermal spike with a thickness of 2...3 microns appears and, therefore, a thermocouple of the "iron-constantan" type is formed, which has a very low inertia. Since most CBN discs are made on a metal basis, the closure of the lobes of such a thermocouple can be carried out directly by the wheel. In addition, you can use a single lobe thermocouple of the thermo-lobe type – a cutting metal wheel. In this case, due to the simplification of the design of the thermocouple, the signal pickup circuit is complicated for which rotating current collectors or radio channel ones can be used, which is not difficult in modern conditions.

Such a thermocouple is calibrated according to the reference method described in [12].

The test sample consists of two halves (Fig 3). The plane of the connector is located normal to the ground surface and normal to the trajectory of the heat source (cut surface) Between the thermoelectrodes there is an insulator (capacitor paper) with a thermal conductivity of no more than  $0.1 \text{ W/m}^2 \times \text{deg}$ .



**Fig 3.** a) 1, 2 – halves of a stone specimen, 3, 4 – thermoelectrode foil, 5-insulator;  
 b) 1, 2 – halves of a stone specimen, 3 – thermoelectrode foil

Thermoelectrodes in the form of a foil are brought out to the surface of the sample and, when cut, are connected to each other, forming a thermal junction, the thickness of which is 5-10 microns, thus forming a low-inertia microthermocouple, which provides the following characteristics of the measuring system:

- sensitivity - from 1 to 150 mV/100°C;
- frequency range 0 ÷ 2 MHz;
- the duration of the transmitted pulse from 1 μs.

The signal amplified in voltage by 2000 times is fed to an analog-to-digital converter with a frequency of at least 200 MHz, where it is converted into a digital code, and then fed to a computer. A conversion takes place on the computer, as a result of which a thermal impulse and the maximum digital value of the temperature in degrees Celsius are recorded on the display.

A heat source with the same intensity acts on the cut surface of the stone and the end face of the embedded thermocouple in the cutting zone, and the heat dissipation due to the inequality between the thermal activity coefficients of the stone being cut and the embedded thermocouple is different and leads to a corresponding difference in contact temperatures in the grinding zone of the processed material and the embedded thermocouple. The input signal of such a thermocouple does not correspond to either the contact temperature of the cut stone or the embedded thermocouple.

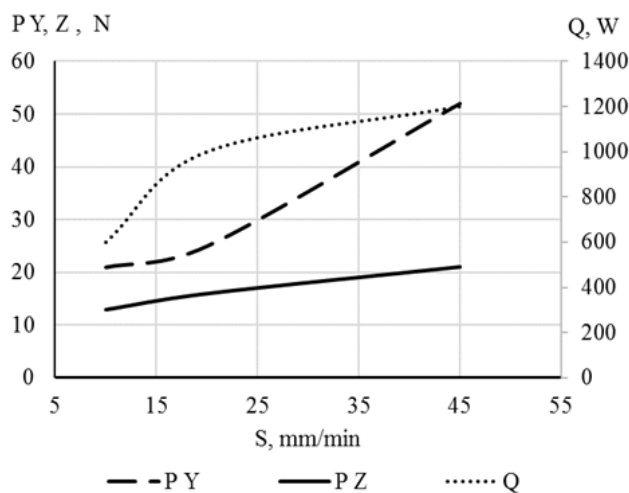
Using the data [17], we determine the true temperature of the circle by the expression:

$$T_{\kappa} = T_n \frac{\varepsilon_n + \varepsilon_m}{2 \cdot \varepsilon_n}, \quad (1)$$

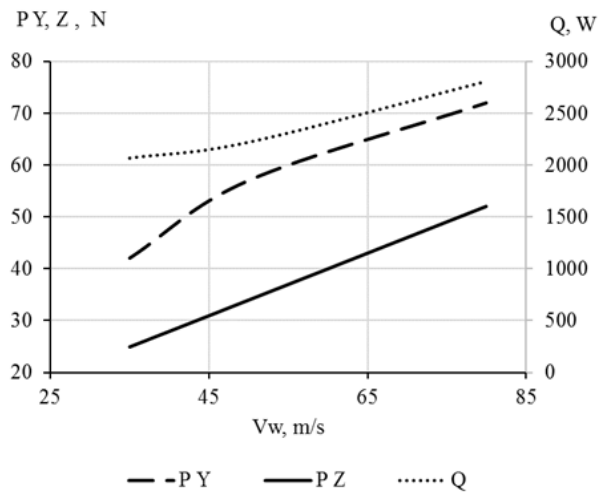
where  $\varepsilon_n$  and  $\varepsilon_m$ , respectively, are the coefficients of thermal activity of the stone and micro-solder,  $\text{j/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C s}^{0.5}$ :  $\varepsilon_n$  – coefficient of thermal activity of the stone;  $\varepsilon_m$  – coefficient of thermal activity of thermal junction.

In the case of using the circuit according to Fig. 3,b, a thermocouple "thermoelectrode foil – metal circle" is created during cutting. This scheme requires careful calibration of such a thermocouple and a more complex current collector rotating device.

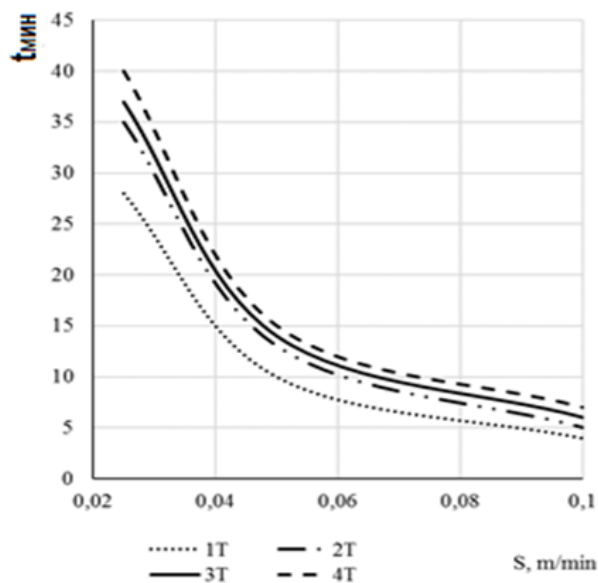
The results of measurements of forces, power, cutting temperature and maximum cutting length are shown in Fig. 4, 5, 6, 7 [13].



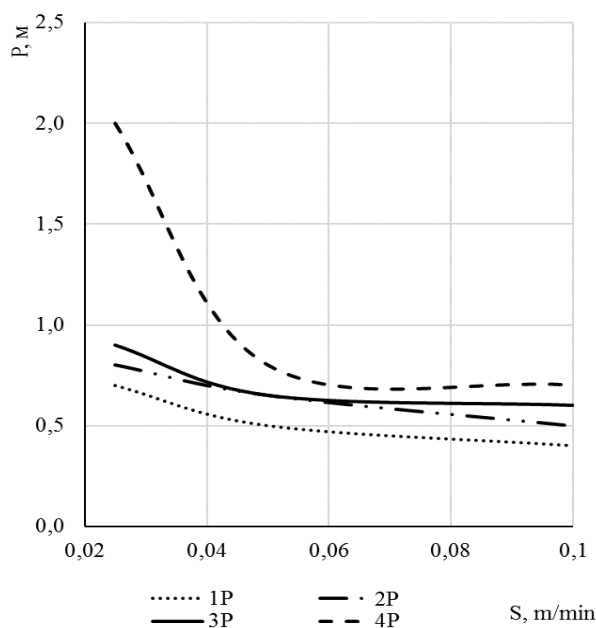
**Fig. 4.** Dependence of cutting forces  $P_y$ ,  $P_z$  and cutting power  $N$  versus minute feed. Wheel LO 250/160 100%



**Fig. 5.** Dependence of forces  $P_y$ ,  $P_z$  and cutting power  $N$  versus speed of a wheel. Wheel LO 250/160 100%



**Fig. 6.** Dependence of the lap time to heating  $600^\circ\text{C}$   
1T – without cooling; 2T – with cooling Ranque-Hilsch tube; 3T – ejector cooling; 4T – pressure jet



**Fig. 7.** Dependence of the maximum cutting length of a wheel up to heating  $600^\circ\text{C}$   
1P – without cooling; 2P – with cooling Ranque-Hilsch tube; 3P – ejector cooling; 4P – pressure jet

As can be seen from the graphs given, the force  $P_Y$  can be in the region of 52...72N, depending on the minute feed and the cutting speed. The cutting force  $P_z$  has values from 45 to 20N, also depending on the cutting modes. Accordingly, the values of thermal power have the following values: 1200...2800W.

The temperature to which the CBN wheel is heated for a cutting wheel on a metal base is a limiting factor in processing, since when heated to a temperature of 600°C, the strength of the wheel decreases by half, which can cause its rupture under the action of centrifugal forces, as well as loss of stability and jamming during cutting.

In the present study, the wheel temperature was measured after one minute of continuous operation. The temperature measuring system allowed the temperature to be monitored continuously during cutting.

It should be noted that in this case we are talking about the contact temperature. In order to get the temperature of the circle, it is necessary to take into account the expression 1.

When cutting with CBN wheel without cooling, the time of its heating to a temperature of 600°C is in the range from 4 to 28 minutes, depending on the value of the minute feed. It should be noted that the longest cut length during heating to the critical temperature occurs at the minimum feed.

Cooling of the cutting wheel with a Ranque-Hilsch tube is shown in Fig. 5, curve 2.

Cooling occurs as follows.

Air cooled to -40°C leaves the "cold shoulder" of the Rank-Hilsch tube. The Rank-Hilsch tube is a cheap and small-sized device that, when connected to a compressor, creates an air flow with a temperature of -40°C. The use of other cooling media, such as liquid nitrogen or solid carbon dioxide, complicates and increases the cost of the cooling process.

For industrial use, this temperature reduction is simple and minimally energy intensive.

The vortex effect of a tube (Rank-Hilsch effect) is the effect of the separation of a gas or liquid into two fractions when twisted in a cylindrical or conical chamber (Fig. 8). A swirling flow with a high temperature (+110°C) is formed at the periphery, and a cooled flow swirling in the opposite direction (-40°C) in the center (Fig. 6). An explanation of this effect is given in the sources [14, 15].

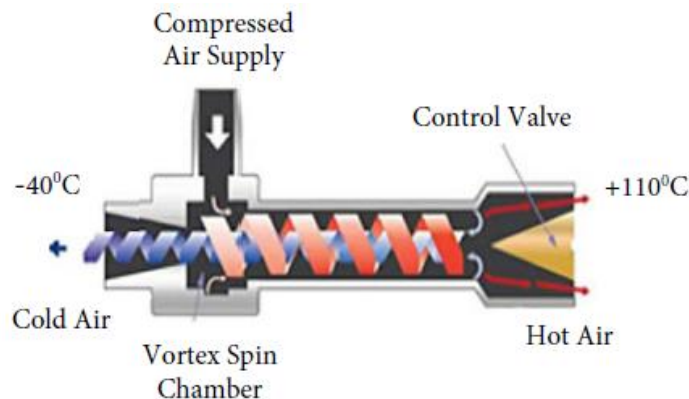


Fig. 8. Ranque-Hilsch tube [14]

The tube is connected to the pneumatic system of the workshop (pressure 6 kg/cm<sup>2</sup>), as a result of which cold and hot air can be obtained without any additional devices.

A jet of cold air is supplied tangentially to the wheel, thus replacing the "warm" boundary layer. Contact heat exchange is carried out between the wheel and the new boundary layer. As can be seen from Fig. 6, curve 2, the time of the heat resistance of the wheel increases to 35 min and the length of the cut increases to 0.8m. This increase has large values in the region of small feeds.

Ejector cooling of the cutting zone has almost the same effect as cooling with a Ranque-Hilsch tube.

The use of jet-pressure cooling - curve 4 provides a sharp increase in both the thermal resistance and the length of the cut almost 2 times compared with the previous cutting methods.

## 4 RESULTS

As a result of the study of the process of cutting stone materials with wheels of CBN, it was established:

The values of the component of the cutting force  $P_Y$ , depending on the processing modes, can reach values of the order of 70N. The values of the component of the cutting force  $P_Z$ , depending on the processing modes, can reach values of 45N. The cutting power can be 2800W.

When compared with cutting with diamond wheels, these values are about 10% higher.

The temperature resistance of the wheel (heating time of the wheel up to 600°C) when cutting dry is maximum 28 minutes, when grinding with cooling of the cutting zone with negative temperature air from a Ranque-Hilsch tube, the temperature resistance is 35 minutes, with ejector cooling of sprayed coolant 37 minutes and with jet-pressure cooling it is 40 minutes. The maximum cutting length is respectively 0.7; 0.8; 0.9 and 2m.

The cutting power is 600...2800W.

## 5 CONCLUSIONS

Cutting stone building materials with CBN wheels allows good cutting results without cooling. When using means of cooling the working area, the thermal resistance of the wheel can reach 40 minutes, which allows you to make long cuts without interruption.

Despite the fact that CBN wheels are somewhat more expensive than diamond wheels, they can be recommended for use since the wear of these wheels is much lower than diamond wheels, and the characteristics of the cutting process differ slightly.

## References

1. Starkov, V. (2013). Vysokoporistye krugi iz kubicheskogo nitrída bora dlya shlifovaniya bez ohlazhdeniya. [Highly porous cubic boron nitride wheels for dry grinding]. *Sverhtverdye materialy*. 5. 56–62. [in Russian].
2. Kremen, Z. (2003). A new generation of high-porous vitrified CBN wheels. *Industrial Diamond Review*. 63(4). 53–56.
3. Starkov, V. (2007). *Shlifovanie vysokoporistymi krugami*. [Grinding with highly porous discs]. M.: Mashinostroenie. [in Russian].
4. Kremen, Z., Zubarev, Yu., Lebedev, A. (2009). Vysokoporistye krugi iz el'bora i ih primeneniye pri shlifovanii vysokoplastichnyh splavov. [Highly porous CBN wheels and their use in grinding high-plastic alloys]. *Metalloobrabotka*. 3 (51). 2–5. [in Russian].
5. Soler, Ya., Nguen, Ch. (2015). Ocenka shlifuemosti alyuminievyh splavov 1933t2 i V95ochT2 vysokoporistym krugom Norton 37c46k12vp po shagovym parametram mikronerovnostej. [The assessment sandability aluminum alloys 1933T2 and V95ochT2 highly porous wheel for Norton 37C46K12VP steps parameters microughnesses]. *International Scientific Review*. 2 (3). 2015. 12–18. [in Russian].
6. Starkov, V. K., Ryabcev, S. A., Polkanov, E. G. (2004). Razrabotka i primeneniye vysokoporistyh shlifoval'nyh krugov iz kubicheskogo nitrída bora. [Development and Application of Highly Porous Cubic Boron Nitride Grinding Wheels]. *Tekhnologiya mashinostroeniya*. 4. 26–33. [in Russian].
7. R. Cai, W. B. Rowe, Michael N. Morgan (2003). The Effect of Porosity on the Grinding Performance of Vitrified CBN Wheels. *Key Engineering Materials*. V. 238-239. 295–300.

8. Zhenzhen, C., Jiuhua, X., Wenfeng, D., Changyu, M. (2014). Grinding Performance Evaluation of Porous Composite-bonded CBN Wheels for Inconel 718. *Chinese Journal of Aeronautics*. 27 (4). 1022–1029. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cja.2014.03.015>.
9. Larshin, V. P., Lishchenko, N. V., Ryabchenko, S. V., Nezhebovskiy, V. V., Sereda, G. V. (2016). Profil'noe shlifovanie zubchatykh kolyos vysokoporistymi abrazivnymi krugami. [Profile grinding of gear wheels with highly porous abrasive wheels]. *Oborudovanie i instrument*. 5 (190). 20–23. [in Russian].
10. Usov, A. V., Sikirash, Yu. Ye. (2020). Modelyuvannya teplofizychnykh procesiv pry` mexanichnij obrobci vy`robiv iz strukturno neodnorodnykh materialiv. [Modeling of thermal processes in the mechanical processing of virobiv iz structurally non-universal materials]. *Applied questions of mathematical modelling*. 3. 2.1. 280–289. doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.26. [in Ukrainian].
11. Tonkonogyi, V., Rybak, O. (2019). Modelling and experimental research of the heat transfer processes while grinding workpieces with plasma coatings. *Cutting & tools in technological systems*. 90. 100-108. <http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/43881>.
12. Lykov, A. V. (1967). *Teoriya teploprovodnosti: uch. posobie*. [Thermal Conductivity Theory: A Study Guide]. M.: Vysshaya shkola. [in Russian].
13. Bepalova, A., Lebedev, V., Tonkonogyi, V., Morozov, Y., Frolenkova, O. (2019). Cutting stone building materials and ceramic tiles with diamond disc. Proceedings of the 2nd International Conference in Design, Simulation, Manufacturing: *The Innovation Exchang*. DSMIE-2019. 510–521.
14. Horobryh, M. A., Klement'ev, V. A. (2012). Vihrevoj effekt Ranka-Hilsha. Vihrevaya truba. [Vortex Ranque-Hilsch effect. Vortex tube]. *Molodoj uchenyj*. 6. 54–55. [in Russian].
15. Korkodinov, Ya. A., Hurmatullin, O. G. (2012). Primenenie effekta Ranka-Hilsha. [Applying the Rank-Hilsch effect] Perm'. *Vestnik Permskogo Nacional'nogo Issledovatel'skogo Politehnicheskogo Universiteta*. 14(4). 42–54. [in Russian].

## Література

1. Старков В. Высокопористые круги из кубического нитрида бора для шлифования без охлаждения. Сверхтвердые материалы, 2013. №5. С. 56–62.
2. Kremen Z. A new generation of high-porous vitrified CBN wheels. *Industrial Diamond Review* 4 2003. P. 53-56.
3. Старков В. Шлифование высокопористыми кругами. М.: Машиностроение, 2007. 688 с.
4. Кремень З., Зубарев Ю., Лебедев А. Высокопористые круги из эльбора и их применение при шлифовании высокопластичных сплавов. *Металлообработка*, 2009. №3 (51). С. 2-5
5. Солер Я., Нгуен Ч. Оценка шлифуемости алюминиевых сплавов 1933т2 и В95очТ2 высокопористым кругом Norton 37с46к12вр по шаговым параметрам микронеровностей. *International scientific review*, 2015. №2 (3). С. 12-18.
6. Старков В.К., Рябцев С.А., Полканов Е.Г. Разработка и применение высокопористых шлифовальных кругов из кубического нитрида бора. *Технология машиностроения*, 2004. №4. С. 26-33.
7. R. Cai et al., "The Effect of Porosity on the Grinding Performance of Vitrified CBN Wheels", *Key Engineering Materials*. 2003. V. 238-239. pp. 295-300.
8. Zhenzhen C., Jiuhua X., Wenfeng D., Changyu M. Grinding Performance Evaluation of Porous Composite-bonded CBN Wheels for Inconel 718. 2014. *Chinese Journal of Aeronautics*. 27 (4). 1022-1029. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cja.2014.03.015>.
9. Ларшин В. П., Лищенко Н. В., Рябченко С. В., Нежебовский В. В., Серeda Г. В.. Профильное шлифование зубчатых колёс высокопористыми абразивными кругами. *Оборудование и инструмент*, 2016. №5 (190). С. 20-23.
10. Усов А.В. Сікіраш Ю.Є. Моделювання теплофізичних процесів при механічній обробці виробів із структурно неоднорідних матеріалів. *Applied questions of mathematical modeling*, 2020. №3. 2.1 С. 280-289. DOI:<https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-1.26>.
11. Tonkonogyi V., Rybak O. Modelling and experimental research of the heat transfer processes while grinding workpieces with plasma coatings. *Cutting & tools in technological systems*. 2019. No 90. P. 100-108. <http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/43881>.

12. Лыков А.В. Теория теплопроводности: уч. пособие. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
13. Bepalova A., Lebedev V., Tonkonogiy V., Morozov Y., Frolenkova O. Cutting stone building materials and ceramic tiles with diamond disc. Proceedings of the 2nd International Conference in Design, Simulation, Manufacturing: The Innovation Exchange. DSMIE-2019. Lutsk. June 11–14. 2019. P. 510-521.
14. Хоробрых М.А., Клементьев В.А. Вихревой эффект Ранка-Хилша. Вихревая труба. Молодой ученый, 2012. №6. С. 54–55.
15. Коркодинов Я.А., Хурматуллин О.Г. Применение эффекта Ранка-Хилша. Вестник пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. Пермь, 2012. №.14(4). С.42-54.

**Bepalova Alla**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Doctor of Technical Science., Associate Professor  
Didrihsona str., 4 Odessa, Ukraine, 65029  
bepalova.a.v.2015@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-3713-0610

**Dashkovskaya Olha**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Ph.D., Associate Professor  
Didrihsona str., 4 Odessa, Ukraine, 65029  
dop.od@ukr.net  
ORCID: 0000-0002-9980-023X

**Faizulyna Oksana**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Ph.D., Associate Professor  
Didrihsona str., 4 Odessa, Ukraine, 65029  
narenko@ukr.net  
ORCID: 0000-0002-1151-4467

**Lebedev Volodymyr**

Odessa Polytechnic National University  
Doctor of Technical Science, Professor  
Shevchenko av., 1, Odessa, Ukraine, 65044  
wlebedev29@rambler.ru  
ORCID: 0000-0003-891-9708

**Chumachenko Tatiana**

Odessa Polytechnic National University  
Ph.D., Associate Professor  
Shevchenko av., 1, Odessa, Ukraine, 65044  
chumachenko-1981.28@ukr.net  
ORCID: 0000-0001-6149-4786

*For references:*

Bepalova A., Dashkovskaya O., Faizulyna O., Lebedev V. Chumachenko T. (2021). Cutting stone building materials with cut wheels of cubic boron nitride. Mechanics and Mathematical Methods. 3 (2). 52–63.

*Для посилань:*

Беспалова А. В., Дашковська О. П., Файзуліна О. А., Лебедев В. Г., Чумаченко Т. В. Розрізання кам'яних будівельних матеріалів відрізними кругами з кубічного нітриду бору. Механіка та математичні методи, 2021. Том 3. Вип. 2. С. 52–63.



UDC 624.012.45

## EXPERIMENTAL STUDIES OF DEFORMABILITY AND FRACTURE RESISTANCE OF AIRFIELD SLABS ON MODELS

I. Korneieva<sup>1</sup>, D. Kirichenko<sup>1</sup>, O. Shylyayev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odesa state academy of civil engineering and architecture*

**Abstract.** The results of experimental studies of deformability and crack resistance of models of aerodrome slabs made of reinforced concrete and steel-fiber concrete, made on the basis of serial slab PAG-18 taking into account the scale factor, are presented. Two series of slabs were tested - two models of reinforced concrete and two models with one-percent dispersed reinforcement. The load was applied in steps, the instrument readings were recorded twice at each step and the crack opening width was measured starting from the moment of the first crack formation. Dial gauges, deflectometer and microscope MPB-3 were used as measuring instruments. In accordance with the normative documents acting in Ukraine, one of two possible loading schemes was considered - with the loading by the concentrated force applied in the span part of a plate which had a hinged support along its short sides. Plate models were tested on a specially made stand. Each load step ended with a five-minute dwell time, at the beginning and the end of which readings were taken on the measuring instruments. The deformations at the same levels were measured with dial gauges. The process of crack formation was observed with a Brinell tube in the places of the greatest crack opening.

Breaking load for fiber concrete slab was 1.52 times higher than for reinforced concrete slab, and the moment of cracking initiation was 1.22 times higher. The process of cracking in the fiber concrete slab begins at higher loads than in the reinforced concrete slab. The initial crack opening width of the slabs is almost the same, and the final crack opening width of all the cracks in the fiber concrete slab is significantly lower than in the reinforced concrete slab.

The deformations in steel-fiber concrete slabs when the load is applied in the span, both for compressed and stretched fibers, are higher than in reinforced concrete slabs. The experimental studies indicate that dispersed reinforcement of airfield slabs with steel fiber leads to their higher crack resistance.

**Keywords:** reinforced concrete, fiber concrete, airfield slab, deformability, crack resistance, experimental studies

## ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕФОРМАТИВНОСТІ І ТРИЩИНІСТІЙКОСТІ АЕРОДРОМНИХ ПЛИТ НА МОДЕЛЯХ

Корнеєва І. Б.<sup>1</sup>, Кіріченко Д. О.<sup>1</sup>, Шиліяєв О. С.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація.** Наведено результати експериментальних досліджень деформативності та тріщиностійкості моделей аеродромних плит з залізобетону та сталевібробетону, виготовлених на основі серійної плити ПАГ-18 з огляду на масштабний фактор. Випробувано 2 серії плит – дві моделі із залізобетону та дві моделі з одновідсотковим дисперсним армуванням. Навантаження прикладалося ступенями, на кожній ступені двічі фіксувалися показання приладів, а також, починаючи з моменту утворення першої тріщини, вимірювалася ширина розкриття тріщин. В якості вимірювальних приладів використовувалися індикатори годинникового типу, прогиноміри та мікроскоп МПБ-3. Відповідно до діючих в Україні нормативних документів, розглянуто одну з двох можливих схем навантаження – при навантаженні зосередженою силою, прикладеною в прогонової частини плити, яка мала шарнірне обпирання за короткими сторонами. Моделі плит випробовувалися на спеціально виготовленому стенді. Кожна ступінь навантаження закінчувалася п'ятихвилинною

виримкою, на початку і в кінці якої знімалися показання на вимірювальних приладах. Деформації на тих же рівнях вимірювали за допомогою індикатора годинникового типу. Процес тріщиноутворення спостерігався за допомогою трубки Брінелля у місцях найбільшого розкриття тріщин.

Руйнівне навантаження для фібробетонної плити виявилось в 1,52 рази більше, ніж для залізобетонної, а момент початку тріщиноутворення – в 1,22 рази. Процес тріщиноутворення у фібробетонній плиті починається при більш високих навантаженнях, ніж у залізобетонній. Початкова ширина розкриття тріщин у плитах практично однакова, а кінцева ширина розкриття всіх тріщин у фібробетонній плиті істотно нижче, ніж у залізобетонній.

Деформації в плитах із сталеві фібробетону при додатку навантаження в прогонової частини, як для стиснених, так і для розтягнутих волокон вище, ніж у залізобетонній плити. Проведені експериментальні дослідження свідчать про те, що дисперсне армування аеродромних плит сталевую фіброю призводить до їх більш високої тріщиностійкості.

**Ключові слова:** залізобетон, фібробетон, аеродромна плита, деформативність, тріщиностійкість, експериментальні дослідження.

## 1 INTRODUCTION

Airfield slabs PAG are designed to form both temporary and permanent coatings for airfields and roads. Currently, such slabs are widely used for the arrangement of air transport runways, roads located on construction sites, bases for cranes and other industrial mechanisms and equipment. Being highly resistant to aggressive environments, the plates are widely used for arrangement of port areas, are a reliable coating for construction areas where special machinery on crawler tracks is actively moving. PAG slabs have proven themselves in the most adverse hydrogeological and climatic conditions, in regions where the temperature drops to  $- (50-60) \text{ C}^\circ$ .

Structurally, the slabs are a solid reinforced concrete product of flat rectangular shape. The upper surface of the slabs is corrugated, which provides an increased coefficient of traction with the wheels of moving road and air transport. The construction of the boards includes special end caps that allow to weld the boards together. Depending on the thickness of the plate elements, which can be 140, 180 and 200 mm, we distinguish plates PAG-14, PAG-18, PAG-20.

Such slabs can be used repeatedly, which creates a significant economic effect.

Airfield slabs have a number of unique properties: high strength, frost resistance, low abrasion, high durability and crack resistance, seismic stability, etc.

Among the many mentioned factors determining the efficiency and durability of PAG slabs, the deformability and cracking resistance play the most important role, the study of which is given much attention during experimental studies. This paper describes the results of the experiment, which was conducted in the scientific laboratory of the Department of Structural Mechanics of the Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture - deformability and crack resistance of models of airfield slab PAG-18 under the span scheme of loading - one of the two schemes of loading, recommended by the acting in Ukraine norms [1, 2].

## 2 LITERATURE ANALYSIS AND PROBLEM FORMULATION

Most of the publications related to the calculations of airfield and road slabs, the authors proceed from the calculation scheme of the slab on a deformable elastic base [3 - 6]. The calculation results essentially depend on the accepted models of the slab, the base, and the model of their interaction.

The slab model is usually characterized by Kirchhoff hypotheses. In the vast majority of publications, the model of the interaction between the slab and the base is assumed to be bilateral: the motions of the contact points of the slab and the base are assumed to be the same. Models of the base are characterized by a variety. Currently, a significant number of such models are proposed, reflecting in different ways the actual behavior of the soil. The following schemes are most widely used: models with one and two bedding coefficients, models of elastic homogeneous isotropic half-space and half-plane, various combinations of these models. In this case, it is believed that since the pavement is built under a powerful artificial foundation, it experiences only elastic deformations, and the calculation of the pavement is made on this basis.

The problem of deformability and crack resistance of airfield slabs is not reflected in the domestic literature. If we talk about the publications of foreign authors, it should be noted the works [7 - 10], where the main attention is paid to the issues of crack resistance.

Despite the use of the slab model on an elastic base in theoretical studies of the stress state of airfield slabs, the experimental studies in the normative documents of most countries consider two loading schemes - when the load is a concentrated force applied in the middle of

the span, and when the load is a concentrated force applied on the console. In both cases, the slab has a hinged support. This approach, in particular, is reflected in the aforementioned Norms of Ukraine [1, 2] and in GOST 25912-2015 [11], the standard which applies to prestressed reinforced concrete slabs made of heavy concrete and designed for the construction of precast fast-building pavements of airfields, roads, storage areas, including those recommended for use in harsh conditions of temperature and humidity cold climate and permafrost soils, and is valid in 7 countries of the former USSR.

### 3 RESEARCH GOAL AND OBJECTIVES

The purpose of this work is to experimentally investigate the deformability and crack resistance of airfield slab models made of reinforced concrete and steel-fiber concrete under the span loading scheme.

To achieve this goal, it was necessary to solve the following tasks:

1. Analyze modern methods of studying the deformability and fracture resistance of airfield slabs.
2. Develop a design and produce models of an airfield slab based on the serial slab PAG-18.
3. Develop a test stand design.
4. Perform experimental studies of the deformability and fracture resistance of airfield slab models.
5. Perform processing and analysis of the experimental data obtained.

### 4 RESEARCH RESULTSS

Model of an airfield slab was made taking into account the scale factor on the basis of a serial slab PAG-18. The specimens are reinforced with a spatial framework consisting of two meshes (Fig. 1). For reinforced concrete and steel-fiber-concrete slabs, 5 mm diameter reinforcement of Vr-1 type was used.

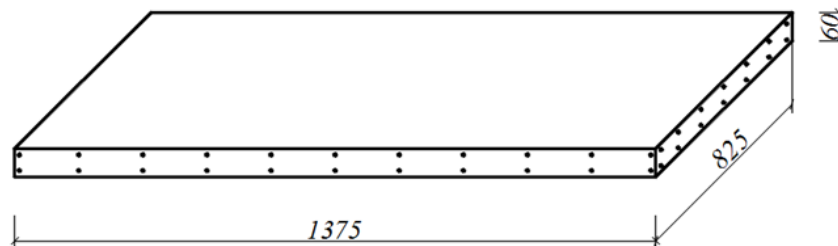


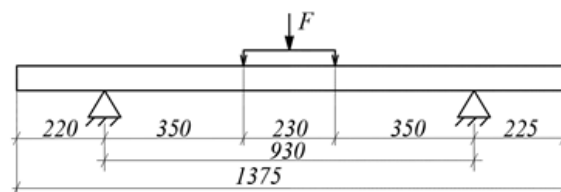
Fig. 1. General view of the slab

To conduct tests, a stand is made, the frame of which is four supporting pillars connected in pairs by beams. The model of the slab rests on the beams. The load was applied along the width of the slab in steps - 0.05 of the destructive load, along two concentrated vertical strips. Each stage of the load ended with a five-minute dwell time, at the beginning and end of which readings were taken on the measuring instruments. All tests were performed using a 100 kN jack and a 5-t dynamometer. The lower plane of the jack transmits the load to the two-level cross-beam system, and through it the load is distributed to the plate (Fig. 2).



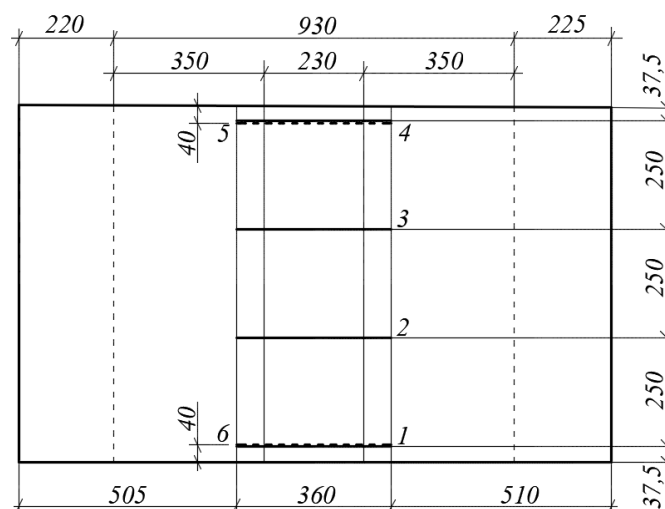
**Fig. 2.** Test stand

The implemented load application diagram is shown in Fig. 3.



**Fig. 3.** Load application scheme

On the upper and lower surface of the plate, there were dial gauges with a base of 36 cm, the first four - in the compressed zone, and 5 and 6 - in the tensile zone (Fig. 4). The load cells were glued on the axis of symmetry under 2 and 4 indicators.



**Fig. 4.** Indicator layout

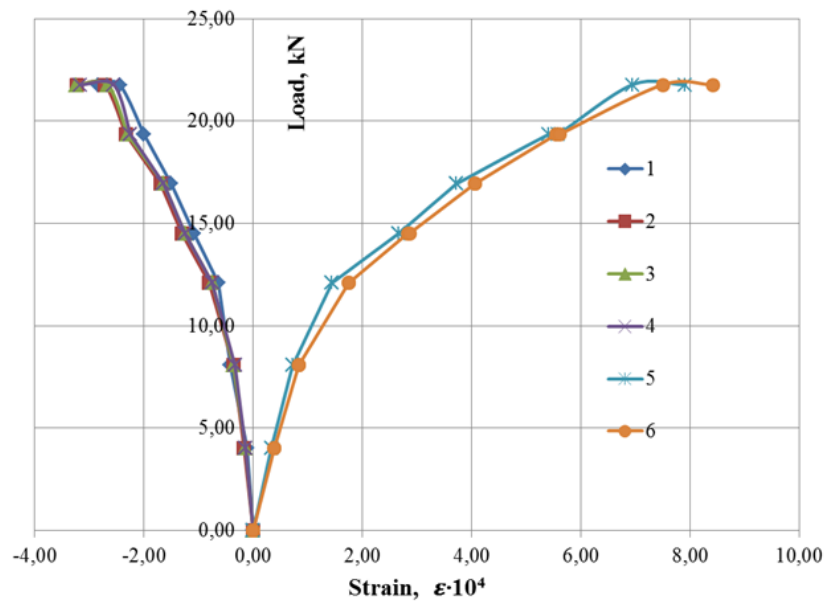
The main results of the tests are shown in Table 1.

**Table 1**

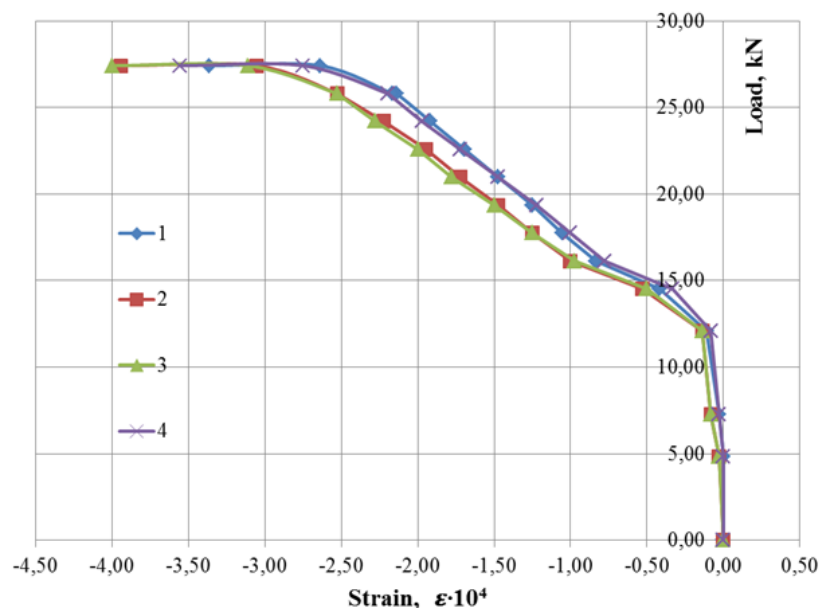
Test results.

Slab model	Start of cracking		Bearing capacity, kN	Limit moment at failure, kNm
	Load, kN	Moment, kNm		
Reinforced concrete	12,10	2,12	21,77	3,81
Fiber concrete	14,52	2,54	27,42	4,80

On the basis of indicator readings, plots of the dependence of the relative longitudinal strain on the load in reinforced concrete (Fig. 5) and fiber concrete (Fig. 6) slabs according to indicator readings were plotted.

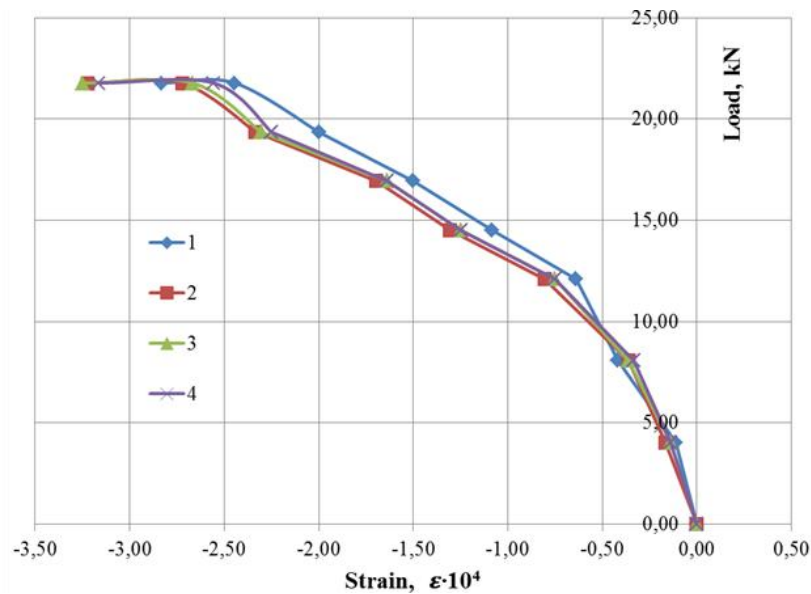


**Fig. 5.** Relative longitudinal deformation in the reinforced concrete slab according to indicator readings

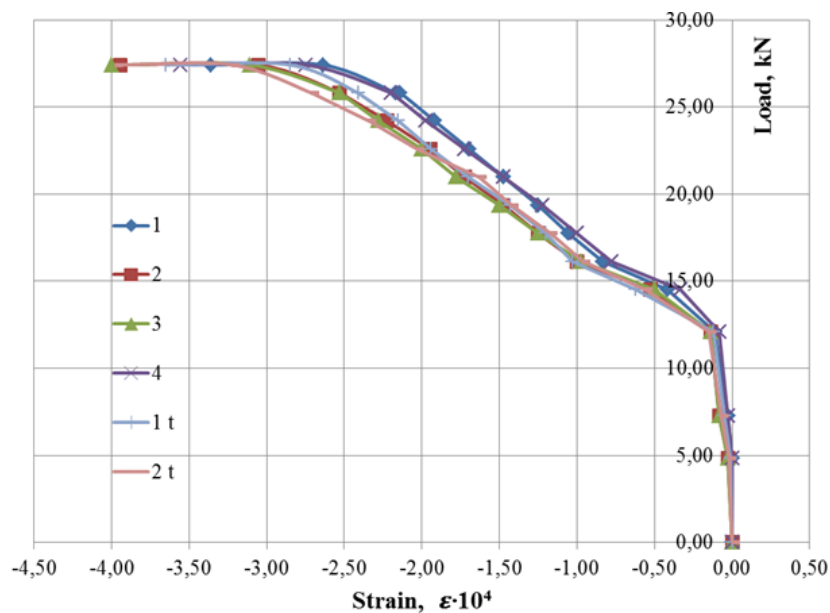


**Fig. 6.** Relative longitudinal deformation in the fiber concrete slab according to indicator readings

Plots of the dependence of the relative strain on the load in the compressed zone of reinforced concrete and fiber concrete slabs are shown in Fig. 7, 8, respectively.



**Fig. 7.** Deformations in the compressed zone of the reinforced concrete slab according to indicator readings



**Fig. 8.** Deformations in the compressed zone of the fiber concrete slab according to the readings of indicators and strain gauges

Using the readings of two deflectometers, we plotted the deflections versus load for reinforced concrete (Fig. 9) and fiber concrete (Fig. 10) slabs, which have the same character as the deformation plots.

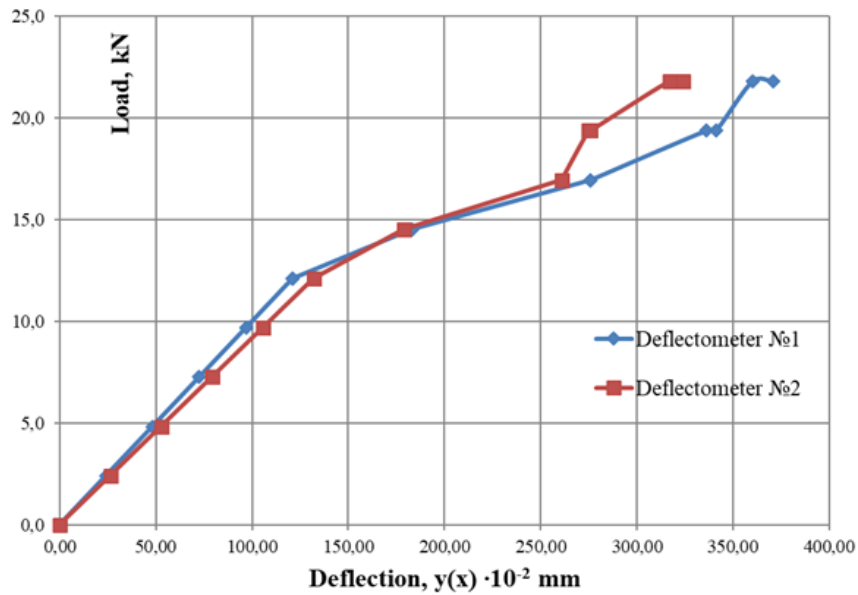


Fig. 9. Deflections in a reinforced concrete slab

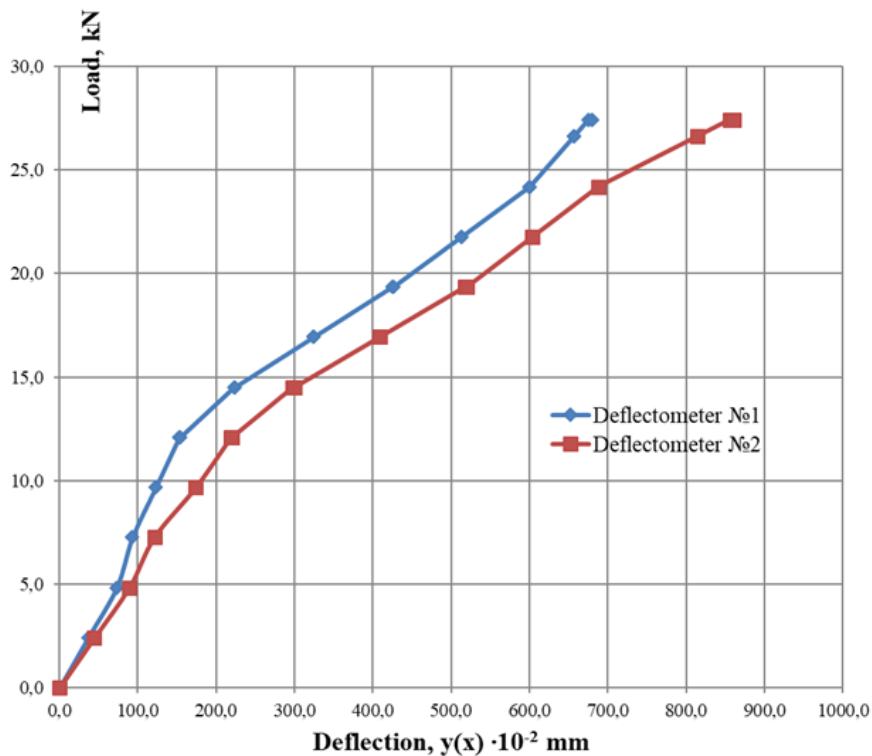


Fig. 10. Deflections in the fiber concrete slab

## 5 DISCUSSION OF THE RESULTS OF THE STUDY

Table 2 shows the sequence of crack formation in reinforced concrete and fiber concrete slabs with increasing load, and Table 3 shows the crack opening width.



**Table 2**

Sequence of crack formation in the slabs with increasing load.

№ of load step		Load, kN		№ of crack		Minimum height of compressed zone, sm	
RC slab	SFC slab	RC slab	SFC slab	RC slab	SFC slab	RC slab	SFC slab
0	0	0,00					
1	1	4,03					
2	2	8,06	7,26				
3	3	12,10	12,10	1		18	
4	4	14,52	14,52	2, 3	1	10	22
5	5	16,94	16,13				
6	6	19,35	17,74		2, 3		15
7	7	21,77	19,35				
	8	13,00	20,97				
	9	14,00	22,58				
	10	15,00	24,19				
	11	16,00	25,81				
	12	17,99	27,42				

**Table 3**

Crack opening width with increasing load.

№ of crack		Bending moment, kNm		Initial crack opening width, mm		End crack opening width, mm	
RC slab	SFC slab	RC slab	SFC slab	RC slab	SFC slab	RC slab	SFC slab
1	1	2,12	2,54	0,05	0,05	0,7	0,3
2	2	2,54	3,10	0,1	0,1	0,2	0,15
3	3	2,54	3,10	0,1	0,05	0,3	0,1

Before the first crack appears, the deflection of the reinforced concrete slab is 19.6 % for the reinforced concrete slab and 11.0 % for the fiber concrete slab from that recorded at the end of the tests.

The breaking load for the fiber concrete slab was 1.52 times greater than for the reinforced concrete slab, and the moment of the beginning of cracking was 1.22 times greater.

## 6 CONCLUSIONS

As follows from the given results, the cracking process in the fiber concrete slab begins at higher loads than in the reinforced concrete slab. The initial crack opening width in the slabs is almost the same, and the final crack opening width of all the cracks in the fiber concrete slab is significantly lower than in the reinforced concrete slab.

The deformations in steel fiber concrete slabs when the load is applied in the span, both for compressed and stretched fibers, are higher than in reinforced concrete slabs.

According to the given results, it can be seen that at the initial stages of load application in the span of the plates, the deflections increase linearly. The curves get non-linear for aerodrome slabs of reinforced concrete when the load reaches the level of 10÷25 kN, for steel-fiber-concrete slabs - 15÷30 kN. In reinforced concrete slabs the non-linearity starts a little earlier and is more clearly expressed.

Thus, the experimental studies indicate that dispersed reinforcement of airfield slabs with steel fiber leads to their higher crack resistance.

## References

1. DSTU B. V.2.6–137:2010 (HOST 25912.2–91. MOD). (2001). *Konstruksii budynkiv i sporud. Plyty zalizobetonni poperedno napruzheni PAH–18 dlia aerodromnoho pokryttia. Konstruktsiia*. [Constructions of houses and buildings. Reinforced concrete slabs prestressed PAG-18 for airfield pavement. Construction]. [Chynnyi vid 2011–07–01]. TOV NTK "Budstandart". (Informatsiia ta dokumentatsiia). [in Ukrainian].
2. DSTU B.V.2.6-122:2010. (2011). *Plyty zalizobetonni z nenapruzhenoiu armaturoiu dlia pokryttia miskykh dorih*. [Reinforced concrete slabs with unstressed reinforcement to cover city roads]. [chynnyi vid 2011-07-01]. K.: Minrehionbud Ukrainy. [in Ukrainian].
3. Dolgachev, M. V., Lovcov, A. D. (2012). Modelirovanie vzaimodejstviya plastiny i grunta pri ego vypuchivanii i prosadke. [Modeling the interaction of a plate and soil during buckling and subsidence]. *Vestnik Tihookeanskogo gosudarstvennogo universiteta*. 1(24). 131–139. [in Russian].
4. Saburenkova, V. A., Stepushin, A. P. (2015). *Metody rascheta konstrukcij aerodromnyh pokrytij: ucheb. posobie*. [Methods for calculating the structures of aerodrome pavements: textbook. allowance]. M.: MADI. [in Russian].
5. Barmekova, E. V. (2019). Strength analysis of variable rigidity slabs on elastic support with variable subgrade ratio. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta*. Journal of Construction and Architecture. 1. 201–208. doi.org/10.31675/1607-1859-2019-21-1-201-208.
6. Rodchenko, O. (2018). Computer technologies for concrete airfield pavement design. *Aviation*. 21(3). 111–117. doi:10.3846/16487788.2017.1379439.
7. Caliendo, C., Parisi, A. (2010). Stress-Prediction Model for Airport Pavements with Jointed Concrete Slabs. *Journal of Transportation Engineering*. 136(7). 664–677. doi:10.1061/(asce)te.1943-5436.0000151
8. Mehta, Y., Cleary, D., Ali, A. W. (2017). Field cracking performance of airfield rigid pavements. *Journal of Traffic and Transportation Engineering (English Edition)*. 4(4). 380–387. doi:10.1016/j.jtte.2017.05.010
9. Smith, K. D., Roesler, J. R. (2004). Review of Fatigue Models for Concrete Airfield Pavement Design. *Airfield Pavements*. doi:10.1061/40711(141)16
10. McNerney, M. T. Kim, J., Bescher, E. P. (2017). Construction, Instrumentation, and Performance of a Double Sized Slab Designed for Airport Runways. *Airfield and Highway Pavements 2017: Airfield Pavement Technology and Safety*.
11. HOST 25912-2015. (2015). *Plity zhelezobetonnye predvaritel'no napryazhennye dlya aerodromnyh pokrytij*. Tekhnicheskie usloviya. [Reinforced concrete slabs prestressed for airfield pavements. Specifications]. № 25912-2015. [in Russian].

## Література

1. ДСТУ Б. В.2.6–137:2010 (ГОСТ 25912.2–91, MOD). Конструкції будинків і споруд. Плити залізобетонні попередньо напружені ПАГ–18 для аеродромного покриття. Конструкція. [Чинний від 2011–07–01]. ТОВ НТК "Будстандарт", 2011. 8 с. (Інформація та документація).
2. Плити залізобетонні з ненапруженою арматурою для покриття міських доріг. ДСТУ Б.В.2.6-122:2010. [чинний від 2011-07-01]. К.: Мінрегіонбуд України, 2011. 23 с. (Національний стандарт України).
3. Долгачев М. В., Ловцов А. Д. Моделирование взаимодействия пластины и грунта при его выпучивании и просадке. Вестник Тихоокеанского государственного университета, 2012. № 1(24). С. 131–139.
4. Сабуренкова В. А., Степушин А. П. Методы расчета конструкций аэродромных покрытий: учеб. Пособие. М.: МАДИ, 2015. 128 с.
5. Barmekova E. V. Strength analysis of variable rigidity slabs on elastic support with variable subgrade ratio. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta*. Journal of Construction and Architecture. 2019. (1). 201–208. https://doi.org/10.31675/1607-1859-2019-21-1-201-208.

- 6 Rodchenko O. Computer technologies for concrete airfield pavement design. Aviation. 2018. 21(3). 111–117. doi:10.3846/16487788.2017.1379439.
- 7 Caliendo C., Parisi A. Stress-Prediction Model for Airport Pavements with Jointed Concrete Slabs. Journal of Transportation Engineering. 2010. 136(7). 664–677. doi:10.1061/(asce)te.1943-5436.0000151
- 8 Mehta Y., Cleary D., Ali, A. W. Field cracking performance of airfield rigid pavements. Journal of Traffic and Transportation Engineering (English Edition). 2017. 4(4). 380–387. doi:10.1016/j.jtte.2017.05.010
- 9 Smith K. D., Roesler J. R. Review of Fatigue Models for Concrete Airfield Pavement Design. Airfield Pavements. 2004. doi:10.1061/40711(141)16
- 10 McNerney M. T., Kim J., Bescher E. P. Construction, Instrumentation, and Performance of a Double Sized Slab Designed for Airport Runways. Airfield and Highway Pavements 2017: Airfield Pavement Technology and Safety. 2017
- 11 ГОСТ 25912-2015 Плиты железобетонные предварительно напряженные для аэродромных покрытий. Технические условия, 2015. № 25912-2015.

**Korneeva Irina**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Ph.D., Associate Professor  
Didrihsona str.,4 Odessa, Ukraine 65029  
korneevairinaborisovna@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-0104-6938

**Kirichenko Daria**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Postgraduate  
Didrihsona str.,4 Odessa, Ukraine 65029  
sunnyderypeople123@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-8484-0925

**Shylyiaiev Oleksii**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Ph.D.  
Didrihsona str., 4, Odessa, Ukraine 65029  
shylyiaiev@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-1102-883X

*For references:*

Korneieva I., Kirichenko D., Shylyiaiev O. (2021). Experimental studies of deformability and fracture resistance of airfield slabs on models. Mechanics and Mathematical Methods. 3 (2). 64–74

*Для посилань:*

Корнеєва І. Б., Кіріченко Д. О., Шиліяєв О. С. Експериментальні дослідження деформативності і тріщиностійкості аеродромних плит на моделях. Механка та математичні методи, 2021. Том 3. Вип. 2. С. 64–74

УДК 533.6.013.42

## ВЛАСНІ ЧАСТОТИ КОЛИВАНЬ ПЛАСТИНИ, ЯКА ПОДІЛЯЄ ДВОШАРОВУ ІДЕАЛЬНУ РІДИНУ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ У ПРЯМОКУТНОМУ КАНАЛІ

Лимар О. О.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Миколаївський національний аграрний університет

**Анотація:** Досліджено аналітично і чисельно частотний спектр плоских коливань пружної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею в прямокутному каналі. Для довільного закріплення контурів прямокутної пластини показано, що частотний спектр розглянутої задачі складається з двох наборів частот, які описують коливання вільної поверхні рідини і пружної пластини. Рівняння зв'язаних коливань пластини та рідини представлені у вигляді системи інтегро-диференціальних рівнянь з граничними умовами закріплення контурів пластини та умовою збереження об'єму рідини. При розв'язанні крайової задачі на власні значення форма прогину пластини представляється сумою фундаментальних рішень однорідного рівняння для незакріпленої пластини і часткового розв'язання неоднорідного рівняння у вигляді розкладання за власними функціями коливань ідеальної рідини у прямокутному каналі. Отримано у вигляді визначника четвертого порядку частотне рівняння вільних сумісних коливань пластини та рідини. У випадку затиснених контурів пластини проведено його спрощення і проведені детальні чисельні дослідження першого і другого наборів частот від основних механічних параметрів системи. Відзначається слабкий взаємовплив коливань пластини на коливання вільної поверхні та навпаки. Показано, що зі зменшенням маси пластини частоти другого набору зростають і приймають найбільше значення для безінерційних пластин або мембран. Зменшення частот другого набору відбувається зі збільшенням глибини заповнення верхньої рідини або зі зменшенням глибини заповнення нижньої рідини. З урахуванням двох членів ряду у частотному рівнянні отримано наближені формули для другого набору частот та показано їх ефективність. Зі збільшенням числа членів ряду частотного рівняння попередні корені першого і другого наборів уточнюються та з'являються нові.

**Ключові слова:** гідропружність, прямокутна пластинка, плоскі коливання, ідеальна рідина, вільна поверхня, власні частоти сумісних коливань пластини і рідини.

## EIGENFREQUENCIES OF OSCILLATIONS OF A PLATE WHICH SEPARATES A TWO-LAYER IDEAL FLUID WITH A FREE SURFACE IN A RECTANGULAR CHANNEL

O. Lymar<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Mykolayiv National Agrarian University

**Abstract:** The frequency spectrum of plane vibrations of an elastic plate separating a two-layer ideal fluid with a free surface in a rectangular channel is investigated analytically and numerically. For an arbitrary fixing of the contours of a rectangular plate, it is shown that the frequency spectrum of the problem under consideration consists of two sets of frequencies describing the vibrations of the free surface of the liquid and the elastic plate. The equations of coupled vibrations of the plate and the fluid are presented using a system of integro-differential equations with the boundary conditions for fixing the contours of the plate and the condition for the conservation of the volume of the fluid. When solving a boundary value problem for eigenvalues, the shape of the plate deflection is represented by the sum of the fundamental solutions of a homogeneous equation for a loose plate and a partial solution of an inhomogeneous equation by expanding in terms of eigenfunctions of oscillations of an



ideal fluid in a rectangular channel. The frequency equation of free compatible vibrations of a plate and a liquid is obtained in the form of a fourth-order determinant. In the case of a clamped plate, its simplification is made and detailed numerical studies of the first and second sets of frequencies from the main mechanical parameters of the system are carried out. A weak interaction of plate vibrations on vibrations of the free surface and vice versa is noted. It is shown that with a decrease in the mass of the plate, the frequencies of the second set increase and take the greatest value for inertialess plates or membranes. A decrease in the frequencies of the second set occurs with an increase in the filling depth of the upper liquid or a decrease in the filling depth of the lower liquid. Taking into account two terms of the series in the frequency equation, approximate formulas for the second set of frequencies are obtained and their efficiency is shown. With an increase in the number of terms in the series of the frequency equation, the previous roots of the first and second sets are refined and new ones appear.

**Keywords:** hydroelasticity, elastic isotropic rectangular plate, ideal incompressible fluid, rectangular channel, flat oscillations.

## 1 ВСТУП

Для безпеки транспортування та зберігання рідких вантажів великі резервуари поділяють на відсіки. У цих відсіках можуть бути рідини різної щільності. У цьому випадку виникає задача про вплив пружних і масових характеристик пластин, яка поділяє рідини різної щільності, на частотний спектр і стійкість коливань механічної системи. У раніше розглянутих роботах в основному були досліджено умови стійкості коливань пластини у разі затиснутих контурів пластини. Однак у результаті сейсмічних впливів або виникнення аварійної або позаштатної ситуації край затиснутий пластини може прийняти довільне закріплення, наприклад, стати вільним або опертим. У цьому виникає потреба у дослідженні нового частотного спектра та її структури. В даній статті досліджено аналітично і чисельно частотний спектр плоских коливань пружної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею в прямокутному каналі. Для довільного закріплення контурів прямокутної пластини показано, що частотний спектр розглянутої задачі складається з двох наборів частот, які описують коливання вільної поверхні рідини і пружної пластини. У випадку затиснених контурів пластини проведено його спрощення і детальні дослідження першого і другого наборів частот від основних механічних параметрів системи. Розглянути випадки відродження пластини в мембрану. Показаний слабкий взаємовплив коливань пластини або мембрани на коливання вільної поверхні рідини та навпаки.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ І ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

У даній роботі узагальнюються результати статтею [1–7] на випадок дослідження частотного спектра коливань пружної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею. У статті [1] у лінійній постановці розглянуто плоску гідропружну задачу про стійкість коливань затиснутої тонкої ізотропної прямокутної пластини, яка розділяє ідеальні нестисливі рідини в прямокутному каналі. Пластина схильна до розтягуючих або стискаючих зусиль в серединній поверхні. Отримано у вигляді визначника четвертого порядку частотне рівняння вільних спільних коливань пластини і рідини та проведено його спрощення. Показано, що воно розпадається на два рівняння, що описують несиметричні та симетричні частоти вільних коливань (непарні та парні частоти) і може бути представлено в єдиній формі для цих частот. Отримано наближені та точні умови стійкості спільних коливань пластини та рідини. У цій статті наведено досить повний огляд літературних даних щодо цієї проблеми. Доповнимо його лише деякими основними та останніми роботами. У роботі [2] розглянуто задача, аналогічне [1], у випадку опертих і вільних контурів. Роботи [1, 3–6] присвячені переважно питання стійкості спільних коливань пластини та рідини. У статті [8] представлено аналітичне рішення для аналізу вільних коливань товстих прямокутних ізотропних пластин у поєднанні з обмеженою рідиною для різних граничних умов. Для розгляду теорій зміщення довільного порядку використовується уніфікована формула Каррери (CUF). Проблема власних значень отримується за допомогою функціоналу енергії, враховуючи кінетичну енергію пластини та рідини, а також потенційну енергію пластини. Метод Рітца використовується для оцінки змінних переміщень, а функції, які використовуються в ряді Рітца, можуть бути налаштовані для врахування довільної вібрації з класичними граничними умовами. Проаналізовано збіжність розв'язку та проведено перевірку результатів з урахуванням відкритої літератури та програмного забезпечення 3D кінцевих елементів. Стаття [9] присвячена вивченню вільних коливань двошарової ідеальної рідини у прямокутному контейнері з пружною бічною стінкою. З використанням нормальних форм проведено дослідження двовимірної гідропружної системи.

Великий цикл робіт присвячений гідропружним коливанням ідеальної рідини в кругових та коаксіальних циліндрах з жорсткими та пружними основами. Це роботи [10–14] та багато інших. ін. Стаття [10] присвячена коливанням затиснутої кругової пластини в ідеальній рідині, яка знаходиться в жорсткому прямому круговому циліндричному резервуарі. У цій статті дано порівняння аналітичних результатів із результатами, отриманими в системі ANSYS. У роботі [11] проводяться дослідження несиметричних вільних коливань затиснутої круглої пластини при контакті з ідеальною несжимаємою рідиною. З використанням рядів Фур'є – Бесселя та варіаційного принципу виведено приєднану масу рідини та отримано частотне рівняння зв'язаних коливань пластини та рідини. Проведено порівняння отриманих результатів із результатами роботи [10]. У статті [12] виведено частотне рівняння осесиметричних коливань важкої двошарової ідеальної рідини в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі з пружними верхньою і нижньою основами у вигляді затиснених кільцевих пластин і проведено дослідження частотного спектру. Робота [13] присвячена дослідженню частотних рівнянь несиметричних та симетричних власних коливань важкої ідеальної двошарової рідини у жорсткому круговому циліндричному резервуарі з пружними основами у вигляді затиснутих кругових пластин. На прикладі однорідної рідини з вільною поверхнею та пружним дном у вигляді мембрани аналітично та чисельно досліджено частотний спектр. Показано, що він складається із двох наборів, які відповідають коливанням вільної поверхні рідини та коливанням мембрани.

Найбільш загальний математичний підхід до вирішення задачі про динаміку та стійкість руху твердого тіла з відсіками, що містять багатшарову ідеальну рідину, розділену пружними пластинами, наведено у статті [14].

У даній статті продовжені дослідження, які були розпочаті у роботах [1-4]. Досліджено аналітично і чисельно частотний спектр плоских коливань пружної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею в прямокутному каналі. Показано, що частотний спектр розглянутої задачі складається з двох наборів частот, які описують коливання вільної поверхні і пружної пластини. Для затиснутих контурів пластини докладно проведено дослідження цих двох наборів частот.

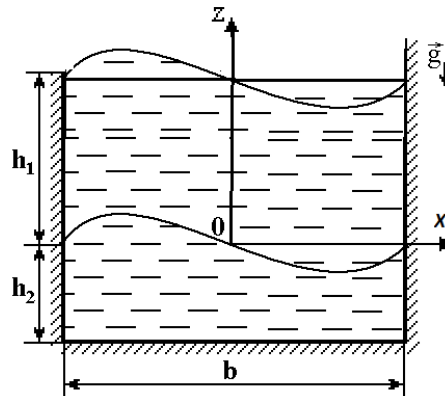
### 3 МЕТА ТА ЗАВДАННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідити аналітично і чисельно частотний спектр плоских коливань пружної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею в прямокутному каналі. Показати для довільного закріплення контурів прямокутної пластини, що частотний спектр розглянутої задачі складається з двох наборів частот, які описують коливання вільної поверхні рідини і пружної пластини. У випадку затиснених контурів пластини провести його спрощення і вивчити вплив основних механічних параметрів системи на перший і другий набір частот. Розглянути випадки відродження пластини в мембрану. Показати взаємовплив коливань пластини або мембрани (першого набору) на коливання вільної поверхні рідини (другого набору) та навпаки.

### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянемо плоскі коливання пружної прямокутної пластини, яка горизонтально поділяє двошарову ідеальну нестисливу рідину з густиною  $\rho_i (i=1,2)$  в прямокутному каналі шириною  $b (b=2a)$ . Пластина має постійну згинальну жорсткість  $D$  і допускається наявність розтягуючих та стискаючих зусиль в серединній поверхні інтенсивності  $T$ . Конттури пластини можуть мати довільне закріплення, наприклад, бути затиснені, оперті або вільні. Верхня рідина щільності  $\rho_1$  заповнює канал до

глибини  $h_1$ , а нижня рідина щільності  $\rho_2$  до глибини  $h_2$  (рис. 1). Верхня рідина може повністю заповнювати канал або мати вільну поверхню.



**Рис. 1.** Прямокутна пластина розділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею

Власні частоти спільних коливань пружної пластини і двошарової ідеальної рідини з вільною поверхнею знаходяться з системи інтегро-диференціальних рівнянь [3, 7]

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - P \frac{d^2 w}{dx^2} + qw = \frac{\omega^2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^* w_n}{k_n} \psi_n + C, \quad (1)$$

$$w_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a w \psi_n dx, \quad \int_{-a}^a w dx = 0 \quad (2)$$

і граничних умов

$$(\mathcal{L}_{jp}[w])|_{\gamma_j} = 0 \quad (j, p = 1, 2). \quad (3)$$

Тут  $P = T/D$ ,  $q = (g\Delta\rho - k_0\omega^2)/D$  ( $D \neq 0$ ),  $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ ,  $k_0 = \rho_0\delta_0$ ,  $w(x)$ ,  $\rho_0$ ,  $\delta_0$  – відповідно форма нормального прогину, щільність і товщина пластини;  $\omega$  – невідома частота спільних коливань пластини і рідини,  $a_n = \rho_1 \coth \kappa_{1n} + \rho_2 \coth \kappa_{2n}$ ,  $a_n^* = a_n - \tilde{b}_n$ ,  $\kappa_{in} = h_i k_n$ ,  $k_n = \pi n / b \tilde{b}_n = 2\omega^2 \rho_1 / (\omega^2 - \sigma_n^2) \sinh 2\kappa_{1n}$ ,  $\sigma_n^2 = gk_n \tanh \kappa_{1n}$  – квадрат частоти коливань вільної поверхні верхньої рідини в випадку абсолютно жорсткої пластини;  $\mathcal{L}_{j1}$  і  $\mathcal{L}_{j2}$  – диференціальні оператори граничних умов закріплення пластини на контурі  $\gamma_j$ ; наприклад, у випадку жорсткого защемлення пластини оператор  $\mathcal{L}_{j1}$  буде одиничним, а  $\mathcal{L}_{j2} = d/dx$ ;  $\gamma_j$  ( $j=1,2$ ) – позначення контуру, причому індекс  $j=1$  відповідає контуру  $x=-a$ , а  $j=2$  –  $x=a$ .

У разі відсутності вільної поверхні (випадок повного заповнення каналу) у рівнянні (1) треба покласти  $a_n^* = a_n$  ( $\tilde{b}_n = 0$ ) [1, 2, ...].

У роботах [3, 6, 7] показано, що форма прогину пластини має вигляд

$$w = \sum_{k=1}^4 \left( w_k^0 - \tilde{w}_k^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^* E_{kn}^0}{\omega^2 a_n^* - k_n d_n} \psi_n \right) A_k^0, \quad (4)$$

де  $w_k^0$  ( $k = \overline{1,4}$ ) – фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння (1),



$$\tilde{w}_k^0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a w_k^0 dx, \quad E_{kn}^0 = \frac{1}{a} \int_{-a}^a w_k^0 \psi_n dx, \quad \psi_n(x) = \cos k_n(x+a), \quad d_n = (Dk_n^2 + T)k_n^2 + g\Delta\rho - k_0\omega^2.$$

У формулу (4) входить чотири невідомі константи  $A_k^0$ . З граничних умов закріплення пластини (3) маємо чотири лінійних однорідних рівняння відносно  $A_k^0$ .

$$\sum_{k=1}^4 \left( \mathcal{L}_{jpk}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{jpn} \right) A_k^0 = 0 \quad (p, j = 1, 2). \quad (5)$$

Тут  $\mathcal{L}_{jpk}^0 = \left( \mathcal{L}_{jp} [w_k^0 - \tilde{w}_k^0] \right) \Big|_{\gamma_j}$ ,  $\mathcal{L}_{jpn} = \left( \mathcal{L}_{jp} [\psi_n] \right) \Big|_{\gamma_j}$ ,  $\alpha_n = a_n^* / (\omega^2 a_n^* - k_n d_n)$ .

З рівності нулю визначника однорідної системи (5) впливає частотне рівняння власних спільних коливань пружної пластини і рідини

$$\left| \left\| C_{qk} \right\|_{q, k=1}^4 \right| = 0, \quad (6)$$

де

$$C_{pk} = \mathcal{L}_{jpk}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{jpn} \quad (j=1, p=1, 2; k=\overline{1,4}),$$

$$C_{p+2,k} = \mathcal{L}_{jpk}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{jpn} \quad (j=2, p=1, 2; k=\overline{1,4}).$$

Скориставшись розвиненнями функцій  $w_k^0$  в ряд по повній і ортогональній системі функцій  $\psi_n$  та умовою  $\int_{-a}^a \psi_n dx = 0$ , рівняння (6) можна переписати так

$$\left| \left\| C_{qk} \right\|_{q, k=1}^4 \right| = 0, \quad (7)$$

де

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{j1n}, \quad C_{2k} = \mathcal{L}_{j2k}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{j2n} \quad (j=1, k=\overline{1,4}),$$

$$C_{3k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{j1n}, \quad C_{4k} = \mathcal{L}_{j2k}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{j2n} \quad (j=2, k=\overline{1,4}).$$

Тут  $\beta_n = k_n d_n / (\omega^2 a_n^* - k_n d_n)$ .

Слід зазначати, що частотне рівняння (6) більш зручніше для точності чисельних розрахунків, а (7) – для аналітичних досліджень [1–7].

Власні форми коливань пластини знаходяться на підставі частотних рівнянь (6)–(7), системи рівнянь (5) та форми прогину пластини (4).

На підставі робіт [12–13] можна стверджувати, що частотний спектр рівнянь (6)–(7) складається з двох наборів частот, які описують коливання вільної поверхні і пружної пластини.

Слід зазначати складність розв'язків частотних рівнянь (6)–(7) тому, що фундаментальна система  $w_k^0$  залежить від знака величини  $g\Delta\rho - k_0\omega^2$ . В роботах [1, 2] був розглянуто випадок  $\Delta\rho = 0$  ( $\rho_1 = \rho_2$ ), тому у цьому випадку розглянута задача

суттєво спрощується.

При відсутності вільної поверхні у рівнянні (2)–(7) треба покласти  $a_n^* = a_n$ .

Система рівняння (4)–(7) виписана для довільних способів закріплення контурів пластини. Розглянемо найбільш поширені на практиці способи закріплення: затиснений, опертий і вільний контур.

У разі затиснених контурів пластини коефіцієнти частотного рівняння (7) запишуться так

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0, \quad C_{2k} = \mathcal{L}_{12k}^0, \quad C_{3k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0 (-1)^n, \quad C_{4k} = \mathcal{L}_{j2k}^0 \quad (k = \overline{1,4}), \quad (8)$$

оскільки величини  $\mathcal{L}_{jpn}$  і  $\mathcal{L}_{j2k}^0$  мають вигляд  $\mathcal{L}_{11n} = 1$ ,  $\mathcal{L}_{21n} = (-1)^n$ ,  $\mathcal{L}_{j2n} = 0$ ,

$$\mathcal{L}_{j2k}^0 [w_k^0] = \left. \frac{dw_k^0}{dx} \right|_{\gamma_j}.$$

Для опертого краю оператори  $\mathcal{L}_{jp}$  та значення функцій  $\mathcal{L}_{jpn}$ ,  $\mathcal{L}_{j2k}^0$  будуть мати вигляд:  $\mathcal{L}_{j1} \equiv 1$ ,  $\mathcal{L}_{j2} = d^2/dx^2$ ,  $\mathcal{L}_{11n} = 1$ ,  $\mathcal{L}_{21n} = (-1)^n$ ,  $\mathcal{L}_{12n} = -k_n^2$ ,  $\mathcal{L}_{22n} = (-1)^{n+1} k_n^2$ ,

$\mathcal{L}_{j2k}^0 [w_k^0] = d^2 w_k^0 / dx^2 \big|_{\gamma_j}$ , а для вільного краю  $\mathcal{L}_{j1} = d^2/dx^2$ ,  $\mathcal{L}_{j2} = d^3/dx^3$ ,  $\mathcal{L}_{11n} = -k_n^2$ ,

$\mathcal{L}_{21n} = (-1)^{n+1} k_n^2$ ,  $\mathcal{L}_{12n} = 0$ ,  $\mathcal{L}_{22n} = 0$ ,  $\mathcal{L}_{j1k}^0 [w_k^0] = \left. \frac{d^2 w_k^0}{dx^2} \right|_{\gamma_j}$ ,  $\mathcal{L}_{j2k}^0 [w_k^0] = \left. \frac{d^3 w_k^0}{dx^3} \right|_{\gamma_j}$  [2, 3, 6, 7].

Проводячи за аналогією з роботами [6, 7] перетворення з рядками та стовпцями визначника рівняння (7) для затиснутих, опертих та вільних контурів пластини, можна привести його до блокового вигляду з двома нульовими блоками. В результаті отримаємо, що рівняння (7) для защемлених, опертих і вільних контурів розпадається на два рівняння, які описують несиметричні та симетричні частоти сумісних коливань пластини та рідини з вільною поверхнею. Для змішаних способів закріплення двох контурів пластини рівняння (7) не розпадається на непарні та парні частоти [2, 6, 7]. Найбільше спрощення рівняння (7) ми отримаємо для затиснутих контурів [2, 6, 7]. У цьому випадку воно спрощується і розпадається на два рівняння, які описують непарні ( $n = 2m - 1$ ) й парні ( $n = 2m$ ) частоти і ці рівняння можуть бути записані в єдиній формі для цих частот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 a_n^* - k_n d_n} = 0. \quad (9)$$

Із рівняння (9) слід, що з зростання  $h_1/b$  коефіцієнт  $b_n^*$  прагне до нуля як  $e^{-2\pi h_1/b}$ , а коефіцієнт  $a_n^*$  прагне до  $a_n$ . Таким чином, при  $h_1/b > 1$  впливом вільної поверхні на частотний спектр можна знехтувати і рівняння (9) в цьому разі має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 a_n - k_n d_n} = 0$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 \hat{a}_n - k_n \tilde{d}_n} = 0, \quad (10)$$

де  $\hat{a}_n = a_n + k_n k_0$ ,  $\tilde{d}_n = (Dk_n^2 + T)k_n^2 + g\Delta\rho$ .

Ліва частина рівняння (10) є монотонно зростаючою функцією параметра  $\omega^2$  на інтервалі  $(k_n \tilde{d}_n / \tilde{a}_n, k_{n+1} \tilde{d}_{n+1} / \tilde{a}_{n+1})$  ( $n=1, 2, \dots$ ), яка приймає на ньому значення від  $-\infty$  до  $\infty$ . Отже, між двома послідовними значеннями  $k_n \tilde{d}_n / \tilde{a}_n$  лежить тільки один корінь рівняння (10). Цим заздалегідь визначаються інтервали, в яких знаходяться власні частоти. Квадрати високих частот ( $n \gg 1$ ) будуть мало відрізнятися від величини  $\omega_n^2 = k_n [(Dk_n^2 + T)k_n^2 + g\Delta\rho] / (a_n + k_n k_0)$ . З цієї рівності випливає, що залежність  $\omega_n^2$  від  $D, T$  і  $\Delta\rho$  є лінійною, найбільше значення  $\omega_n^2$  буде при  $k_0 = 0$ , тобто для безінерційної пластини. Квадрат частоти  $\omega_n^2$  слабо залежить від глибин заповнення  $h_1$  і  $h_2$  і зменшується при їх зменшенні. Проведені чисельні дослідження рівняння (10) підтвердять ці попередні висновки.

На відміну від рівняння (10) знаменник рівняння (9) представляється як кубічного многочлена відносно  $\omega^2$  і у цьому разі досить важко відокремити коріння цього рівняння. Проте, можна зробити так: спочатку розглянути рівняння (10) і на його основі провести дослідження другого набору частот. Вплив вільної поверхні цей набір частот буде незначним. Це дозволить відокремити частоти другого набору від першого, а потім провести дослідження першого набору частот.

## 5 ЧИСЕЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ СУМІСНИХ КОЛИВАНЬ ПЛАСТИНИ І РІДИНИ

У безрозмірному вигляді частотне рівняння (9)–(10) будуть мати вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\tilde{a}_n + \pi n \tilde{k}_0 - \tilde{b}_n^*) \Omega^2 - \pi n [(\pi^2 n^2 + \gamma_0^2) \pi^2 n^2 + (1 - \rho_{12}) \tilde{g}]} = 0; \quad (11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\tilde{a}_n + \pi n \tilde{k}_0) \Omega^2 - \pi n [(\pi^2 n^2 + \gamma_0^2) \pi^2 n^2 + (1 - \rho_{12}) \tilde{g}]} = 0. \quad (12)$$

Тут  $\tilde{a}_n = a_n / \rho_2 = \rho_{12} \coth \kappa_{1n} + \coth \kappa_{2n}$ ,  $\tilde{k}_0 = k_0 / \rho_2 b$ ,  $\Omega^2 = \omega^2 \rho_2 b^5 / D$ ,  $\tilde{b}_n^* = 2\rho_{12} \Omega^2 / (\Omega^2 - \tilde{g} \pi n \tanh \kappa_{1n}) \sinh 2\kappa_{1n}$ ,  $\kappa_{in} = \pi n H_i$ ,  $\gamma_0^2 = T b^2 / D$ ,  $\rho_{12} = \rho_1 / \rho_2$ ,  $\tilde{g} = g b^4 / D$ ,  $b = 2a$ .

Якщо у рівнянні (12) утримати два члени ряду, то отримаємо наближенню формулу квадрата частоти. Так, для непарних частот ( $n=1, 3$ ) маємо

$$\Omega^2 = \frac{6\pi [41\pi^2 + 5\gamma_0^2 + (1 - \rho_{12}) / \pi^2]}{k_{13}}, \quad (13)$$

де  $k_{13} = \rho_{12} (\coth \kappa_{13} + 3 \coth \kappa_{11}) + \coth \kappa_{23} + 3 \coth \kappa_{21} + 4\pi \tilde{k}_0$ ,  $\kappa_{11} = \pi H_1$ ,  $\kappa_{13} = 3\kappa_{11}$ ,  $\kappa_{21} = \pi H_2$ ,  $\kappa_{11} = 3\kappa_{21}$ , а для парних ( $n=2, 4$ ):

$$\Omega^2 = \frac{2\pi [68\pi^2 + 5\gamma_0^2 + 0.5(1 - \rho_{12}) / \pi^2]}{k_{14}}. \quad (14)$$

Тут  $k_{14} = \rho_{12} (\coth \kappa_{14} + 2 \coth \kappa_{12}) + \coth \kappa_{24} + 2 \coth \kappa_{21} + 8\pi \tilde{k}_0$ ,  $\kappa_{12} = 2\pi H_1$ ,  $\kappa_{14} = 2\kappa_{12}$ ,  $\kappa_{22} = 2\pi H_2$ ,  $\kappa_{24} = 2\kappa_{22}$

У разі виродження пластини в мембрану ( $D=0$ ) у нових безрозмірних змінних  $\Omega^2$

і  $\tilde{T}$  частотні рівняння (11)–(14) запишуться так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\tilde{a}_n + \pi n \tilde{k}_0 - \tilde{b}_n^*) \Omega^2 - \pi n (\tilde{T} \pi^2 n^2 + 1 - \rho_{12})} = 0; \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\tilde{a}_n + \pi n \tilde{k}_0) \Omega^2 - \pi n (\tilde{T} \pi^2 n^2 + 1 - \rho_{12})} = 0, \quad (16)$$

де  $\Omega^2 = \omega^2 b / g$ ,  $\tilde{T} = T / g \rho_2 b^2$ .

Для непарних частот ( $n = 1, 3$ ) маємо

$$\Omega^2 = \frac{6\pi [41\pi^2 + 5\gamma_0^2 + (1 - \rho_{12}) / \pi^2]}{k_{13}}, \quad (17)$$

а для парних ( $n = 2, 4$ ):

$$\Omega^2 = \frac{2\pi [5\tilde{T} + 0.5(1 - \rho_{12}) / \pi^2]}{k_{14}}. \quad (18)$$

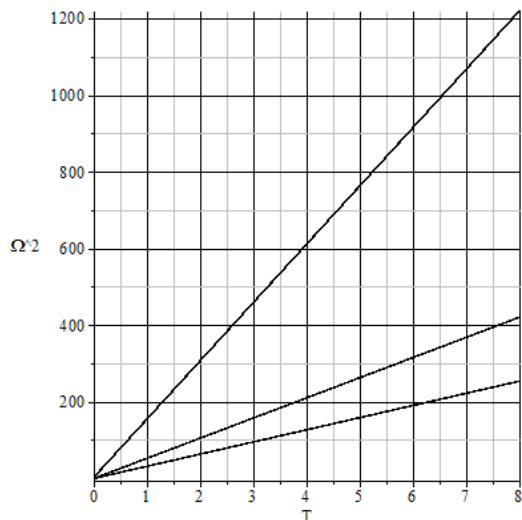
Слід відмітити, що формули (13)–(14) і (17)–(18) підтверджують попередні висновки, які були зроблені з приблизної формули для високих частот.

Зі збільшенням кількості членів ряду попередні корені будуть уточнюватися і з'являтися нові.

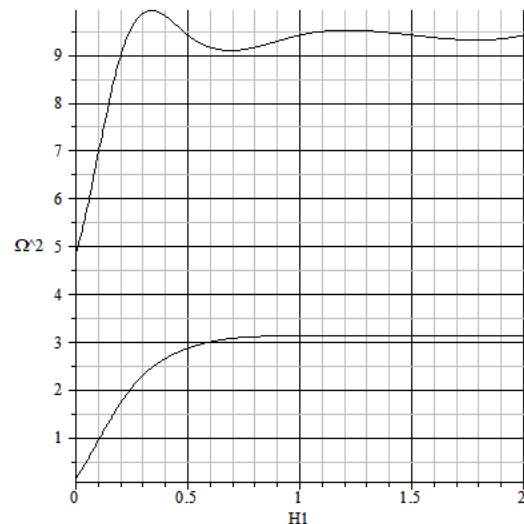
Чисельні дослідження частотних рівнянь (11)–(12), (15)–(16) і формул (13)–(14), (17)–(18) були проведені для наступних значень безрозмірних параметрів:  $\rho_{12} = 0, 0.5, 1, 2$ ;  $\gamma_0^2 = 0..50$ ;  $\tilde{T} = 0, 0.5, 1, 2$ ;  $\tilde{g} = 1, 10, 100$ ;  $H_i = 0.5, 1, 1.5$ ;  $\tilde{k}_0 = 0, 0.5, 1$ , з урахуванням десяти-двадцяти членів у ряду цих рівнянь.

На рис. 2–5 представлені, у випадку мембрани ( $D = 0$ ), графіки залежності квадрата першої безрозмірної несиметричної частоти  $\Omega^2$  від безрозмірного натягу  $\tilde{T}$  (рис. 2), від безрозмірній глибини  $H_1$  (рис.3) і від безрозмірній щільності  $\rho_{12}$  (рис.4, 5), а на рис. 3 додано ще графік квадрата другої безрозмірної частоти. На рис.2, 4, 5  $H_1 = H_2 = 1$  і значенням  $\tilde{k}_0 = 0$  відповідає верхній графік,  $\tilde{k}_0 = 0.5$  – середній графік і  $\tilde{k}_0 = 1.0$  – нижній графік.

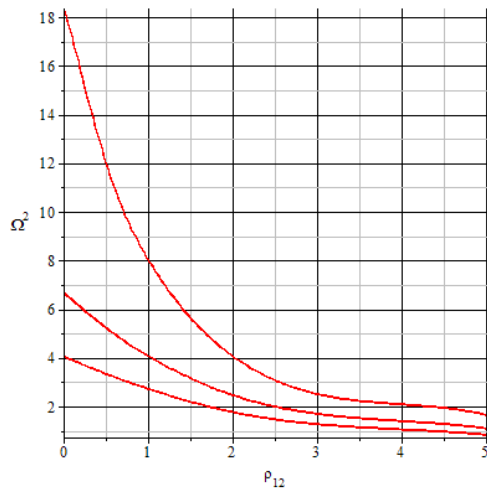
Графіки на рис. 2, 4, 5 дуже близькі до другого набору частотного спектру, а графік на рис. 3 точно відповідає першому набору. Численні дослідження показали, що додавання рідини з вільною поверхнею до рідини зі щільністю  $\rho_{12} = 0$  (рис.2) призводить до зменшення коливань пластини (другого набору) і появи нових частот коливань вільної поверхні (першого набору, рис. 3). Все це не суперечить фізичному змісту. При додаванні рідини зі щільністю  $\rho_{12} > 0$  відбувається суттєве зменшення частот коливань другого набору, що може призвести до втрати стійкості положення рівноваги пластини (див. рис. 4-5) [5, 7]. Також відзначається слабкий взаємовплив коливань пластини на коливання вільної поверхні та навпаки. Так, наприклад, графіки на рис. 3 (перший набір) з точністю до третього знака збігаються з аналогічними графіками при відсутності коливань пластини.



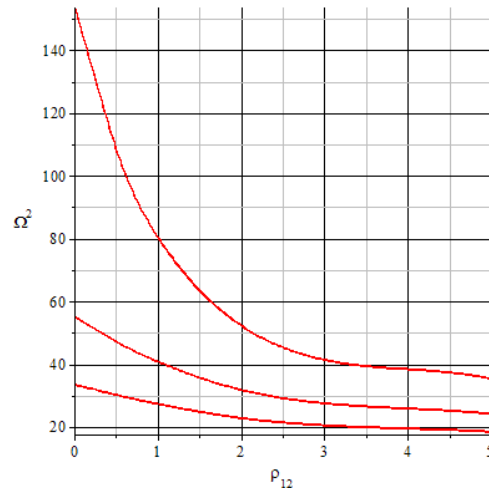
**Рис. 2.** Залежність квадрата першої безрозмірної частоти від  $\tilde{T}$  при  $\rho_{12} = 0$  (випадок відсутності верхньої рідини)



**Рис. 3.** Залежність квадрата першої і другої безрозмірної частоти від  $H_1$  при  $\rho_{12} = 1$ ,  $H_2 = 0.5$ ,  $k_0 = 1$ ,  $\tilde{T} = 10$  (перший набір частот)



**Рис. 4.** Залежність квадрата першої безрозмірної частоти від  $\rho_{12}$  при  $\tilde{T} = 0.1$  (другий набір частот)



**Рис. 5.** Залежність квадрата першої безрозмірної частоти від  $\rho_{12}$  при  $\tilde{T} = 1$  (другий набір частот)

Слід зазначити, що графіки залежності квадрата першої безрозмірної несиметричної частоти  $\Omega^2$  від  $\gamma_0^2$  ( $D \neq 0$ ) якісно не відрізняються від графіків у випадку  $D = 0$  і графіки для симетричних і несиметричних частот також якісно не відрізняються і, як правило, значення парних частот приблизно в п'ять разів більше відповідних значень непарних частот. Отримані приблизні формули (13)–(14) і (17)–(18) є достатньою для практики точністю можуть бути застосовані для інженерних розрахунків.

На основі проведених аналітичних і чисельних досліджень можна зробити наступні загальні висновки як для парних, так і для непарних частот:

1. Частотний спектр розглянутої задача складається із двох наборів частот, які відповідають коливанням вільної поверхні і коливанням пластини. Відзначається слабкий взаємовплив коливань пластини на коливання вільної поверхні та навпаки.
2. Залежність квадрата безрозмірної частоти від величин  $\tilde{T}$  і  $\gamma_0^2$  лінійна.
3. Зі зменшенням маси пластини частоти другого набору зростають і приймають

- найбільше значення для безінерційних пластин або мембран.
4. Отримано наближені формули для другого набору частот та показано їх ефективність.
  5. Зі зменшенням щільності верхньої рідини частоти другого набору зростають і приймають найбільше значення при відсутності верхньої рідини, а зі збільшенням щільності верхньої рідини частоти спадають й при малому натягу мембрани або малій згинальній жорсткості та малому натягу пластини можуть обернутися в нуль, що призведе до втрати стійкості плоскої форми рівноваги мембрани або пластини.
  6. Зменшення частот другого набору відбувається зі збільшенням глибини заповнення верхньої рідини або зі зменшенням глибини заповнення нижньої рідини.
  7. Зі збільшенням членів ряду частотного рівняння попередні корені першого і другого наборів будуть уточнюватися та з'являтися нові. Для отримання точності чотирьох значних цифр достатньо врахувати 10–20 членів ряду.

## 6 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

Досліджено аналітично і чисельно частотний спектр плоских коливань пружної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею в прямокутному каналі. Рівняння вільних сумісних коливань пластини та рідини представлені у вигляді системи інтегро-диференціальних рівнянь з граничними умовами закріплення контурів пластини та умовою збереження об'єму рідини. При розв'язанні крайової задачі на власні значення форма прогину пластини представляється сумою фундаментальних рішень однорідного рівняння для незакріпленої пластини і часткового розв'язання неоднорідного рівняння у вигляді розкладання за власними функціями коливань ідеальної рідини у прямокутному каналі. Отримано у вигляді визначника четвертого порядку частотне рівняння вільних сумісних коливань пластини та рідини. Для довільного закріплення контурів прямокутної пластини показано, що частотний спектр розглянутої задача складається із двох наборів частот, які відповідають коливанням вільної поверхні і коливанням пластини. У випадку затиснених контурів пластини проведено його спрощення і проведені детальні дослідження першого і другого наборів частот від основних механічних параметрів системи. Відзначається слабкий взаємовплив коливань пластини на коливання вільної поверхні та навпаки. Отримано наближені формули для другого набору частот та показано їх ефективність. Показано, що зі зменшенням маси пластини частоти другого набору зростають і приймають найбільше значення для безінерційних пластин або мембран. Зі зменшенням щільності верхньої рідини частоти другого набору також зростають і приймають найбільше значення при відсутності верхньої рідини, а зі збільшенням щільності верхньої рідини частоти спадають й при малому натягу мембрани або малій згинальній жорсткості та малому натягу пластини можуть обернутися в нуль, що призведе до втрати стійкості плоскої форми рівноваги мембрани або пластини. Зменшення частот другого набору відбувається зі збільшенням глибини заповнення верхньої рідини або зі зменшенням глибини заповнення нижньої рідини. Зі збільшенням членів ряду частотного рівняння попередні корені першого і другого наборів будуть уточнюватися та з'являтися нові.

## 7. ВИСНОВКИ

У лінійній постановці розглянуто гідропружну задачу про плоскі коливання пружної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею в прямокутному каналі. Пластина має довільне закріплення контурів і схильна до розтягуючих або стискаючих зусиль в серединній поверхні. Аналітично і чисельно

досліджено частотний спектр сумісних вільних коливань пружної пластини і рідини з вільною поверхнею. Показано, що частотний спектр розглянутої задача складається із двох наборів частот, які відповідають коливанням вільної поверхні і коливанням пластини. У випадку затиснених контурів пластини проведені детальні дослідження першого і другого наборів частот від основних механічних параметрів системи. Відзначається слабкий взаємовплив коливань пластини на коливання вільної поверхні та навпаки. Отримано наближені формули для другого набору частот та показано їх ефективність.

## Література

1. Кононов Ю. Н., Шевченко В. П., Лимарь А. А. Об устойчивости колебаний прямоугольной пластины в идеальной жидкости. Механика та математичні методи, 2019. Том 1. Вип. 2. С. 6–17.
2. Кононов Ю. Н., Шевченко В. П., Лимарь А. А. О колебании прямоугольной пластины в идеальной жидкости с учетом различных способов закрепления ее контуров. Механика та математичні методи, 2020. Том 2. Вип. 1. С. 6–19.
3. Лимарь О. О. Про уточнення умов стійкості коливань прямокутної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею. Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки, 2020. № 1. С. 190–204.
4. Kononov Yuri, Lyamar Aleksandr On the stability of coupled oscillations of the elastic bottom of a rigid rectangular channel and ideal liquid. Journal of Theoretical and Applied Mechanics. Fluid mechanics. Sofia. 2020. Vol. 50. P. 292–303.
5. Kononov Yu. N., Lyamar A. A. On the update of the conditions of the stability of vibrations of the plate separating ideal liquids in a rectangular channel with hard foundations. Intern. Journal of Mechanical Engineering and Information Technology. 2018. Vol. 06. Issue 1. P. 1755–1760.
6. Лимарь А. А. Об упрощении частотных уравнений в задаче о колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій : збірник наукових праць, 2017. Вип.27. С. 106–128.
7. Кононов Ю.Н., Лимарь А.А. О колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с одним упругим основанием. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій : збірник наукових праць, 2017. Вип. 26. С. 79–96.
8. Canales F. G., Mantari J. L. Vibration behavior of isotropic plate structures in contact with a bounded fluid via unified formulation. Chinese Journal of Aeronautics. 2019. 32(4). P. 921–937.
9. Amaouche M., Meziani B. Coupled frequencies of a rectangular hydroelastic system with two fluids. Meccanica. 2012. 47. P. 71–83.
10. Jeong K.-H., Kim K.-J. Hydroelastic vibration of circular plate submerged in a bounded compressible fluid. J. Sound Vib. 2005. 283. P. 153–172.
11. Tariverdilo S., Shahmardani M., Mirzapour J., Shabani R. Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid. Appl. Math. Model. 2013. 37. № 1-2. P. 228–239.
12. Kononov Yu.M., Shevchenko V. P., Dzhukha Yu.O. Axially symmetric vibrations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical vessel. Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 240, №. 1. P. 98–112.
13. Kononov Yu.M., Dzhukha Yu.O. Vibrations of two-layer ideal liquid in a rigid cylindrical vessel with elastic bases. Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 246. №. 3. P. 365–383.
14. Кононов Ю.М. Про стійкість положення рівноваги твердого тіла з багатошаровою ідеальною рідиною, розділеною пружними пластинами. Укр. мат. журн. 2021, 73. №10. С. 1343–1355.

## References

1. Kononov, Yu. N., Shevchenko, V. P., Lyamar', A. A. (2019) Ob ustojchivosti kolebaniya pryamougol'noj plastiny v ideal'noj zhidkosti. [On the stability of vibrations of a rectangular plate in an ideal fluid]. *Mekhanika ta matematichi metody*. 1(2). 6–17. [in Russian].

2. Kononov, Yu. N., Shevchenko, V. P., Limar', A. A. (2020). O kolebanii pryamougolnoy plastiny v idealnoy zhidkosti s uchetom razlichnykh sposobov zakrepleniya ee konturov. [On the vibration of a rectangular plate in an ideal fluid, taking into account various ways of fixing its contours]. *Mekhanika ta matematichi metody*. 2(1). 6–19. [in Russian].
3. Limar', A.A. (2020) Pro utochnennya umov stijkosti kolivan' pryamokutnoї plastini, yaka podilyae dvosharovu ideal'nu ridinu z vil'noyu poverhneyu. [About specification of conditions of stability of fluctuations of the rectangular plate which separates two-layer ideal liquid with a free surface]. *Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Fiziko-matematichni nauki*. 1. 190–204. [in Ukrainian].
4. Kononov, Yuri, Lyamar, Alekandr (2020). On the stability of coupled oscillations of the elastic bottom of a rigid rectangular channel and ideal liquid. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Fluid mechanics, Sofia*, Vol. 50, 292–303.
5. Kononov, Yu. N., Lyamar, A. A. (2018). On the update of the conditions of the stability of vibrations of the plate separating ideal liquids in a rectangular channel with hard foundations. *Intern. Journal of Mechanical Engineering and Information Technology*. 06. Issue 1. 1755–1760.
6. Limar', A.A. (2017). Ob uproshchenii chastotnykh uravnenij v zadache o kolebanii pryamougol'noj plastiny, razdelyayushchej ideal'nye zhidkosti raznoj plotnosti v pryamougol'nom kanale. [On the simplification of frequency equations in the problem of oscillation of a rectangular plate separating ideal liquids of different densities in a rectangular channel]. *Problemi obchislyval'noi mekhaniki i mcnosti konstrukcij: zbirnik naukovih prac'*. 27. 106–128. [in Russian].
7. Kononov, Yu. N., Limar', A. A. (2017) O kolebanii pryamougol'noj plastiny, razdelyayushchej ideal'nye zhidkosti raznoj plotnosti v pryamougol'nom kanale s odnim uprugim osnovaniem. [On the oscillation of a rectangular plate separating ideal liquids of different densities in a rectangular channel with one elastic base]. *Problemi obchislyval'noi mekhaniki i mcnosti konstrukcij: zbirnik naukovih prac'*. 26. 79–96. [in Russian].
8. Canales, F. G., Mantari, J. L. (2019). Vibration behavior of isotropic plate structures in contact with a bounded fluid via unified formulation. *Chinese Journal of Aeronautics*. 32(4). 921–937.
9. Amaouche, M., Meziani, B. (2012). Coupled frequencies of a rectangular hydroelastic system with two fluids. *Meccanica*. 47. 71–83.
10. Jeong, K.-H., Kim, K.-J. (2005). Hydroelastic vibration of circular plate submerged in a bounded compressible fluid. *J. Sound Vib*. 283. 153–172.
11. Tariverdilo, S., Shahmardani, M., Mirzapour, J., Shabani, R. (2013). Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid. *Appl. Math. Model*. 37. № 1-2. 228–239.
12. Kononov, Yu. M., Shevchenko, V. P., Dzhukha, Yu. O. (2019). Axially symmetric vibrations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical vessel. *Journal of Mathematical Sciences*. 240 (1). 98–112.
13. Kononov, Yu. M., Dzhukha, Yu. O. (2020). Vibrations of two-layer ideal liquid in a rigid cylindrical vessel with elastic bases. *Journal of Mathematical Sciences*. 246 (3). 365–383.
14. Kononov, Yu. M. (2021) Pro stijkist' polozhennya rivnovagi tverdogo tila z bagatosharovoyu ideal'noyu ridinoyu, rozdilenoyu pruzhnimi plastinami. [ On the stability of the equilibrium position of a solid with a multilayer ideal liquid separated by elastic plates] *Ukr. mat. Zhurn* 73(10). 1343–1355. [in Ukrainian].

**Лимарь Александр Александрович**

Миколаївський національний аграрний університет  
к.ф.-м.н, асистент  
вул. Георгія Гонгадзе, 9 Миколаїв, Україна 54020  
aleksandr1402aa@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-0301-7313

*Для посилань:*

Лимар О. О. Власні частоти коливань пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею у прямокутному каналі. *Механіка та математичні методи*, 2021. Т. 3. № 2. С. 75–87.

*For references:*

Lyamar O. (2021). Eigenfrequencies of oscillations of a plate which separates a two-layer ideal fluid with a free surface in a rectangular channel. *Mechanics and Mathematical Methods*. 3 (2). 75–87.



UDC 534:624.04

## SOME PROBLEMS OF OPTIMIZATION AND CONTROL OF THE NATURAL FREQUENCIES OF AN ELASTICALLY SUPPORTED RIGID BODY

S. Bekshaev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odesa state academy of civil engineering and architecture*

**Abstract.** The article analytically investigates the behavior of the frequencies and modes of natural vibrations of a rigid body, based on point elastic supports, when the position of the supports changes. It is assumed that the body is in plane motion and has two degrees of freedom. A linear description of body vibrations is accepted. The problems of determining such optimal positions of elastic supports at which the fundamental frequency of the structure reaches its maximum value are considered. Two groups of problems were studied. The first group concerns a body supported by only two supports. It was found that in the absence of restrictions on the position of the supports to maximize the fundamental natural frequency, these supports should be positioned so that the basic natural vibrations of the body are translational. Simple analytical conditions are formulated that must be satisfied by the corresponding positions of the supports. In real practical situations, these positions may be unreachable due to the presence of various kinds of restrictions due to design requirements. In this paper, optimization problems are considered taking into account a number of restrictions on the position of supports, typical for practice, expressed analytically by equations and inequalities. For each of the considered types of constraints, results are obtained that determine the optimal positions of the supports and the corresponding maximum values of the main natural frequencies. The approach applied allows us to consider other types of restrictions, which are not considered in the article. In the second group of problems for a body resting on an arbitrary number of supports, the optimal position of an additional elastic support introduced in order to maximize the fundamental frequency in fixed positions and the stiffness coefficients of the remaining supports was sought. It was found that this position depends on the value of the stiffness coefficient of the introduced support. Results are obtained that qualitatively and quantitatively characterize this position and the corresponding frequencies and modes of natural oscillations, including taking into account practically established limitations. The research method uses a qualitative approach, systematically based on the well-known Rayleigh theorem on the effect of imposing constraints on the free vibrations of an elastic structure.

**Keywords:** vibrations, rigid body, elastic support, natural frequency, optimization.

## ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ І УПРАВЛІННЯ ВЛАСНИМИ ЧАСТОТАМИ ПРУЖНО ОПЕРТОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

Бекшаєв С.Я.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація.** У роботі аналітично досліджується поведінка частот і форм власних коливань твердого тіла, опертого на зосереджені пружні опори, за умови зміни положень цих опор. Передбачається, що тіло здійснює плоскопаралельний рух і має два ступені свободи. Приймається лінійний опис коливань тіла. Розглянуто задачі визначення таких оптимальних положень пружних опор, при яких основна частота власних коливань конструкції досягає максимального значення. Вивчено дві групи задач. Перша група стосується тіла, опертого лише на дві опори. Встановлено, що за відсутності будь-яких обмежень на положення опор для максимального підвищення основної частоти ці опори повинні розташовуватися так, щоб основні власні коливання тіла були поступальними. Сформульовано прості аналітичні умови, яким мають задовольняти відповідні положення опор. У реальних практичних ситуаціях ці



положення можуть виявитися недосяжними у зв'язку з наявністю різноманітних обмежень, обумовлених проектними вимогами. У роботі розглянуто проблеми оптимізації з урахуванням низки характерних для практики обмежень на положення опор, які аналітично виражаються рівняннями або нерівностями. Для кожного з розглянутих видів обмежень отримано результати, які визначають оптимальні положення опор та відповідні максимальні значення основних власних частот. Застосований підхід дозволяє розглянути інші види обмежень, не розглянуті у статті. У другій групі задач для тіла, опертого на довільне число опор, розшукувалося оптимальне положення додаткової пружної опори, яка вводиться з метою максимального підвищення основної частоти при фіксованих положеннях і коефіцієнтах жорсткості інших опор. Встановлено, що це положення залежить від величини коефіцієнта жорсткості введеної опори. Отримано результати, які якісно та кількісно характеризують це положення та відповідні частоти та форми власних коливань, у тому числі з урахуванням практично обумовлених обмежень. Метод дослідження використовує якісний похід, що систематично спирається на відому теорему Релея про вплив накладання в'язі на вільні коливання пружної конструкції та її наслідки.

**Ключові слова:** коливання, тверде тіло, пружне закріплення, власна частота, оптимізація.

## 1. INTRODUCTION

During the operation of engineering structures, instruments and equipment experiencing dynamic effects, significant forces and displacements can occur in the elements of these structures, which can make it impossible to use them. If the structure contains elastic elements and is subjected to periodic loads, such conditions can be associated with the occurrence of resonance phenomena. One of the ways to eliminate these phenomena is to purposefully control the spectrum of natural frequencies of the structure by choosing its elastic-geometric characteristics. In particular, it is possible to influence this spectrum by choosing the location of the elastic constraints available to the designer. In the proposed work, some problems of controlling the natural frequency of an elastically fixed rigid body are considered. A feature of the approach used is the predominant use of qualitative methods.

## 2 LITERATURE ANALYSIS AND PROBLEM STATEMENT

There is a large number of studies devoted to the problems of control and optimization of the characteristics of engineering structures, in particular the frequencies of their natural vibrations [1]. Most of them use algorithms based on some of the many general mathematical optimization methods [2]. For the problems of controlling the frequency spectrum of an elastically fixed rigid body, were used numerical methods based on an enumeration of options [3]. At the same time, the solution of some problems can be found on the basis of simple qualitative considerations dating back to Rayleigh [4], without using complex mathematical methods and the associated formalization. A similar approach has been successfully applied in solving some problems of controlling the natural frequencies of elastic rod systems by varying the positions of the supports [5, 6]. In the present work, it is used to solve some problems related to the search for the positions of elastic supports of an absolutely rigid body, which provide the maximum of its fundamental natural frequency. Some results concerning the influence of the position of the supports of an elastically fixed rigid body on its natural frequencies are presented in article [7]. This work can be considered as its continuation and uses the conclusions obtained in it.

## 3 THE PURPOSE AND OBJECTIVES OF THE STUDY

The aim of this work is to study the behavior of the fundamental frequency of an engineering structure installed on point elastic supports when the position of the supports changes. In particular, positions are sought in which the frequency reaches its maximum, including under some limitations typical for practice. A mechanical model of a structure in the form of an absolutely rigid body, supported on linear elastic supports of finite rigidity, is used. It is assumed that it is possible to describe the model as a linear elastic system with two degrees of freedom. A similar model for the case of two supports was considered in various works, in particular in [8–10], but without any connection with optimization. As in [7], the study is based on the qualitative results of the theory of oscillations.

## 4 RESEARCH RESULTS

**4.1. Model description.** The model of the structure is considered, shown in Fig. 1 a. The support points, like the center of mass of the model, are located on one straight line, hereinafter called the axis of the model.

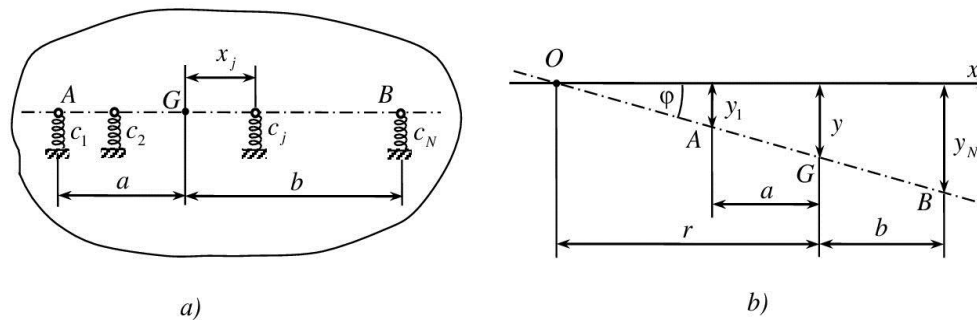


Fig. 1. The base model BM (a) and its coordinates (b)

It is assumed that during free oscillations, the displacements of the points of the model are parallel to the plane of the drawing, and the displacements of the points of the axis are perpendicular to the axis, so that the model has two degrees of freedom. The mass of the model is equal to, the moment of inertia about the axis passing through the center of mass and perpendicular to the plane of the figure is equal to.

On the model axis, we introduce the coordinate axis with the origin at its center of mass. The support numbered has a stiffness coefficient and a coordinate.

Along with the base model (BM), which has specific limited dimensions, we will also consider an extended model (EM) of the structure, which includes the points of its axis, unrestrictedly extended in both directions. The movement of the EM is completely determined by the movement of the BM.

**4.2. Preliminary results.** In what follows, we use the notation

$$C = \sum c_j, \quad S = \sum c_j x_j, \quad Q = \sum c_j x_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

$j = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  – number of resilient supports. In what follows, it is assumed everywhere that  $S \leq 0$ . This can always be provided by choosing the direction of the axis  $x$ . All considerations are carried out from the point of view of an observer positioned so that the axis  $x$  is directed to the right.

The article systematically uses

**4.2.1. Rayleigh's theorem on the effect of imposition of constraint on the natural frequencies of an elastic system** [4]: Let  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  be the squares, respectively, of the first (fundamental) and second natural frequencies of the elastic structure,  $\lambda_1^*$  – the square of the fundamental frequency of the reinforced structure, formed from the original by imposing one constraint. Then the relations are satisfied

$$\lambda_1 \leq \lambda_1^* \leq \lambda_2. \quad (2)$$

Equalities in (2) can be realized only if the constraint is established at the node of the vibration mode corresponding to one of the frequencies  $\sqrt{\lambda_1}$  or  $\sqrt{\lambda_2}$ .

The following results are also used [7].

**4.2.2. Properties of frequencies and modes of free vibration of the model.** The frequencies and modes (eigenforms) of free vibrations are determined by the system

$$\left. \begin{aligned} (C - M\lambda)Y + S\Phi &= 0 \\ SY + (Q - J\lambda)\Phi &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$



where  $Y$  and  $\Phi$  are the amplitude values of the displacement  $y$  of the center of mass  $G$  and the angle  $\varphi$  of inclination of the model axis (Fig. 1 *b*). The eigenforms satisfy the orthogonality relation

$$MY_1Y_2 + J\Phi_1\Phi_2 = 0, \quad (4)$$

where  $Y_k$  is the vertical displacement of the center of mass,  $\Phi_k$  is the angle of inclination of the axis of the  $k$ -th eigenform corresponding to the frequency  $\sqrt{\lambda_k}$ .

If, during free vibrations  $\Phi \neq 0$ , the corresponding mode has a node – the point of the EM axis, which remains stationary (point  $O$  in Fig. 1 *b*).

Relation (4) shows that for  $Y_1 = Y_2 \neq 0$   $\Phi_1$  and  $\Phi_2$  have different signs, i.e. if the center of mass is not a node of any of the modes, the nodes of two simple modes are located on opposite sides of the center of mass. It also follows from (4) that one of the two modes corresponding to simple frequencies is horizontal ( $\Phi = 0, Y \neq 0$ ) if and only if the other has a node at the center of mass ( $Y = 0, \Phi \neq 0$ ).

Equations (3) show that such modes can be realized if and only if  $S = 0$ .

As seen from Fig. 1 *b*,  $Y_k = \pm r_k \Phi_k$ , where  $r_k$  is the distance of the center of mass from the node of the  $k$ -th mode, the "+" sign is chosen if the node is located to the left of  $G$ , "-", if to the right. Then the orthogonality relation (4) can be rewritten as

$$r_1 r_2 = \frac{J}{M}. \quad (5)$$

If the mode has a node, the square of the corresponding frequency is

$$\lambda = \frac{\sum c_j X_j^2}{J + Mr^2}, \quad (6)$$

where  $r$  is the distance from the node to the center of mass  $G$ ,  $X_j = r + x_j$  is the distance from the node to the  $j$ -th support.

**4.2.3. Change in natural frequencies when changing the position of the supports.** If the mode corresponding to a simple frequency has a node, an increase in the distance of any of the supports from the node leads to an increase in this frequency. So, it follows that extremal values of frequencies can be reached when the movable support is in a node of the corresponding mode, or this mode does not have a node (the axis is horizontal).

The following results are for a two-support model.

**4.2.4. Qualitative features of eigenforms.** The modes of free vibrations of a two-support model can be of three types. A mode of the 1st type has an external node located on one side of both supports, or does not have a node (horizontal). The form of the 2nd type has an internal node located between the supports. A special mode has a node located on one of the supports.

If one of the two modes of the model (as a system with two degrees of freedom) is of the 1st type, then the other is of the 2nd type. If one of the two modes of the model is special, then the other is also special with a node on the opposite support.

**4.2.5. Criterion of form type.** The fundamental mode is a mode of the 1st kind, if  $J < Mab$ , of the 2nd kind, if  $J > Mab$ , and special, if  $J = Mab$ .

**4.2.6. Criterion of node position.** If  $c_1 a > c_2 b$ , the fundamental mode has a node to the left of the center of mass. If  $c_1 a = c_2 b$ , one of the two modes of the model (depending on the sign of  $J - Mab$ ) does not have a node (the axis is horizontal), and the other has a node in the center of mass.

**4.3. Optimization.** The position of the supports is considered optimal if in this position the fundamental frequency of the model reaches its maximum.

**4.3.1. Optimization of a two-support model,**  $N = 2$ ,  $x_1 = -a$ ,  $x_2 = b$ . The values of  $M$ ,  $J$ ,  $c_1$  and  $c_2$  are specified. Optimal values of  $a$  and  $b$  are sought.

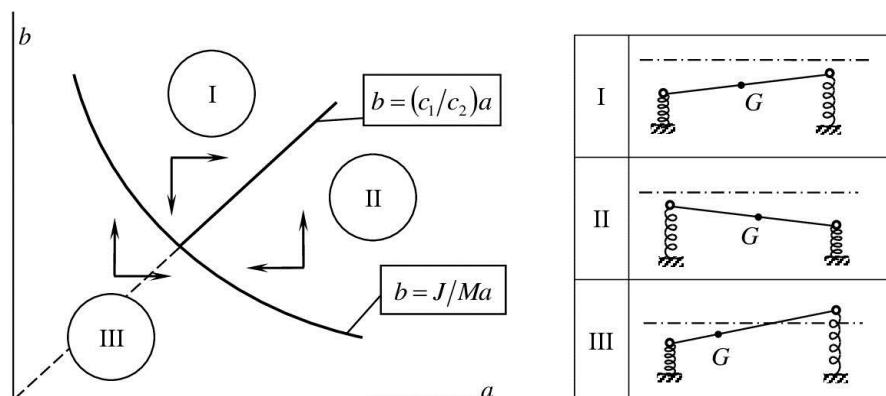
The imposition of one constraint prohibiting the rotation of the body leaves it with one degree of freedom, corresponding to the translational vertical (VT) oscillatory motion with a frequency whose square is equal to

$$\lambda_{VT} = \frac{c_1 + c_2}{M} \quad (7)$$

and which does not depend on the position of the supports,  $\lambda_{VT}(a, b) = \text{const}$ . Hence, on the basis of Sec. 4.2.1, it follows  $\lambda_1 \leq \lambda_{VT} \leq \lambda_2$ , i.e.  $\lambda_1 = \lambda_1(a, b)$  as a function of the support positions cannot exceed  $\lambda_{VT}$ . In accordance with Sec. 4.2.6, translational oscillations with frequency  $\sqrt{\lambda_{VT}}$  will occur if and only if  $c_1 a = c_2 b$ . So this equality determines the optimal position of the supports, provided that the translational motion will be the fundamental one, i.e. at  $J \leq abM$ . If the design requirements do not allow this inequality to be ensured, the fundamental vibrations will occur in the mode of the 2nd type. This can be the case if the project establishes restrictions on  $a$  and  $b$ , in particular, on the distance  $\ell = a + b$  between the supports. In this case, the fundamental frequency will be less than  $\sqrt{\lambda_{VT}}$ , but, as can be seen from the inequalities  $\lambda_1 \leq \lambda_{VT} \leq \lambda_2$ ,  $\sqrt{\lambda_{VT}}$  is the lower boundary of the second frequency of the two-support model.

To find the optimal positions of the supports, we will use the following graphical representation.

Fig. 2 shows the coordinate plane, the point of which with coordinates  $a$  and  $b$  corresponds to the position of the supports  $A$  and  $B$ . Lines are the graphs of the dependencies  $b = (c_1/c_2)a$  and  $b = J/Ma$ . Solid lines divide the plane into three areas, the points of which cannot correspond to the optimal positions. In the area I, inequalities  $c_2 b > c_1 a$  and  $J < abM$  are satisfied, which, in accordance with Sec. 4.2.5 and 4.2.6, means that in these positions the fundamental mode of the EM has a node to the right of both supports (see the top row in the table on the right in Fig. 2), and in accordance with Sec. 4.2.3, the frequency can be increased by moving the supports away from the node, i.e. increasing  $a$  and decreasing  $b$ . In this case, the corresponding point of the plane moves in the directions of the "arrows of growth" shown in area I.



**Fig. 2.** Mapping a set of two-support models on a plane  $ab$



In the area II, inequalities  $c_2b < c_1a$  and  $J < abM$  are satisfied, which means that in these positions the fundamental mode of EM has a node to the left of both supports (see the second row in the table on the right), and the frequency can be increased by moving the supports away from the node, i.e. decreasing  $a$  and increasing  $b$ . In this case, the corresponding point of the plane moves in the directions of the "arrows of growth" shown in area II.

Finally, in area III, the inequality  $J > abM$  is fulfilled, which means that in these positions the fundamental mode of the model has a node between the supports (see the bottom row in the table on the right), and the frequency can be increased by moving the supports away from the node, i.e. increasing both  $a$  and  $b$ . In this case, the corresponding point of the plane moves in the directions of the arrows shown in the area III. The dashed line does not separate qualitatively different fundamental modes.

Thus, the maximum of the frequency of the EM can occur only in the positions corresponding to the solid lines. It should be kept in mind that the points lying on the curve  $b = J/Ma$ , according to Sec. 4.2.5, correspond to special modes. For the left branch, the fundamental mode has a node on the right support  $B$  ( $X_1 = a + b, X_2 = 0, r = b$ ) and, according to (6), the following equality is satisfied

$$\lambda_1 = \frac{\sum c_j X_j^2}{J + Mr^2} = \frac{c_1(a+b)^2 + c_2 \cdot 0^2}{J + Mb^2} = \frac{c_1(a+b)^2}{Mab + Mb^2} = \frac{c_1}{M} \left(1 + \frac{a}{b}\right) = \frac{c_1}{M} \left(1 + \frac{Ma^2}{J}\right) = \frac{c_1}{M} \left(1 + \frac{J}{Mb^2}\right) \quad (8)$$

The right branch corresponds to the modes with a node on the left support  $A$  ( $X_1 = 0, X_2 = a + b, r = a$ ) and, accordingly

$$\lambda_1 = \frac{\sum c_j X_j^2}{J + Mr^2} = \frac{c_1 \cdot 0^2 + c_2(a+b)^2}{J + Ma^2} = \frac{c_2(a+b)^2}{Mab + Ma^2} = \frac{c_2}{M} \left(1 + \frac{b}{a}\right) = \frac{c_2}{M} \left(1 + \frac{Mb^2}{J}\right) = \frac{c_2}{M} \left(1 + \frac{J}{Ma^2}\right) \quad (9)$$

The relations (8, 9) show that the fundamental frequency of the model corresponding to the curved line increases monotonically when approaching the branch point at which

$$c_1a = c_2b \Rightarrow J = Mab = M(c_2/c_1)b^2 = M(c_1/c_2)a^2, \lambda_1 = \lambda_{VT}. \quad (10)$$

Thus, the EM has infinite number of optimal positions corresponding to the points of the solid half-line. For these positions  $\lambda = \lambda_{max} = \lambda_{VT}$ .

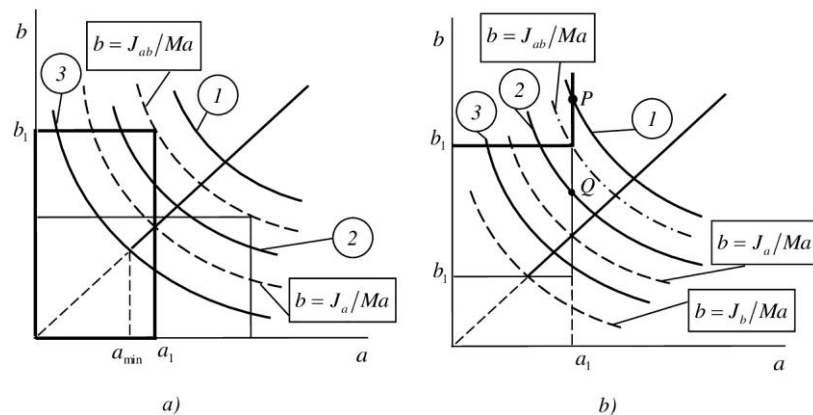
In real structures, in contrast to EM, there are restrictions imposed on  $a$  and  $b$ , which separate a certain permissible area on the plane  $ab$ . To find the optimal positions, this area should be superimposed on the plane  $ab$  with the shown solid lines. If a solid rectilinear segment falls into it, then the corresponding positions will be the solution to the problem. Otherwise, the optimal positions should be sought on the border of the permissible area, taking into account the directions of the "arrows of growth"  $\lambda$  (Fig. 2).

Consider the following optimization problems.

**4.3.1.1. Problem 1.** It is required to find the optimal positions of the supports under the given limitations

$$a \leq a_1, b \leq b_1, \quad (11)$$

where  $a_1$  and  $b_1$  are given constants.



**Fig. 3.** To the determination of the optimal positions of the supports of the two-support model under the limitations

a) – for the case  $a \leq a_1, b \leq b_1$ ,    b) – for the case  $a \leq a_1, b \geq b_1$

Let us consider separately the cases  $c_2 b_1 > c_1 a_1$  and  $c_2 b_1 < c_1 a_1$ . Let us introduce the notation

$$J_{ab} = Ma_1 b_1, \quad J_a = M(c_1/c_2) a_1^2, \quad J_b = M(c_2/c_1) b_1^2.$$

Let's assume at the beginning that  $c_2 b_1 > c_1 a_1$  (Fig. 3 a). Then  $J_{ab} > J_a$ . Let's select three areas on the plane  $ab$ :  $J \geq J_{ab}$ ,  $J_a \leq J < J_{ab}$ ,  $J < J_a$ . In fig. 3a, they are separated by dashed curved lines. The admissible area (11) is a rectangle with sides  $a_1$  and  $b_1$ .

At  $J \geq J_{ab}$  (line 1) none of the solid lines falls into the admissible area (point  $(a_1, b_1)$ ) turns out to be in the area III according to Fig. 2). Therefore, in accordance with the directions of the "arrows of growth" in Fig. 2, the optimal position is  $a_{opt} = a_1, b_{opt} = b_1$ . The fundamental mode has an inner node (is a mode of the 2nd type).

In the case  $J_a \leq J < J_{ab}$  (line 2), a part of the admissible area is cut off by line  $b = J/Ma$ , above which at  $c_2 b > c_1 a$  optimal positions there cannot be (area I in Fig. 2). Therefore, in accordance with the directions of the "arrows of growth" the optimal position is  $a_{opt} = a_1, b_{opt} = J/Ma_1$ . In this case, according to (8),  $\lambda = \lambda_{max} = (c_1/M)(1 + Ma_1^2/J)$  and the fundamental mode has a node on the right support.

Finally, at  $J < J_a$  (line 3), a solid rectilinear segment falls into the admissible area, the boundaries of which have coordinates  $a_{min} = \sqrt{(J/M)(c_2/c_1)}, a_{max} = a_1$ . In this case, there are infinite number of optimal positions of the supports, the coordinates of which are determined by the relations

$$\sqrt{\frac{J}{M} \frac{c_2}{c_1}} \leq a_{opt} \leq a_1, \quad b_{opt} = \frac{c_1}{c_2} a_{opt}. \quad (12)$$

These provisions correspond to purely translational natural oscillations with a frequency equal to  $\sqrt{\lambda_{VT}}$ .

The case  $c_2 b_1 < c_1 a_1$  is considered in a similar way, but now the permissible area is represented by another rectangle (Fig. 3 a). Omitting reasonings similar to those for the previous case, we present the results:





$$J \geq J_{ab} \Rightarrow a_{\text{opt}} = a_1, b_{\text{opt}} = b_1. \quad (13)$$

$$J_b \leq J < J_{ab} \Rightarrow b_{\text{opt}} = b_1, a_{\text{opt}} = J/Mb_1, \lambda_{\text{max}} = \frac{c_2}{M} \left( 1 + \frac{Mb_1^2}{J} \right), \text{ node on the left support.} \quad (14)$$

$$J < J_b \Rightarrow \sqrt{\frac{J}{M} \frac{c_1}{c_2}} \leq b_{\text{opt}} \leq b_1, a_{\text{opt}} = \frac{c_2}{c_1} b_{\text{opt}}, \lambda_{\text{max}} = \lambda_{\text{VT}} = \frac{c_1 + c_2}{M}, \text{ the mode is horizontal.} \quad (15)$$

**4.3.1.2. Problem 2.** It is required to find the optimal positions of the supports under the given limitations

$$a \leq a_1, \quad b \geq b_1. \quad (16)$$

Let us first consider the case  $c_2b_1 > c_1a_1$ , which corresponds to the permissible area in the form of a half-strip, bounded by bold straight lines (Fig. 3 *b*) above the straight line  $b = (c_1/c_2)a$ . The dash-dotted line shows the graph of dependence  $b = J_{ab}/Ma$ .

At  $J \geq J_{ab}$ , the boundary hyperbola  $b = J/Ma$  (line 1 in Fig. 3 *b*) intersects the vertical border of the permissible area at a point *P* and, in accordance with the directions of the "arrows of growth" (Fig. 2), this point corresponds to the optimal position of the supports.

At  $J < J_{ab}$  (line 2), the "arrows of growth" lead to the corner of the permissible area. So in the case  $c_2b_1 > c_1a_1$

$$J \geq J_{ab} \Rightarrow a_{\text{opt}} = a_1, b_{\text{opt}} = \frac{J}{Ma_1}, \lambda = \lambda_{\text{max}} = \frac{c_1}{M} \left( 1 + \frac{Ma_1^2}{J} \right), \text{ node on the right support,} \quad (17)$$

$$J < J_{ab} \Rightarrow a_{\text{opt}} = a_1, b_{\text{opt}} = b_1. \quad (18)$$

In the case  $c_2b_1 < c_1a_1$ , the permissible area (bounded by thin lines in Fig. 3 *b*) is intersected by a straight line  $b = (c_1/c_2)a$ . The plane is divided by two dashed lines into three parts.

When  $J > J_a$ , the line  $b = J/Ma$  (line 2) intersects the vertical border of the permissible area at a point *Q* that, as above, corresponds to the optimal position of the supports.

At  $J_b < J \leq J_a$  (line 3), a segment of the straight line  $b = (c_1/c_2)a$  falls into the permissible area, the lower boundary of which depends on *J*. This segment corresponds to the optimal positions of the supports, at which the fundamental vibrations will be vertical and translational.

When  $J \leq J_b$ , the entire part of the straight line  $b = (c_1/c_2)a$  that belongs to the permissible band becomes available. Thus, for  $c_2b_1 < c_1a_1$

$$J \geq J_a \Rightarrow a_{\text{opt}} = a_1, b_{\text{opt}} = \frac{J}{Ma_1}, \lambda = \lambda_{\text{max}} = \frac{c_1}{M} \left( 1 + \frac{Ma_1^2}{J} \right), \quad (19)$$

$$J_b < J \leq J_a \Rightarrow \sqrt{\frac{J}{M} \frac{c_2}{c_1}} \leq a_{\text{opt}} \leq a_1, b_{\text{opt}} = \frac{c_1}{c_2} a_{\text{opt}}, \lambda_{\text{max}} = \lambda_{\text{VT}} = \frac{c_1 + c_2}{M}. \quad (20)$$

$$J \leq J_b \Rightarrow \sqrt{\frac{J_b}{M} \frac{c_2}{c_1}} = \frac{c_2}{c_1} b_1 \leq a_{\text{opt}} \leq a_1, b_{\text{opt}} = \frac{c_1}{c_2} a_{\text{opt}}, \lambda_{\text{max}} = \lambda_{\text{VT}} = \frac{c_1 + c_2}{M}. \quad (21)$$

At  $J \leq J_a$ , the optimal position of the supports corresponds to a horizontal mode.



**4.3.1.3. Problem 3.** It is required to find the optimal positions of the supports under the given limitation

$$a + b = \ell = \text{const.} \quad (22)$$

The position of the supports, at which the natural vibrations are translational, is determined by the equality  $c_1 a = c_2 b$ , whence, taking into account (22)

$$a = \frac{c_2 \ell}{c_1 + c_2}, \quad b = \frac{c_1 \ell}{c_1 + c_2}. \quad (23)$$

This position is optimal if at the same time  $J \leq abM$ , i.e.

$$J \leq M \frac{c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2} \ell^2. \quad (24)$$

Let us show that, under the condition (22), equality  $c_1 a = c_2 b$  still provides a maximum for the fundamental frequency, even if it is realized through a rotational mode (of 2nd type), i.e. when the inequality opposite (24) is satisfied. To do this, recall (Sec. 4.2.6) that for  $c_1 a = c_2 b$ , the rotational mode has a node in the center of mass  $G$  ( $X_1 = a$ ,  $X_2 = b$ ,  $r = 0$ ) and it corresponds to the frequency determined by the equality

$$\lambda = \lambda_R = \frac{\sum c_j X_j^2}{J + Mr^2} = \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{J} = \frac{1}{J} \left[ c_1 \left( \frac{c_2 \ell}{c_1 + c_2} \right)^2 + c_2 \left( \frac{c_1 \ell}{c_1 + c_2} \right)^2 \right] = \frac{c_1 c_2 \ell^2}{(c_1 + c_2) J}, \quad (25)$$

moreover,  $\lambda_{VT} < \lambda_R \Leftrightarrow J < abM$ . Let's move the supports, breaking the equality  $c_1 a = c_2 b$ , but not changing  $\ell = a + b = \text{const.}$  In this new position, we will install the rigid hinge at the same distances  $a$  and  $b$  from the supports. The formed system with one degree of freedom has a "rotational" frequency, the square of which

$$\lambda_R^* = \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{J + Mr^2} < \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{J} = \lambda_R \quad (26)$$

according to Sec. 4.2.1, is greater than the square of the fundamental frequency  $\lambda_1$  of the system before the introduction of the hinge, from which it follows that as a result of the moving of the supports  $\lambda_1 \leq \lambda_R^* < \lambda_R$ , i.e.  $\lambda_R$  is the maximum of  $\lambda_1$ .

Thus, the solution to the problem is determined by relations (23), and

$$\lambda_{\max} = \begin{cases} \lambda_{VT} = \frac{c_1 + c_2}{M}, & \text{if } J \leq M \frac{c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2} \ell^2, \\ \lambda_R = \frac{c_1 c_2 \ell^2}{(c_1 + c_2) J} \leq \lambda_{VT}, & \text{if } J \geq M \frac{c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2} \ell^2. \end{cases} \quad (27)$$

**4.3.1.4. Problem 4.** It is required to find the optimal positions of the supports under the limitation expressing by inequality

$$a + b \leq \ell = \text{const.} \quad (28)$$

If  $J \geq M \left( \frac{c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2} \right) \ell^2$ , for any  $a$  and  $b$ , for which  $a + b = \ell^* < \ell$ , the inequality  $J > M \left( \frac{c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2} \right) \ell^{*2}$  holds, whence, according to (27), for these  $a$  and  $b$   $\lambda \leq c_1 c_2 \ell^{*2} / (c_1 + c_2) J < c_1 c_2 \ell^2 / (c_1 + c_2) J$ . Therefore, the maximum of frequency is reached



when equality is satisfied in (28) and  $a$  and  $b$  are determined by relations (23). In this case  $\lambda_{\max} = \lambda_R$  (25).

If  $J < Mc_1c_2\ell^2/(c_1+c_2)^2$ , we define  $\ell_J = \sqrt{J(c_1+c_2)^2/Mc_1c_2} < \ell$ . For any  $\ell \geq \ell_J$ , there is the optimal position of the supports (23), described in Sec. 4.3.1.3, providing a translational fundamental mode. From here

$$\frac{c_2\ell_J}{c_1+c_2} \leq a_{\text{opt}} \leq \frac{c_2\ell}{c_1+c_2}, \quad b_{\text{opt}} = \frac{c_1}{c_2}a_{\text{opt}}, \quad \lambda_{\max} = \lambda_{\text{VT}} = \frac{c_1+c_2}{M}. \quad (29)$$

#### 4.3.2. Multi-support model.

**Problem 5.** The values of  $M$ ,  $J$ ,  $x_j$ ,  $c_j$  are specified,  $j=1,2,\dots,N$ . The optimal position of the additional  $(N+1)$ -th support with a given stiffness coefficient  $c$  is sought.

Let us denote  $U$  – the original  $N$ -support model,  $U^*$  – the model formed from  $U$  by introducing an additional support,  $\lambda$  and  $\lambda^*$  – respectively, the squares of their frequencies.

The system (3) should be replaced with system

$$\left. \begin{aligned} (C+c-M\lambda^*)Y+(S+cx)\Phi &= 0 \\ (S+cx)Y+(Q+cx^2-J\lambda^*)\Phi &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (30)$$

where  $x$  is a coordinate of the introduced support.

Based on Sec. 4.2.1, we conclude that for any position of this support

$$\lambda_1^* \leq \lambda_{\text{VT}}^* = \frac{C+c}{M}. \quad (31)$$

Let us determine  $c_{\text{cr}} = M\lambda_2 - C$  – the value of the stiffness coefficient of the introduced support, at which, in accordance with Sec. 4.2.2, translational natural vibrations of the EM  $U^*$  with a frequency  $\sqrt{\lambda_2}$  are possible.

If  $c < c_{\text{cr}} = M\lambda_2 - C$ ,  $\lambda_{\text{VT}}^* < \lambda_2$  and the optimal coordinate of the movable support in accordance with Sec. 4.2.1 is equal to

$$x_{\text{opt}} = -\frac{S}{c}, \quad \lambda_{1\text{max}}^* = \lambda_{\text{VT}}^* = \frac{C+c}{M}. \quad (32)$$

If  $c \geq c_{\text{cr}} = M\lambda_2 - C \Rightarrow \lambda_{\text{VT}}^* \geq \lambda_2$ , the value  $\sqrt{\lambda_{\text{VT}}^*}$  cannot be exceeded by the fundamental frequency of  $U^*$  after the imposition of one constraint by virtue of Rayleigh's theorem (Sec. 4.2.1), i.e.  $\sqrt{\lambda_{\text{VT}}^*} = \sqrt{\lambda_2}$  is the second frequency of the EM  $U^*$ . We'll show that in this case the optimal position of the support of the EM  $U^*$  is the node of the second mode of the EM  $U$  corresponding to the frequency  $\sqrt{\lambda_2}$  (if it exists).

If we place an additional support of stiffness  $c$  in the node of the second mode of EM  $U$ , to which the natural frequency  $\sqrt{\lambda_2}$  corresponds, this mode and the corresponding frequency, and, consequently, the distance  $r_2$  from the node, do not depend on the value of  $c$ . Therefore, as relation (5) shows, also the value of  $r_1$  and, consequently, the other mode of the model  $U^*$  do not depend on  $c$ . The corresponding frequency is determined according to (6) by the equality

$$\lambda_1^* = \frac{\sum c_j X_j^2 + cX^2}{J + Mr_1^2}, \quad (33)$$

where  $X$  is the distance from the node of the 1st mode of  $U$  to the introduced support (to the node of the 2nd mode of  $U$ ). From here it can be seen that with growth of  $c$  this frequency increases monotonically and indefinitely and at some moment becomes equal to  $\sqrt{\lambda_2}$ . Thus, the frequency  $\sqrt{\lambda_2}$  becomes double, since it corresponds to two linearly independent modes, and, consequently, any linear combination of them, in particular, corresponding to vertical translational oscillations. Therefore  $\lambda_{VT}^* = \lambda_2$ , whence, taking into account (32), it follows that the corresponding value of  $c$  is equal to  $c_{cr} = M\lambda_2 - C$ .

With the growth of  $c$  above  $c_{cr}$ , the fundamental mode, without changing its configuration, becomes the second, because the corresponding frequency, determined from (33), becomes higher than  $\sqrt{\lambda_2}$ , which, thus, becomes the fundamental for  $U^*$ ,  $\lambda_1^* = \lambda_2$ . By virtue of inequality (2), Sec. 4.2.1,  $\lambda_1^* = \lambda_2 = \lambda_{1max}^*$ . Therefore at  $c > c_{cr}$ , the node of the second mode of the EM  $U$  is the optimal position of the additional support in the EM  $U^*$ . Its coordinate is

$$x_{opt} = -\frac{S}{c_{cr}} = -\frac{S}{M\lambda_2 - C}. \quad (34)$$

The results (32), (34) make it possible to represent schematically the graph of the square of the fundamental frequency  $\lambda_1^*$  of the model  $U^*$  as a function of the position of the additional support.

If the second equation of system (30) is divided by  $x$  and  $x$  is tended to  $\pm\infty$ , we obtain the equalities

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Phi x = -Y, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Phi = 0. \quad (35)$$

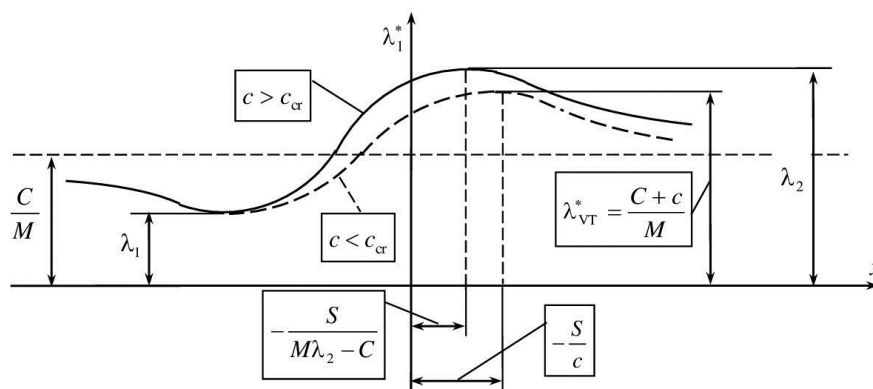
From the first equation, taking into account (35), we come to the conclusion

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow (C - M\lambda^*)Y + cY + cx\Phi \rightarrow 0, \quad (36)$$

whence

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \lambda^* = \frac{C}{M}. \quad (37)$$

Based on the results obtained, you can sketch a schematic graph of dependence of  $\lambda_1^*$  on the coordinate  $x$  of the support (Fig. 4), which allows you to find its optimal position.



**Fig. 4.** Schematic graph of the dependence of the square of the fundamental frequency on the position  $x$  of the movable support



If the fundamental mode of EM  $U$  has a node, then it is to the left of the center of mass  $G$ . To verify this, consider the first of equations (3). In accordance with Rayleigh's theorem (Sec. 4.2.1)  $\lambda_1 < \lambda_{VT} = C/M \Rightarrow C - M\lambda_1 > 0$ . In combination with the condition  $S < 0$  (Sec. 4.2), this means that the fundamental mode of EM  $U$  has  $Y$  and  $\Phi$  of the same sign, i.e. that the node is to the left of the center of mass.

The function  $\lambda_1^*(x)$  has two extrema: the node of the fundamental mode of EM  $U$ , to which the minimum  $\lambda_{1min}^* = \lambda_1$  corresponds, and a point with a coordinate  $x_{opt}$  determined from (32), if  $c < c_{cr}$ , and from (34), if  $c \geq c_{cr}$  (the node of the second mode of EM  $U$ ), to which the maximum  $\lambda_{1max}^* = \lambda_{VT}^*$ , respectively  $\lambda_{1max}^* = \lambda_2$  corresponds. According to Sec. 4.2.3, the function  $\lambda_1^*(x)$  has no other extrema, and these two extrema separate the areas of monotonicity. In fig. 4, the solid line corresponds to the case  $c > c_{cr}$ , and the dashed line – to the case  $c < c_{cr}$ . The results obtained make it possible to find the optimal positions of support under various constraints.

**Example.** Consider the problem of maximizing the fundamental frequency for the case  $N = 2$ ,  $x_1 = -a$ ,  $x_2 = b$ ,  $S = -(c_1a - c_2b)$ . The optimal position of the third support is sought taking into account the limitations  $-a \leq x \leq b$ .

If  $J \leq Mab$ , the node of the second mode falls inside or on the right border of the allowed range  $-a \leq x \leq b$ , and the node of the first mode is outside it or on the left border.

If, in this case  $c < (c_1a - c_2b)/b$ , the maximum of the function  $\lambda_1^*(x)$  according to (32) occurs at  $x > b$ , and  $\lambda_1^*(x)$  monotonically increases in the admissible range, whence

$$x_{opt} = b, \lambda_{1max}^* = \lambda_1^*(b).$$

If  $(c_1a - c_2b)/b \leq c < c_{cr} = M\lambda_2 - (c_1 + c_2)$ , according to (32)  $x_{opt} = (c_1a - c_2b)/c \leq b$ ,  $\lambda_{1max}^* = \lambda_{VT}^* = (c_1 + c_2 + c)/M$ .

Finally, if  $c \geq c_{cr} = M\lambda_2 - (c_1 + c_2)$ , the optimal position is a node of the second mode and  $\lambda_{1max}^* = \lambda_2$ .

In the case  $J > Mab$ , only the node of the first mode, which corresponds to the minimum of  $\lambda_1^*(x)$ , falls inside the permissible range  $-a \leq x \leq b$ , and when the support moves to both sides from this node,  $\lambda_1^*(x)$  monotonically increases within this range. It follows from this

$$x_{opt} = \begin{cases} -a, & \text{if } \lambda_1^*(-a) > \lambda_1^*(b), \\ b, & \text{if } \lambda_1^*(-a) < \lambda_1^*(b), \\ -a \text{ and } b, & \text{if } \lambda_1^*(-a) = \lambda_1^*(b). \end{cases}$$

And in this case  $\lambda_{1max}^* = \max\{\lambda_1^*(-a), \lambda_1^*(b)\}$ .

## 5 RESEARCH RESULTS DISCUSSION

The performed research made it possible to find the position of elastic supports, which provides the maximum of the fundamental natural frequency of an elastically fixed rigid body. In particular, the conditions are described under which the maximum of frequency is achieved with purely translational vibrations of the body. These results greatly facilitate the

determination of these positions and do not require cumbersome calculations using a formal mathematical optimization technique. They also make it possible to qualitatively trace the behavior of the natural frequency with some changes in the parameters of the model. The approach used allows its optimization taking into account various limitations..

## 6 CONCLUSIONS

A practically convenient approach for determining the position of elastic supports, which maximally increases the natural frequency of an elastically supported body, is proposed. It makes it possible to qualitatively characterize this position depending on the given design parameters. The results obtained can be used in the design and operation of various engineering structures in order to create conditions that ensure their reliable operation. They allow us to outline the directions for further research, including in consideration additional degrees of freedom of the body and a wider variety of elastic connections.

## References

1. Rozvany, G. I. N., Lewiński, T. (Eds) (2014). *Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics*. CISM International Centre for Mechanical Sciences. Springer. [in English].
2. Reytman, M. I., Shapiro, G. S. (1976). *Metody optimal'nogo proektirovaniya deformiruemyykh tel.* [Methods of Optimal Design of Deformable Bodies]. M.: Nauka. [in Russian].
3. Spiekermann, C. E., Radcliffe, C. J., Goodman, E. D. (1985). Optimal Design and Simulation of Vibrational Isolation Systems. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*. Vol. 107. Trans. ASME. 271–276.
4. Strutt, J. W. (Reyleigh). (1877). *Theory of Sound*, vol. I. Macmillan and Co. London. [in English].
5. Bekshaev, S. Ya., Koshkin, L. V., Nudel'man, Ya. L. (1976). K voprosu ob optimal'nom raspolozhenii mass i opor vibriruyushchego sterzhnya [On the question of the optimal arrangement of masses and supports of a vibrating rod]. *Sudostroenie I sudoremont* [Shipbuilding and ship repair]. M.: Reklaminformburo MMF. 7. 64 – 67. [in Russian].
6. Bekshaev, S. Ya. (2007). O vozmuscheniyakh sobstvennykh chastot vantovo-sterzhnevyykh sistem, podkreplennykh svyaziami [On perturbations of eigenfrequencies of cable-stayed rod systems, reinforced by constraints]. *Visnyk Odes'koi derzhavnoi akademii budivnitstva ta arkhitektury* [Bulletin of the Odessa State Academy of Education and Architecture]. 26. 40 –53. [in Russian].
7. Bekshaev, S. (2020). Yakisni vlastyvoli kolyvan' pruzhno obpertogo tverdogo tila [Qualitative properties of vibrations of elastically supported rigid body]. *Mechanics and Mathematical Methods*. 2(2). 85–94.
8. Loytsyansky, L. G., Lur'e, A. I. (1934). *Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical mechanics]. ch. III. M.-L.: GTTI. [in Russian].
9. Meirovitch, L. (2001). *Fundamentals of Vibrations*. McGraw-Hill. [in English].
10. Inman, Daniel J. (2014) *Engineering Vibrations*. 4-th ed. Pearson. [in English].

## Література

1. Rozvany G. I. N., Lewiński T. (eds). *Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics*. CISM International Centre for Mechanical Sciences. Springer. 2014. 471 p.
2. Рейтман М. И., Шапиро Г.С. *Методы оптимального проектирования деформируемых тел*. М.: Наука, 1976. 267 с.
3. Spiekermann C. E., Radcliffe C. J., Goodman E.D. Optimal Design and Simulation of Vibrational Isolation Systems. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*. Vol. 107. Trans. ASME. 1985. pp. 271–276.
4. Strutt, J. W. (Reyleigh). *Theory of Sound*, vol. I. Macmillan and Co. London. 1877. 326 + XI p.
5. Бекшаев С. Я., Кошкин Л. В., Нудельман Я. Л. К вопросу об оптимальном расположении масс и опор вибрирующего стержня. *Судостроение и судоремонт*. М.: Рекламинформбюро ММФ, 1976. Вып. VII. С. 64–67.

6. Бекшаев С.Я. О возмущениях собственных частот вантово-стержневых систем, подкрепленных связями. Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури, 2007. №26. С. 40–53.
7. Бекшаев С. Я. Якісні властивості коливань пружно опертого твердого тіла. Механіка та математичні методи, 2020. том 2. вип. 2. С. 85–94.
8. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Теоретическая механика, ч. III. М.-Л.: ГТТИ. 1934. 624 с.
9. Meirovitch L. Fundamentals of Vibrations. McGraw-Hill, 2001. 806 + XVIII p.
10. Inman Daniel J. Engineering Vibrations. 4-th ed. Pearson. 2014. 707 + XII p.

**Sergey Bekshaev**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Senior Lecturer

Didrihsona str., 4, Odessa, Ukraine 65029

s.bekshayev@gmail.com

ORCID: 0000-0002-5752-5321

*For references:*

Bekshaev S. (2021). Some problems of optimization and control of the natural frequencies of an elastically supported rigid body. Mechanics and Mathematical Methods. 3 (2). 88–102.

*Для посилань:*

Бекшаев С. Я. Деякі задачі оптимізації і управління власними частотами пружно опертого твердого тіла. Механіка та математичні методи, 2021. Т. 3. № 2. С. 88–102.

УДК 531.36, 531.38

## ПРО СТАБІЛІЗАЦІЮ НЕСТІЙКОГО ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ГІРОСКОПА ЛАГРАНЖА ЗА ДОПОМОГОЮ ДРУГОГО ГІРОСКОПА ТА ПРУЖНИХ ШАРНІРІВ

Святенко Я. І.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Донецький національний університет імені Василя Стуса

**Анотація:** Розглянуто можливість стабілізації нестійкого рівномірного обертання в середовищі з опором «сплячого» гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа, який обертається та пружних сферичних шарнірів. «Сплячий» гіроскоп обертається навколо нерухомої точки з пружним відновлювальним сферичним шарніром, а другий гіроскоп знаходиться над ним. Гіроскопи також з'єднані пружним відновлювальним сферичним шарніром і їх обертання підтримуються постійними моментами, спрямованими уздовж їх осей обертання. Показано, що стабілізація буде неможлива за відсутності пружності у загальному шарнірі і збігу центру мас другого гіроскопа з його центром. За допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа і коефіцієнтів пружності шарнірів, на підставі інваріантного підходу, отримані у вигляді системи трьох нерівностей умови стабілізації та знайдені умови на коефіцієнти пружності при яких старші коефіцієнти цих нерівностей додатні. Показано, що стабілізація завжди буде можлива при досить великій кутовій швидкості обертання другого гіроскопа в припущенні, що центр мас другого гіроскопа і механічної системи знаходяться нижче нерухомої точки. Розглянуто також можливість стабілізації нестійкого рівномірного обертання «сплячого» гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа та пружних сферичних шарнірів при відсутності дисипації. «Сплячий» гіроскоп обертається з кутовою швидкістю, яка не відповідає критерію Маєвського. Показано, що стабілізація буде неможлива за відсутності пружності у загальному шарнірі і збігу центру мас другого гіроскопа з його центром. На підставі інваріантного підходу отримано у вигляді системи трьох нерівностей умови стабілізації за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа і коефіцієнтів пружності шарнірів. Знайдено умову на кінетичний момент першого гіроскопа і коефіцієнти пружності при яких старші коефіцієнти цих нерівностей додатні. Показано, що при виконанні умови на кінетичний момент першого гіроскопа стабілізація завжди буде можлива при досить великій кутовій швидкості обертання другого гіроскопа при цьому центр мас другого гіроскопа може знаходитися і вище нерухомої точки.

**Ключові слова:** динамічно симетричні тверді тіла, середовище з опором, стабілізація, асимптотична стійкість.

## ON STABILIZATION OF UNSTABLE ROTATION IN THE RESISTING MEDIUM OF THE LAGRANGE GYROSCOPE USING THE SECOND GYROSCOPE AND ELASTIC HINGES

Ya. Sviatenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Donetsk national university of Vasyl Stus

**Abstract:** The possibility of stabilizing an unstable uniform rotation in a resisting medium of a "sleeping" Lagrange gyroscope using a rotating second gyroscope and elastic spherical hinges is considered. The "sleeping" gyroscope rotates around a fixed point with an elastic recovery spherical hinge, and the second gyroscope is located above it. The gyroscopes are also connected by an elastic spherical restorative hinge and their rotation is supported by constant moments directed along their





axes of rotation. It is shown that stabilization will be impossible in the absence of elasticity in the common joint and the coincidence of the center of mass of the second gyroscope with its center. With the help of the kinetic moment of the second gyroscope and the elasticity coefficients of the hinges, on the basis of an alternative approach, the stabilization conditions obtained in the form of a system of three inequalities and the conditions found on the elasticity coefficients at which the leading coefficients of these inequalities are positive. It is shown that stabilization will always be possible at a sufficiently large angular velocity of rotation of the second gyroscope under the assumption that the center of mass of the second gyroscope and the mechanical system are below the fixed point. The possibility of stabilizing the unstable uniform rotation of the "sleeping" Lagrange gyroscope using the second gyroscope and elastic spherical joints in the absence of dissipation is also considered. The "sleeping" gyroscope rotates at an angular velocity that does not meet the Mayevsky criterion. It is shown that stabilization will be impossible in the absence of elasticity in the common joint and the coincidence of the center of mass of the second gyroscope with its center. On the basis of the innovation approach, stabilization conditions were obtained in the form of a system of three irregularities using the kinetic moment of the second gyroscope and the elastic coefficients of the hinges. The condition for the angular momentum of the first gyroscope and the elastic coefficients at which the leading coefficients of these inequalities are positive are found. It is shown that if the condition for the angular momentum of the first gyroscope is fulfilled, stabilization will always be possible at a sufficiently large angular velocity of rotation of the second gyroscope, and in this case the center of mass of the second gyroscope can be located above the fixed point.

**Keywords:** dynamically symmetric rigid bodies, resisting medium, stabilization, asymptotic stability.

## 1 ВСТУП

Для консервативних механічних систем ефект стабілізації невірноваженого гіроскопа Лагранжа другим гіроскопом, який обертається, був розглянутий в роботах [1–3] та досліджений в багатьох інших [2] (див. с.5 і 85). В статтях [4–6] була розглянута можливість стабілізації твердими тілами, які обертається, нестійкого обертання гіроскопа Лагранжа з довільною вісесиметричною порожниною, що містить ідеальну рідину. У цих роботах були проведені аналітичні і чисельні дослідження з урахування основного та додаткових тонів коливань ідеальної рідини в еліпсоїдальній і циліндричній порожнинах. В роботі [7] розглянута можливість стабілізації гіроскопа з циліндричною порожниною за допомогою поділу циліндричної порожнини безмасовими поперечними перегородками. Показано, що введення навіть однієї перегородки може істотно стабілізувати нестійке обертання гіроскопа.

На даний час є досить велика кількість робіт, в яких проводяться різні дослідження динаміки твердого тіла, та системи зв'язаних твердих тіл, що обертаються у середовищі з опором, наприклад, [8–18]. Найбільш вдалий огляд сучасної літератури по цим задачам наданий в роботах [9, 10, 13–17]. Наведемо лише деякі роботи, які близькі до розглянутої у даній статті задачі. В роботі [9], на підставі критерію Льенара-Шіпара в іннорному вигляді, отримано умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опором. Ці умови записано у вигляді системи трьох нерівностей. Проведено аналітичні дослідження цих нерівностей. Отримано умови для величин постійного моменту і моменту інерції третьої головної осі, які при дії відновлювального моменту достатні для асимптотичної стійкості рівномірного обертання твердого тіла у середовищі з опором. В статті [10] отримано у вигляді системи трьох нерівностей умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання у середовищі з опором двох важких гіроскопів Лагранжа з'єднаних пружним сферичним шарніром. Обертання гіроскопів підтримується постійними моментами в інерціальній системі координат. У монографії [15] представлений уніфікований і добре розроблений підхід до динаміки кутових рухів твердих тіл, що зазнають моментів збурення різної фізичної природи. Строгий підхід, заснований на процедурі усереднення, застосовується до тіл з довільними еліпсоїдами інерції. Детально розглядається дія різних моментів збурень, як зовнішніх (гравітаційний, аеродинамічний, сонячний тиск), так і внутрішніх (завдяки в'язкій рідині в резервуарах, пружним і в'язкопружним властивостям тіла). В статті [16] досліджуються збурені обертальні рухи твердого тіла, близькі до випадку Лагранжа, під дією повільно змінювального в часі крутного моменту. У статті [17] вивчається новий клас обертань динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки з урахуванням нестационарного збурюючого моменту і повільно змінюваного з часом відновлюючого моменту.

В роботі [12] проведені дослідження впливу дисипативного і двох постійних моментів на стійкість стаціонарних рухів гіроскопа Лагранжа. Перший момент постійний в інерціальній системі відліку, а другий в неінерціальній, тобто в системі відліку, яка зв'язана з твердим тілом. Із цієї роботи слідує нестійкість рівномірного обертання у середовищі з опором "сплячого" гіроскопа Лагранжа, який знаходиться тільки під дією постійного моменту в системі відліку, яка зв'язана з твердим тілом. У зв'язку з цим виникає питання про можливість стабілізації нестійкого обертання такого гіроскопа, другим гіроскопом, який обертається і зв'язаний з першим пружним сферичним шарніром. З четвертої теореми Томсона-Тета-Четаєва [18] (див. с. 178) слідує, що в цьому випадку центр мас розглянутої механічної системи повинен знаходитися нижче нерухомої точки.

В основу даної роботи вкладено статті [10–13]. У статті отримано, на підставі критерію Льенара-Шіпара в іннорному вигляді, умови стабілізації нестійкого рівномірного обертання у середовищі з опором "сплячого" гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа, який обертається. «Сплячий» гіроскоп обертається навколо нерухої точки. Другий гіроскоп знаходиться над ним. Гіроскопи з'єднані пружним сферичним шарніром, а їх обертання підтримуються постійними моментами в системах координат, які зв'язані з твердими тілами. Показано, що стабілізація буде неможлива при відсутності пружності в шарнірі і співпадинні центру мас другого гіроскопа з їх спільною точкою з першим гіроскопом. Отримано у вигляді системи трьох нерівностей умови стабілізації відносно кінетичного моменту другого гіроскопа. Знайдено умови на коефіцієнти пружності шарнірів при яких старші коефіцієнти цих нерівностей додатні. Звідки слідує, що стабілізація завжди буде можлива при досить великій кутовій швидкості обертання другого гіроскопа в припущенні, що його центр мас і цент мас механічної системи знаходяться нижче нерухої точки. Проведено порівняння отриманих умов стабілізації з аналогічними умовами при відсутності дисипації.

## 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

У вступі зазначалося, що з роботи [12] та з четвертої теореми Томсона-Тета-Четаєва [18] (див. с. 178) слідує нестійкість рівномірного обертання у середовищі з опором "сплячого" гіроскопа Лагранжа. У цьому випадку розглянемо можливість стабілізації нестійкого обертання такого гіроскопа за допомогою другого гіроскопа та пружних шарнірів. Нехай динамічно симетричні тверді тіла  $S_1$  і  $S_2$  зв'язані в точці  $O_2$  пружним відновлювальним сферичним шарніром  $L_2 = k_2 s_1 \times c_2 / (|s_1| |c_2|)$ ,  $k_2 \geq 0$ . Тіло  $S_1$  має нерухому точку  $O_1$  в якій також діє пружний відновлювальний сферичний шарнір  $L_1 = k_1 v \times s_1 / |s_1|$ ,  $k_1 \geq 0$ . Кожне тверде тіло  $S_i$  ( $i=1,2$ ) знаходиться під дією сили тяжіння, дисипативного моменту  $M_i = D_i \omega_i$  ( $D_i = \text{diag}(D_{i1}, D_{i1}, D_{i3})$ ,  $D_{ij} > 0$ ;  $i=1,2; j=1,3$ ), що моделює середовище з опором і постійного моменту  $M_{iq} = Q_i e_3^i$ , який спрямований вздовж осі симетрії твердого тіла  $S_i$  та підтримує його рівномірне обертання. Тут  $\omega_i$  – кутова швидкість твердого тіла  $S_i$ .

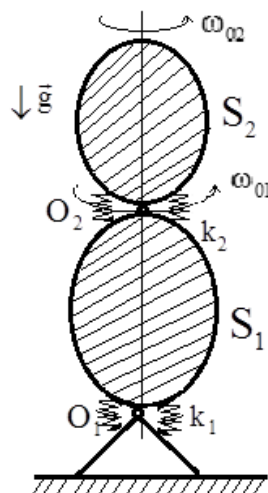


Рис.1. Система двох гіроскопів з двома пружними шарнірами

Рівняння обертання двох важких, пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа, з урахуванням дисипативних і постійних моментів, матимуть вигляд [10, 11]:

$$\begin{aligned} (J_1 \cdot \omega_1)' + m_2 s_1 \times (\omega_1 \times s_1 + \omega_2 \times c_2)' &= (m_1 c_1 + m_2 s_1) g \times v + L_1 - L_2 + M_{1q} - D_1 \omega_1; \\ (J_2 \cdot \omega_2)' + m_2 c_2 \times (\omega_1 \times s_1 + \omega_2 \times c_2)' &= m_2 c_2 g \times v + L_2 + M_{2q} - D_2 \omega_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $J_i = \text{diag}(A_i, A_i, C_i)$  – тензор інерції твердого тіла  $S_i$  відносно точки  $O_i$ ; точкою позначена абсолютна похідна;  $s_i = \overline{O_1 O_2}$ ;  $c_i = \overline{O_i C_i}$ ;  $m_i$  і  $C_i$  – маса і центр мас тіла  $S_i$ ;  $v = -g/|g|$ ,  $g$  – вектор прискорення вільного падіння,  $g = |g|$ .

Зв'яжемо з кожним із тіл  $S_i$  незмінно базис  $e_1^i e_2^i e_3^i$  з вершиною в точці  $O_i$ , осі якого направимо по головних осях тензора інерції  $J_i$  і введемо нерухомий базис  $e_1^0 e_2^0 e_3^0$ , вектор  $e_3^0$  якого збігається з векторами  $v$ . Нехай  $s_1 = s_1 e_3^1$ ,  $c_i = c_i e_3^i$ .

Векторні рівняння (1) в проекціях на осі рухомого базису  $e_1^i e_2^i e_3^i$  приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} A_1' \dot{p}_1 + (C_1 - A_1') q_1 r_1 + \mu [(\dot{p}_2 - q_2 r_2) \alpha_{22}^{11} - (\dot{q}_2 + p_2 r_2) \alpha_{21}^{11} + (p_2^2 + q_2^2) \alpha_{23}^{11}] &= \\ = (a_1 g - k_1) \alpha_{32}^{01} - k_2 (\alpha_{31}^{20} \alpha_{21}^{10} + \alpha_{32}^{20} \alpha_{22}^{10} + \alpha_{33}^{20} \alpha_{23}^{10}) - D_{11} p_1; \\ A_1' \dot{q}_1 - (C_1 - A_1') p_1 r_1 - \mu [(\dot{p}_2 - q_2 r_2) \alpha_{12}^{11} - (\dot{q}_2 + p_2 r_2) \alpha_{11}^{11} + (p_2^2 + q_2^2) \alpha_{13}^{11}] &= \\ = (-a_1 g + k_1) \alpha_{31}^{01} + k_2 (\alpha_{31}^{20} \alpha_{11}^{10} + \alpha_{32}^{20} \alpha_{12}^{10} + \alpha_{33}^{20} \alpha_{13}^{10}) - D_{11} q_1; \\ A_2' \dot{p}_2 + (C_2 - A_2') q_2 r_2 + \mu [(\dot{p}_1 - q_1 r_1) \alpha_{22}^{12} - (\dot{q}_1 + p_1 r_1) \alpha_{21}^{12} + (p_1^2 + q_1^2) \alpha_{23}^{12}] &= \\ = (a_2 g - k_1) \alpha_{32}^{02} - k_2 (\alpha_{31}^{10} \alpha_{21}^{20} + \alpha_{32}^{10} \alpha_{22}^{20} + \alpha_{33}^{10} \alpha_{23}^{20}) - D_{21} p_2; \\ A_2' \dot{q}_2 - (C_2 - A_2') p_2 r_2 - \mu [(\dot{p}_1 - q_1 r_1) \alpha_{21}^{12} - (\dot{q}_1 + p_1 r_1) \alpha_{11}^{12} + (p_1^2 + q_1^2) \alpha_{31}^{12}] &= \\ = (-a_1 g + k_1) \alpha_{31}^{02} + k_2 (\alpha_{31}^{10} \alpha_{21}^{20} + \alpha_{32}^{10} \alpha_{22}^{20} + \alpha_{33}^{10} \alpha_{23}^{20}) - D_{21} q_2; \\ C_i \dot{r}_i = -D_{i3} r_i + Q_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

До системи рівнянь (2) потрібно додати рівняння для напрямних косинусів [3]:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{11}^{i0} = -q_i \alpha_{31}^{i0} + r_i \alpha_{21}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{21}^{i0} = p_i \alpha_{31}^{i0} - r_i \alpha_{11}^{i0}; \quad \dot{\alpha}_{12}^{i0} = -q_i \alpha_{32}^{i0} + r_i \alpha_{22}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{22}^{i0} = p_i \alpha_{32}^{i0} - r_i \alpha_{12}^{i0}; \\ \dot{\alpha}_{13}^{i0} = -q_i \alpha_{33}^{i0} + r_i \alpha_{23}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{23}^{i0} = p_i \alpha_{33}^{i0} - r_i \alpha_{13}^{i0}; \quad \dot{\alpha}_{31}^{i0} = -p_i \alpha_{21}^{i0} + q_i \alpha_{11}^{i0}, \quad \dot{\alpha}_{32}^{i0} = -p_i \alpha_{22}^{i0} + q_i \alpha_{12}^{i0}; \\ \dot{\alpha}_{33}^{i0} = -p_i \alpha_{23}^{i0} + q_i \alpha_{13}^{i0}, \end{aligned}$$

де  $p_i, q_i, r_i$  – проекції вектора кутової швидкості  $\omega_i$  твердого тіла  $S_i$  на осі  $e_1^i e_2^i e_3^i$ ,  $J_i = \text{diag}(A_i, A_i, C_i)$ ,  $A_1' = A_1 + s_1^2 m_2$ ,  $A_2' = A_2$ ,  $a_1 = m_1 c_1 + m_2 s_1$ ,  $a_2 = m_2 c_2$ ,  $\mu = s_1 a_2$ .

Рівняння (3) відокремлюється від інших рівнянь і його характеристичне рівняння має один дійсний від'ємний корінь.

Припустимо, що з незбуреному русі тіло  $S_i$  обертається з кутовою швидкістю  $\omega_{0i}$  навколо вертикалі. Нехай  $\omega_{0i} = \omega_{0i} e_3^i$ .

Система (2) – (3) допускає частинний розв'язок:

$$\begin{aligned} p_i = q_i = 0, \quad r_i = \omega_{0i} = \frac{Q_i}{D_{i3}}; \\ \alpha_{11}^{i0} = \cos \omega_{0i} t, \quad \alpha_{12}^{i0} = \pm \sin \omega_{0i} t, \quad \alpha_{13}^{i0} = 0; \\ \alpha_{21}^{i0} = -\sin \omega_{0i} t, \quad \alpha_{22}^{i0} = \pm \cos \omega_{0i} t, \quad \alpha_{23}^{i0} = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\alpha_{31}^{i0} = 0, \alpha_{32}^{i0} = 0, \alpha_{33}^{i0} = \pm 1.$$

Зберігаючи колишні позначення, запишемо рівняння збуреного руху:

$$\begin{aligned} A'_i \dot{p}_i + (C_i - A'_i) \omega_{0j} q_j + \mu \left[ (\dot{p}_j - \omega_{0j} q_j) \alpha_{22}^{li} - (\dot{q}_j + \omega_{0j} p_j) \alpha_{ji}^{li} \right] = \\ = (a_i g - k_1) \alpha_{23}^{i0} - k_2 \alpha_{32}^{2i} - D_{i1} p_i; \\ A'_i \dot{q}_i - (C_i - A'_i) \omega_{0i} p_i - \mu \left[ (\dot{p}_j - \omega_{0j} q_j) \alpha_{ij}^{li} - (\dot{q}_j + \omega_{0j} p_j) \alpha_{11}^{li} \right] = \end{aligned} \quad (5)$$

$$\dot{\alpha}_{13}^{i0} = \omega_{0i} \alpha_{23}^{i0} - q_i, \quad \dot{\alpha}_{23}^{i0} = -\omega_{0i} \alpha_{13}^{i0} + p_i. \quad (6)$$

Тут  $i, k = 1, 2, j = 3 - i, \alpha_{11}^{ik} = \cos \phi_{ki}, \alpha_{12}^{ik} = -\sin \phi_{ki}, \alpha_{21}^{ik} = \sin \phi_{ki}, \alpha_{22}^{ik} = \cos \phi_{ki}, \phi_{ki} = \phi_k - \phi_i, \phi_i = \omega_{0i} t.$

Перейдемо до нових змінних  $p'_i, q'_i, \alpha_{13}^i, \alpha_{23}^i$  [9]:

$$\begin{aligned} p'_i &= p_i \sin \phi_i + q_i \cos \phi_i, \quad q'_i = p_i \cos \phi_i - q_i \sin \phi_i; \\ \alpha_{13}^i &= \alpha_{13}^{0i} \sin \phi_i + \alpha_{23}^{0i} \cos \phi_i, \quad \alpha_{23}^i = \alpha_{13}^{0i} \cos \phi_i - \alpha_{23}^{0i} \sin \phi_i. \end{aligned}$$

Нехай  $\Omega_i = q'_i - ip'_i, \gamma_i = \alpha_{13}^i + i\alpha_{23}^i$ , тоді система рівнянь (5) і (6) може бути представлена таким чином:

$$A'_i \ddot{\gamma}_i + (i\tilde{C}_i + D_{i1}) \dot{\gamma}_i + \mu \ddot{\gamma}_j = (a_i g - k_i - k_{i+1}) \gamma_i, \quad (i = 1, 2, j = 3 - i). \quad (7)$$

Тут і далі слід відрізнити нижній індекс  $i = 1, 2$  від уявної одиниці;  $\tilde{C}_i = C_i \omega_{0i}, k_3 = 0$

### 3 УМОВИ СТАБІЛІЗАЦІЇ НЕСТІЙКОГО РІВНОМІРНОГО ОБЕРТАННЯ ГІРОСКОПА

Представивши шукані функції у вигляді  $a \exp(\lambda t)$ , запишемо характеристичне рівняння збуреного руху (7) у вигляді:

$$\begin{vmatrix} F_1 & k_2 - \mu \lambda^2 \\ k_2 - \mu \lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

або

$$a_4 \lambda^4 + (a_3 + ib_3) \lambda^3 + (\tilde{a}_2 + ib_2) \lambda^2 + (\tilde{a}_1 + ib_1) \lambda + a_0 + ib_0 = 0, \quad (9)$$

де:

$$\begin{aligned} F_i &= A'_i \lambda^2 + (i\tilde{C}_i + D_{i1}) \lambda - a_i g + k_i + k_{i+1}; \\ a_3 &= A'_1 D_{21} + A'_2 D_{11} > 0, \quad b_3 = A'_1 \tilde{C}_2 + A'_2 \tilde{C}_1, \quad b_2 = \tilde{C}_1 D_{21} + \tilde{C}_2 D_{11}, \quad b_0 = 0; \\ a_4 &= A'_1 A'_2 - \mu^2 = (A_1 + c_1^2 m_1) (A_2 + c_2^2 m_2) + A_2 s_1^2 m_2 > 0; \\ \tilde{a}_2 &= -\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + (A'_2 + A'_1 + 2\mu) k_2 + k_1 A'_2 + D_{11} D_{21} - (a_1 A'_2 + A'_1 a_2) g; \\ \tilde{a}_1 &= D_{11} (k_2 - a_2 g) + D_{21} (k_1 + k_2 - a_1 g); \end{aligned} \quad (10)$$

$$b_1 = \tilde{C}_2(k_1 + k_2 - a_1g) + \tilde{C}_1(k_2 - a_2g), a_0 = k_1k_2 - [(a_1 + a_2)k_2 + k_1a_2]g + a_1a_2g^2.$$

З рівняння (8) слідує, що якщо центр мас другого гіроскопа збігається з точкою  $O_2$  ( $c_2 = 0, a_2 = 0, \mu = 0$ ) і відсутній пружний відновлювальний момент  $k_2 = 0$ , то в цьому випадку це рівняння розпадається на два рівняння і відсутній взаємовплив першого тіла на друге і стабілізація стає неможливою.

Для того, щоб всі нулі рівняння (9) лежали у відкритій лівій півплощині, згідно критерію Ляпуна–Шіпара, записаного в іннормному вигляді [19] (див. с.34), необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, складена з коефіцієнтів многочлена (9) була іннормно-позитивною, тобто були позитивно визначені матриці  $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5$  і  $\Delta_7$ :

$$I_1 = |\Delta_1| = a_3 = A_1' D_{21} + A_2' D_{11} > 0; \quad (11)$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 \end{vmatrix} > 0; \quad (12)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 \\ a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0; \quad (13)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -b_1 & -\tilde{a}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_0 \tilde{I}_7 > 0. \quad (14)$$

Так як  $I_1 > 0$ , то асимптотична стійкість рівномірних обертань в середовищі з опором двох гіроскопів Лагранжа, зв'язаних пружним сферичним шарніром, визначається трьома нерівностями (12) – (14).

З нерівності (11) видно, що при частковій дисипації ( $D_{11} = D_{21} = 0, D_{i3} \neq 0$ ) асимптотична стійкість неможлива.

Стабілізувати нестійке рівномірне обертання першого гіроскопа можна за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа  $\tilde{C}_2$  ( $\tilde{C}_2 = C_2 \omega_{02}$ ) та коефіцієнтів пружності  $k_1$  та  $k_2$ .

Таким чином, умови стабілізації відносно кінетичного моменту  $\tilde{C}_2$  запишуться так:

$$I_{32} \tilde{C}_2^2 + I_{31} \tilde{C}_2 + I_{30} > 0; \quad (15)$$

$$I_{54} \tilde{C}_2^4 + I_{53} \tilde{C}_2^3 + \dots + I_{51} \tilde{C}_2 + I_{50} > 0; \quad (16)$$

$$(\tilde{I}_{74} \tilde{C}_2^4 + \tilde{I}_{73} \tilde{C}_2^3 + \dots + \tilde{I}_{71} \tilde{C}_2 + \tilde{I}_{70}) a_0 > 0. \quad (17)$$

Тут:

$$I_{32} = D_{11}(D_{11}\mu^2 + A_1'^2 D_{21}) > 0, \quad I_{31} = -2D_{11}D_{21}\tilde{C}_1(A_1'A_2' - \mu^2);$$

$$I_{54} = D_{11}^2(k_2 + k_1 - g a_1)(\mu^2 D_{11} + A_1'^2 D_{21}); \quad (18)$$

$$\tilde{I}_{74} = D_{11}^2(\mu^2 D_{11} + A_1'^2 D_{21}) \left[ k_2^2 D_{11} + (g a_1 - k_1 - k_2)^2 D_{21} \right]. \quad (19)$$

Інші коефіцієнти не наведено через їхню громіздкість.

Дискримінант квадратної нерівності (15) має вигляд:

$$D = -4D_{11}D_{21}\mu^2(A_1'D_{21} + A_2'D_{11})^2 \tilde{C}_1^2 - 4D_{11}(\mu^2 D_{11} + A_1'^2 D_{21})(A_1'D_{21} + A_2'D_{11}) \times$$

$$\times (A_1'D_{21}^2 D_{11} + ((-g a_1 + k_2 + k_1)A_2'^2 + 2A_2'k_2\mu + (k_2 - a_2g)\mu^2)D_{11} +$$

$$+ ((-g a_1 + k_2 + k_1)\mu^2 + 2A_1'k_2\mu + A_1'^2(k_2 - a_2g))D_{21} + A_2'D_{11}^2 D_{21})$$

і при  $a_1 \leq 0, a_2 \leq 0$  він від'ємний. Так як  $I_{32} > 0$ , то в цьому випадку нерівність (15) завжди виконана. Слід зазначити, що центр мас механічної системи визначається виразом  $(a_1 + a_2)/(m_1 + m_2)$ . Таким чином, коли центр мас механічної системи буде знаходитися нижче нерухої точки, то в цьому разі нерівність (15) буде виконана.

Знайдемо умови для величини коефіцієнтів пружних моментів  $k_1$  та  $k_2$  при яких нерівності (15) – (17) будуть виконуватись при досить великих значеннях кутової швидкості  $\omega_{02}$ .

Із (18) слідує, що коефіцієнт  $I_{54}$  буде додатнім при  $k_1 + k_2 > a_1 g$ , а із (19) слідує, що  $I_{74}$  буде додатнім при  $k_1 k_2 - [(a_1 + a_2)k_2 + k_1 a_2]g + a_1 a_2 g^2 > 0$ .

Таким чином, маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 > a_1 g; \\ k_1 k_2 - [(a_1 + a_2)k_2 + k_1 a_2]g + a_1 a_2 g^2 > 0. \end{cases} \quad (20)$$

При виконанні системи нерівностей (20) і при досить великих значень кутової швидкості другого гіроскопа Лагранжа, можлива стабілізація нестійкого обертання першого гіроскопа другим гіроскопом, який обертається.

Система нерівностей (20) завжди буде виконана при  $k_1 > a_1 g, a_1 + a_2 \leq 0$  і  $a_2 \leq 0$ . Звідки слідує, що коли центр мас другого гіроскопу і механічної системи знаходяться нижче нерухої точки, то стабілізація буде можливою.

Так, наприклад, при  $k_1 = 0$  і  $a_1 + a_2 > 0$  система нерівностей (20) несумісна, оскільки  $a_1 g < k_2 < a_1 a_2 g / (a_1 + a_2)$  і звідки слідує, що  $a_1^2 < 0$ . Таким чином, при  $k_1 = 0$  системи нерівностей (20) отримує вид:

$$\begin{cases} k_2 > a_1 g; \\ k_2 > a_1 a_2 g / (a_1 + a_2); \\ a_1 + a_2 < 0. \end{cases} \quad (21)$$

При  $c_2 < 0$  ( $c_2 = -\tilde{c}_2$ ) і  $c_1 > 0$  нерівність  $a_1 + a_2 < 0$  еквівалентна нерівності  $\tilde{c}_2 > s + c_1 m_1 / m_2$  з якої слідує, що центр мас другого тіла повинен знаходитися нижче нерухої точки на відстані  $c_1 m_1 / m_2$ , що дає можливість стабілізувати нестійке обертання першого гіроскопа (Рис. 2).

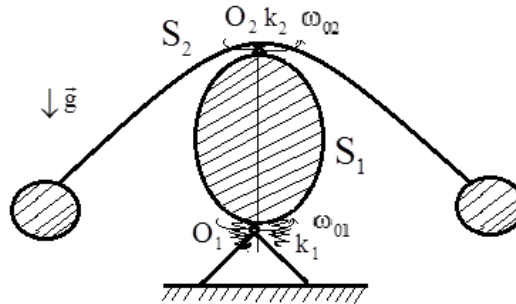


Рис. 2 Видозмінена система двох гіроскопів з двома пружними шарнірами

#### 4 ВИПАДОК ВІДСУТНОСТІ ДИСИПАТИВНОГО І ПОСТІЙНОГО МОМЕНТІВ

Допустимо, що для "сплячого" гіроскопа  $S_1$  не виконується критерій Маєвського, тобто  $\omega_{01}^2 < 4A_1' a_1 g / C_1^2$ . Чи можна у разі відсутності дисипативного та постійного моментів стабілізувати нестійке обертання цього гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа, що обертається та пружних моментів. У разі відсутності дисипативних ( $D_{ij} = 0, i = 1, 2; j = 1, 3$ ) і постійних моментів ( $Q_i = 0$ ) система рівнянь (2) – (3) допускає розв'язки (5), де  $r_i = \omega_{0i}$ . В цьому випадку  $\tilde{a}_1 = a_3 = b_2 = 0$  і характеристичне рівняння (9) матиме вид

$$a_4 \lambda^4 + ib_3 \lambda^3 + \tilde{a}_2 \lambda^2 + ib_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (22)$$

де коефіцієнти рівняння (22) визначаються за формулами (10) в яких потрібно покласти  $D_{ij} = 0$ . Стійкість консервативних систем визначаються тим, що корені рівняння (22) повинні знаходитися на уявній осі. Для цього в рівнянні (22) покладемо  $\lambda = i\lambda_1$  і це рівняння прийме вигляд:

$$a_4 \lambda_1^4 + ib_3 \lambda_1^3 + \tilde{a}_2 \lambda_1^2 + b_1 \lambda_1 + a_0 = 0. \quad (23)$$

Для того, щоб всі нулі рівняння (23) були різні і лежали надійсній осі, згідно критерію Лъенара – Шіпара, записаного в іннорному вигляді [3] (див. с. 48), необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, яка складена з коефіцієнтів цього рівняння була іннорно- позитивною, тобто щоб були позитивно визначені матриці  $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5$  і  $\Delta_7$ :

$$I_1 = |\Delta| = 4a_4 > 0;$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 4a_4 & 3a_3 \\ 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 \end{vmatrix} > 0; \quad (24)$$



$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 \\ a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0; \quad (25)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (26)$$

Так як  $I_1 > 0$ , то стійкість рівномірних обертань двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа визначається трьома нерівностями (24) – (26).

Так як і раніше, стабілізувати нестійке рівномірне обертання першого гіроскопа можна за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа  $\tilde{C}_2$  ( $\tilde{C}_2 = C_2 \omega_{02}$ ) та коефіцієнтів пружності сферичних шарнірів  $k_1$  та  $k_2$ .

Таким чином, умови стабілізації відносно кінетичного моменту  $\tilde{C}_2$  запишуться так:

$$I_{32} \tilde{C}_2^2 + I_{31} \tilde{C}_2 + I_{30} > 0; \quad (27)$$

$$I_{54} \tilde{C}_2^4 + I_{53} \tilde{C}_2^3 + \dots + I_{52} \tilde{C}_2 + I_{50} > 0; \quad (28)$$

$$I_{76} \tilde{C}_2^6 + I_{75} \tilde{C}_2^5 + \dots + I_{71} \tilde{C}_2 + I_{70} > 0. \quad (29)$$

Тут

$$I_{32} = 3A_1'^2 (A_1' A_2' - s_1^2 a_2^2) = 3A_1'^2 (A_1 + c_1^2 m_1) (A_2 + c_2^2 m_2) + A_2 s_1^2 m_2 > 0,$$

$$I_{31} = 2\tilde{C}_1 (3\mu^2 - a_4) a_4;$$

$$I_{32} = 3A_1'^2 (A_1' A_2' - s_1^2 a_2^2) = 3A_1'^2 (A_1 + c_1^2 m_1) (A_2 + c_2^2 m_2) + A_2 s_1^2 m_2 > 0, I_{31} = 2\tilde{C}_1 (3\mu^2 - a_4) a_4;$$

$$I_{30} = (A_1' A_2' - \mu^2) \left[ 3A_2'^2 \tilde{C}_1^2 + 8(A_1' A_2' + \mu^2) \left[ (k_1 + k_2 - a_1 g) A_2' + (k_2 - a_2 g) A_1' + 2\mu k_2 \right] \right];$$

$$Dis = -32(A_1' A_2' - \mu^2)^3 \left[ \tilde{C}_1^2 (A_1' A_2' + 2\mu^2) + 3A_1'^2 A_2' (k_1 + k_2 - a_1 g) + 3A_1'^3 (k_2 - a_2 g) + 3A_1'^2 (2\mu k_2 - A_2' a_1 g) \right];$$

$$I_{54} = A_1'^2 (\tilde{C}_1^2 - 3A_1' (a_1 g - k_1 - k_2)); \quad (30)$$

$$I_{76} = A_1'^2 (a_1 g - k_2 - k_1)^2 (\tilde{C}_1^2 - 4A_1' (a_1 g - k_1 - k_2)). \quad (31)$$

Інші коефіцієнти не наведено через їхню громіздкість.

Нерівність (27) буде невірною при

$$I_{31} \geq 0, I_{30} \geq 0, Dis \geq 0 \quad (32)$$

і  $x_1 \leq \tilde{C}_2 \leq x_2$ , де  $x_1$  і  $x_2$  додатні корені квадратного рівняння (27). Додатність коренів визначається нерівністю (32).

Щоб були  $I_{54} > 0$  і  $I_{76} > 0$  необхідно покласти

$$\tilde{C}_1^2 > 4A_1'(a_1 g - k_2 - k_1). \quad (33)$$

Із нерівностей  $4A_1'(a_1 g - k_2 - k_1) < \tilde{C}_1^2 < 4A_1' a_1 g$  слідує, що при досить великій кутовій швидкості  $\omega_{02}$  буде можлива стабілізація.

Таким чином, у випадку наявності дисипації стабілізація можлива тільки тоді, коли центр мас другого тіла знаходиться нижче нерухомої точки (див. Рис.2), а при відсутності дисипації центр мас другого тіла може знаходитися вище нерухомої точки (див. Рис.1). У цьому є принципова різниця в цих двох випадках

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

З четвертої теореми Томсона-Тета-Четаєва та інших робіт слідує нестійкість рівномірного обертання у середовищі з опором "сплячого" гіроскопа Лагранжа, який знаходиться під дією постійного моменту, спрямованого уздовж його осі обертання. У зв'язку з цим виникає питання про можливість стабілізації нестійкого обертання такого гіроскопа за допомогою другого гіроскопа та пружних сферичних шарнірів. Для вирішення цієї задачі були отримані рівняння обертання у середовища з опором системи двох гіроскопів Лагранжа, які з'єднані пружним відновлювальним сферичним шарніром. Обертання цих гіроскопів підтримуються постійними моментами, спрямованими уздовж їх осей обертання у незбуреному русі. На підставі критерію Льенара-Шіпара в іннорному виді отримано у вигляді системи трьох нерівностей умови стабілізації за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа і коефіцієнтів пружності шарнірів та знайдені умови на коефіцієнти пружності при яких старші коефіцієнти цих нерівностей додатні. Показано, що стабілізація завжди буде можлива при досить великій кутовій швидкості обертання другого гіроскопа в припущенні, що центр мас другого гіроскопа і механічної системи знаходяться нижче нерухомої точки. Розглянуті умови стабілізації «сплячого» гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа та пружних шарнірів при відсутності дисипації. На підставі іннорного підходу отримано у вигляді системи трьох нерівностей умови стабілізації за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа і коефіцієнтів пружності шарнірів. Знайдено умову на кінетичний момент першого гіроскопа і коефіцієнти пружності при яких старші коефіцієнти цих нерівностей додатні. Показано, що при виконанні умови на кінетичний момент першого гіроскопа стабілізація завжди буде можлива при досить великій кутовій швидкості обертання другого гіроскопа при цьому центр мас другого гіроскопа може знаходитися і вище нерухомої точки. У цьому є принципова різниця у наявності та відсутності дисипації.

## 6 ВИСНОВКИ

Розглянуто можливість стабілізації нестійкого рівномірного обертання в середовищі з опором «сплячого» гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа, який обертається та пружних сферичних шарнірів. «Сплячий» гіроскоп обертається навколо нерухомої точки з пружним відновлювальним сферичним шарніром, а другий гіроскоп знаходиться над ним. Гіроскопи також з'єднані пружним відновлювальним сферичним шарніром і їх обертання підтримуються постійними моментами, спрямованими уздовж їх осей обертання. На підставі критерію Льенара-Шіпара в

іншому виді отримано у вигляді системи трьох нерівностей умови стабілізації. Показано, що стабілізація буде неможлива за відсутності пружності у загальному шарнірі і збігу центру мас другого гіроскопа з цим шарніром. За допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа і коефіцієнтів пружності шарнірів, на підставі іншого підходу, отримані у вигляді системи трьох нерівностей умови стабілізації та знайдені умови на коефіцієнти пружності при яких старші коефіцієнти цих нерівностей додатні. Показано, що стабілізація завжди буде можлива при досить великий кутовий швидкості обертання другого гіроскопа в припущенні, що центр мас другого гіроскопа і механічної системи знаходяться нижче нерухомої точки. Проведено порівняння отриманих умов стабілізації з аналогічними умовами при відсутності дисипації.

## Література

1. Савченко А. Я. Устойчивость стационарных движений механических систем. К.: Наук. думка, 1977. 160 с.
2. Светличная Н. В. Об эффекте стабилизации покоящегося неуравновешенного гироскопа вторым вращающимся. Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр, 1989. Вып. 21. С. 74 – 76.
3. Савченко А. Я., Болграбская И. А., Кононыхин Г. А. Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел. К.: Наук. Думка, 1991. 166 с.
4. Кононов Ю. Н., Хомяк Т. В. Об эффекте стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью вращающимся твердым телом. Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. Тр, 2004. Вып. 34. С. 161 – 169.
5. Kononov Y. N., Khomyak T. V. On the rotation stabilization of the unstable gyroscope containing fluid by rotating the rigid body. Facta Universitatis. Series Mechanics, Automatic Control and Robotics. 2005. Vol. 4. № 17. P. 195-201.
6. Khomyak T. V. Stabilization of the Unstable Spinning of a Lagrange Top Filled with a Fluid. International applied mechanics. A translation of Prikladnaya Mekhanika 2015. 51. №6. P. 702 – 709. doi.org/10.1007/s10778-015-0728-0
7. Кононов Ю. Н. О влиянии перегородок в цилиндрической полости на устойчивость равномерного вращения волчка Лагранжа. Матем. физ. и нелин. механика, 1992. Вып. 17 (51). С. 33 – 37.
8. Болграбская И. А., Лесина М. Е., Чебанов Д. А., Динамика систем связанных твёрдых тел. Серия “Задачи и методы: математика, механика, кибернетика”. ИПММ НАН Украины, Том 9. К.: Наукова Думка. 2012. 395 с.
9. Kononov Yu. M. Stability of a Uniform Rotation of an Asymmetric Rigid Body in a Resisting Medium. International applied mechanics. A translation of Prikladnaya Mekhanika. 2021. 57. № 4. P. 432–439. DOI: 10.1007/s10778-021-01095-1
10. Kononov Yu. M., Sviatenko Ya. I. On the subject of influence of dissipative and constant of moments on the stability of uniform rotations of non-free two elastically connected gyroscopes of Lagrange. Праці ІПММНАН України, 2020. Том 34. С.50 – 61. DOI: 10.37069/1683-4720-2020-34-6
11. Кононов Ю. М., Святенко Я. І. Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа другим гіроскопом, який обертається. [Електронний ресурс]. Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021». <http://iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Kononov.pdf>.
12. Карапетян А. В. О стационарных движениях волчка Лагранжа с возбуждением в сопротивляющейся среде. Вестник Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 2000. №5. С. 39 – 43.
13. Dornheim M. New Path to Space. Aviation Week & Space Technology. 2005, 24. P. 26-30.
14. Aslanov V. S. Rigid Body Dynamics for Space Applications. Butterworth Heinemann. Oxford. 2017. 410 pp.
15. Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer. 2017. 260 pp.

16. Akulenko L. D., Zinkevich Ya. S., Kozachjenko T. A., Leshenko D. D. The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2017. 81(2). С. 79 – 84. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.08.001
17. Leshchenko D. D., Ershkov S. V., Kozachenko T. A. Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques. *Nonlinear Dyn.* 2021. P. 1517–1528. DOI: 10.1007/s11071-020-06195-0
18. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 320 с.
19. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979. 304 с.

## References

1. Savchenko, A. Ya. (1977). *Ustojchivost' stacionarnyh dvizhenij mekhanicheskikh system*. [Stability of stationary movements of mechanical systems]. K.: Nauk. Dumka. [in Russian].
2. Svetlichnaya, N. V. (1989). Ob effekte stabilizacii pokoyashchegosya neuravnovesnennogo giroskopa vtorym vrashchayushchimsya. [On the stabilization effect of an unbalanced gyroscope at rest by the second rotating one]. *Mekhanika tverdogo tela*. Mezhdved. sb. nauch. tr. 21. 74–76. [in Russian].
3. Savchenko, A. YA., Bolgrabskaya, I. A., Kononyhin, G. A. (1991). *Ustojchivost' dvizheniya sistem svyazannyh tvyordyh tel*. [Stability of motion of systems of connected rigid bodies]. K.: Nauk. Dumka. [in Russian].
4. Kononov, Yu. N., Homyak, T. V. (2004). Ob effekte stabilizacii neustojchivogo vrashcheniya tverdogo tela s zhidkost'yu vrashchayushchimsya tverdym telom. [On the stabilization effect of the unstable rotation of a rigid body with a liquid by a rotating rigid body]. *Mekhanika tverdogo tela*. Mezhdved. sb. nauch. tr. 34. 161–169. [in Russian].
5. Kononov, Y. N., Khomyak, T. V. (2005). On the rotation stabilization of the unstable gyroscope containing fluid by rotating the rigid body. *Facta Universitatis. Series Mechanics, Automatic Control and Robotics*. 4. 17. 195–201.
6. Khomyak, T. V. (2015). Stabilization of the Unstable Spinning of a Lagrange Top Filled with a Fluid. *International applied mechanics*. A translation of *Prikladnaya Mekhanika*. 51. 6. 702–705.
7. Kononov, Yu. N. (1992). O vliyanii peregorodok v cilindricheskoj polosti na ustojchivost' ravnomernogo vrashcheniya volchka Lagranzha. [On the influence of partitions in a cylindrical cavity on the stability of the uniform rotation of the Lagrange top]. *Matem. fiz. i nelin. mekhanika*. 17 (51). 33–37. [in Russian].
8. Bolgrabskaya, I. A., Lesina, M. E., Chebanov, D. A. (2012). *Dinamika sistem svyazannyh tvyordyh tel*. [Dynamics of systems of coupled solids]. Seriya “Zadachi i metody: matematika, mekhanika, kibernetika”. IPMM NAN Ukrainy. 9. K.: Naukova Dumka. [in Russian].
9. Kononov, Yu. M. (2021). Stability of a Uniform Rotation of an Asymmetric Rigid Body in a Resisting Medium. *International applied mechanics*. A translation of *Prikladnaya Mekhanika*. 57. 4. 432–439. DOI: 10.1007/s10778-021-01095-1
10. Kononov, Yu. M., Sviatenko, Ya. I. (2020). On the subject of influence of dissipative and constant of moments on the stability of uniform rotations of non-free two elastically connected gyroscopes of Lagrange. *Praci IPMM NAN Ukraini*. 34. 50 – 61. DOI: 10.37069/1683-4720-2020-34-6
11. Kononov, Yu. M., Svyatenko, Ya. I. (2021). *Pro stabilizaciyu nestojkogo obertannya u seredovishchi z oporom giroskopa Lagranzha drugim giroskopom, yakij obertaet'sya*. [On the stabilization of unstable rotation in a medium with the resistance of the Lagrange gyroscope by a second rotating gyroscope]. [Elektronnij resurs]. Konferenciya molodih uchenih «Pidstrigachivs'ki chitannya – 2021» Rezhim dostupu: <http://iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Kononov.pdf>. [in Ukrainian].
12. Karapetyan, A. V. (2000). O stacionarnyh dvizheniyah volchka Lagranzha s vozbuzhdeniem v soprotivlyayushchejsya srede. [Stationary motions of a Lagrange top with excitation in a resisting medium]. *Vestnik Moskovskogo un-ta*. Ser. 1. Matematika. Mekhanika. 5. 39–43. [in Russian].
13. Dornheim, M. (2005). New Path to Space. *Aviation Week & Space Technology*. 24. 26–30.
14. Aslanov, V. S. (2017). *Rigid Body Dynamics for Space Applications*. Butterworth Heinemann. Oxford.



15. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*. Springer.
16. Akulenko, L. D., Zinkevich, Ya. S., Kozachjenko, T. A., Leshenko, D. D. (2017). The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 81(2). 79–84.  
DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.08.001
17. Leshchenko, D. D., Ershkov, S. V., Kozachenko, T. A. (2021). Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques. *Nonlinear Dyn.* 1517–1528. DOI: 10.1007/s11071-020-06195-0
18. Merkin, D. R. (1976). *Vvedenie v teoriyu ustojchivosti dvizheniya*. M.: Nauka. [in Russian].
19. Jury, E. I. (1979). *Innory i ustojchivost' dinamicheskikh sistem*. M.: Nauka. [in Russian].

**Святенко Ярослав Ігорович**

Донецький національний університет імені Василя Стуса, аспірант  
вул. 600 - річчя, 21 м. Вінниця, Україна 21021  
filioeee@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-2317-3556

*Для посилань:*

Святенко Я. І. Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа та пружних шарнірів. *Механіка та математичні методи*, 2021. Т. 3. № 2. С. 103–116.

*For references:*

Sviatenko Ya. (2021). On stabilization of unstable rotation in the resisting medium of the Lagrange gyroscope using the second gyroscope and elastic hinges. *Mechanics and Mathematical Methods*. 3 (2). 103–116.

Наукове видання

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ  
MECHANICS AND MATHEMATICAL METHODS

Науковий журнал

(українською, російською та англійською мовами)

Відповідальний за випуск: Ковров А. В.

Підписано до друку 22.12.2021 р.  
Формат 60×84/8 Папір офісний Гарнітура Times  
Цифровий друк. Ум.-друк. арк. 13,49.  
Наклад 50 прим. Зам. №21-16Е

Видавець і виготовлювач:  
**Одеська державна академія будівництва та архітектури**  
**Свідоцтво ДК № 4515 від 01.04.2013 р.**  
Україна, 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 4.  
тел.: (048) 729-85-34, e-mail: [rio@ogasa.org.ua](mailto:rio@ogasa.org.ua)

---

Надруковано в авторській редакції з готового оригінал-макету  
в редакційно-видавничому відділі ОДАБА