УДК 531.36, 531.38

ПРО СТАБІЛІЗАЦІЮ НЕСТІЙКОГО ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ГІРОСКОПА ЛАГРАНЖА ЗА ДОПОМОГОЮ ДРУГОГО ГІРОСКОПА ТА ПРУЖНИХ ШАРНІРІВ

Святенко Я. І.[1]
[1]*Донецький національний університет імені Василя Стуса*

Анотація: Розглянуто можливість стабілізації нестійкого рівномірного обертання в середовищі з опором «сплячого» гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа, який обертається та пружних сферичних шарнірів. «Сплячий» гіроскоп обертається навколо нерухомої точки з пружним відновлювальним сферичним шарніром, а другий гіроскоп знаходиться над ним. Гіроскопи також з'єднані пружним відновлювальним сферичним шарніром і їх обертання підтримуються постійними моментами, спрямованими уздовж їх осей обертання. Показано, що стабілізація буде неможлива за відсутності пружності у загальному шарнірі і збігу центру мас другого гіроскопа з його центром. За допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа і коефіцієнтів пружності шарнірів, на підставі іннорного підходу, отримані у вигляді системи трьох нерівностей умови стабілізації та знайдені умови на коефіцієнти пружності при яких старші коефіцієнти цих нерівностей додатні. Показано, що стабілізація завжди буде можлива при досить великий кутовий швидкості обертання другого гіроскопа в припущенні, що центр мас другого гіроскопа і механічної системи знаходяться нижче нерухомої точки. Розглянуто також можливість стабілізації нестійкого рівномірного обертання «сплячого» гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа та пружних сферичних шарнірів при відсутності дисипації. «Сплячий» гіроскоп обертається з кутовою швидкістю, яка не відповідає критерію Маєвского. Показано, що стабілізація буде неможлива за відсутності пружності у загальному шарнірі і збігу центру мас другого гіроскопа з його центром. На підставі іннорного підходу отримано у вигляді системи трьох нерівностей умови стабілізації за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа і коефіцієнтів пружності шарнірів. Знайдено умову на кінетичний момент першого гіроскопа і коефіцієнти пружності при яких старші коефіцієнти цих нерівностей додатні. Показано, що при виконанні умови на кінетичний момент першого гіроскопа стабілізація завжди буде можлива при досить великий кутовий швидкості обертання другого гіроскопа при цьому центр мас другого гіроскопа може знаходиться і вище нерухомої точки.

Ключові слова: динамічно симетричні тверді тіла, середовище з опором, стабілізація, асимптотична стійкість.

ON STABILIZATION OF UNSTABLE ROTATION IN THE RESISTING MEDIUM OF THE LAGRANGE GYROSCOPE USING THE SECOND GYROSCOPE AND ELASTIC HINGES

Ya. Sviatenko [1]
[1]*Donetsk national university of Vasyl Stus*

Abstract: The possibility of stabilizing an unstable uniform rotation in a resisting medium of a "sleeping" Lagrange gyroscope using a rotating second gyroscope and elastic spherical hinges is considered. The "sleeping" gyroscope rotates around a fixed point with an elastic recovery spherical hinge, and the second gyroscope is located above it. The gyroscopes are also connected by an elastic spherical restorative hinge and their rotation is supported by constant moments directed along their axes of rotation. It is shown that stabilization will be impossible in the absence of elasticity in the common joint and the coincidence of the center of mass of the second gyroscope with its center. With the help of the kinetic moment of the second gyroscope and the elasticity coefficients of the hinges, on the basis of an alternative approach, the stabilization conditions obtained in the form of a system of three inequalities and the conditions found on the elasticity coefficients at which the leading coefficients of these inequalities are positive. It is shown that stabilization will always be possible at a sufficiently large angular velocity of rotation of the second gyroscope under the assumption that the center of mass of the second gyroscope and the mechanical system are below the fixed point. The possibility of stabilizing the unstable uniform rotation of the "sleeping" Lagrange gyroscope using the second gyroscope and elastic spherical joints in the absence of dissipation is also considered. The "sleeping" gyroscope rotates at an angular velocity that does not meet the Mayevsky criterion. It is shown that stabilization will be impossible in the absence of elasticity in the common joint and the coincidence of the center of mass of the second gyroscope with its center. On the basis of the innovation approach, stabilization conditions were obtained in the form of a system of three irregularities using the kinetic moment of the second gyroscope and the elastic coefficients of the hinges. The condition for the angular momentum of the first gyroscope and the elastic coefficients at which the leading coefficients of these inequalities are positive are found. It is shown that if the condition for the angular momentum of the first gyroscope is fulfilled, stabilization will always be possible at a sufficiently large angular velocity of rotation of the second gyroscope, and in this case the center of mass of the second gyroscope can be located above the fixed point.

Keywords: dynamically symmetric rigid bodies, resisting medium, stabilization, asymptotic stability.

1 ВСТУП

Для консервативних механічних систем ефект стабілізації неврівноваженого гіроскопа Лагранжа другим гіроскопом, який обертається, був розглянутий в роботах [1–3] та досліджений в багатьох інших [2] (див. с.5 і 85). В статтях [4–6] була розглянута можливість стабілізації твердими тілами, які обертається, нестійкого обертання гіроскопа Лагранжа з довільною вісесиметричною порожниною, що містить ідеальну рідину. У цих роботах були проведені аналітичні і чисельні дослідження з урахування основного та додаткових тонів коливань ідеальної рідини в еліпсоїдальної і циліндричної порожнинах. В роботі [7] розглянута можливість стабілізації гіроскопа з циліндричною порожниною за допомогою поділу циліндричної порожнини безмасовими поперечними перегородками. Показано, що введення навіть однієї перегородки може істотно стабілізувати нестійке обертання гіроскопа.

На даний час є досить велика кількість робіт, в яких проводяться різні дослідження динаміки твердого тіла, та системи зв'язаних твердих тіл, що обертаються у середовищі з опором, наприклад, [8–18]. Найбільш вдалий огляд сучасної літератури по цим задачам наданий в роботах [9, 10, 13–17]. Наведемо лише деякі роботи, які близькі до розглянутої у даній статті задачі. В роботі [9], на підставі критерію Льєнара-Шіпара в іннорному вигляді, отримано умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опором. Ці умови записано у вигляді системи трьох нерівностей. Проведено аналітичні дослідження цих нерівностей. Отримано умови для величин постійного моменту і моменту інерції третьої головної осі, які при дії відновлювального моменту достатні для асимптотичної стійкості рівномірного обертання твердого тіла у середовищі з опором. В статті [10] отримано у вигляді системи трьох нерівностей умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання у середовищі з опором двох важких гіроскопів Лагранжа з'єднаних пружним сферичним шарніром. Обертання гіроскопів підтримується постійними моментами в інерціальній системі координат. У монографії [15] представлений уніфікований і добре розроблений підхід до динаміки кутових рухів твердих тіл, що зазнають моментів збурення різної фізичної природи. Строгий підхід, заснований на процедурі усереднення, застосовується до тіл з довільними еліпсоїдами інерції. Детально розглядається дія різних моментів збурень, як зовнішніх (гравітаційний, аеродинамічний, сонячний тиск), так і внутрішніх (завдяки в'язкій рідині в резервуарах, пружним і в'язкопружним властивостям тіла). В статті [16] досліджуються збурені обертальні рухи твердого тіла, близькі до випадку Лагранжа, під дією повільно змінювального в часі крутного моменту. У статті [17] вивчається новий клас обертань динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки з урахуванням нестаціонарного збурюючого моменту і повільно змінюваного з часом відновлюючого моменту.

В роботі [12] проведені дослідження впливу дисипативного і двох постійних моментів на стійкість стаціонарних рухів гіроскопа Лагранжа. Перший момент постійний в інерціальній системі відліку, а другий в неінерціальній, тобто в системі відліку, яка зв'язана з твердим тілом. Із цієї роботи слідує нестійкість рівномірного обертання у середовищі з опором "сплячого" гіроскопа Лагранжа, який знаходиться тільки під дією постійного моменту в системі відліку, яка зв'язана з твердим тілом. У зв'язку з цим виникає питання про можливість стабілізації нестійкого обертання такого гіроскопа, другим гіроскопом, який обертається і зв'язаний з першим пружним сферичним шарніром. З четвертої теореми Томсона-Тета-Четаєва [18] (див. с. 178) слідує, що в цьому випадку центр мас розглянутої механічної системи повинен знаходитися нижче нерухомої точки.

В основу даної роботи вкладено статті [10–13]. У статті отримано, на підставі критерію Льенара-Шіпара в іннорному вигляді, умови стабілізації нестійкого рівномірного обертання у середовищі з опором ”сплячого” гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа, який обертається. «Сплячий» гіроскоп обертається навколо нерухомої точки. Другий гіроскоп знаходиться над ним. Гіроскопи з’єднані пружним сферичним шарніром, а їх обертання підтримуються постійними моментами в системах координат, які зв’язані з твердими тілами. Показано, що стабілізація буде неможлива при відсутності пружності в шарнірі і співпадінні центру мас другого гіроскопа з їх спільною точкою з першим гіроскопом. Отримано у вигляді системи трьох нерівностей умови стабілізації відносно кінетичного моменту другого гіроскопа. Знайдено умови на коефіцієнти пружності шарнірів при яких старші коефіцієнти цих нерівностей додатні. Звідки слідує, що стабілізація завжди буде можлива при досить великій кутовій швидкості обертання другого гіроскопа в припущенні, що його центр мас і цент мас механічної системи знаходяться нижче нерухомої точки. Проведено порівняння отриманих умов стабілізації з аналогічними умовами при відсутності дисипації.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

У вступі зазначалося, що з роботи [12] та з четвертої теореми Томсона-Тета-Четаєва [18] (див. с. 178) слідує нестійкість рівномірного обертання у середовищі з опором ”сплячого” гіроскопа Лагранжа. У цьому випадку розглянемо можливість стабілізації нестійкого обертання такого гіроскопа за допомогою другого гіроскопа та пружних шарнірів. Нехай динамічно симетричні тверді тіла S_1 і S_2 зв’язані в точці O_2 пружним відновлювальним сферичним шарніром $\boldsymbol{L}_2 = k_2\, \mathbf{s}_1 \times \boldsymbol{c}_2 \big/ \left(|\mathbf{s}_1||\boldsymbol{c}_2|\right),\ k_2 \ge 0$. Тіло S_1 має нерухому точку O_1 в якій також діє пружний відновлювальний сферичний шарнір $\boldsymbol{L}_1 = k_1 \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{s}_1 \big/ |\mathbf{s}_1|,\ k_1 \ge 0$. Кожне тверде тіло $S_i\ (i = 1,2)$ знаходиться під дією сили тяжіння, дисипативного моменту $\mathbf{M}_i = D_i \boldsymbol{\omega}_i$ ($D_i = diag\left(D_{i1}, D_{i1}, D_{i3}\right)$, $D_{ij} > 0$; $i = 1,2;\ j = 1,3$), що моделює середовище з опором і постійного моменту $\mathrm{M}_{iq} = Q_i \mathbf{e}_3^i$, який спрямований вздовж осі симетрії твердого тіла S_i та підтримує його рівномірне обертання. Тут $\boldsymbol{\omega}_i$ – кутова швидкість твердого тіла S_i.

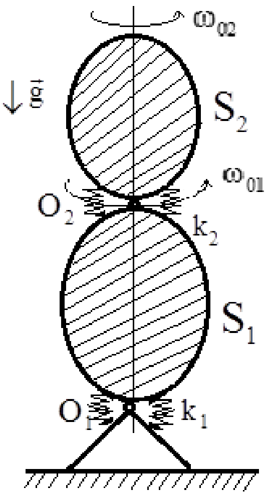

Рис.1. Система двох гіроскопів з двома пружними шарнірами

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2021-3-2-103-116

Рівняння обертання двох важких, пружно зв’язаних гіроскопів Лагранжа, з урахуванням дисипативних і постійних моментів, матимуть вигляд [10, 11]:

$$(J_1\cdot\boldsymbol{\omega}_1)^{\boldsymbol{\cdot}}+m_2\boldsymbol{s}_1\times(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{c}_2)^{\boldsymbol{\cdot}}=(m_1\boldsymbol{c}_1+m_2\boldsymbol{s}_1)g\times\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{L}_1-\boldsymbol{L}_2+\boldsymbol{M}_{1q}-D_1\boldsymbol{\omega}_1;$$
$$(J_2\cdot\boldsymbol{\omega}_2)^{\boldsymbol{\cdot}}+m_2\boldsymbol{c}_2\times(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{c}_2)^{\boldsymbol{\cdot}}=m_2\boldsymbol{c}_2 g\times\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{L}_2+\boldsymbol{M}_{2q}-D_2\boldsymbol{\omega}_2. \quad (1)$$

Тут $J_i=\mathrm{diag}(A_i,\,A_i,\,C_i)$ – тензор інерції твердого тіла S_i відносно точки O_i; точкою позначена абсолютна похідна; $\boldsymbol{s}_1=\overrightarrow{O_1O_2}$; $\boldsymbol{c}_i=\overrightarrow{O_iC_i}$; m_i і C_i – маса і центр мас тіла S_i; $\boldsymbol{\nu}=-\boldsymbol{g}/|\boldsymbol{g}|$, $\boldsymbol{g}$ – вектор прискорення вільного падіння, $g=|\boldsymbol{g}|$.

Зв’яжемо з кожним із тіл S_i незмінно базис $\mathbf{e}_1^i\mathbf{e}_2^i\mathbf{e}_3^i$ з вершиною в точці O_i, осі якого направимо по головних осях тензора інерції J_i і введемо нерухомий базис $\mathbf{e}_1^0\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$, вектор $\mathbf{e}_3^0$ якого збігається з векторами $\boldsymbol{\nu}$. Нехай $\boldsymbol{s}_1=s_1\mathbf{e}_3^1$, $\boldsymbol{c}_i=c_i\mathbf{e}_3^i$.

Векторні рівняння (1) в проекціях на осі рухомого базису $\mathbf{e}_1^i\mathbf{e}_2^i\mathbf{e}_3^i$ приймуть вигляд:

$$\begin{aligned}
&A_1'\dot p_1+(C_1-A_1')q_1r_1+\mu[(\dot p_2-q_2r_2)\alpha_{22}^{11}-(\dot q_2+p_2r_2)\alpha_{21}^{11}+(p_2^{\,2}+q_2^2)\alpha_{23}^{11}]=\\
&=(a_1g-k_1)\alpha_{32}^{01}-k_2(\alpha_{31}^{20}\alpha_{21}^{10}+\alpha_{32}^{20}\alpha_{22}^{10}+\alpha_{33}^{20}\alpha_{23}^{10})-D_{11}p_1;\\
&A_1'\dot q_1-(C_1-A_1')p_1r_1-\mu[(\dot p_2-q_2r_2)\alpha_{12}^{11}-(\dot q_2+p_2r_2)\alpha_{11}^{11}+(p_2^{\,2}+q_2^2)\alpha_{13}^{11}]=\\
&=(-a_1g+k_1)\alpha_{31}^{01}+k_2(\alpha_{31}^{20}\alpha_{11}^{10}+\alpha_{32}^{20}\alpha_{12}^{10}+\alpha_{33}^{20}\alpha_{13}^{10})-D_{11}q_1;\\
&A_2'\dot p_2+(C_2-A_2')q_2r_2+\mu[(\dot p_1-q_1r_1)\alpha_{22}^{12}-(\dot q_1+p_1r_1)\alpha_{12}^{12}+(p_1^{\,2}+q_1^2)\alpha_{32}^{12}]=\\
&=(a_2g-k_1)\alpha_{32}^{02}-k_2(\alpha_{31}^{10}\alpha_{21}^{20}+\alpha_{32}^{10}\alpha_{22}^{20}+\alpha_{33}^{10}\alpha_{23}^{20})-D_{21}p_2;\\
&A_2'\dot q_2-(C_2-A_2')p_2r_2-\mu[(\dot p_1-q_1r_1)\alpha_{21}^{12}-(\dot q_1+p_1r_1)\alpha_{11}^{12}+(p_1^{\,2}+q_1^2)\alpha_{31}^{12}]=\\
&=(-a_1g+k_1)\alpha_{31}^{02}+k_2(\alpha_{31}^{10}\alpha_{21}^{20}+\alpha_{32}^{10}\alpha_{12}^{20}+\alpha_{33}^{10}\alpha_{13}^{20})-D_{21}q_2;
\end{aligned} \quad (2)$$

$$C_i\dot r_i=-D_{i3}r_i+Q_i,\ i=1,2. \quad (3)$$

До системи рівнянь (2) потрібно добавити рівняння для напрямних косинусів [3]:

$$\dot\alpha_{11}^{i0}=-q_i\alpha_{31}^{i0}+r_i\alpha_{21}^{i0},\ \dot\alpha_{21}^{i0}=p_i\alpha_{31}^{i0}-r_i\alpha_{11}^{i0};\ \dot\alpha_{12}^{i0}=-q_i\alpha_{32}^{i0}+r_i\alpha_{22}^{i0},\ \dot\alpha_{22}^{i0}=p_i\alpha_{32}^{i0}-r_i\alpha_{12}^{i0};$$

$$\dot\alpha_{13}^{i0}=-q_i\alpha_{33}^{i0}+r_i\alpha_{23}^{i0},\ \dot\alpha_{23}^{i0}=p_i\alpha_{33}^{i0}-r_i\alpha_{13}^{i0};\ \dot\alpha_{31}^{i0}=-p_i\alpha_{21}^{i0}+q_i\alpha_{11}^{i0},\ \dot\alpha_{32}^{i0}=-p_i\alpha_{22}^{i0}+q_i\alpha_{12}^{i0};$$

$$\dot\alpha_{33}^{i0}=-p_i\alpha_{23}^{i0}+q_i\alpha_{13}^{i0},$$

де p_i, q_i, r_i – проекції вектора кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}_i$ твердого тіла S_i на осі $\mathrm{e}_1^i\mathrm{e}_2^i\mathrm{e}_3^i$, $J_i=\mathrm{diag}(A_i,\,A_i,\,C_i)$, $A_1'=A_1+s_1^2m_2$, $A_2'=A_2$, $a_1=m_1c_1+m_2s_1$, $a_2=m_2c_2$, $\mu=s_1a_2$.

Рівняння (3) відокремлюється від інших рівнянь і його характеристичне рівняння має один дійсний від’ємний корінь.

Припустимо, що з незбуреному русі тіло S_i обертається з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_{0i}$ навколо вертикалі. Нехай $\boldsymbol{\omega}_{0i}=\omega_{0i}\boldsymbol{e}_3^i$.

Система (2) – (3) допускає частинний розв’язок:

$$\begin{aligned}
&p_i=q_i=0,\ r_i=\omega_{0i}=\frac{Q_i}{D_{i3}};\\
&\alpha_{11}^{i0}=\cos\omega_{0i}t,\ \alpha_{12}^{i0}=\pm\sin\omega_{0i}t,\ \alpha_{13}^{i0}=0;\\
&\alpha_{21}^{i0}=-\sin\omega_{0i}t,\ \alpha_{22}^{i0}=\pm\cos\omega_{0i}t,\ \alpha_{23}^{i0}=0;
\end{aligned} \quad (4)$$

$\alpha_{31}^{i0}=0,\ \alpha_{32}^{i0}=0,\ \alpha_{33}^{i0}=\pm 1$.

Зберігаючи колишні позначення, запишемо рівняння збуреного руху:

$$
\begin{aligned}
&A_i'\dot p_i+(C_i-A_i')\omega_{0i}q_i+\mu\left[(\dot p_j-\omega_{0j}q_j)\alpha_{22}^{1i}-(\dot q_j+\omega_{0j}p_j)\alpha_{ji}^{1i}\right]=\\
&=(a_ig-k_1)\alpha_{23}^{i0}-k_2\alpha_{32}^{2i}-D_{i1}p_i;\\
&A_i'\dot q_i-(C_i-A_i')\omega_{0i}p_i-\mu\left[(\dot p_j-\omega_{0j}q_j)\alpha_{ij}^{1i}-(\dot q_j+\omega_{0j}p_j)\alpha_{11}^{1i}\right]=\\
&=-(a_1g-k_1)\alpha_{13}^{10}-k_2\alpha_{32}^{1i}-D_{11}q_i;
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$\dot\alpha_{13}^{i0}=\omega_{0i}\alpha_{23}^{i0}-q_i,\ \dot\alpha_{23}^{i0}=-\omega_{0i}\alpha_{13}^{i0}+p_i\,. \tag{6}$$

Тут $i,k=1,2$, $j=3-i$, $\alpha_{11}^{ik}=\cos\phi_{ki}$, $\alpha_{12}^{ik}=-\sin\phi_{ki}$, $\alpha_{21}^{ik}=\sin\phi_{ki}$, $\alpha_{22}^{ik}=\cos\phi_{ki}$, $\phi_{ki}=\phi_k-\phi_i$, $\phi_i=\omega_{0i}t$.

Перейдемо до нових змінних $p_i',\ q_i',\ \alpha_{13}^i,\ \alpha_{23}^i$ [9]:

$$
\begin{aligned}
&p_i'=p_i\sin\phi_i+q_i\cos\phi_i,\ q_i'=p_i\cos\phi_i-q_i\sin\phi_i;\\
&\alpha_{13}^i=\alpha_{13}^{0i}\sin\phi_i+\alpha_{23}^{0i}\cos\phi_i,\ \alpha_{23}^i=\alpha_{13}^{0i}\cos\phi_i-\alpha_{23}^{0i}\sin\phi_i\,.
\end{aligned}
$$

Нехай $\Omega_i=q_i'-ip_i',\ \gamma_i=\alpha_{13}^i+i\alpha_{23}^i$, тоді система рівнянь (5) і (6) може бути представлена таким чином:

$$A_i'\ddot\gamma_i+\left(i\tilde C_i+D_{i1}\right)\dot\gamma_i+\mu\ddot\gamma_j=(a_ig-k_i-k_{i+1})\gamma_i\,,\ (i=1,2,\ j=3-i). \tag{7}$$

Тут і далі слід відрізняти нижній індекс $i=1,2$ від уявної одиниці; $\tilde C_i=C_i\omega_{0i}$, $k_3=0$

3 УМОВИ СТАБІЛІЗАЦІЇ НЕСТІЙКОГО РІВНОМІРНОГО ОБЕРТАННЯ ГІРОСКОПА

Представивши шукані функції у вигляді $a\exp(\lambda t)$, запишемо характеристичне рівняння збуреного руху (7) у вигляді:

$$\begin{vmatrix} F_1 & k_2-\mu\lambda^2\\ k_2-\mu\lambda^2 & F_2\end{vmatrix}=0 \tag{8}$$

або

$$a_4\lambda^4+\left(a_3+ib_3\right)\lambda^3+\left(\tilde a_2+ib_2\right)\lambda^2+\left(\tilde a_1+ib_1\right)\lambda+a_0+ib_0=0\,, \tag{9}$$

де:

$$
\begin{aligned}
&F_i=A_i'\lambda^2+\left(i\tilde C_i+D_{i1}\right)\lambda-a_ig+k_i+k_{i+1};\\
&a_3=A_1'D_{21}+A_2'D_{11}>0\,,b_3=A_1'\tilde C_2+A_2'\tilde C_1\,,b_2=\tilde C_1D_{21}+\tilde C_2D_{11}\,,b_0=0;\\
&a_4=A_1'A_2'-\mu^2=\left(A_1+c_1^2m_1\right)\left(A_2+c_2^2m_2\right)+A_2s_1^2m_2>0;\\
&\tilde a_2=-\tilde C_1\tilde C_2+\left(A_2'+A_1'+2\mu\right)k_2+k_1A_2'+D_{11}D_{21}-\left(a_1A_2'+A_1'a_2\right)g\,;\\
&\tilde a_1=D_{11}\left(k_2-a_2g\right)+D_{21}\left(k_1+k_2-a_1g\right);
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$b_1 = \tilde{C}_2\left(k_1 + k_2 - a_1 g\right) + \tilde{C}_1\left(k_2 - a_2 g\right), a_0 = k_1 k_2 - \left[\left(a_1 + a_2\right)k_2 + k_1 a_2\right]g + a_1 a_2 g^2.$$

З рівняння (8) слідує, що якщо центр мас другого гіроскопа збігається з точкою O_2 ($c_2 = 0,\ a_2 = 0,\ \mu = 0$) і відсутній пружний відновлювальний момент $k_2 = 0$, то в цьому випадку це рівняння розпадається на два рівняння і відсутній взаємовплив першого тіла на друге і стабілізація стає неможливою.

Для того, щоб всі нулі рівняння (9) лежали у відкритій лівій півплощині, згідно критерію Льенара–Шіпара, записаного в іннорному вигляді [19] (див. с.34), необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, складена з коефіцієнтів многочлена (9) була іннорно-позитивною, тобто були позитивно визначені матриці Δ_1, Δ_3, Δ_5 і Δ_7:

$$I_1 = \left|\Delta_1\right| = a_3 = A_1' D_{21} + A_2' D_{11} > 0; \tag{11}$$

$$I_3 = \left|\Delta_3\right| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 \end{vmatrix} > 0; \tag{12}$$

$$I_5 = \left|\Delta_5\right| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 \\ a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0; \tag{13}$$

$$I_7 = \left|\Delta_7\right| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -b_1 & -\tilde{a}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_0 \tilde{I}_7 > 0. \tag{14}$$

Так як $I_1 > 0$, то асимптотична стійкість рівномірних обертань в середовищі з опором двох гіроскопів Лагранжа, зв'язаних пружним сферичним шарніром, визначається трьома нерівностями (12) – (14).

З нерівності (11) видно, що при частковій дисипації $(D_{11} = D_{21} = 0, D_{i3} \neq 0)$ асимптотична стійкість неможлива.

Стабілізувати нестійке рівномірне обертання першого гіроскопа можна за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа $\tilde{C}_2$ ($\tilde{C}_2 = C_2\omega_{02}$) та коефіцієнтів пружності k_1 та k_2.

Таким чином, умови стабілізації відносно кінетичного моменту $\tilde{C}_2$ запишуться так:

$$I_{32}\tilde{C}_2^2 + I_{31}\tilde{C}_2 + I_{30} > 0; \tag{15}$$

$$I_{54}\tilde{C}_2^4 + I_{53}\tilde{C}_2^3 + \ldots + I_{51}\tilde{C}_2 + I_{50} > 0; \tag{16}$$

$$\left(\tilde{I}_{74}\tilde{C}_2^4 + \tilde{I}_{73}\tilde{C}_2^3 + \ldots + \tilde{I}_{71}\tilde{C}_2 + \tilde{I}_{70}\right)a_0 > 0. \tag{17}$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2021-3-2-103-116

Тут:

$$I_{32} = D_{11}(D_{11}\mu^2 + A_1'^2 D_{21}) > 0\,,\; I_{31} = -2D_{11}D_{21}\tilde{C}_1(A_1'A_2' - \mu^2)\,;$$
$$I_{54} = D_{11}^2\left(k_2 + k_1 - g\,a_1\right)\left(\mu^2 D_{11} + A_1'^2 D_{21}\right); \tag{18}$$
$$\tilde{I}_{74} = D_{11}^2\left(\mu^2 D_{11} + A_1'^2 D_{21}\right)\left[k_2^2 D_{11} + \left(ga_1 - k_1 - k_2\right)^2 D_{21}\right]. \tag{19}$$

Інші коефіцієнти не наведено через їхню громіздкість.

Дискримінант квадратної нерівності (15) має вигляд:

$$D = -4D_{11}D_{21}\mu^2\left(A_1'D_{21} + A_2'D_{11}\right)^2\tilde{C}_1^2 - 4D_{11}\left(\mu^2 D_{11} + A_1'^2 D_{21}\right)\left(A_1'D_{21} + A_2'D_{11}\right)\times$$
$$\times\left(A_1'D_{21}^2 D_{11} + \left(\left(-ga_1 + k_2 + k_1\right)A_2'^2 + 2A_2'k_2\mu + \left(k_2 - a_2 g\right)\mu^2\right)D_{11} +\right.$$
$$\left.+\left(\left(-ga_1 + k_2 + k_1\right)\mu^2 + 2A_1'k_2\mu + A_1'^2\left(k_2 - a_2 g\right)\right)D_{21} + A_2'D_{11}^2 D_{21}\right)$$

і при $a_1 \le 0,\ a_2 \le 0$ він від'ємний. Так як $I_{32} > 0$, то в цьому випадку нерівність (15) завжди виконана. Слід зазначити, що центр мас механічної системи визначається виразом $(a_1 + a_2)/(m_1 + m_2)$. Таким чином, коли центр мас механічної системи буде знаходитися нижче нерухомої точки, то в цьому разі нерівність (15) буде виконана.

Знайдемо умови для величини коефіцієнтів пружних моментів k_1 та k_2 при яких нерівності (15) – (17) будуть виконуватись при досить великих значеннях кутової швидкості ω_{02}.

Із (18) слідує, що коефіцієнт I_{54} буде додатнім при $k_1 + k_2 > a_1 g$, а із (19) слідує, що I_{74} буде додатнім при. $k_1 k_2 - \left[(a_1 + a_2)k_2 + k_1 a_2\right]g + a_1 a_2 g^2 > 0$.

Таким чином, маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 > a_1 g; \\ k_1 k_2 - \left[(a_1 + a_2)k_2 + k_1 a_2\right]g + a_1 a_2 g^2 > 0. \end{cases} \tag{20}$$

При виконанні системи нерівностей (20) і при досить великих значень кутової швидкості другого гіроскопа Лагранжа, можлива стабілізація нестійкого обертання першого гіроскопа другим гіроскопом, який обертається.

Системи нерівностей (20) завжди буде виконана при $k_1 > a_1 g\,, a_1 + a_2 \le 0$ і $a_2 \le 0$. Звідки слідує, що коли центр мас другого гіроскопу і механічної системи знаходяться нижче нерухомої точки, то стабілізація буде можлива.

Так, наприклад, при $k_1 = 0$ і $a_1 + a_2 > 0$ система нерівностей (20) несумісна, оскільки $a_1 g < k_2 < a_1 a_2 g/\left(a_1 + a_2\right)$ і звідки слідує, що $a_1^2 < 0$. Таким чином, при $k_1 = 0$ системи нерівностей (20) отримує вид:

$$\begin{cases} k_2 > a_1 g; \\ k_2 > a_1 a_2 g/(a_1 + a_2); \\ a_1 + a_2 < 0. \end{cases} \tag{21}$$

При $c_2 < 0$ $(c_2 = -\tilde{c}_2)$ і $c_1 > 0$ нерівність $a_1 + a_2 < 0$ еквівалентна нерівності $\tilde{c}_2 > s + c_1\, m_1/m_2$ з якої слідує, що центр мас другого тіла повинен знаходитися нижче нерухомої точки на відстані $c_1\, m_1/m_2$, що дає можливість стабілізувати нестійке обертання першого гіроскопа (Рис. 2).

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2021-3-2-103-116

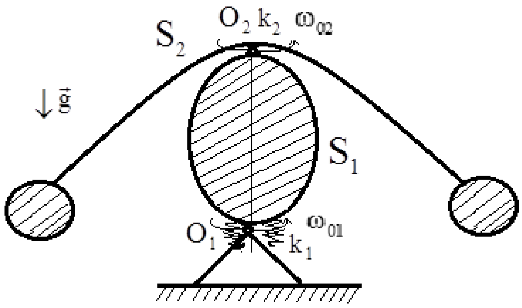

Рис. 2 Видозмінена система двох гіроскопів з двома пружними шарнірами

4 ВИПАДОК ВІДСУТНОСТІ ДИССИПАТИВНОГО І ПОСТІЙНОГО МОМЕНТІВ

Допустимо, що для ”сплячого” гіроскопа S_1 не виконується критерій Маєвского, тобто $\omega_{01}^2 < 4A_1' a_1 g / C_1^2$. Чи можна у разі відсутності дисипативного та постійного моментів стабілізувати нестійке обертання цього гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа, що обертається та пружних моментів.

У разі відсутності дисипативних ($D_{ij} = 0$, $i = 1,2;\ j = 1,3$) і постійних моментів ($Q_i = 0$) система рівнянь (2) – (3) допускає розв'язки (5), де $r_i = \omega_{0i}$. В цьому випадку $\tilde{a}_1 = a_3 = b_2 = 0$ і характеристичне рівняння (9) матиме вид

$$a_4\lambda^4 + ib_3\lambda^3 + \tilde{a}_2\lambda^2 + ib_1\lambda + a_0 = 0, \tag{22}$$

де коефіцієнти рівняння (22) визначаються за формулами (10) в яких потрібно покласти $D_{ij} = 0$. Стійкість консервативних систем визначаються тим, що корені рівняння (22) повинні знаходитися на уявнійосі. Для цього в рівнянні (22) покладемо $\lambda = i\lambda_1$ і це рівняння прийме вигляд:

$$a_4\lambda_1^4 + ib_3\lambda_1^3 + \tilde{a}_2\lambda_1^2 + b_1\lambda_1 + a_0 = 0. \tag{23}$$

Для того, щоб всі нулі рівняння (23) були різні і лежали надійсній осі, згідно критерію Льенара – Шіпара, записаного в іннорному вигляді [3] (див. с. 48), необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, яка складена з коефіцієнтів цього рівняння була іннорно- позитивною, тобто щоб були позитивно визначені матриці Δ_1, Δ_3, Δ_5 і Δ_7:

$$I_1 = |\Delta| = 4a_4 > 0;$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 4a_4 & 3a_3 \\ 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 \end{vmatrix} > 0; \tag{24}$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2021-3-2-103-116

$$I_5 = \left|\Delta_5\right| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -\tilde{a}_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 \\ a_3 & -b_2 & -\tilde{a}_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0; \tag{25}$$

$$I_7 = \left|\Delta_7\right| = \begin{vmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \tag{26}$$

Так як $I_1 > 0$, то стійкість рівномірних обертань двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа визначається трьома нерівностями (24) – (26).

Так як і раніше, стабілізувати нестійке рівномірне обертання першого гіроскопа можна за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа $\tilde{C}_2$ ($\tilde{C}_2 = C_2\omega_{02}$) та коефіцієнтів пружності сферичних шарнірів k_1 та k_2.

Таким чином, умови стабілізації відносно кінетичного моменту $\tilde{C}_2$ запишуться так:

$$I_{32}\tilde{C}_2^2 + I_{31}\tilde{C}_2 + I_{30} > 0; \tag{27}$$

$$I_{54}\tilde{C}_2^4 + I_{53}\tilde{C}_2^3 + \ldots + I_{52}\tilde{C}_2 + I_{50} > 0; \tag{28}$$

$$I_{76}\tilde{C}_2^6 + I_{75}\tilde{C}_2^5 + \ldots + I_{71}\tilde{C}_2 + I_{70} > 0. \tag{29}$$

Тут

$$I_{32} = 3A_1'^2\left(A_1'A_2' - s_1^2a_2^2\right) = 3A_1'^2\left(A_1 + c_1^2m_1\right)\left(A_2 + c_2^2m_2\right) + A_2s_1^2m_2 > 0,$$

$$I_{31} = 2\tilde{C}_1(3\mu^2 - a_4)a_4;$$

$$I_{32} = 3A_1'^2(A_1'A_2' - s_1^2a_2^2) = 3A_1'^2\left(A_1 + c_1^2m_1\right)\left(A_2 + c_2^2m_2\right) + A_2s_1^2m_2 > 0,\ I_{31} = 2\tilde{C}_1(3\mu^2 - a_4)a_4;$$

$$I_{30} = (A_1'A_2' - \mu^2)\left[3A_2'^2\tilde{C}_1^2 + 8(A_1'A_2' + \mu^2)\left[\left(k_1 + k_2 - a_1g\right)A_2' + \left(k_2 - a_2g\right)A_1' + 2\mu k_2\right]\right];$$

$$Dis = -32\left(A_1'A_2' - \mu^2\right)^3\left[\tilde{C}_1^2\left(A_1'A_2' + 2\mu^2\right) + 3A_1'^2A_2'\left(k_1 + k_2 - a_1g\right) + 3A_1'^3\left(k_2 - a_2g\right) + \right.$$

$$\left. + 3A_1'^2\left(2\mu k_2 - A_2'a_1g\right)\right];$$

$$I_{54} = A_1'^2\left(\tilde{C}_1^2 - 3A_1'\left(a_1g - k_1 - k_2\right)\right); \tag{30}$$

$$I_{76} = A_1'^2\left(a_1g - k_2 - k_1\right)^2\left(\tilde{C}_1^2 - 4A_1'\left(a_1g - k_1 - k_2\right)\right). \tag{31}$$

Інші коефіцієнти не наведено через їхню громіздкість.

Нерівність (27) буде невірною при

$$I_{31} \geq 0,\ I_{30} \geq 0,\ Dis \geq 0 \tag{32}$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2021-3-2-103-116

і $x_1 \le \tilde{C}_2 \le x_2$, де x_1 і x_2 додатні корені квадратного рівняння (27). Додатність коренів визначається нерівністю (32).

Щоб були $I_{54} > 0$ і $I_{76} > 0$ необхідно покласти

$$\tilde{C}_1^2 > 4A_1'(a_1 g - k_2 - k_1). \tag{33}$$

Із нерівностей $4A_1'(a_1 g - k_2 - k_1) < \tilde{C}_1^2 < 4A_1'a_1 g$ слідує, що при досить великій кутовій швидкості ω_{02} буде можлива стабілізація.

Таким чином, у випадку наявності дисипації стабілізація можлива тільки тоді, коли центр мас другого тіла знаходиться нижче нерухомої точки (див. Рис.2), а при відсутності дисипації центр мас другого тіла може знаходиться вище нерухомої точки (див. Рис.1). У цьому є принципова різниця в цих двох випадках

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

З четвертої теореми Томсона-Тета-Четаєва та інших робіт слідує нестійкість рівномірного обертання у середовищі з опором "сплячого" гіроскопа Лагранжа, який знаходиться під дією постійного моменту, спрямованого уздовж його осі обертання. У зв'язку з цим виникає питання про можливість стабілізації нестійкого обертання такого гіроскопа за допомогою другого гіроскопа та пружних сферичних шарнірів. Для вирішення цієї задача були отримані рівняння обертання у середовища з опором системи двох гіроскопів Лагранжа, які з'єднані пружним відновлювальним сферичним шарніром. Обертання цих гіроскопів підтримуються постійними моментами, спрямованими уздовж їх осей обертання у незбуреному русі. На підставі критерію Льенара-Шіпара в іннорному виді отримано у вигляді системи трьох нерівностей умови стабілізації за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа і коефіцієнтів пружності шарнірів та знайдені умови на коефіцієнти пружності при яких старші коефіцієнти цих нерівностей додатні. Показано, що стабілізація завжди буде можлива при досить великий кутовий швидкості обертання другого гіроскопа в припущенні, що центр мас другого гіроскопа і механічної системи знаходяться нижче нерухомої точки. Розглянуті умови стабілізації «сплячого» гіроскоп Лагранжа за допомогою другого гіроскопа та пружних шарнірів при відсутності дисипації. На підставі іннорного підходу отримано у вигляді системи трьох нерівностей умови стабілізації за допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа і коефіцієнтів пружності шарнірів. Знайдено умову на кінетичний момент першого гіроскопа і коефіцієнти пружності при яких старші коефіцієнти цих нерівностей додатні. Показано, що при виконанні умови на кінетичний момент першого гіроскопа стабілізація завжди буде можлива при досить великий кутовий швидкості обертання другого гіроскопа при цьому центр мас другого гіроскопа може знаходиться і вище нерухомої точки. У цьому є принципова різниця у наявності та відсутності дисипації.

6 ВИСНОВКИ

Розглянуто можливість стабілізації нестійкого рівномірного обертання в середовищі з опором «сплячого» гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа, який обертається та пружних сферичних шарнірів. «Сплячий» гіроскоп обертається навколо нерухомої точки з пружним відновлювальним сферичним шарніром, а другий гіроскоп знаходиться над ним. Гіроскопи також з'єднані пружним відновлювальним сферичним шарніром і їх обертання підтримуються постійними моментами, спрямованими уздовж їх осей обертання. На підставі критерію Льенара-Шіпара в

іннорному виді отримано у вигляді системи трьох нерівностей умови стабілізації. Показано, що стабілізація буде неможлива за відсутності пружності у загальному шарнірі і збігу центру мас другого гіроскопа з цим шарніром. За допомогою кінетичного моменту другого гіроскопа і коефіцієнтів пружності шарнірів, на підставі іннорного підходу, отримані у вигляді системи трьох нерівностей умови стабілізації та знайдені умови на коефіцієнти пружності при яких старші коефіцієнти цих нерівностей додатні. Показано, що стабілізація завжди буде можлива при досить великий кутовий швидкості обертання другого гіроскопа в припущенні, що центр мас другого гіроскопа і механічної системи знаходяться нижче нерухомої точки. Проведено порівняння отриманих умов стабілізації з аналогічними умовами при відсутності дисипації.

Література

1. Савченко А. Я. Устойчивость стационарных движений механических систем. К.: Наук. думка, 1977. 160 с.
2. Светличная Н. В. Об эффекте стабилизации покоящегося неуравновешенного гироскопа вторым вращающимся. Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр, 1989. Вып. 21. С. 74 – 76.
3. Савченко А. Я., Болграбская И. А., Кононыхин Г. А. Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел. К.: Наук. Думка, 1991. 166 с.
4. Кононов Ю. Н., Хомяк Т. В. Об эффекте стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью вращающимся твердым телом. Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. Тр, 2004. Вып. 34. С. 161 – 169.
5. Kononov Y. N., Khomyak T. V. On the rotation stabilization of the unstable gyroscope containing fluid by rotating the rigid body. Facta Universitatis. Series Mechanics, Automatic Control and Robotics. 2005. Vol. 4. № 17. P. 195-201.
6. Khomyak T. V. Stabilization of the Unstable Spinning of a Lagrange Top Filled with a Fluid. International applied mechanics. A translation of Prikladnaya Mekhanika 2015. 51. №6. P. 702 – 709. doi.org/10.1007/s10778-015-0728-0
7. Кононов Ю. Н. О влиянии перегородок в цилиндрической полости на устойчивость равномерного вращения волчка Лагранжа. Матем. физ. и нелин. механика, 1992. Вып. 17 (51) .С. 33 – 37.
8. Болграбская И. А., Лесина М. Е., Чебанов Д. А., Динамика систем связанных твёрдых тел. Серия “Задачи и методы: математика, механика, кибернетика”. ИПММ НАН Украины, Том 9. К.: Наукова Думка. 2012. 395 с.
9. Kononov Yu. M. Stability of a Uniform Rotation of an Asymmetric Rigid Body in a Resisting Medium. International applied mechanics. A translation of Prikladnaya Mekhanika. 2021. 57. № 4. P. 432–439. DOI: 10.1007/s10778-021-01095-1
10. Kononov Yu. M., Sviatenko Ya. I. On the subject of influence of dissipative and constant of moments on the stability of uniform rotations of non-free two elastically connected gyroscopes of Lagrange. Праці ІПММНАНУкраїни, 2020. Том 34. С.50 – 61. DOI: 10.37069/1683-4720-2020-34-6
11. Кононов Ю. М., Святенко Я. І. Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа другим гіроскопом, який обертається. [Електронний ресурс]. Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021». http://iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Kononov.pdf.
12. Карапетян А. В. О стационарных движениях волчка Лагранжа с возбуждением в сопротивляющейся среде. Вестник Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 2000. №5. С. 39 – 43.
13. Dornheim M. New Path to Space. Aviation Week & Space Technology. 2005, 24. P. 26-30.
14. Aslanov V. S. Rigid Body Dynamics for Space Applications. Butterworth Heinemann. Oxford. 2017. 410 pp.
15. Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer. 2017. 260 pp.

16. Akulenko L. D., Zinkevich Ya. S.,. Kozachjenko T. A, Leshenko D. D. The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2017. 81(2). C. 79 – 84. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.08.001
17. Leshchenko D. D., Ershkov S. V., Kozachenko T. A. Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques. Nonlinear Dyn. 2021. P. 1517–1528. DOI: 10.1007/s11071-020-06195-0
18. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 320 с.
19. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979. 304 с.

References

1. Savchenko, A. Ya. (1977). *Ustojchivost' stacionarnyh dvizhenij mekhanicheskih system*. [Stability of stationary movements of mechanical systems]. K.: Nauk. Dumka. [in Russian].
2. Svetlichnaya, N. V. (1989). Ob effekte stabilizacii pokoyashchegosya neuravnoveshennogo giroskopa vtorym vrashchayushchimsya. [On the stabilization effect of an unbalanced gyroscope at rest by the second rotating one]. *Mekhanika tverdogo tela*. Mezhved. sb. nauch. tr. 21. 74–76. [in Russian].
3. Savchenko, A. YA., Bolgrabskaya, I. A., Kononyhin, G. A. (1991). *Ustojchivost' dvizheniya sistem svyazannyh tvyordyh tel*. [Stability of motion of systems of connected rigid bodies]. K.: Nauk. Dumka. [in Russian].
4. Kononov, Yu. N., Homyak, T. V. (2004). Ob effekte stabilizacii neustojchivogo vrashcheniya tverdogo tela s zhidkost'yu vrashchayushchimsya tverdym telom. [On the stabilization effect of the unstable rotation of a rigid body with a liquid by a rotating rigid body]. *Mekhanika tverdogo tela*. Mezhved. sb. nauch. tr. 34. 161–169. [in Russian].
5. Kononov, Y. N., Khomyak, T. V. (2005). On the rotation stabilization of the unstable gyroscope containing fluid by rotating the rigid body. *Facta Universitatis*. Series Mechanics, Automatic Control and Robotics. 4. 17. 195–201.
6. Khomyak, T. V. (2015). Stabilization of the Unstable Spinning of a Lagrange Top Filled with a Fluid. *International applied mechanics*. A translation of Prikladnaya Mekhanika. 51. 6. 702–705.
7. Kononov, Yu. N. (1992). O vliyanii peregorodok v cilindricheskoj polosti na ustojchivost' ravnomernogo vrashcheniya volchka Lagranzha. [On the influence of partitions in a cylindrical cavity on the stability of the uniform rotation of the Lagrange top]. *Matem. fiz. i nelin. mekhanika*. 17 (51). 33–37. [in Russian].
8. Bolgrabskaya, I. A., Lesina, M. E., Chebanov, D. A. (2012). *Dinamika sistem svyazannyh tvyordyh tel*. [Dynamics of systems of coupled solids]. Seriya "Zadachi i metody: matematika, mekhanika, kibernetika". IPMM NAN Ukrainy. 9. K.: Naukova Dumka. [in Russian].
9. Kononov, Yu. M. (2021). Stability of a Uniform Rotation of an Asymmetric Rigid Body in a Resisting Medium. *International applied mechanics*. A translation of Prikladnaya Mekhanika. 57. 4. 432–439. DOI: 10.1007/s10778-021-01095-1
10. Kononov, Yu. M., Sviatenko, Ya. I. (2020). On the subject of influence of dissipative and constant of moments on the stability of uniform rotations of non-free two elastically connected gyroscopes of Lagrange. *Praci IPMM NAN Ukraïni*. 34. 50 – 61. DOI: 10.37069/1683-4720-2020-34-6
11. Kononov, Yu. M., Svyatenko, Ya. I. (2021). *Pro stabilizaciyu nestijkogo obertannya u seredovishchi z oporom giroskopa Lagranzha drugim giroskopom, yakij obertaє'sya*. [On the stabilization of unstable rotation in a medium with the resistance of the Lagrange gyroscope by a second rotating gyroscope]. [Elektronnij resurs]. Konferenciya molodih uchenih «Pidstrigachivs'ki chitannya – 2021» Rezhim dostupu: http://iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Kononov.pdf. [in Ukranian].
12. Karapetyan, A. V. (2000). O stacionarnyh dvizheniyah volchka Lagranzha s vozbuzhdeniem v soprotivlyayushchejsya srede. [Stationary motions of a Lagrange top with excitation in a resisting medium]. *Vestnik Moskovskogo un-ta*. Ser. 1. Matematika. Mekhanika. 5. 39–43. [in Russian].
13. Dornheim, M. (2005). New Path to Space. *Aviation Week & Space Technology*. 24. 26–30.
14. Aslanov, V. S. (2017). *Rigid Body Dynamics for Space Applications*. Butterworth Heinemann. Oxford.

15. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*. Springer.
16. Akulenko, L. D., Zinkevich, Ya. S., Kozachjenko, T. A., Leshenko, D. D. (2017). The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 81(2). 79–84. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.08.001
17. Leshchenko, D. D., Ershkov, S. V., Kozachenko, T. A. (2021). Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques. *Nonlinear Dyn*. 1517–1528. DOI: 10.1007/s11071-020-06195-0
18. Merkin, D. R.(1976). *Vvedenie v teoriyu ustojchivosti dvizheniya*. M.: Nauka. [in Russian].
19. Jury, E.I. (1979). *Innory i ustojchivost' dinamicheskih sistem*. M.: Nauka. [in Russian].

Святенко Ярослав Ігорович
Донецький національний університет імені Василя Стуса, аспірант
вул. 600 - річчя, 21 м. Вінниця, Україна 21021
filioeee@gmail.com
ORCID: 0000-0003-2317-3556

Для посилань:
Святенко Я. І. Про стабілізацію нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа за допомогою другого гіроскопа та пружних шарнірів. Механіка та математичні методи, 2021. Т. 3. № 2. С. 103–116.

For references:
Sviatenko Ya. (2021). On stabilization of unstable rotation in the resisting medium of the Lagrange gyroscope using the second gyroscope and elastic hinges. Mechanics and Mathematical Methods. 3 (2). 103–116.