

ISSN 2618-0650 (Print)  
ISSN 2664-1364 (Online)

---

**Механіка**



**та математичні методи**

---

**Mechanics  
and Mathematical Methods**

**Науковий журнал  
The scientific journal**

**IV/1/2022**

УДК 531 : 51-7 (05)  
М55

# МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

Науковий журнал



Засновник і видавець:

**Одеська державна академія будівництва та архітектури**

**Том IV**  
**№1**  
**2022**

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: Серія КВ №23478–13318 Р від 13.07.2018 р.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
Серія ДК №4515 від 01.04.2013 р.

**М55**      **Механіка та математичні методи** : науковий журнал. — Одеса : ОДАБА, 2022. — Том IV. — Вип. №1. — 106 с.

В науковому журналі публікуються статті і огляди за спеціальностями:

- 111 Математика;
- 112 Статистика;
- 113 Прикладна математика;
- 121 Інженерія програмного забезпечення;
- 122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології;
- 124 Системний аналіз;
- 131 Прикладна механіка;
- 192 Будівництво та цивільна інженерія.

---

**Рекомендовано до друку Вченою радою Одеської державної академії будівництва та архітектури, протокол №12 від 30.06.2022 р.**

---

**Адреса:**      редакція журналу «Механіка та математичні методи»  
Одеська державна академія будівництва та архітектури  
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029

**Телефони:** (048)723-23-10, (048)7323402, (048)7298626

**E-mail:** mmm@ogasa.org.ua

**Web:** mmm-journal.com.ua

---

УДК 531 : 51-7 (05)  
М55

ISSN 2618-0650 (Print)  
ISSN 2664-1364 (Online)

Одеська державна академія  
будівництва та архітектури, 2022

---

## Склад редакційної колегії:

**Головний редактор:** Ковров А. В., к.т.н., проф., ректор Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

**Заступники головного редактора:**

Крутії Ю. С., д.т.н., проф., проректор з науково-педагогічної роботи Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Сур'янінов М. Г., д.т.н., проф., завідувач кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

**Відповідальний секретар:** Кіосак В. А., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

- Бербюк В. Є. д.ф.-м.н., проф., професор кафедри механіки та морських наук, Технічний університет Чалмерса, Гетеборг, Швеція;
- Ватуля Г. Л., д.т.н., проф., професор кафедри будівельної механіки та гідравліки Українського державного університету залізничного транспорту, Харків, Україна;
- Горик О. В., д.т.н., проф., завідувач кафедри загальнотехнічних дисциплін Полтавської державної аграрної академії, Полтава, Україна;
- Карпюк В. М., д.т.н., проф., професор кафедри залізобетонних конструкцій та транспортних споруд Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Куріазопоулос А., к.т.н., доц., професор кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Кода Е., д.т.н., проф., декан факультету будівництва та інженерії середовища Варшавського природничого університету, Варшава, Польща;
- Кононов Ю. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач відділу теорії керуючих систем інституту прикладної математики та механіки НАН України, Слав'янск, Україна;
- Кривий О. Ф., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики Національного університету "Одеська морська академія", Одеса, Україна;
- Круглов В. Є., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна;
- Кучер М. К., д.т.н., проф., завідувач відділу конструкційних матеріалів інституту проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна;
- Лесечко О. В., к.ф.-м.н., доц., завідувач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Лещенко Д. Д., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри теоретичної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Ляшенко Т. В., д.т.н., проф., професорка кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Максимович О. В., д.т.н., проф., професорка кафедри зварювального виробництва, діагностики та відновлення металоконструкцій Національного університету "Львівська політехніка", Львів, Україна;
- Пастернак Я. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна;
- Пневматікос Н., к.т.н., доц., доцент кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Попов В. Г., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри вищої математики Національного університету "Одеська морська академія", Одеса, Україна;
- Савченко О. Г., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, Херсон, Україна;
- Трач В. М., д.т.н., проф., завідувач кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування, Рівне, Україна;
- Шваб'юк В. І., д.т.н., проф., професор кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна.

Технічний редактор: Головата Злата Олександрівна

Лінгвістичний радник з англійської мови: Мар'яно Яніна Георгіївна, к.ф.н, доц.

ІТ підтримка: Вандинський Віктор Юрійович

---

## The composition of the editorial board:

**Chief Editor:** Kovrov A., Ph.D., Professor, Rector of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

**Deputy Chief Editor:**

Krutii Yu., Doctor of Technical Science, Professor, Pro-rector for Research of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

Suryaninov M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

**Assistant Editor:** Kiosak V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Higher Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

- Berbyuk V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor in Mechanical Systems, Division of Dynamics, Department of Mechanics and Maritime Sciences Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden;
- Vatulia G., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Structural Mechanics and Hydraulics Department, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine;
- Goryk O., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Basic Technical Disciplines Department, Poltava State Agrarian Academy, Poltava, Ukraine;
- Karpuyk V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Reinforced Concrete Constructions and Transport Constructions, Odessa, Ukraine;
- Kyriazopoulos A., Ph.D., Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Koda E., Doctor of Technical Science, Professor, Dean of Construction and Environmental Engineering Faculty, University of Life Sciences, Warsaw, Poland;
- Kononov Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Control-system Theory Division, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Slavyansk, Ukraine;
- Kryvyi O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Higher Mathematics Department, National University "Odessa Maritime Academy", Odessa, Ukraine;
- Kruglov V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Chair of Methods of Mathematical Physics Odessa I. I. Mechnikov National University, Odessa, Ukraine;
- Kucher M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Materials Division, G. S. Pisarenko Institute for Problems of Strength, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine;
- Lesechko O., Ph.D., Associate Professor, Head of Higher Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Leshchenko D., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Lyashenko T., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Information Technology and Applied Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Maksymovych O., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Welding Engineering, Diagnostics and Rebuilding of Metal Structures, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine;
- Pasternak Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Applied Mathematics and Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine;
- Pnevmatikos N., Ph.D., Associate Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Popov V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Higher Mathematics Department, National University "Odessa Maritime Academy", Odessa, Ukraine;
- Savchenko O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Algebra, Geometry and Mathematical Analysis Department, Kherson State University, Kherson, Ukraine;
- Trach V., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Bridges and Tunnels, Strength of Materials and Structural Mechanics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine;
- Shvabyuk V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Engineering Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine.

Technical Editor: Holovata Zlata

Linguistic Adviser in English language: Maryanko Yanina, Ph.D., Associate Professor

IT Support: Vandynskyi Viktor

---

## ЗМІСТ

**Кононов Ю. М., Довгоший О. А., Чеїб А. Х.**

Про стійкість рівномірного обертання у середовищі з опором несиметричного твердого тіла під дією постійного моменту у інерціальній системі відліку..... 6

**D. Leshchenko, T. Kozachenko**

Problems of evolution of rigid body motion similar to Lagrange top ..... 23

**Білий Д. В., Лобода В. В.**

Антиплоска задача для одномірного п'єзоелектричного квазікристала з міжфазною тріщиною під впливом внутрішнього електричного заряду..... 32

**Соляр Т. Я., Соляр О. І.**

Визначення напружень у товстих плитах при локалізованих навантаженнях..... 45

**Гуртовий О. Г., Тинчук С. О.**

Дослідження деформування багатощарової трансверсально-ізотропної плити на жорсткій основі за беззгиною уточненою континуальною моделлю..... 64

**P. Balduk, G. Balduk G., E. Yaremenko**

Calculation of multispans frame stability with regard to geometric nonlinearity..... 75

**N. Kobzar, Ye. Chvertko**

Modeling of welding processes for transferring technologies to extraterrestrial conditions..... 86

**S. Bekshaev**

On the optimal position of the intermediate support of the compressed three-span rod and its qualitative features..... 96

---

## CONTENT

<b>Yu. Kononov, O. Dovgoshey, A .K. Cheib</b> On the stability of uniform rotation in a resisting nonsymmetric rigid body under the action of a constant moment in inertial reference frame.....	6
<b>D. Leshchenko, T. Kozachenko</b> Problems of evolution of rigid body motion similar to Lagrange top .....	23
<b>D. Bilyi, V. Loboda</b> Antiplane problem for one-dimensional piezoelectric quasic crystal with an interface crack under the influence of internal electric load.....	32
<b>T. Solyar, O. Solyar</b> Determination of stresses in thick plates under localized loads.....	45
<b>O. Gurtovyi, S. Tynchuk</b> Investigation deformation of a multilayered transversal-isotropic plate on a rigid foundation by unflexural refined continual model.....	64
<b>P. Balduk, G. Balduk G., E. Yaremenko</b> Calculation of multispan frame stability with regard to geometric nonlinearity .....	75
<b>N. Kobzar, Ye. Chvertko</b> Modeling of welding processes for transferring technologies to extraterrestrial conditions.....	86
<b>S. Bekshaev</b> On the optimal position of the intermediate support of the compressed three-span rod and its qualitative features.....	96

УДК 531.36, 531.382

## ПРО СТІЙКІСТЬ РІВНОМІРНОГО ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ НЕСИМЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА ПІД ДІЄЮ ПОСТІЙНОГО МОМЕНТУ У ІНЕРЦІАЛЬНІЙ СИСТЕМІ ВІДЛІКУ

Кононов Ю. М.<sup>1</sup>, Довгоший О. А.<sup>1</sup>, Чеїб А. Х.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України*

<sup>2</sup>*Донецький національний університет імені Василя Стуса*

**Анотація:** У припущенні, що центр мас несиметричного твердого тіла знаходиться на третій головній осі інерції твердого тіла, отримані умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання динамічно несиметричного важкого твердого тіла з нерухомою точкою. Ці умови отримані у вигляді системи трьох нерівностей на підставі критерію Льенара-Шипара, записаного в іннормному вигляді. Тверде тіло знаходиться під дією сил тяжіння, дисипативного моменту і постійного моменту в інерціальній системі відліку. Досліджено обертання несиметричного твердого тіла довкола центру мас. Рівномірне обертання навколо центру мас несиметричного твердого тіла буде нестійким за відсутності постійного моменту. Розглянуто випадки відсутності динамічної або дисипативної несиметрії. Показано, що положення рівноваги твердого тіла буде стійким тільки при дії відновлювального моменту. Динамічна несиметрія більш суттєво впливає на стійкість обертання несиметричного твердого тіла, ніж дисипативна несиметрія. Проведено дослідження умов стійкості для різних граничних випадків малих або великих значень величин відновлювального, перекидального або постійного моментів. Зазначається, що з досить великих значення модуля відновлювального моменту обертання несиметричного твердого тіла буде асимптотично стійким. Якщо осьовий момент інерції є найбільшим або найменшим моментом інерції, то при досить великих значення кутової швидкості, як при дії перекидального моменту, так і при дії відновлювального моментів, обертання несиметричного твердого тіла буде асимптотично стійким. Проведено аналітичні дослідження впливу дисипативного, постійного, перекидального і відновлювального моментів на стійкість рівномірних обертань несиметричних та симетричних твердих тіл. Показано, що при відсутності динамічної та дисипативної несиметрії отримані умови стійкості збігаються з відомими.

**Ключові слова:** динамічно несиметричне та симетричне твердо тіло, середовище з опором, постійний момент в інерціальній системі відліку, асимптотична стійкість.

## ON THE STABILITY OF UNIFORM ROTATION IN A RESISTING NONSYMMETRIC RIGID BODY UNDER THE ACTION OF A CONSTANT MOMENT IN INERTIAL REFERENCE FRAME

Yu. Kononov<sup>1</sup>, O. Dovgoshey<sup>1</sup>, A. K. Cheib<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine*

<sup>2</sup>*Vasyl' Stus Donetsk National University*

**Abstract:** Assuming that the center of mass of a rigid asymmetric body is on the third main axis of inertia of a rigid body, the conditions for the asymptotic stability of uniform rotation of a dynamically asymmetric solid rigid body with a fixed point are obtained. These conditions are obtained in the form of a system of three inequalities based on the Lénard-Shipar test, written in innormal form. The rigid body is under the action of gravity, dissipative moment and constant moment in the inertial frame of reference. The rotation of a rigid asymmetric body around the center of mass is



studied. Uniform rotation around the center of mass of a rigid asymmetric body will be unstable in the absence of a constant moment. Cases of absence of dynamic or dissipative asymmetry are considered. It is shown that the equilibrium position of a rigid body will be stable only under the action of the reducing moment. Dynamic asymmetry has a more significant effect on the stability of rotation of an asymmetric rigid body than dissipative asymmetry. Stability conditions have been studied for various limiting cases of small or large values of restoring, overturning, or constant moments. It is noted that for sufficiently large values of the modulus of the reducing moment, the rotation of the asymmetric solid will be asymptotically stable. If the axial moment of inertia is the greatest or the smallest moment of inertia, then at sufficiently large values of angular velocity, both under the action of the overturning moment and under the action of the reducing moment, the rotation of the asymmetric solid will be asymptotically stable. Analytical studies of the influence of dissipative, constant, overturning and restorative moments on the stability of uniform rotations of asymmetric and symmetric solids have been carried out. It is shown that in the absence of dynamic and dissipative symmetries, the obtained stability conditions coincide with the known ones.

**Keywords:** dynamically asymmetric and symmetric rigid body, medium with resistance, constant moment in inertial frame of reference, asymptotic stability.



## 1 ВСТУП

В даний час є досить велика кількість робіт, в яких проводяться різні дослідження динаміки твердих тіл, що обертаються у середовищі з опором. Наведемо лише роботи, які найближчі до розглядуваної задачі. У роботах [1, 2] розглянуто кілька прикладів рухів твердих тіл з малою несиметрією і запропоновано алгоритм вивчення таких систем. Показано, що мала динамічна несиметрія твердого тіла призводить до появи додаткового інтервалу нестійкості, довжина якого прямує до нуля при прямуванні до нуля величини дебалансу. В статтях [3, 4], на підставі критерію Льенара-Шіпара в іннорному вигляді, отримано умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання під дією постійного моменту несиметричного твердого тіла у середовищі з опором. Ці умови записано у вигляді системи трьох нерівностей. Проведено аналітичні дослідження цих нерівностей. Отримано умови на величини постійного моменту і моменту інерції третьої головної осі, які при дії відновлювального моменту достатні для асимптотичної стійкості. Показано, що при досить великому постійному моменті буде спостерігатися асимптотична стійкість при дії відновлювального моменту, якщо обертання твердого тіла відбувається навколо осі найбільшого моменту інерції і найменшого з подвоєних. Дано узагальнення отриманих умов стійкості на випадок наявності в твердому тілі порожнини з ідеальної нестисливої рідини, що здійснює потенціальний рух. Показано, що при відсутності дисипації, отримані умови стійкості збігаються з відомими. Вплив ідеальної рідини на стійкість обертання дзиги Лагранжа у середовищі з опором розглянуто в роботі [5]. Найбільш вдалий огляд сучасної літератури по розглядуваної задачі наданий в роботах [3–11]. У монографії [6] представлений уніфікований і добре розроблений підхід до динаміки кутових рухів твердих тіл, що зазнають моментів збурення різної фізичної природи. Строгий підхід, заснований на процедурі усереднення, застосовується до тіл з довільними еліпсоїдами інерції. Детально розглядається дія різних моментів збурень, як зовнішніх (гравітаційний, аеродинамічний, сонячний тиск), так і внутрішніх (завдяки в'язкій рідині в резервуарах, пружним і в'язкопружним властивостям тіла). В статті [7] досліджуються збурені обертальні рухи твердого тіла, близькі до випадку Лагранжа, під дією повільно змінювального в часі крутного моменту. Новий клас обертань динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки з урахуванням нестационарного збурюючого моменту і повільно змінюваного з часом відновлюючого моменту вивчається у роботі [8]. За допомогою методу усереднення в статті [8] одержано наближений розв'язок системи рівнянь Ейлера руху в середовищі з опором твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості. У роботі [9] досліджуються обурені рухи твердого тіла, близькі до випадку Лагранжа, під дією відновлювального та обурюючого моментів сил. Для аналізу нелінійної системи рівнянь руху використовується метод усереднення. Наведено умови можливості усереднення рівнянь руху по фазі кута нутації та описано процедуру усереднення повільних змінних обуреного руху твердого тіла у першому наближенні. В статті [10] розглянуто рух навколо центру мас сфероїда із порожниною, заповненою в'язкою рідиною. Момент сил, що діють тіло з боку в'язкої рідини в порожнині, визначають за методикою, розробленою в роботах Ф.Л. Черноусько. Асимптотичний підхід дозволяє отримати деякі якісні результати та описати нелінійну еволюцію кутового руху за допомогою спрощених усереднених рівнянь. За допомогою методу усереднення Крилова–Боголюбова у роботі [11] одержано наближений розв'язок системи рівнянь Ейлера руху твердого тіла у середовищі з опором з додатковими збуреними членами для сфероїда, заповненого в'язкою рідиною великої в'язкості.

В статті [12] проведені дослідження впливу дисипативного моменту і постійного моменту в інерціальній системі відліку на стійкість стаціонарних рухів гіроскопа

Лагранжа. У роботі [13] ця задача була узагальнена на випадок струнного підвісу і рівномірних обертань гіроскопа Лагранжа.

У цій роботі узагальнені задачі, які були розглянуті у статті [12] на випадок рівномірного обертання несиметричного твердого тіла і у статті [3] на випадок постійного моменту в неінерціальній системі та доповнені результати, які були раніше отримані у роботах [14, 15]. У припущенні, що центр мас несиметричного твердого тіла знаходиться на третій головній осі інерції твердого тіла, отримано, на підставі критерію Ляпунова-Шипара в інваріантному вигляді, умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання навколо нерухомої точки несиметричного твердого тіла. Проведено аналітичні дослідження впливу дисипативного, постійного, перекидального і відновлювального моментів на стійкість рівномірних обертань несиметричних та симетричних твердих тіл.

## 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

Розглянемо важке динамічно несиметричне тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої точки, в припущенні, що на нього діє дисипативний момент  $\mathbf{M}_d = -\mathbf{D}\boldsymbol{\omega}$

( $\mathbf{D} = \text{diag}(D_1, D_2, D_3); D_i > 0; i = \overline{1,3}$ ), що моделює опір середовища та постійний момент  $\mathbf{M}_p = P\boldsymbol{\gamma}$ , який підтримує сталу кутову швидкість власного обертання твердого тіла. Будемо вважати, що на третій головній осі інерції твердого тіла знаходиться центр мас твердого тіла і тверде тіло в незбуреному русі рівномірно обертається з кутою швидкістю  $\boldsymbol{\omega}_0$  навколо цієї осі. Тут  $\boldsymbol{\omega}$  – кутова швидкість твердого тіла,  $\boldsymbol{\gamma}$  – одиничний вектор висхідної вертикалі,  $P$  – довільна стала.

Рівняння руху твердого тіла мають вигляд [3, 12, 14]

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + P\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}; \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad (2)$$

де  $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$  – тензор інерції твердого тіла для нерухомої точки;  $V = \Gamma(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma})$  – потенційна енергія ( $\Gamma = mgs$ ,  $m$  – маса твердого тіла,  $s$  – відстань від нерухомої точки до центру мас твердого тіла,  $g$  – прискорення вільного падіння);  $\mathbf{k}$  – одиничний вектор третьої головної осі;  $\boldsymbol{\gamma}$  – одиничний вектор висхідної вертикалі.

Рівняння (1) виражає теорему про зміну кінетичного моменту  $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ , а рівняння (2) – умова сталості вектора  $\boldsymbol{\gamma}$  в інерціальній системі відліку.

Проектуючи рівняння руху твердого тіла (1) – (2) на головній осі інерції твердого тіла для нерухомої точки, отримаємо:

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = \Gamma\gamma_2 - D_1\omega_1; \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 = -\Gamma\gamma_1 - D_2\omega_2; \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = P\gamma_3 - D_3\omega_3, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 + \omega_2\gamma_3 - \omega_3\gamma_2 = 0; \\ \dot{\gamma}_2 + \omega_3\gamma_1 - \omega_1\gamma_3 = 0; \\ \dot{\gamma}_3 + \omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_0 = \omega = \frac{P}{D_3}, \quad (5)$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = -1, \omega_1 = \omega_2 = 0, \omega_3 = \omega_0 = \omega = \frac{-P}{D_3}, \quad (6)$$

які відповідають рівномірним обертанням твердого тіла з кутовою швидкістю  $\omega$  навколо вертикально розташованої третьої головної осі. При цьому розв'язку (5) відповідає випадок "сплячої" дзиги, на яку діє перекидальний момент ( $\Gamma > 0$ , центр мас твердого тіла перебуває вище нерухомої точки ( $c > 0$ ), а розв'язку (6) – випадок статично врівноваженої дзиги, на яку діє відновлювальний ( $\Gamma < 0$ , центр мас знаходиться нижче нерухомої точки ( $c < 0$ )). Таким чином, розв'язку (5) відповідає випадок  $\Gamma > 0$ , а розв'язку (6) відповідає  $\Gamma < 0$ .

### 3 АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ (5) – (6)

Дослідити аналітично і чисельно частотний спектр плоских коливань пружної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею в прямокутному каналі. Показати для довільного закріплення контурів прямокутної пластини, що частотний спектр розглянутої задачі складається з двох наборів частот, які описують коливання вільної поверхні рідини і пружної пластини. У випадку затиснених контурів пластини провести його спрощення і вивчити вплив основних механічних параметрів системи на перший і другий набір частот. Розглянути випадки відродження пластини в мембрану. Показати взаємовплив коливань пластини або мембрани (першого набору) на коливання вільної поверхні рідини (другого набору) та навпаки.

### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Вважаючи в обуреного руху  $\gamma_3 = \pm 1 + \delta$ ,  $\omega_3 = \omega + \sigma$  (знак плюс відповідає рішенням (5), а знак мінус – (6)) і, зберігаючи для інших змінних їх колишні позначення, запишемо лінеаризовані рівняння збуреного руху:

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega - \Gamma \gamma_2 - P \gamma_2 + D_1 \omega_1 = 0; \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega + \Gamma \gamma_1 - P \gamma_2 + D_2 \omega_2 = 0; \\ J_3 \dot{\sigma} + D_3 \sigma - P \sigma = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 + \omega_2 - \omega \gamma_2 = 0; \\ \dot{\gamma}_2 - \omega_1 + \omega \gamma_1 = 0; \\ \dot{\delta} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

При динамічній ( $J_2 = J_1$ ) і дисипативній ( $D_2 = D_1$ ) симетрії рівняння (1) – (2) збігаються з рівняннями роботи [12]. У зв'язку з цим всі основні властивості рівнянь цієї роботи переносяться і на рівняння (1) – (2), а саме: характеристичне рівняння системи (1) – (2) завжди має один нульовий корінь, обумовлений наявністю геометричного інтеграла  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$  і один негативний корінь  $-D_3/J_3$ ; перше і друге рівняння системи (1) і системи (2) відокремлюються від інших рівнянь. Розв'язання (5) – (6) асимптотично стійкі, якщо всі корені характеристичного рівняння мають позитивну дійсну частину і нестійкі, якщо хоча б один корінь має позитивну реальну частину. Асимптотична стійкість по змінній  $\gamma_3$  впливає з асимптотичної стійкості по змінним  $\gamma_1, \gamma_2$  і геометричного інтеграла.

З перших двох рівнянь системи (8) висловимо  $\omega_1, \omega_2$  і підставимо їх і їхні похідні в перші два рівняння (7):

$$\begin{cases} J_2 \ddot{\gamma}_1 + D_2 \dot{\gamma}_1 + \Gamma_1 \gamma_1 - J_s \dot{\gamma}_2 - \tilde{D}_2 \gamma_2 = 0, \\ J_1 \ddot{\gamma}_2 + D_2 \dot{\gamma}_2 + \Gamma_2 \gamma_2 + J_s \dot{\gamma}_1 + \tilde{D}_1 \gamma_1 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Тут

$$\Gamma_1 = (J_3 - J_1)\omega^2 - \Gamma, \quad \Gamma_2 = (J_3 - J_2)\omega^2 - \Gamma, \quad J_s = J\omega, \quad J = J_1 + J_2 - J_3 > 0, \\ \tilde{D}_i = D_i\omega - P \quad (i=1,2).$$

Основна відмінність отриманих рівнянь (9) від аналогічних рівнянь робіт [5, 6] полягає в тому, що через динамічної ( $J_2 \neq J_1$ ) і дисипативної ( $D_2 \neq D_1$ ) несиметрії неможливо спростити ці рівняння шляхом введенням комплексної функції  $\gamma_1 + i\gamma_2$ . Слід також зазначити, що система рівнянь (9) описує рух лінійної механічної системи з двома ступенями свободи, що знаходиться під дею сил довільної структури: дисипативних, потенційних, гіроскопічних і циркуляційних [3, 12].

Характеристичне рівняння для системи (9) буде мати вигляд:

$$(\lambda^2 J_1 + D_1 \lambda + \Gamma_2)(\lambda^2 J_2 + D_2 \lambda + \Gamma_1) + (J_s \lambda + \tilde{D}_1)(J_s \lambda + \tilde{D}_2) = 0$$

чи

$$a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (10)$$

де  $a_4 = J_1 J_2 > 0$ ,  $a_3 = J_1 D_1 + J_2 D_2 > 0$ ,

$$a_2 = J_s^2 + J_1 \Gamma_1 + J_2 \Gamma_2 + D_1 D_2 = (2J_1 J_2 - J_3 J)\omega^2 - (J_1 + J_2)\Gamma + D_1 D_2, \quad (11)$$

$$a_1 = (\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2)J_s + D_1 \Gamma_1 + D_2 \Gamma_2 = (J_1 D_2 + J_2 D_1)\omega^2 - (D_1 + D_2)\Gamma - 2JP\omega,$$

$$a_0 = \Gamma_1 \Gamma_2 + \tilde{D}_1 \tilde{D}_2 = (J_3 - J_1)(J_3 - J_2)\omega^4 + [(J - J_3)\Gamma + D_1 D_2]\omega^2 - (D_1 + D_2)P\omega + P^2 + \Gamma^2.$$

Для того, щоб все нулі рівняння (10) лежали у відкритій лівій півплощині, згідно критерію Ляенара - Шіпара, записаного в іннормному вигляді [16] (см. с.34), необхідно і достатньо, щоб:

- 1) були додатні всі коефіцієнти  $a_i$  (або половина цих коефіцієнтів);
- 2) були іннормно додатними матриці  $\Delta_3^e$ ,  $\Delta_1^e$ , тобто

$$I_3 = |\Delta_3^e| = \begin{vmatrix} a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & 0 \end{vmatrix} = (a_2 a_3 - a_1 a_4) a_1 - a_0 a_3^2 > 0; \quad I_1 = |\Delta_1^e| = a_3 > 0.$$

Таким чином, умови асимптотичної стійкості розв'язків (5) – (6) запишуться так:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad (a_2 a_3 - a_1 a_4) a_1 - a_0 a_3^2 > 0.$$

Для рішення (5), тобто коли діє перекидальний момент ( $\Gamma > 0$ ), вони мають вигляд:

$$\begin{aligned} & (\Gamma - (J_3 - J_1)\omega^2)(\Gamma - (J_3 - J_2)\omega^2) + (D_3 - D_1)(D_3 - D_1)D_3\omega^2 = \\ & = \Gamma^2 + \tilde{J}\omega^2\Gamma + (D_3 - D_1)(D_3 - D_1)\omega^2 + (J_3 - J_1)(J_3 - J_2)\omega^4 > 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$(D_1 + D_2)\Gamma < (J_{12} - 2JD_3)\omega^2, \quad (13)$$

$$(J_1 - J_2)^2 D_1 D_2 \Gamma^2 + b_1 \Gamma + b_0 > 0. \quad (14)$$

Тут

$$b_1 = [(J_3 - 2J_1)D_2 + (J_3 - 2J_2)D_1]JJ_{12}\omega^2 + 2J(J_1 - J_2)\tilde{J}_{12}P\omega - (D_1 + D_2)D_1D_2J_{12}, \quad (15)$$

$$b_0 = P \left[ 2J^2J_3J_{12}\omega^3 - 4J^2J_1J_2P\omega^2 + (J_1D_2^2 - \tilde{J}D_1D_2 + J_2D_1^2)J_{12}\omega + J_{12}^2P \right],$$

$$\tilde{J} = J - J_3, \quad J_{12} = J_1D_2 + J_2D_1 > 0.$$

Так як  $\omega = P/D_3$ , то систему нерівностей (12) – (14) зручно записати ще так:

$$(\Gamma D_3^2 - (J_3 - J_1)P^2)(\Gamma D_3^2 - (J_3 - J_2)P^2) + (D_3 - D_1)(D_3 - D_1)D_3^3P^2 = \quad (16)$$

$$= D_3^4\Gamma^2 + \tilde{J}D_3^2P^2\Gamma + (D_3 - D_1)(D_3 - D_1)D_3^2P^2 + (J_3 - J_1)(J_3 - J_2)P^4 > 0,$$

$$(D_1 + D_2)D_3^2\Gamma < (J_{12} - 2JD_3)P^2, \quad (17)$$

$$(J_1 - J_2)^2D_1D_2D_3^3\Gamma^2 + D_3\Gamma_1\Gamma + \Gamma_0 = p_4P^4 + p_2P^2 + p_0 > 0. \quad (18)$$

Тут

$$\Gamma_1 = \left\{ [(J_3 - 2J_2)D_1 + (J_3 - 2J_1)D_2]J_{12} + 2(J_1 - J_2)\tilde{J}_{12}D_3 \right\} JP^2 - J_{12}(D_1 + D_2)D_1D_2D_3^2,$$

$$\Gamma_0 = 2(J_3J_{12} - 2J_1J_2D_3)J^2P^4 + \left[ 2D_1D_2J_3 - J_{12}D_3 - (D_1 - D_2)\tilde{J}_{12} \right] J_{12}D_3^2P^2, \quad (19)$$

$$p_4 = 2J^2(J_3J_{12} - 2J_1J_2D_3),$$

$$p_2 = \left\{ \left[ J_2(J_3 - 2J_2)D_1^2 + ((J_1 + J_2)J_3 - 4J_1J_2)D_1D_2 + 2(J_1 - J_2)\tilde{J}_{12}D_3 + J_1(J_3 - 2J_1)D_2^2 \right] J\Gamma + \right. \\ \left. + (J_2D_1^2 - \tilde{J}D_1D_2 - J_{12}D_3 + J_1D_2^2)J_{12}D_3 \right\} D_3,$$

$$p_0 = \Gamma \left[ (J_1 - J_2)^2\Gamma - J_{12}(D_1 + D_2) \right] D_1D_2D_3^3, \quad \tilde{J} = J - J_3, \quad J_{12} = J_1D_2 + J_2D_1 > 0.$$

Так як в нерівності (12) – (14) і (16) – (18) та в позначення (15) і (19) стала  $P$  входить в парний ступені, то ці нерівності при дії перекидального моменту ( $\Gamma > 0$ ) визначають умови асимптотичної стійкості рішення (5), а при дії відновлювального моменту ( $\Gamma < 0$ ) – рішення (6).

Із нерівності (17) слідує, що при дії перекидального моменту стійкість буде неможлива, коли  $D_3 > J_{12}J_3/2J_1J_2$ .

При динамічній симетрії ( $J_2 = J_1$ ) нерівності (16) – (18) отримують вигляд:

$$(\Gamma D_3^2 - (J_3 - J_1)P^2)^2 + (D_3 - D_1)(D_3 - D_2)D_3^3P^2 = \quad (20)$$

$$= D_3^4\Gamma^2 + \tilde{J}D_3^2P^2\Gamma + (D_3 - D_1)(D_3 - D_2)D_3^2P^2 + (J_3 - J_1)^2P^4 > 0,$$

$$(D_1 + D_2)D_3^2\Gamma < [J_1(D_1 + D_2) - 2(2J_1 - J_3)D_3]P^2, \quad (21)$$

$$D_3\Gamma_1\Gamma + \Gamma_0 = p_4P^4 + p_2P^2 + p_0 > 0. \quad (22)$$

Тут

$$\Gamma_1 = [(J_3 - 2J_1)JP^2 - D_1D_2](D_1 + D_2)^2,$$

$$\Gamma_0 = 2 \left[ (J_3(D_1 + D_2) - 2J_1D_3) \right] J^2P^4 + \left[ 2D_1D_2J_3 - J_1(D_1 + D_2)D_3 - J_1(D_1 - D_2)^2 \right] \times \\ \times (D_1 + D_2)D_3^2P^2 \quad p_4 = 2J^2 \left[ (J_3(D_1 + D_2) - 2J_1D_3) \right],$$

$$p_2 = \left\{ (J_3 - 2J_1)(D_1 + D_2)^2 J\Gamma + \left[ J_1(D_1^2 - (D_1 + D_2)D_3 + D_2^2) - \tilde{J}D_1D_2 \right] (D_1 + D_2)D_3 \right\} D_3,$$

$$p_0 = -(D_1 + D_2)^2D_1D_2D_3^2\Gamma, \quad \tilde{J} = 2(J_1 - J_3).$$

Нерівності (20) і (22) з точністю до другого ступеня малості відносно  $P/P_0$  ( $|P/P_0| \ll 1$ ), де  $P_0$  – характерне значення постійного моменту запишуться так:

$$D_3^4 \Gamma^2 + \tilde{J} D_3^2 P^2 \Gamma + (D_3 - D_1)(D_3 - D_2) D_3^2 P^2 > 0, \quad (23)$$

$$p_2 P^2 + p_0 > 0. \quad (24)$$

Нерівності (23), (21) і (24) з точністю до першого ступеня малості відносно  $P/P_0$  мають вигляд:

$$D_3^4 \Gamma^2 + \tilde{J} D_3^2 P^2 \Gamma > 0, \quad (25)$$

$$(D_1 + D_2) D_3^2 \Gamma < 0, \quad (26)$$

$$(D_1 + D_2)^2 D_1 D_2 D_3^2 \Gamma < 0. \quad (27)$$

Це можливо тільки при дії відновлювального моменту.

При дисипативній симетрії ( $D_2 = D_1$ ) система нерівностей (16) – (18) запишеться наступним чином:

$$\left( \Gamma D_3^2 - (J_3 - J_1) P^2 \right) \left( \Gamma D_3^2 - (J_3 - J_2) P^2 \right) + (D_1 - D_3)^2 D_3^3 P^2 = \quad (28)$$

$$= D_3^4 \Gamma^2 + \tilde{J} D_3^2 P^2 \Gamma + (D_1 - D_3)^2 D_3^2 P^2 + (J_3 - J_1)(J_3 - J_2) P^4 > 0,$$

$$2D_1 D_3^2 \Gamma < \left[ (J_1 + J_2) D_1 - 2J D_3 \right] P^2, \quad (29)$$

$$(J_1 - J_2)^2 D_1^2 D_3^3 \Gamma^2 + D_3 \Gamma_1 \Gamma + \Gamma_0 = p_4 P^4 + p_2 P^2 + p_0 > 0, \quad (30)$$

де

$$\Gamma_1 = -2D_1 \left\{ \left[ (J_1 - J_2)^2 D_3 - (J_1 + J_2) J D_1 \right] J P^2 + (J_1 + J_2) D_1^3 D_3^2 \right\},$$

$$\Gamma_0 = 2 \left[ (J_3 (J_1 + J_2) D_1 - 2J_1 J_2 D_3) \right] J^2 P^4 + \left[ 2D_1 J_3 - (J_1 + J_2) D_3 \right] (J_1 + J_2) D_1^2 D_3^2 P^2,$$

$$p_4 = 2J^2 \left[ (J_1 + J_2) J_3 D_1 - 2J_1 J_2 D_3 \right],$$

$$p_2 = \left\{ 2 \left[ (J_1 - J_2)^2 D_3 - (J_1 + J_2) J D_1 \right] J \Gamma + \left[ 2J_3 D_1 - (J_1 + J_2) D_3 \right] (J_1 + J_2) D_1 D_3 \right\} D_1 D_3,$$

$$p_0 = \Gamma \left[ (J_1 - J_2)^2 \Gamma - 2(J_1 + J_2) D_1^2 \right] D_1^2 D_3^3,$$

$$D = p_2^2 - 4p_4 p_0 = \left\{ 4 \left[ J^2 D_1^2 + (J_1 - J_2)^2 (D_3 - 2D_1) D_3 \right] J^2 \Gamma^2 + \right.$$

$$+ 4 \left[ 2J_3 J D_1^2 - (J_1^2 - 6J_1 J_2 + J_2^2 + (J_1 + J_2) J_3) D_1 D_3 - (J_1 - J_2)^2 D_3^2 \right] J D_1 D_3 \Gamma +$$

$$\left. + \left[ (J_1 + J_2) D_3 - 2J_3 D_1 \right]^2 D_1^2 D_3^2 \right\} (J_1 + J_2)^2 D_1 D_3^2.$$

При  $\Gamma < 0$ ,  $D_3 > 2D_1$  и  $(J_1 - J_2)^2 D_3^2 + (J_1^2 - 6J_1 J_2 + J_2^2 + (J_1 + J_2) J_3) D_1 D_3 - 2J_3 J D_1^2 > 0$  будемо мати  $D > 0$ .

Нерівності (28) і (30) з точністю до другого ступеня малості відносно  $P/P_0$  запишуться так:

$$D_3^4 \Gamma^2 + \tilde{J} D_3^2 P^2 \Gamma + (D_1 - D_3)^2 D_3^2 P^2 > 0, \quad (31)$$

$$p_2 P^2 + p_0 > 0, \quad (32)$$

де

$$p_2 = \left\{ 2 \left[ (J_1 - J_2)^2 D_3 - (J_1 + J_2) J D_1 \right] J \Gamma + \left[ 2J_3 D_1 - (J_1 + J_2) D_3 \right] (J_1 + J_2) D_1 D_3 \right\} D_1 D_3,$$

$$p_0 = \Gamma \left[ (J_1 - J_2)^2 \Gamma - 2(J_1 + J_2) D_1^2 \right] D_1^2 D_3^3,$$

$$D = p_2^2 - 4p_4 p_0 = \left\{ 4 \left[ J^2 D_1^2 + (J_1 - J_2)^2 (D_3 - 2D_1) D_3 \right] J^2 \Gamma^2 + \right.$$

$$+ 4 \left[ 2J_3 J D_1^2 - (J_1^2 - 6J_1 J_2 + J_2^2 + (J_1 + J_2) J_3) D_1 D_3 - (J_1 - J_2)^2 D_3^2 \right] J D_1 D_3 \Gamma +$$

$$\left. + \left[ (J_1 + J_2) D_3 - 2J_3 D_1 \right]^2 D_1^2 D_3^2 \right\} (J_1 + J_2)^2 D_1 D_3^2.$$

Нерівності (31) і (32) з точністю до першого ступеня малості відносно  $\Gamma/\Gamma_0$  отримують вигляд:

$$\tilde{J} D_3^2 P^2 \Gamma + (D_1 - D_3)^2 D_3^2 P^2 > 0, \quad (33)$$

$$p_2 P^2 - 2\Gamma (J_1 + J_2) D_1^4 D_3^3 > 0. \quad (34)$$

При дії віновлювального моменту ( $\Gamma < 0$ ) нерівності (33), (29) і (34) будуть виконані, якщо  $2J_3 > J_1 + J_2$ ,  $(J_1 - J_2)^2 D_3 - (J_1 + J_2) J D_1 < 0$ ,  $2J_3 D_1 - (J_1 + J_2) D_3 > 0$ . Так, наприклад, при  $(J_1 + J_2)/2 < J_3 < J_1 + J_2 - (J_1 - J_2)^2 D_3 / (J_1 + J_2) D_1$ ,

$D_3 < (J_1 + J_2)^2 D_1 / 2(J_1 - J_2)^2$ ,  $D_3 < 2J_3 D_1 / (J_1 + J_2)$  це буде можливо.

Для перевірки отриманих нерівностей (12) – (14) розглянемо випадок динамічної ( $J_2 = J_1$ ) і дисипативної симетрії ( $D_2 = D_1$ ). В цьому випадку система нерівностей (16) – (18) отримає вигляд:

$$\left( \Gamma D_3^2 - (J_3 - J_1) P^2 \right)^2 + (D_1 - D_3)^2 D_3^3 P^2 > 0; \quad (35)$$

$$D_1 D_3^2 \Gamma < \left[ J_1 D_1 - (2J_1 - J_3) D_3 \right] P^2; \quad (36)$$

$$D_3 \Gamma_1 \Gamma + \Gamma_0 = p_4 P^4 + p_2 P^2 + p_0 = 4J_1 \left( D_1^2 D_3^2 + J^2 P^2 \right) \times$$

$$\times \left[ (J_3 D_1 - J_1 D_3) P^2 - \Gamma D_1^2 D_3 \right] > 0. \quad (37)$$

Тут

$$\Gamma_1 = -4J_1 D_1^2 \left( D_1^2 D_3^2 + J^2 P^2 \right),$$

$$\Gamma_0 = -4J_1 P^2 \left( D_1^2 D_3^2 + J^2 P^2 \right) (J_1 D_3 - J_3 D_1),$$

$$p_4 = 4J_1 (J_3 - 2J_1)^2 (J_3 D_1 - J_1 D_3),$$

$$p_2 = 4J_1 D_1^2 D_3 \left[ (J_3 D_1 - J_1 D_3) D_3 - (J_3 - 2J_1)^2 \Gamma \right],$$

$$p_0 = -4J_1 D_1^4 D_3^3 \Gamma.$$

Нерівності (36) і (37) можна переписати так:

$$D_1^2 D_3^2 \Gamma < \left[ J_1 D_1 - (2J_1 - J_3) D_3 \right] D_1 P^2 = \left[ J_1 (D_1 - D_3)^2 + (J_3 D_1 - J_1 D_3) D_3 \right] P^2, \quad (38)$$

$$D_1^2 D_3^2 \Gamma < (J_3 D_1 - J_1 D_3) D_3 P^2. \quad (39)$$

Із нерівностей (38) і (39) слідує нерівність (39) із якої випливають відомі умови стійкості для гіроскопа Лагранжа при  $\Gamma > 0$  і  $\Gamma < 0$  [12]:

$$(J_3 D_1 - J_1 D_3) \omega^2 - D_1^2 \Gamma > 0. \quad (40)$$



## 5 ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ СТІЙКОСТІ (12) – (14) І (16) – (18)

З нерівностей (12) – (14) слідує, що при  $(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) > 0$  і досить великих значеннях  $\omega$  ці нерівності будуть виконані, так як відповідні коефіцієнти при старших ступенях у цих нерівностях позитивні. Таким чином, якщо момент інерції  $J_3$  є найбільшим або найменшим моментом інерції, то при досить великих значеннях  $\omega$ , як при дії перекидального моменту ( $\Gamma > 0$ ), так і при дії відновлювального моменту ( $\Gamma < 0$ ) рівномірне обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опорному буде асимптотично стійким.

Із нерівностей (12) – (14) і (16) – (18) слідує, що вони будуть виконані при достатньо великих значеннях модуля відновлювального моменту.

При частковій дисипації ( $D_1 = D_2 = 0, D_3 \neq 0$ ) асимптотична стійкість неможлива, так як не виконується нерівність (14) ( $b_1 = b_2 = 0$ ).

На підставі умов стійкості (12) – (14) можна досліджувати стійкість положення рівноваги. Для цього в нерівності (12) – (14) треба покласти  $\omega = 0$  ( $P = 0$ ). Із цих нерівностей випливає, що положення рівноваги буде стійким тільки при дії відновлювального моменту, а також те, що при відсутності постійного моменту ( $P = 0$ ) умови стійкості будуть виконані тільки при дії відновлювального моменту.

Нерівності (16) буде невиконана при  $(\Gamma D_3^2 - (J_3 - J_1)P^2)(\Gamma D_3^2 - (J_3 - J_2)P^2) < 0$ ,  $(D_3 - D_1)(D_3 - D_2) < 0$ , а із нерівності (17) слід наступна умови нестійкості рівномірного обертання несиметричного твердого тіла при діє перекидального моменту:

$$D_3 > J_{12}/2J \text{ або } J_3 < [J_1(2D_3 - D_2) + J_2(2D_3 - D_1)]/2D_3. \quad (41)$$

Нерівність (16) відносно  $\Gamma$  має розв'язки:

$$\{0 < \Gamma < \Gamma_1\} \cup \{\Gamma > \Gamma_2\} \text{ при } D > 0, 0 < \Gamma_1 < \Gamma_2 \text{ і } \Gamma \in R \text{ при } D < 0,$$

$$\text{де } D = [(J_1 - J_2)^2 P^2 - 4(D_3 - D_1)(D_3 - D_2)D_3^2], \Gamma_{1,2} = (-\tilde{J}P \pm \sqrt{D})P/2D_3^2.$$

Для виконання нерівності (16) достатньо, щоб

$$(\Gamma D_3^2 - (J_3 - J_1)P^2)(\Gamma D_3^2 - (J_3 - J_2)P^2) > 0 \text{ і } (D_3 - D_1)(D_3 - D_2) > 0.$$

Так, наприклад, при  $\Gamma > 0$  і  $J_3 > J_2 > J_1$  ми маємо

$$\{0 < \Gamma < (J_3 - J_1)P^2/D_3^2\} \cup \{\Gamma > (J_3 - J_1)P^2/D_3^2\}.$$

Також для виконання нерівності (16) достатньо, щоб  $\tilde{J}\Gamma > 0, (D_3 - D_1)(D_3 - D_2) > 0$  і  $(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) > 0$ . Так, наприклад, при  $\Gamma > 0$  і  $J_3 < J_1, J_3 < J_2$  ( $\tilde{J} > 0$ ) ця нерівність буде виконана.

Нерівність (18) відносно  $\Gamma$  має розв'язки:

$$\{0 < \Gamma < \Gamma_1\} \cup \{\Gamma > \Gamma_2\} \text{ при } D > 0, 0 < \Gamma_1 < \Gamma_2 \text{ і } \Gamma \in R \text{ при } D < 0,$$

$$\text{де } D = b_1^2 - 4b_0(J_1 - J_2)^2 D_1 D_2 D_3 = J_{12}^2 (q_4 P^4 + q_2 P^2 + q_0)/D_3^4,$$

$$q_4 = (J_3 - 2J_2)^2 D_1^2 + 2[(J_3 - 2J_1)(J_3 - 2J_2)D_2 + 2(J_3 - 2J_2)(J_2 - J_1)D_3]D_1 +$$



$$\begin{aligned}
 &+(J_3-2J_1)^2 D_2^2 - 4(J_3-2J_1)(J_2-J_1)D_2D_3 + 4(J_1-J_2)^2 D_3^2, \\
 q_2 = &2D_1D_2D_3^2 \left[ -(J_3-2J_2)JD_1^2 - (J_3-2J_1)JD_2^2 + 2J^2D_1D_2 + \right. \\
 &\left. + 2(J_3-2J_2)(J_2-J_1)D_1D_3 + 2(J_3-2J_1)(J_1-J_2)D_2D_3 + 2(J_1-J_2)^2 D_3^2 \right], \\
 q_0 = &D_1^2D_2^2D_3^4(D_1+D_2), \quad \Gamma_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{D}}{2(J_1-J_2)^2 D_1D_2D_3^2}.
 \end{aligned}$$

Для виконання нерівності (18) достатньо, щоб  $\Gamma_1\Gamma > 0$  і  $\Gamma_0 > 0$ .

Зведемо нерівності (16) і (18) до другого порядку малості відносно  $P/P_0$  ( $|P/P_0| \ll 1$ ), де  $P_0$  – характерне значення постійного моменту  $P$ . У цьому випадку система (16) – (18) отримає вигляд:

$$\left[ (D_1-D_3)(D_2-D_3) + \tilde{J}\Gamma \right] D_3^2 P^2 + D_3^4 \Gamma^2 > 0, \tag{42}$$

$$(D_1+D_2)D_3^2 \Gamma < (J_{12}-2JD_3)P^2, \tag{43}$$

$$p_2 P^2 + p_0 > 0. \tag{44}$$

Тут

$$\begin{aligned}
 p_2 = &\left[ J_2(J_3-2J_2)D_1^2 + ((J_1+J_2)J_3 - 4J_1J_2)D_1D_2 + 2(J_1-J_2)\tilde{J}_{12}D_3 + J_1(J_3-2J_1)D_2^2 \right] J\Gamma + \\
 &+ (J_2D_1^2 - \tilde{J}D_1D_2 - J_{12}D_3 + J_1D_2^2) J_{12}D_3 \Big\} D_3,
 \end{aligned}$$

$$p_0 = \Gamma \left[ (J_1-J_2)^2 \Gamma - J_{12}(D_1+D_2) \right] D_1D_2D_3^3.$$

Система нерівностей (42) – (44) з точністю до першого порядку малості відносно  $P/P_0$  ( $|P/P_0| \ll 1$ ) запишеться наступним чином:

$$D_3^4 \Gamma^2 > 0, \tag{45}$$

$$(D_1+D_2)D_3^2 \Gamma < 0, \tag{46}$$

$$\Gamma \left[ (J_1-J_2)^2 \Gamma - J_{12}(D_1+D_2) \right] > 0. \tag{47}$$

З нерівностей (45) – (47) випливає, що з точністю до першого ступеня малості постійного моменту рівномірні обертання несиметричного твердого тіла в середовищі з опором будуть асимптотично стійкі при дії відновлювального моменту ( $\Gamma < 0$ ) і нестійкі при дії перекидального моменту ( $\Gamma > 0$ ).

Запишемо нерівності (42) – (44) з точністю до першого ступеня малості відносно  $\Gamma/\Gamma_0$  ( $|\Gamma/\Gamma_0| \ll 1$ ), де  $\Gamma_0$  – характерне значення моменту  $\Gamma$ ):

$$\tilde{J}\Gamma + (D_3-D_1)(D_3-D_2) > 0, \tag{48}$$

$$(D_1+D_2)D_3^2 \Gamma < (J_{12}-2JD_3)P^2, \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \left[ (J_3-2J_2)D_1 + (J_3-2J_1)D_2 \right] J_{12} + 2(J_1-J_2)\tilde{J}_{12}D_3 \right\} J P^2 - J_{12}(D_1+D_2)D_1D_2D_3^2 \Big\} D_3 \Gamma + \\
 &+ \left[ 2D_1D_2J_3 - J_{12}D_3 - (D_1-D_2)\tilde{J}_{12} \right] J_{12}D_3^2 P^2 > 0.
 \end{aligned} \tag{50}$$

При  $\Gamma < 0$ ,  $J_3 < (J_1+J_2)/2$  і  $(D_3-D_1)(D_3-D_2) < 0$  нерівність (48) не виконується. Таким чином, при дії відновлювального моменту, при  $J_3 < (J_1+J_2)/2$  і коли значення

моменту  $D_3$  знаходиться між моментами  $D_1$  і  $D_2$  або  $D_2$  і  $D_1$ , то з точністю до другого ступеня малості постійного моменту  $P/P_0$  і першого ступеня малості відновлювального моменту  $\Gamma/\Gamma_0$ , рівномірні обертання несиметричного твердого тіла будуть нестійкими.

З точністю до першого ступеня малості  $\Gamma/\Gamma_0$  нерівності (16) і (18) отримують вигляд :

$$\tilde{J}D_3^2P^2\Gamma + (D_3 - D_1)(D_3 - D_2)D_3^2P^2 + (J_3 - J_1)(J_3 - J_2)P^4 > 0, \quad (51)$$

$$\left\{ \left[ (J_3 - 2J_2)D_1 + (J_3 - 2J_1)D_2 \right] J_{12} + 2(J_1 - J_2)\tilde{J}_{12}D_3 \right\} JP^2 - J_{12}(D_1 + D_2)D_1D_2D_3^2 \left\} D_3\Gamma + \right. \\ \left. + 2(J_3J_{12} - 2J_1J_2D_3)J^2P^4 + \left[ 2D_1D_2J_3 - J_{12}D_3 - (D_1 - D_2)\tilde{J}_{12} \right] J_{12}D_3^2P^2 > 0. \quad (52)$$

Таким чином, лінійна система нерівностей (50), (17) і (51) відносно  $\Gamma$  описує стійкість рівномірного обертання несиметричного твердого тіла при діє малого перекидального або відновлювального моменту  $\Gamma/\Gamma_0$ .

Для симетричного твердого тіла із нерівності (40) випливає, що обертання статично стійкого гіроскопа ( $\Gamma < 0$ ) при  $J_3D_1 - J_1D_3 > 0$  завжди стійке, а обертання “сплячого” гіроскопа ( $\Gamma > 0$ ) стійке при досить великій кутовій швидкості. При  $J_3D_1 - J_1D_3 < 0$  обертання “сплячого” гіроскопа завжди нестійке, обертання статично стійкого гіроскопа стійке за досить малої кутової швидкості. Отже, при  $J_3D_1 - J_1D_3 < 0$  дисипативний і постійний моменти істотно дестабілізують стійкість рівномірних вертикальних обертань гіроскопа Лагранжа. При  $J_3D_1 - J_1D_3 > 0$  ці моменти не мають жодного впливу на стійкість обертання статично стійкого гіроскопа і змінюють критичне значення кутової швидкості “сплячого” гіроскопа. При критичних значеннях постійного моменту  $P^2 = D_1^2D_3\Gamma / (J_3D_1 - J_1D_3)$ , згідно з теорією Андронова–Хопфа (див.,напр. [17]), від вертикальних обертань, для котрих відбувається зміна стійкості, відгалужуються періодичні руху гіроскопа, відповідні іншим формам його стаціонарних рухів, відмінних від вертикальних обертань. Із нерівностей (16) – (18) випливає, що для несиметричного тіла існує декілька критичних значеннях постійного моменту. Наприклад, із нерівності (17) ми маємо  $P^2 = (D_1 + D_2)D_3^2\Gamma / (J_{12} - 2JD_3)$ . Таким чином, навіть із умови (40) видно, що наявність постійного моменту може надавати як стабілізуючу, так і дестабілізуючу дію на рівномірне обертання симетричного твердого. Тому вплив постійного моменту на рівномірне обертання несиметричного твердого тіла більш складніший, що ми можемо бачити із нерівностей (12) – (14) і (16) – (18) та їх дослідження.

## 6 СТІЙКОСТІ ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ЦЕНТРУ МАСС ( $\Gamma = 0$ )

В цьому випадку система нерівностей (16) – (18) отримає вигляд:

$$(J_3 - J_1)(J_3 - J_2)P^2 + (D_3 - D_1)(D_3 - D_2)D_3^2 > 0, \quad (53)$$

$$2JD_3 < J_{12}, \quad (54)$$

$$2(J_3J_{12} - 2J_1J_2D_3)J^2P^2 > \left[ (D_1 - D_2)\tilde{J}_{12} + J_{12}D_3 - 2D_1D_2J_3 \right] J_{12}D_3^2. \quad (55)$$

Із нерівності (54) випливає вже відома умова ністійкості (41), а із нерівності (53) слідує такі умови нестійкості:  $(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) < 0$  і  $(D_3 - D_1)(D_3 - D_2) < 0$ , тобто,

коли момент інерції  $J_3$  не є ні найбільшим ні найменшим моментом інерції і коли  $D_3$  не є ні найбільшим ні найменшим дисипативним моментом.

За досить великої кутової швидкості  $\omega$ , тобто  $P$ , із (53) і (55) відповідно впливають наступні умови нестійкості:

- $(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) < 0$ ,
- $D_3 > J_{12}J_3/2J_1J_2$ .

Для виконання нерівностей (53) – (55) достатньо, щоб  $(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) > 0$ ,  $(D_3 - D_1)(D_3 - D_2) > 0$ ,  $2JD_3 < J_{12}$ ,  $J_3J_{12} > 2J_1J_2D_3$ ,  $J_{12}D_3 < 2D_1D_2J_3 - (D_1 - D_2)\tilde{J}_{12}$ . У загальному випадку дослідити сумісність цих нерівностей достатньо складно. Тому розглянемо низку часткових випадків.

Зведемо нерівності (53) і (55) до першого порядку малості відносно  $P/P_0$ . У цьому випадку система (53) – (55) отримає вигляд:

$$(D_1 - D_3)(D_2 - D_3) > 0, \quad (56)$$

$$J_{12} - 2JD_3 > 0, \quad (57)$$

$$J_2D_1^2 - \tilde{J}D_1D_2 - J_{12}D_3 + J_1D_2^2 > 0. \quad (58)$$

Нерівності (56) – (58) будуть виконані коли момент  $D_3$  буде найбільшим або найменшим,  $J_3 > (2(J_1 + J_2)D_3 - J_{12})/2D_3$  та  $D_3 < (J_2D_1^2 - \tilde{J}D_1D_2 + J_1D_2^2)/J_{12}$ .

При динамічній симетрії ( $J_2 = J_1$ ) система (53) – (55) отримає вигляд:

$$(J_3 - J_1)^2 P^2 + (D_3 - D_1)(D_3 - D_2)D_3^3 > 0, \quad (59)$$

$$D_3 < J_1(D_1 + D_2)/2(2J_1 - J_3), \quad (60)$$

$$p_4 P^2 + p_2 > 0. \quad (61)$$

Тут

$$p_4 = 2J^2 [(J_3(D_1 + D_2) - 2J_1D_3)],$$

$$p_2 = [J_1(D_1^2 - (D_1 + D_2)D_3 + D_2^2) - \tilde{J}D_1D_2](D_1 + D_2)D_3^2, \quad \tilde{J} = 2(J_1 - J_3).$$

Для виконання нерівностей (59) – (61) достатньо, щоб  $(D_3 - D_1)(D_3 - D_2) > 0$ ,  $D_3 < J_1(D_1 + D_2)/2(2J_1 - J_3)$ ,  $J_3 > 2J_1D_3/(D_1 + D_2)$ ,  $J_1(D_1^2 - (D_1 + D_2)D_3 + D_2^2) > \tilde{J}D_1D_2$ .

Із нерівності (61) випливає, що коли момент інерції  $J_3 > 2J_1D_3/(D_1 + D_2)$ , то при динамічній симетрії і досить великих значеннях  $\omega$  рівномірне обертання навколо центру мас несиметричного твердого тіла у середовищі з опорному буде асимптотично стійким.

При дисипативній симетрії ( $D_2 = D_1$ ) система нерівностей (53) – (55) запишеться наступним чином:

$$(J_3 - J_1)(J_3 - J_2)P^2 + (D_1 - D_3)^2 D_3^2 > 0, \quad (62)$$

$$D_3 < D_1(J_1 + J_2)/2J, \quad (63)$$

$$p_4 P^2 + p_2 > 0, \quad (64)$$

де  $p_4 = 2J^2 [(J_1 + J_2)J_3 - 2J_1J_2D_3]$ ,

$$p_2 = [2J_3D_1 - (J_1 + J_2)D_3](J_1 + J_2)D_1D_3.$$

Для виконання нерівностей (62) – (64) достатньо, щоб  $(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) > 0$ ,  $D_3 < D_1(J_1 + J_2)/2J$ ,  $J_3 > 2J_1J_2D_3/(J_1 + J_2)$ ,  $J_3 > (J_1 + J_2)D_3/2D_1$ .

Із нерівностей (62) і (64) випливає, що коли  $(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) > 0$  і  $D_3 < J_3(J_1 + J_2)/2J_1J_2$ , то при досить великих значеннях  $\omega$  рівномірне обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опорному буде асимптотично стійким.

## 7 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

На підставі проведених аналітичних досліджень умов асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором несиметричного твердого тіла можна зробити наступні висновки:

1. При дії перекидального моменту стійкість буде неможлива, коли  $J_1(2D_3 - D_2) + J_2(2D_3 - D_1) > 2J_3D_3$ .
2. При динамічній симетрії з точністю до першого ступеня малості постійного моменту слід, що обертання твердого тіла із дисипативною несиметрією будуть стійкими при дії відновлювального моменту і нестійкими при дії перекидального моменту.
3. Якщо момент інерції  $J_3$  є найбільшим або найменшим моментом інерції, то при досить великих значеннях кутової швидкості, як при дії перекидального моменту, так і при дії відновлювального моментів, обертання твердого тіла будуть стійкими.
4. При досить великих значеннях модуля відновлювального моменту обертання твердого тіла будуть стійкими.
5. При частковій дисипації асимптотична стійкість неможлива.
6. При відсутності постійного моменту умови стійкості будуть виконані тільки при дії відновлювального моменту. Положення рівноваги буде стійким тільки при дії цього моменту.
7. Положення рівноваги буде стійким тільки при дії відновлювального моменту.
8. З точністю до першого ступеня малості постійного моменту обертання твердого тіла будуть стійкими при дії відновлювального моменту і нестійкими при дії перекидального моменту.
9. При досить великій кутовій швидкості обертання твердого тіла навколо центру мас буде нестійким, коли момент  $J_3$  інерції ні є найбільшим ні є найменшим моментом інерції.
10. При досить великій кутовій швидкості обертання твердого тіла навколо центру мас буде стійким, коли момент  $J_3$  інерції є найбільшим або найменшим моментом інерції, є дисипативна симетрія і  $D_3 < J_3(J_1 + J_2)/2J_1J_2$ .
11. Динамічна несиметрія більш суттєво впливає на стійкість обертання несиметричного твердого тіла, чим дисипативна несиметрія.
12. У випадку динамічної і дисипативної симетрії отримані умови стійкості збігаються з відомими умовами для симетричного твердого тіла.

## Література

1. Савченко А. Я., Болграбская И. А., Кононыхин Г. А. Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел. К.: Наук. Думка, 1991. 166 с.

2. Болграбская И. А., Лесина М. Е., Чебанов Д. А. Динамика систем связанных твёрдых тел. Серия “Задачи и методы: математика, механика, кибернетика”. ИПММ НАН Украины, Том 9. К.: Наукова Думка, 2012. 395 с.
3. Кононов Ю.М. Про стійкість рівномірного обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опором під дією постійного моменту. Прикл. Механіка, 2021. Т. 57. № 4. С. 68–77.
4. Kononov Yu. M. Stability of a Uniform Rotation of an Asymmetric Rigid Body in a Resisting Medium. International applied mechanics. A translation of Prikladnaya Mekhanika, 2021. 57(4). P. 432–439. DOI: 10.1007/s10778-021-01095-1
5. Кононов Ю.М., Василенко В.Ю. Про стійкість обертання під дією постійного моменту дзиги Лагранжа з ідеальною рідиною в середовищі, що чинить опір. Праці ІПММ НАН України, 2019. Т. 33. С. 122–131.
6. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer, 2017. 260 pp.
7. Akulenko L.D., Zinkevich Ya.S., Kozachjenko T.A., Leshenko D.D. The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2017. 81(2). С. 79 – 84. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.08.001
8. Leshchenko D.D., Ershkov S.V., Kozachenko T.A. Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques. Nonlinear Dyn, 2021. P. 1517–1528. DOI: 10.1007/s11071-020-06195-0
9. Лещенко Д.Д., Козаченко Т.О. Еволюція обертань сфероїда з порожниною, заповненою в'язкою рідиною в середовищі з опором. Праці ІПММ НАН України, 2021. Т. 35, № 2. С. 97–103.
10. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque. J. Appl. Comput. Mech, 2022. P. 1–9.
11. Akulenko L.D., Leshchenko D.D., Paly K.S. Perturbed rotational motions of a spheroid with cavity filled with a viscous fluid. Proc. IMechE Part C: J. Mechanical Engineering Science, 2021. Vol. 235(20). P. 4833–4837.
12. Карапетян А. В., Лагутина И.С. О влиянии диссипативного и постоянного моментов на вид и устойчивость стационарных движений волчка Лагранжа. Изв. РАН. Механика твёрдого тела, 1998. №5. С.29–33.
13. Карапетян А. В., Лагутина И. С. Об устойчивости равномерных вращений волчка, подвешенного на струне, с учетом диссипативного и постоянного моментов. Изв. РАН. Механика твёрдого тела, 2000. №1. С.53–57.
14. Кононов Ю. М., Василенко В.Ю. Про стійкість обертання несиметричного твердого тіла з урахуванням диссипативних і постійних моментів. Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки, 2016. Вип. 1–2. С. 113-117.
15. Kononov Yu., Vasylenko V., Proskuriakov V. Stability of asymmetrical rigid body rotation with consideration of dissipative and constant moments. Book of Abstracts 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, 2016. P. 84–86.
16. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем. Наука, 1979. 304 с.
17. Марсден Дж., Мак–Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения М.: Мир, 1980. 368 с.

## References

1. Savchenko, A. YA., Bolgrabskaya, I. A., Kononyhin, G. A. (1991). *Ustojchivost' dvizheniya sistem svyazannyh tvyordyh tel* [Stability of motion of systems of coupled rigid bodies]. К.: Nauk. Dumka. [in Russian].
2. Bolgrabskaya, I. A., Lesina, M. E., Chebanov, D. A. (2012). *Dinamika sistem svyazannyih tvyordyih tel* [Dynamics of systems of bound rigid bodies]. Seriya “Zadachi i metody: matematika, mehanika, kibernetika”. 9. К.: Nauk. Dumka. [in Russian].

3. Kononov, Yu. M. (2021). Pro stiiikist rinvnomirnoho obertannia nesymetrychnoho tverdoho tila u seredovyshchi z oporom pid diieiu postiinoho momentu [On the stability of uniform rotation of an asymmetric solid in a medium with resistance under the action of a constant moment]. *International applied mechanics*. A translation of *Prikladnaya Mekhanika*. 57(4). 432–439. DOI: 10.1007/s10778-021-01095-1 [in Ukrainian].
4. Kononov, Yu. M. (2021). Stability of a Uniform Rotation of an Asymmetric Rigid Body in a Resisting Medium. *International applied mechanics*. A translation of *Prikladnaya Mekhanika*. 57(4). 432–439.
5. Kononov, Yu. M., Vasylenko, V. Iu. (2019). Pro stiiikist obertannia pid diieiu postiinoho momentu dzyhy Lahranzha z idealnoiu ridynoiu v seredovyshchi, shcho chynyt opir [On the stability of rotation under the action of a constant moment of a Lagrange spinning top with an ideal liquid in a resisting medium]. *Pratsi IPMM NAN Ukrainy*. 33. 122–131. [in Ukrainian].
6. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer.
7. Akulenko, L. D., Zinkevich, Ya. S., Kozachjenko, T. A., Leshenko, D. D. (2017). The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 81(2). 79 – 84. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.08.001
8. Leshchenko, D.D., Ershkov, S.V., Kozachenko, T.A. (2021). Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques. *Nonlinear Dyn.* 1517–1528. DOI: 10.1007/s11071-020-06195-0
9. Leshchenko, D. D., Kozachenko, T. O. (2021). Evoliutsiia obertan sferoida z porozhnyoiu, zapovnenoiu viazkoiu ridynoiu v seredovyshchi z oporom [Evolution of spheroid rotations with a cavity filled with a viscous fluid in a medium with resistance]. *Pratsi IPMM NAN Ukrainy*. 35(2). 97–103. [in Ukrainian].
10. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2022). Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque. *J. Appl. Comput. Mech.* 1–9.
11. Akulenko, L. D, Leshchenko, D. D, Paly, K. S. (2021). Perturbed rotational motions of a spheroid with cavity filled with a viscous fluid. *Proc. IMechE Part C: J. Mechanical Engineering Science*. 235(20). 4833–4837.
12. Karapetyan, A. V., Lagutina, I. S. (1998). O vliyanii dissipativnogo i postoyannogo momentov na vid i ustoychivost statsionarnykh dvizheniy volchka Lagranzha [On the influence of dissipative and constant moments on the appearance and stability of stationary movements of the Lagrange top]. *Izv. RAN. Mehanika tvyordogo tela*. 5. 29–33 [in Russian].
13. Karapetyan, A. V., Lagutina, I. S. (2000). Ob ustoychivosti ravnomyermykh vrascheniy volchka, podveshennogo na strune, s uchetom dissipativnogo i postoyannogo momentov [On the stability of uniform rotations of a top suspended on a string, taking into account the dissipative and constant moments]. *Izv. RAN. Mehanika tvyordogo tela*. 1. 53–57. [in Russian].
14. Kononov, Yu. M., Vasylenko, V. Yu. (2016). Pro stiiikist obertannia nesymetrychnoho tverdoho tila z urakhuvanniam dysypatyvnykh i postiinykh momentiv [On the stability of rotation of an asymmetric solid taking into account dissipative and constant moments]. *Visnyk Donetskoho natsionalnoho universytetu. Seriya A: Pryrodnychi nauky*. 1–2. 113–117 [in Ukraine].
15. Kononov, Yu., Vasylenko, V. Yu., Proskuriakov, V. (2016). Stability of asymmetrical rigid body rotation with consideration of dissipative and constant moments. *Book of Abstracts 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky*. 84–86.
16. Jury, E. I. (1979). *Innory i ustoychivost' dinamicheskikh sistem* [Innora and stability of dynamic systems]. M.: Nauka. [in Russian].
17. Marsden, Dzh., Mak–Kraken, M. (1980). *Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilozheniya* [Bifurcation of the birth cycle and its applications]. M. Mir. [in Russian].

**Кононов Юрій Микитович**

Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України  
д.ф.-м.н., професор  
вул. Добровольського, 1, Слов'янськ, Україна, 84100



kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com

ORCID: 0000-0002-1609-0253

**Довгоший Олексій Альфредович**

Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України,  
к.ф.-м.н., провідний науковий співробітник

вул. Добровольського, 1, Слов'янськ, Україна, 84100

oleksiy.dovgoshey@gmail.com

ORCID: 0000-0002-6496-2466

**Чеїб Акрам Халіл**

Донецький національний університет імені Василя Стуса,  
здобувач

вул. 600 - річчя, 21, м.Вінниця, Україна, 21021

akram\_cheaib@hotmail.com

ORCID: 0000-0001-8311-7682

*Для посилань:*

Кононов Ю. М., Довгоший О. А., Чеїб А. Х. Про стійкість рівномірного обертання у середовищі з опором несиметричного твердого тіла під дією постійного моменту у інерціальній системі відліку. Механіка та математичні методи, 2022. Т. 4. № 1. С. 6–22.

*For references:*

Kononov Yu. M., Dovgoshey O. A., Cheib A. K. (2022). On the stability of uniform rotation in a resisting nonsymmetric rigid body under the action of a constant moment in inertial reference frame. Mechanics and Mathematical Methods. 4 (1). 6–22.

UDC 531.381

## PROBLEMS OF EVOLUTION OF RIGID BODY MOTION SIMILAR TO LAGRANGE TOP

**D. Leshchenko<sup>1</sup>, T. Kozachenko<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Odesa state academy of civil engineering and architecture*

**Abstract.** The problem of evolution of the rigid body rotations about a fixed point continues to attract the attention of researchers. In many cases, the motion in the Lagrange case can be regarded as a generating motion of the rigid body. In this case the body is assumed to have a fixed point and to be in the gravitational field, with the center of mass of the body and the fixed point both lying on the dynamic symmetry axes of the body. A restoring torque, analogues to the moment of the gravity forces, is created by the aerodynamic forces acting on the body in the gas flow. Therefore, the motions, close to the Lagrange case, have been investigated in a number of works on the aircraft dynamics, where various perturbation torques were taken into account in addition to the restoring torque.

Many works have studied the rotational motion of a heavy rigid body about a fixed point under the action of perturbation and restoring torques. The correction of the studied models is carried out by taking into account external and internal perturbation factors of various physical nature as well as relevant assumptions according to unperturbed motion.

The results of reviewed works may be of interest to specialists in the field of rigid body dynamics, gyroscopy, and applications of asymptotic methods. The authors of this papers present a new approach for the investigation of perturbed motions of Lagrange top for perturbations which assumes averaging with respect to the phase of the nutation angle. Nonlinear equations of motions are simplified and solved explicitly, so that the description of motion is obtained.

Asymptotic approach permits to obtain some qualitative results and to describe evolution of rigid body motion using simplified averaged equations. Thus it is possible to avoid numerical integration. The authors present a unified approach to the dynamics of angular motions of rigid bodies subject to perturbation torques of different physical nature. These papers contains both the basic foundations of the rigid body dynamics and the application of the asymptotic method of averaging. The approach based on the averaging procedure is applicable to rigid bodies closed to Lagrange gyroscope.

The presented brief survey does not purport to be complete and can be expanded. However, it is clear from this survey that there is an literature on the dynamics of rigid body moving about a fixed point under the influence of perturbation torques of various physical nature. The research in this area is in connection with the problems of motion of flying vehicles, gyroscopes, and other objects of modern technology.

**Keywords:** rigid body, Lagrange's case, rotation, perturbation torque, restoring torque.

## ПРОБЛЕМИ ЕВОЛЮЦІЇ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА, БЛИЗЬКОГО ДО ВОВЧКА ЛАГРАНЖА

**Лещенко Д. Д.<sup>1</sup>, Козаченко Т. О.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація.** Проблема еволюції обертань твердого тіла навколо нерухомої точки продовжує привертати увагу дослідників. В багатьох випадках рух в випадку Лагранжа може розглядатися як породжувальний рух твердого тіла. В цьому випадку тіло має нерухому точку і знаходиться в гравітаційному полі з центром мас тіла та нерухомою точкою, які обидва лежать на осі



динамічної симетрії тіла. Відновлюючий момент аналогічний гравітаційному моменту створюються аеродинамічними силами, які діють на тіло в потоці газу. Таким чином, рухи твердого тіла, які близькі до випадку Лагранжа, досліджуються в численних роботах з динаміки літальних апаратів, де різні збурення розглядаються разом з відновлюючим моментом сил.

В багатьох роботах досліджується обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої точки під дією збурюючих та відновлюваних моментів сил. Уточнення досліджуваних моделей проводиться з розгляданням зовнішніх та внутрішніх збурюючих факторів різної фізичної природи так і різних припущень відносно породжувального руху. Результати приведених робіт можуть бути корисними для спеціалістів з динаміки твердого тіла та застосувань асимптотичних методів.

Автори цих статей представляють новий підхід для дослідження збурених рухів вовчка Лагранжа для збурень, які припускають усереднення по фазі кута нутації. Нелінійні рівняння руху спрощуються та розв'язуються, та описується рух тіла. Асимптотичний підхід дозволяє одержати деякі якісні результати та списати еволюцію руху твердого тіла з допомогою спрощених усереднених рівнянь. Потім здійснюється чисельне інтегрування. Автори представляють уніфікований підхід до динаміки рухів твердого тіла під дією моментів сил різної фізичної природи. Ці статті представляють як базові основи динаміки твердого тіла так і застосування асимптотичного методу усереднення. Підхід, який базується на процедурі усереднення застосовується до твердих тіл, близьких до гіроскопа Лагранжа.

Наданий короткий огляд не претендує на повноту і може бути розширеним. Однак з цього огляду ми бачимо наявність літератури з динаміки твердого тіла, що рухається навколо нерухомої точки під дією збурюючих моментів сил різної фізичної природи. Дослідження в цій галузі знаходять застосування в динаміці літальних апаратів, гіроскопів та інших об'єктів сучасної техніки.

**Ключові слова:** тверде тіло, випадок Лагранжа, обертання, збурюючий момент, відновлюючий момент.

## 1 INTRODUCTION

At present in dynamics of a rigid body with fixed point there is bibliography on the theoretical researches of the perturbed motions, that are close to Lagrange case, and on the applications to dynamics of space vehicle and flying machines, of gyrosystems and other engineering objects. Here the brief survey is given, that is devoted to the investigations results for indicated problems. Only the papers are mentioned here, that are the most close to the results of author and his colleagues.

## 2 LITERATURE DATA ANALYSIS AND TARGET SETTINGS

One of the significant areas of investigation in mechanics is a rigid body's motion about a fixed point. As one of the fundamental problems in dynamics it caught interest of well-known scientists throughout the history of its development.

A high volume of works exists regarding the perturbed motions close to Lagrange top, as well as application in the problems of flying vehicles' entry into atmosphere [1, 2], rotating projectile's motion [3], gyroscopy [4-8].

Problems in terms of their theoretical aspect attract attention of specialists in the field of theoretical mechanics. The framework of dynamic unperturbed rigid body models – Lagrange case – allows rigorous formulation of the problems. The refinements of the models under investigation takes place taking into consideration the perturbation torques of different physical nature, both internal and external, and the corresponding suppositions regarding the unperturbed solution.

The mathematical description of symmetrical top motion in the field of gravity is a solved problem in the dynamics of a rigid body. Solution to this problem was first obtained by Lagrange and published in 1788. Many advanced treatises of classical mechanics include this problem [3, 5-10].

## 3 PURPOSE AND OBJECTIVES OF RESEARCH

We consider the evolution of the dynamics of rigid body motion about a fixed point under the various perturbation torques. The basic method applied in these studies is the Krylov-Bogoliubov asymptotic averaging method.

## 4 RESEARCH RESULTS

The motions similar to Lagrange case were analyzed in several works in dynamics, in the given works perturbation torques were taken into consideration with restoring torque. The investigations of rigid body dynamics can find application in the area of astronautics.

V.S. Aslanov's monograph [2] studies the rigid body's motion in the atmosphere under the action of biharmonic air dynamic torque and small perturbations. In this paper, he notes the resemblance between the heavy rigid body and the rigid body in a resisting medium (planet atmosphere).

Numerous works [1, 2, 5, 11-22, 27, 29-31, 37, 39, 42-44] have analyzed the perturbed motions of a rigid body similar to Lagrange top.

Works [5, 11] describe the first approximation for the averaging procedure for slow variables of a perturbed motion of a rigid body close to Lagrange's case. In many cases, applied problems permit averaging over the phase of nutation angle. A perturbed motion close to Lagrange's case is analyzed taking into consideration the torques that affect the rigid body from external medium.

Paper [12] investigates the evolution of the rigid body's motion under the effect of an unsteady perturbation torque, the rigid body being close to the Lagrange gyroscope. The concept of the given problem is analyzed in article [13], when restoring and perturbation torques vary slowly in time. The primary objective of this study is to broaden the results of works [5, 11-13] for the problem of dynamically symmetric rigid body motion under the action of restoring and perturbation torques independent or dependent on slow time.

Paper [14] considers the perturbed fast rotation of a rigid body which is close to regular precession in the Lagrange case. Work [15] describes a more general occurrence of the evolution of rotations, where the value of the restoring torque is dependent on the nutation angle.

Paper [16] analyses the perturbed motion of the rigid body, similar to regular Lagrangian precession, affected by slowly time-varying perturbation torque, as well as restoring torque, dependent on the nutation angle. Papers [17, 18] research the evolution of rotations of a rigid body, similar to regular precession, influenced by a restoring torque, dependent on slow time as well as nutation angle; and by a perturbation torque that slowly varies in time.

We presented in [20] some new qualitative and quantitative results of fast motion of a heavy top subject to small perturbation top subject to small perturbation torques. We suggested a new procedure of the averaging method, different from works [5, (sections 4.8.2, 11.3, 11.3.2), 14]. Works [5, 11-20] provide an overview of the received results in rigid body dynamics, as well as a bibliography.

Paper [21] analyzed a symmetric rigid body's motion, similar to the case of Lagrange, influenced by perturbation torques, Newtonian force field and gyro moment vector. It has been endeavored to utilize the averaging procedure in regard to the nutation phase angle, proposed in works [5, 11]. The averaging procedure suggested for investigation of the Lagrange's top fast rotation in works [5, 14] was applied for analysis of rigid body's rotational motion in article [22], in presence of Newtonian field of force, gyro and perturbation torques.

When axisymmetric magnetized body moves in constant field, close to regular precession, the following equations coincide: motion of the satellite to motion of the Lagrange gyroscope. It is known that a dynamically symmetric satellite moves the same way as a heavy rigid body in the Lagrange case, once the satellite possesses a magnetic torque moved along dynamic symmetry axis [23].

The resemblance of the problem of Lagrange's top motion in case of potential perturbations to the problem of satellite's rotation can be observed. The latter's mass center repositions in the equatorial plane's circular orbit, being affected by the Earth's magnetic field [24-26]. Article [27] indicates new results of negligibly asymmetric heavy top's motion, subject to small viscous damping.

While studying a heavy unbalanced gyrostap's motion with an arbitrary torque of internal interaction [28], equations of motion first integrals coincide with corresponding first integrals of rigid body motion in Lagrange's case.

Paper [29] considers heavy symmetric rigid body's motion, the body having a fixed point under effect of frictional forces originated from the surrounding dissipative medium.

In the works [5 (Sections 4.8.2, 11.3), 14-18, 22] the perturbed fast rotational motions of a rigid body, close to regular precession in Lagrange's case, were studied for different orders of smallness of the projections of the perturbation torque vector. In work [5 (Section 4.8.3)], the perturbation torques are small compared to the restoring one. In contrast to work [5 (Sections 4.8.1, 11.1, 11.2), 11-13, 21, studies 14-18, 22] considered the case of a rigid body that rotates rapidly about the axis of dynamic symmetry, and therefore the unperturbed solution was not the trajectory of motion in Lagrange case, but rather some simpler solution.

In paper [30] the author analyzed lower-order resonances throughout Lagrange top's motion, having small mass asymmetry. In article [31] a case similar to Lagrange top was

explored, where secondary resonance effects in the spherical motion of a heavy asymmetrical rigid body with moving masses were investigated.

Interest to rigid body rotation about a fixed point attracts a wide circle of specialists, and not only in rigid body dynamics, but also in control theory [32], hydrodynamics [33], physics [34], and elasticity theory [35].

Dissipation is an important factor of determination of heavy symmetric top's motion. In work [36] dragging is estimated with simple models, and is investigated as torque in Euler equations to be solved numerically. In article [37] the authors considered rotation about a fixed point of a heavy dynamically symmetric rigid body with arbitrary asymmetric cavity completely filled with ideal fluid in a resisting medium. The condition of asymptotic stability of the uniform rotations of an asymmetric rigid body in a resisting medium was obtained in [38]. Paper [39] studies heavy symmetrical top's motion, with a cavity filled with viscous fluid, when the axis of the top is diverged from vertical.

In article [40] authors compute in the Lagrange case the Euler angles of precession  $\psi$  and proper rotation  $\varphi$  in actual form through hypergeometric functions. The motion of symmetrical rigid body without weight under viscous dissipation was studied. Author of work [41] considers an analytical solution for the dynamics of axially symmetric rotating objects. This work provides the gyroscopic effects theory, elaborating on their physics and utilizing mathematical models of Euler's form for the motion of non-fixed spinning objects.

Paper [42] investigates the question of monoaxial attitude control of a rigid body subject to nonstationary perturbations. The control torque includes a dissipative and a restoring component. The paper analyzes cases of linear and non-linear restoring of perturbation torques. Article [43] explores a top's global asymptotic stabilization to a constant rotation about axes of symmetry. Paper [44] studies heavy Lagrange's top's motion with imbalance of equatorial moments of inertia.

Results and diverse methodologies applied in the rigid body dynamics, as well as investigation of the Lagrange top was studied in works [3, 5-10, 45]. A series of books and papers are dedicated to dynamics of a rigid body in a resistant medium (see, for example, works [5, 7, 8, 11-14, 17, 18, 21, 22]).

It becomes evident from the given analysis that there exists numerous papers on dynamics of a rigid body under the action of perturbation torques of diverse physical nature. The research in the given field is linked to problems of motion of gyroscopes, flying vehicles, as well as other modern technology devices.

## 5 CONCLUSIONS

For all cases of motion considered in the paper, the authors present and analyze they basic equations of motion. As a result of analysis of solution of the obtained equations, establish some quantitative and qualitative features of the motions and provide a description of the evolution of the body motion. The presentation is illustrated by some examples.

## References

1. Kuzmak, G. E. (1970). *The Dynamics of an Uncontrolled Motion of a Vehicle during Atmospheric Re-entry*. Moscow: Nauka. [in Russian].
2. Aslanov, V. S. (2017). *Rigid Body Dynamics for Space Applications*. Oxford: Butterworth Heinemann.
3. Okunev, B. N. (1950). *The Free Motion of a Gyroscope*. Moscow: GITTL. [in Russian].
4. Koshlyakov, V. N. (1985). *Problems in Dynamics of Solid Bodies and in Applied Gyroscope Theory*. Moscow: Nauka. [in Russian].
5. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*. Cham: Springer International Publishing.

6. Arnold, R. N., Maunder, L. (1961). *Gyrodynamics and its Engineering Applications*. New York: Academic Press.
7. Magnus, K. (1971). *Kreisel. Theorie und Anwendungen*. New York: Springer-Verlag.
8. Leimanis, E. (1965). *The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point*. Berlin: Springer.
9. Macmillan, W. D. (1936). *Theoretical Mechanics. Dynamics of Rigid Bodies*. New York: Mc Graw-Hill.
10. Wittenburg, J. (2008). *Dynamics of Multibody Systems*. Berlin: Springer.
11. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Chernousko, F. L. (1979). Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 43(5). 829–837.
12. Akulenko, L. D., Zinkevich, Ya. S., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2017). The evolution of motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 82(2). 79–84.
13. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2021). Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques. *Nonlinear Dynamics*. 103. 1517–1528.
14. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Chernousko, F. L. (1986). Perturbed motions of a rigid body that are close to regular precession. *Mechanics of Solids*. 21(5). 1–8.
15. Leshchenko, D. D. (1990). Perturbed rotation motion of a rigid body. In: Borne P. and Matrosov V. (ed.) *The Lyapunov Function Method and Applications*. pp. 227-232. Baltzer, J. C. AG, Scientific Publishing, IMACS, Basel.
16. Akulenko, L., Leshchenko, D., Kushpil, T., et al. (2001). Problems of evolution of rotations of a rigid body under the action of perturbing moments. *Multibody System Dynamics*. 6(1). 3–16.
17. Akulenko, L. D., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2003). Rotations of a rigid body under the action of unsteady restoring and perturbation torques. *Mechanics of Solids*. 38(2). 1–7.
18. Akulenko, L. D., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2002). Evolution of rotations of a rigid body under the action of restoring and control moments. *Journal of Computer and System Sciences International*. 41(5). 868–874.
19. Ershkov, S. V., Leshchenko, D. D. (2019). On a new type of solving procedure for Euler – Poisson equations (rigid body rotation over a fixed point). *Acta Mechanica*. 230(3). 871–883.
20. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2022). Rotations of a rigid body close to the Lagrange case under the action of nonstationary perturbation torque. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 8(3). 1023–1031.
21. Amer, W. S. (2019). The dynamical motion of a gyroscope subjected to applied moments. *Results in Physics*. 12. 1429–1435.
22. Abady, I. M., Amer, T. S. (2018). On the motion of a gyro in the presence of a Newtonian force field and applied moments. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 23(9). 1263–1273.
23. Beletsky, V. V., Khentov, A. A. (1985). *Rotational Motion of a Magnetized Satellite*. Moscow: Nauka. [in Russian].
24. Aksenenkova, I. M. (1991). On the influence of geomagnetic field on periodic motion of a satellite relative to its center of mass. *Kosmicheskie Issledovania*. 29(1). 145–148. [in Russian].
25. Konkina, L. I. (1996). Conditionally periodic solutions for the problem of rotation of a magnetized satellite in magnetic field. *Kosmicheskie Issledovania*. 34(4). 442–444. [in Russian].
26. Sidorenko, V. V. (2002). One class of motions for a satellite carrying a strong magnet. *Cosmic Research*. 40(2). 133–141.
27. Sidorenko, V. V. (1994). Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium. *Journal of Nonlinear Science*. 4(1). 35–57.
28. Aslanov, V. S., Doroshin, A. V. (2006). Two cases of motion of an unbalanced gyrostat. *Mechanics of Solids*. 41(4). 29–39.
29. Simpson, H. C., Gunzburger, M. D. (1986). A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction. *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik*. 37(6). 867–894.
30. Zabolotnov, Yu. M. (2019). Resonant motions of the statically stable Lagrange spinning top. *Mechanics of Solids*. 54 (5). 652–668.
31. Lyubimov, V. V. (2020). Direct and inverse secondary resonance effects in the spherical motion of an asymmetric rigid body with moving masses. *Acta Mechanica*. 231. 4933–4946.



32. Akulenko, L. D. (1994). *Problems and Methods of Optimal Control*. Dordrecht-Boston-London: Kluwer.
33. Dolzhansky, F. V. (2013). *Fundamentals of Geophysical Hydrodynamics*. Heidelberg-New York-Dordrecht-London: Springer.
34. Bogoyavlenskii, O. I. (1985). Integrable Euler equations on Lie algebras arising in problems of mathematical physics. *Math USSR Izvestiya*. 25(2). 207–257. [in Russian].
35. Ilyukhin, A. A. (1979). *Spatial Problems of the Nonlinear Theory of Elastic Rods*. Kiev: Naukova dumka. [in Russian].
36. Tanriverdi, V. (2020). Dissipative motion of a spinning heavy symmetric top. *European Journal of Physics*. 41(5). 055001. DOI:10.1088/1361-6404/ab9930.
37. Kononov, Yu. M., Vasylenko, V. Yu. (2019). On the stability of the rotation under the action of constant moment of a Lagrangian top with perfect fluid in a resisting medium. *Proceedings of IAMM of NASU*. 33. 122–131. [in Ukrainian].
38. Kononov, Yu. M., (2021). Stability of a uniform rotation of an asymmetric rigid body in a resisting medium, *International Applied Mechanics*. 57(4). 432-439.
39. Ivashchenko, B. P. (1976). On the motion of a symmetric gyroscope with a cavity filled with viscous fluid. *Dokl Akad Nauk Ukr SSR. Ser. A* 9. 794–797. [in Russian].
40. Scarpello, G. M., Ritelli, D. (2018). Motions about a fixed point by hypergeometric functions: new non-complex analytical solutions and integration of the herpolhode. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 130(6). 42. DOI:10.1007/s10569-018-9837-5.
41. Usubamatov, R. (2020). *Theory of Gyroscopic Effects for Rotating Objects. Gyroscopic Effects and Applications*. Singapore: Springer Nature Singapore Pte Ltd,.
42. Alexandrov, A., Tikhonov, A. (2018). Rigid body stabilization under time-varying perturbations with zero mean values. *Cybernetics and Physics*. 7(1). 5–10.
43. Wan, C. J., Tsiotras, P., Coppola, V. T., et al. (1997). Global asymptotic stabilization of a spinning top with torque actuators using stereographic projection. *Dynamics and Control*. 7. 215–233.
44. Holmes, P. J., Marsden, J. E. (1983). Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups. *Indiana University Mathematics Journal*. 32 (2). 273–309.
45. Routh, E. J. (2005). *Advanced Dynamics of a System of Rigid Bodies*. New York: Dover.

## Література

1. Кузмак Г.Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М.: Наука, 1970. 348 с.
2. Aslanov V.S. Rigid Body Dynamics for Space Applications. Oxford: Butterworth Heinemann, 2017.
3. Окунев Б.Н. Свободное движение гироскопа. М.-Л.: Гостехориздат, 1951. 380 с.
4. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 288 с.
5. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Cham: Springer International Publishing, 2017.
6. Arnold R.N., Maunder L. Gyrodynamics and its Engineering Applications. New York: Academic Press, 1961.
7. Magnus K. Kreisel. Theorie and Anwendungen. New York: Springer-Verlag, 1971.
8. Leimanis E. The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point. Berlin: Springer, 1965.
9. Macmillan W.D. Theoretical Mechanics. Dynamics of Rigid Bodies. New York: Mc Graw-Hill, 1936.
10. Wittenburg J. Dynamics of Multibody Systems. Berlin: Springer, 2008.
11. Akulenko L.D., Leshchenko D.D., Chernousko F.L. Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1979. 43(5). P. 829–837.
12. Akulenko L. D., Zinkevich Ya. S., Kozachenko T. A., Leshchenko, D. D. The evolution of motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2017. 82(2). P. 79–84.

13. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques. *Nonlinear Dynamics*, 2021. 103. P. 1517–1528.
14. Akulenko L.D., Leshchenko D.D., Chernousko F.L. Perturbed motions of a rigid body that are close to regular precession. *Mechanics of Solids*, 1986. 21(5). P. 1–8.
15. Leshchenko D.D. Perturbed rotational motion of a rigid body. In: Borne P. and Matrosov V. (ed.) *The Lyapunov Function Method and Applications*, 1990. pp. 227-232. Baltzer, J. C. AG, Scientific Publishing, IMACS, Basel.
16. Akulenko L., Leshchenko D., Kushpil T., et al. Problems of evolution of rotations of a rigid body under the action of perturbing moments. *Multibody System Dynamics*, 2001. 6(1). P. 3–16.
17. Akulenko L.D., Kozachenko T.A., Leshchenko D.D. Rotations of a rigid body under the action of unsteady restoring and perturbation torques. *Mechanics of Solids*, 2003. 38(2). P. 1–7.
18. Akulenko L. D., Kozachenko T. A., Leshchenko D. D. Evolution of rotations of a rigid body under the action of restoring and control moments. *Journal of Computer and System Sciences International*, 2002. 41(5). P. 868–874.
19. Ershkov S.V., Leshchenko D. On a new type of solving procedure for Euler – Poisson equations (rigid body rotation over a fixed point). *Acta Mechanica*, 2019. 230(3). P. 871–883.
20. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. Rotations of a rigid body close to the Lagrange case under the action of nonstationary perturbation torque. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2022. 8(3). P. 1023–1031.
21. Amer W.S. The dynamical motion of a gyroscope subjected to applied moments. *Results in Physics*, 2019. 12. P. 1429–1435.
22. Abady I.M., Amer T.S. On the motion of a gyro in the presence of a Newtonian force field and applied moments. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2018. 23(9). P. 1263–1273.
23. Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1985. 287 с.
24. Аксененкова И.М. О влиянии геомагнитного поля на периодическое движение спутника относительно его центра масс. *Космические исследования*, 1991. 29(1). С. 145–148.
25. Конкина Л.И. Условно-периодические решения в задаче о вращении намагниченного спутника в магнитном поле. *Космические исследования*, 1996. 34(4). С. 442–444.
26. Sidorenko V.V. One class of motions for a satellite carrying a strong magnet. *Cosmic Research*, 2002. 40(2). P. 133–141.
27. Sidorenko V.V. Capture and escape from resonance in the dynamics of the rigid body in viscous medium. *Journal of Nonlinear Science*, 1994. 4(1). P. 35–57.
28. Aslanov V.S., Doroshin, A.V. Two cases of motion of an unbalanced gyrost. *Mechanics of Solids*, 2006. 41(4). P. 29–39.
29. Simpson H.C., Gunzburger M.D. A two time scale analysis of gyroscopic motion with friction. *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik*, 1986. 37(6). P. 867–894.
30. Zabolotnov Yu.M. Resonant motions of the statically stable Lagrange spinning top. *Mechanics of Solids*, 2019. 54 (5). P. 652–668.
31. Lyubimov V.V. Direct and inverse secondary resonance effects in the spherical motion of an asymmetric rigid body with moving masses. *Acta Mechanica*, 2020. 231. P. 4933–4946.
32. Akulenko L.D. *Problems and Methods of Optimal Control*. Dordrecht-Boston-London: Kluwer, 1994.
33. Dolzhansky F.V. *Fundamentals of Geophysical Hydrodynamics*. Heidelberg-New York-Dordrecht-London: Springer, 2013.
34. Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики. *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 48(5), 1984. С. 883–938.
35. Илюхин А.А. *Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней: монография*. – К.: Наукова думка, 1979.
36. Tanriverdi V. Dissipative motion of a spinning heavy symmetric top. *European Journal of Physics*, 2020. 41(5). 055001. DOI:10.1088/1361-6404/ab9930.
37. Кононов Ю.М., Василенко В. Ю. Про стійкість обертання під дією постійного моменту дзиги Лагранжа з ідеальною рідиною в середовищі, що чинить опір. *Праці ПММ НАН України*, 2019. Т. 33. С.122–131.

38. Kononov Yu.M. Stability of a uniform rotation of an asymmetric rigid body in a resisting medium, *International Applied Mechanics*, 2021. 57(4). P. 432-439.
39. Иващенко Б.П. О движении симметричного волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью. Докл. АН УССР. Сер. А, 1976. №9. С. 794–797.
40. Scarpello G.M., Ritelli D. Motions about a fixed point by hypergeometric functions: new non-complex analytical solutions and integration of the herpolhode. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2018. 130(6). 42. DOI:10.1007/s10569-018-9837-5.
41. Usubamatov R. *Theory of Gyroscopic Effects for Rotating Objects. Gyroscopic Effects and Applications*. Singapore: Springer Nature Singapore Pte Ltd, 2020.
42. Alexandrov A., Tikhonov A. Rigid body stabilization under time-varying perturbations with zero mean values. *Cybernetics and Physics*, 2018. 7(1). P. 5–10.
43. Wan C.J., Tsiotras P., Coppola V.T., et al. Global asymptotic stabilization of a spinning top with torque actuators using stereographic projection. *Dynamics and Control*, 1997. 7. P. 215–233.
44. Holmes P.J., Marsden J.E. Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups. *Indiana University Mathematics Journal*, 1983. 32(2). P. 273–309.
45. Routh E.J. *Advanced Dynamics of a System of Rigid Bodies*. New York: Dover, 2005.

**Dmytro Leshchenko**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
DSc. in Physics and Mathematics, Professor  
Didrikhson st. 4, Odessa, Ukraine, 65029  
leshchenko\_d@ukr.net,  
ORCID: 0000-0003-2436-221X

**Tetiana Kozachenko**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Didrikhson st. 4, Odessa, Ukraine, 65029  
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor  
kushpil.t.a@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-9034-3776

*For references:*

Leshchenko D., Kozachenko T. (2022). Problems of evolution of rigid body motion similar to Lagrange top. *Mechanics and Mathematical Methods*. 4 (1). 23–31.

*Для посилань:*

Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Проблеми еволюції руху твердого тіла, близького до вовчка Лагранжа. *Механіка та математичні методи*, 2022. Т. 4. № 1. С. 23–31.



УДК 539.3

## АНТИПЛОСКА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМІРНОГО П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО КВАЗІКРИСТАЛА З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ ПІД ВПЛИВОМ ВНУТРІШНЬОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО ЗАРЯДУ

Білий Д. В.<sup>1</sup>, Лобода В. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

**Анотація:** У даній статті досліджено міжфазну тріщину у п'єзоелектричному квазікристалі, яка знаходиться під впливом механічного навантаження та електричного заряду, прикладеного безпосередньо до її берегів. Розглянуто два пов'язані одновимірні квазікристалічні напівпростори та тунельна тріщина вздовж їх межі розділу. Вивчено напружено-деформований стан поблизу електропровідних граней тріщини. Вважається, що поляризація матеріалів спрямована в напрямку фронту тріщини і в цьому ж напрямку розташування атомів є квазіперіодичним, а перпендикулярно фронту тріщини розташування атомів є періодичним. Прикладаються рівномірно розподілені антиплоскі фононні та фазонні зсувні навантаження паралельно берегам тріщини. На гранях тріщини також має місце електричний заряд.

За допомогою векторної функції, голоморфної у всій комплексній площині, крім області тріщини, будуються матрично-векторні представлення для похідних стрибків переміщень і напружень. Задовольняючи граничні умови на гранях тріщини, за допомогою цих представлень формується задача лінійного спряження Рімана-Гільберта з відповідними додатковими умовами на тріщині та умовами на нескінченності. Побудовано аналітичне рішення цієї задачі. Аналізуючи отриманий розв'язок, одержуємо аналітичні вирази для фононних і фазонних напружень, стрибків переміщень уздовж межі розділу матеріалів в області тріщини, що має електричний заряд.

Чисельний аналіз розв'язку продемонстрував істотний вплив електричного заряду тріщини на фононний і фазонний напружено-деформований стан в околі тріщини. Аналіз проводився для комбінації різних квазікристалічних матеріалів. Основні результати розв'язків, тобто фононні та фазонні напруження вздовж межі розділу матеріалів та стрибки фононних і фазонних зміщень, представлені у графічному вигляді. Зроблено висновки щодо впливу електричного заряду тріщини на поведінку як самої тріщини, так і матеріалу в її околі.

**Ключові слова:** міжфазна тріщина, квазікристал, задача лінійного спряження.

## ANTIPLANE PROBLEM FOR ONE-DIMENSIONAL PIEZOELECTRIC QUASICRYSTAL WITH AN INTERFACE CRACK UNDER THE INFLUENCE OF INTERNAL ELECTRIC LOAD

D. Bilyi<sup>1</sup>, V. Loboda<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Oles Honchar Dnipro National University

**Abstract:** The paper considers two coupled one-dimensional quasicrystalline half-spaces and a tunnel crack along their interface. The stress-strain state in the vicinity of the electrically conductive faces of the crack is investigated. It is believed that the polarization of materials is directed in the direction of the crack front and in the same direction the arrangement of atoms is quasi-periodic, and perpendicular to the crack front the arrangement of atoms is periodic. Uniformly distributed antiplane



phonon and phason shear loads parallel to the crack faces are applied. The electric charge on the crack faces also takes place.

A matrix-vector representations for the derivatives of displacement jumps and stresses are constructed through a vector function that is holomorphic in the whole complex plane, except of the crack region. Satisfying the boundary conditions on the crack faces, using matrix-vector representations, the Riemann-Hilbert linear conjugation problem with corresponding conditions at infinity is formed. An analytical solution of this problem is constructed. Analyzing the solution, we obtain analytical expressions for the phonon and phason stresses, the jumps of displacements along the interface between the materials in the crack region that has an electric charge.

Numerical analysis of the solution demonstrated the essential influence of the electric charge of the crack to the phonon and phason stress-strain state in the vicinity of the crack. The analysis was performed for a combination of different quasicrystalline compounds. The main results of the solutions, i.e. phonon and phason stresses along the materials interface and the phonon and phason displacement jumps are presented in the graphic form. Conclusions are made regarding the influence of the electric charge of the crack on the behavior of both the crack itself and the material in its vicinity.

**Keywords:** interface crack, quasicrystal, the problem of linear relationship.

## 1 ВСТУП

Квазікристали, які вперше представлені в роботі [1] – це надзвичайний клас матеріалів з різними властивостями, які раніше не спостерігались в таких комбінаціях, через що їх посилено вивчають останні декілька десятиліть. В порівнянні зі звичайними кристалами та некристалами, квазікристали (далі КК) відрізняються своєю міцністю, низькою тепловіддачею, високою зносостійкістю, тощо. З таким набором характеристик вони ідеально підходять для різних покриттів, наприклад: двигунів, антипригарних сковорідок, сонячних панелей, термоелектричних перетворювачів, контейнерів з ядерним паливом та воднем.

## 3 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Сучасний рівень досліджень та головна парадигма механіки руйнування квазікристалів представлені в роботі [2]. Там же і вказані основні проблеми. Особливу зацікавленість даним матеріалом викликає те що багато квазікристалів мають п'єзоелектричні властивості, що ускладнює їх розгляд, але і відкриває нові можливості застосування. В роботі [3] представленні основні положення для квазікристалів з урахуванням п'єзоелектричного ефекту.

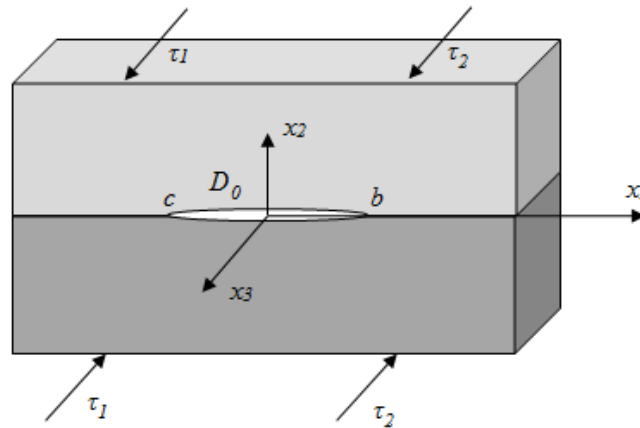
При розгляді композитних матеріалів ми отримуємо проблему тріщини між двома п'єзоелектричними квазікристалами, яка до цього часу вивчена недостатньо. При огляді актуальної літератури виявленні роботи [4, 5], де аналітично-чисельним методом досліджено електрично непроникну тріщину в одновимірному гексагональному термоелектропружному квазікристалічному біматеріалі. В роботі [6] розглянуті міжфазні тріщини типу III між звичайними пружним матеріалом та квазікристалом, але розглядався при цьому квазікристал без п'єзоелектричного ефекту. Тріщина між одновимірними п'єзоелектричними квазікристалами з електропроникними та електроізолюваними умовами на берегах тріщини в антиплоскому випадку вивчалась у роботі [7].

Проблема плоского електричного навантаження в провідній міжфазній тріщині в комбінації з антиплоским механічним навантаженням розглянута в роботі [8]. В ній виявлена, характерна для тріщини на межі поділу матеріалів коливальна особливість на кінчиках тріщини. Важливою є робота [9], в якій розглянута взаємодія тунельної провідної тріщини та віддаленого смугового електрода, розташованого на межі розділу двох п'єзоелектричних матеріалів. Нещодавно в роботі [10] було розглянуто взаємодію електропровідної міжфазної тріщини між двома п'єзоелектричними квазікристалами.

## 4 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Основною метою для даної статті є вивчення тріщини у п'єзоелектричному квазікристалі, яка знаходиться під впливом механічного навантаження та електричного заряду, прикладеного безпосередньо до її берегів.

**Постановка задачі.** Розглянемо тріщину  $(c, b)$  в площині  $(x_1, x_2)$ . Вісь  $x_3$  співпадає з квазіперіодичним напрямом одновимірних п'єзоелектричних квазікристалів. Вважається, що сумарний електричний заряд тріщини дорівнює  $D_0$ . Біматеріал навантажений на нескінченості зсувними напруженнями  $\sigma_{23}^\infty = \tau_1$ ,  $H_{23}^\infty = \tau_2$ . Тут  $\tau_1$  - фонон напруження  $\tau_2$  - фазон напруження.



**Рис.1.** Схематичне зображення тунельної тріщини між двома одномірними квазікристалічними півпросторами з п'єзоелектричним ефектом.

За представленими умовами навантаження в розглянутому тілі виникає антиплоска деформація. Визначальні співвідношення в такому випадку будемо розглядати для кожної півобласті у вигляді:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{j3} \\ H_{j3} \\ D_j \end{Bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{Bmatrix} u_{3,j} \\ w_{3,j} \\ \varphi_{,j} \end{Bmatrix} \quad (j = 1, 2), \quad (1)$$

де  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c_{44} & R_3 & -e_{15} \\ R_3 & K_2 & -\tilde{e}_{15} \\ e_{15} & \tilde{e}_{15} & \xi_{11} \end{bmatrix}$ , (2)

$i = 1, 2$  - для верхнього і нижнього матеріалів відповідно;

$\sigma_{3i}$  - компоненти фазон напруження;

$H_{3i}$  - компоненти фазон напруження;

$C_{44}, K_2$  - пружні константи у фазонних і фазонних полях, відповідно;

$R_3$  - пружна константа зв'язку фазонних і фазонних полів;

$e_{15}, d_{15}$  - п'єзоелектричні сталі;

$\xi_{11}$  - діелектрична проникність.

Для зручності отримання розв'язку задачі введемо вектори переміщень і електричного потенціалу та напружень і електричного зміщення

$$\mathbf{u} = [u_3, w_3, \varphi]^T, \quad \mathbf{t}_j = [\sigma_{3j}, H_{3j}, D_j]^T. \quad (3)$$

Враховуючи введені вектори, запишемо рівняння (1) у векторно-матричному вигляді

$$\mathbf{t}_j = \mathbf{Q} \mathbf{u}_{,j} \quad (j = 1, 2). \quad (4)$$

Так як розглянутий квазікристал має п'єзоелектричні властивості, необхідно врахувати фазон, фазон та електростатичні рівняння рівноваги у випадку антиплоского навантаження

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial H_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{32}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} = 0 \quad (5)$$

і наступні формули зв'язку електричного поля і потенціалу  $\varphi$

$$E_1 = -\varphi_{,1}, \quad E_2 = -\varphi_{,2}. \quad (6)$$

Враховуючи вище представлені співвідношення (1), (5) і (6) отримуємо рівняння:

$$\begin{cases} C_{44} \nabla^2 u_3 + R_3 \nabla^2 w_3 + e_{15} \nabla^2 \varphi = 0 \\ R_3 \nabla^2 u_3 + K_2 \nabla^2 w_3 + d_3 \varphi = 0 \\ e_{15} \nabla^2 u_3 + K_2 \nabla^2 w_3 + \lambda_{11} \varphi = 0, \end{cases} \quad (7)$$

де  $\nabla^2 = (\partial^2/\partial x_1^2) + (\partial^2/\partial x_2^2)$ ,  $i = 1, 2$  – індекс відображає залежність для верхнього та нижнього матеріалів відповідно.

Введемо нові вектори:

$$\mathbf{v}' = [u_3', w_3', D_2]^T, \quad \mathbf{P} = [\sigma_{32}, H_{32}, \varphi']^T. \quad (8)$$

Розглянувши рівняння (7) зробимо висновок, що функції  $u_3$ ,  $\varphi$  та  $w_3$  задовольняють рівнянням  $\Delta u_3 = 0$ ,  $\Delta \varphi = 0$ ,  $\Delta w_3 = 0$ , відповідно, що вказує на те що ці функції являються гармонічними. Це дозволяє представити вектор  $\mathbf{u}$ , в який входять ці функції в якості компонент, як дійсну частину довільної, аналітичної вектор-функції  $\Phi(z) = [\Phi_1(z), \Phi_2(z), \Phi_3(z)]^T$  комплексної змінної  $z = x_1 + ix_2$

$$\mathbf{u} = 2\text{Re}\Phi(z) = \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}). \quad (9)$$

Використовуючи вектор  $\mathbf{u}$  вигляду (8) і підставляючи його в (4), отримаємо:

$$\mathbf{t}_1 = -i\mathbf{B}\Phi'(z) + i\bar{\mathbf{B}}\bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{B}\Phi'(z) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad (10)$$

де  $\mathbf{B} = i\mathbf{Q}$ .

Можна помітити, що на основі (9) та (10) вектори (8) можна записати у такому вигляді:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{M}\Phi'(z) + \bar{\mathbf{M}}\bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad \mathbf{P} = \mathbf{N}\Phi'(z) + \bar{\mathbf{N}}\bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad (11)$$

де  $\mathbf{M} = [M_{ij}]_{i,j=1,2,3}$ ,  $\mathbf{N} = [N_{ij}]_{i,j=1,2,3}$ , ( $i = 1, 2; j = 1, 2, 3$ );

$$M_{11} = M_{22} = 1; \quad M_{12} = M_{13} = M_{21} = M_{23} = 0;$$

$$M_{3j} = B_{3j}, \quad N_{ij} = B_{ij} \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, 3);$$

$$N_{33} = 1;$$

$$N_{31} = N_{32} = 0.$$

Матриці  $\mathbf{M}$  та  $\mathbf{N}$  мають вигляд

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}, \quad (12)$$



$$N = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Враховуючи, що розглядається тріщини між двома квазікристалами (Рис. 1), запишемо представлення (11) для кожного з обох півпросторів  $x_2 > 0$  та  $x_2 < 0$  в формі

$$\mathbf{v}^{(m)} = \mathbf{M}^{(m)} \Phi^{(m)}(z) + \bar{\mathbf{M}}^{(m)} \bar{\Phi}^{(m)}(\bar{z}), \quad \mathbf{P}^{(m)} = N^{(m)} \Phi^{(m)}(z) + \bar{N}^{(m)} \bar{\Phi}^{(m)}(\bar{z}), \quad (14)$$

де  $\mathbf{M}^{(m)}, N^{(m)}$  - матриці, які відповідають матрицям  $\mathbf{M}, N$ ;  $\Phi^{(m)}(z)$  – невизначені поки що вектор функції аналітичні у верхньому та нижньому півпросторах, відповідно; індекси  $m=1$  та  $m=2$  відносяться до верхньої та нижньої частин композиту, відповідно.

Вимагаючи, щоб рівність  $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}^{(2)}$  була справедлива на всій осі  $x_1$ , з рівняння (14) одержуємо наступну рівність

$$N^{(1)} \Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{N}^{(1)} \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) = N^{(2)} \Phi^{(2)}(x_1 - i0) + \bar{N}^{(2)} \bar{\Phi}^{(2)}(x_1 + i0). \quad (15)$$

Для спрощення запису будемо використовувати  $F(x_1 \pm i0) = F^\pm(x_1)$ , що означає граничне значення функції  $F(z)$  при  $x_2 \rightarrow 0$  зверху чи знизу, відповідно.

Рівняння (15) перепишемо в формі:

$$N^{(1)} \Phi^{(1)}(x_1 + i0) - \bar{N}^{(2)} \bar{\Phi}^{(2)}(x_1 + i0) = N^{(2)} \Phi^{(2)}(x_1 - i0) - \bar{N}^{(1)} \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0).$$

Припустимо, що ліва та права частина останньої рівності представляють собою граничні вирази для функції

$$N^{(1)} \Phi^{(1)}(z) - \bar{N}^{(2)} \bar{\Phi}^{(2)}(z)$$

та

$$N^{(2)} \Phi^{(2)}(z) - \bar{N}^{(1)} \bar{\Phi}^{(1)}(z), \quad (16)$$

які аналітичні в верхній та нижній площинах, відповідно. Це передбачає існування функції  $\Pi(z)$ , аналітичної на всій площині і рівної вищевказаним функціям для відповідних напівплощин.

Враховуючи, що  $\Pi(z)|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0$  та базуючись на теоремі Ліувілля знайдемо, що кожна з функцій (16) рівна 0 для будь якого  $z$  для кожної з напівплощин. Отже, з (16) одержуємо

$$\bar{\Phi}^{(2)}(z) = (\bar{N}^{(2)})^{-1} N^{(1)} \Phi^{(1)}(z) \quad \text{для } x_2 > 0, \quad (17)$$

$$\bar{\Phi}^{(1)}(z) = (\bar{N}^{(1)})^{-1} N^{(2)} \Phi^{(2)}(z) \quad \text{для } x_2 < 0. \quad (18)$$

З отриманих рівностей можемо знайти стрибок при проходженні через область тріщини для наступної вектор функції

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = \mathbf{v}'^{(1)}(x_1 + i0) - \mathbf{v}'^{(1)}(x_1 - i0),$$

А саме з першої формули (14) отримаємо



$$\mathbf{v}^{(k)}(x_1 \pm i0) = \mathbf{M}^{(k)} \Phi^{(k)}(x_1 \pm i0) + \bar{\mathbf{M}}^{(k)} \bar{\Phi}^{(k)}(x_1 \mp i0).$$

Підставивши ці вирази в останню формулу, одержуємо

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle &= \mathbf{M}^{(1)} \Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{\mathbf{M}}^{(1)} \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) - \\ &\quad - \mathbf{M}^{(2)} \Phi^{(2)}(x_1 - i0) - \bar{\mathbf{M}}^{(2)} \bar{\Phi}^{(2)}(x_1 + i0). \end{aligned} \quad (19)$$

Використовуючи, що на основі (18)

$$\Phi^{(2)}(x_1 - i0) = \left( \mathbf{N}^{(2)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{N}}^{(1)} \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0)$$

та підставляючи цей вираз разом з (17) в (19) при  $x_2 \rightarrow +0$ , визначимо стрибок в формі

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = \mathbf{D} \Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{\mathbf{D}} \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0), \quad (20)$$

де  $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{(1)} - \bar{\mathbf{M}}^{(2)} \left( \bar{\mathbf{N}}^{(2)} \right)^{-1} \mathbf{N}^{(1)}$ .

Введемо нову вектор-функцію

$$\mathbf{W}(z) = \begin{cases} \mathbf{D} \Phi^{(1)}(z), & x_2 > 0, \\ -\bar{\mathbf{D}} \bar{\Phi}^{(1)}(z), & x_2 < 0. \end{cases} \quad (21)$$

Тоді (20) можна записати так

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1). \quad (22)$$

Розглянувши другу формулу із співвідношення (14) отримаємо:

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{N}^{(1)} \Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{\mathbf{N}}^{(1)} \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0). \quad (23)$$

На основі (21) отримаємо

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(x_1 + i0) &= \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W}(x_1 + i0), \\ \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) &= -\left( \bar{\mathbf{D}}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{W}(x_1 - i0). \end{aligned}$$

Підставивши отримані вектор-функції в (23), запишемо отриманий вираз у вигляді

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{S} \mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{S}} \mathbf{W}^-(x_1), \quad (24)$$

де  $\mathbf{S} = \mathbf{N}^{(1)} \mathbf{D}^{-1}$ , причому цю матрицю можна представити у вигляді

$$\mathbf{S} = \left[ \mathbf{M}^{(1)} \left( \mathbf{N}^{(1)} \right)^{-1} - \bar{\mathbf{M}}^{(2)} \left( \bar{\mathbf{N}}^{(2)} \right)^{-1} \right]^{-1}. \quad (25)$$

Чисельний аналіз показує, що матриця  $\mathbf{S}$  має таку структуру

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iS_{11} & iS_{12} & S_{13} \\ iS_{21} & iS_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & iS_{33} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

де всі  $s_{ij}$  є дійсними.

На основі представлень (22), (24) аналогічно до роботи [13] отримуємо:

$$r_{j1}\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) + H_{23}^{(1)}(x_1, 0) + ir_{j3}E_1^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \quad (j=1, 3), \quad (27)$$

$$it_{j1}\langle u'_3(x_1) \rangle + it_{j2}\langle w'_3(x_1) \rangle + t_{j3}\langle D_2(x_1) \rangle = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1), \quad (28)$$

де  $r_{ij}$  та  $t_{ij}$  є дійсними і входять в якості компонент у наступні матриці

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & 1 & ir_{13} \\ -r_{11} & 1 & -ir_{13} \\ r_{31} & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} it_{11} & it_{12} & t_{13} \\ it_{21} & it_{22} & t_{23} \\ it_{31} & it_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

причому

$$r_{11} = \frac{s_{22}s_{31} - s_{21}s_{32}}{D}, \quad r_{13} = \delta \frac{s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}}{D}, \quad r_{31} = -s_{23} / s_{13}, \quad \text{а}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{RS}. \quad (30)$$

**Аналітичний аналіз електрично зарядженої тріщини.** Для задачі, проілюстрованій на Рис. 1, граничні умови можна сформулювати у вигляді

$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) = H_{23}^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(1)}(x_1, 0) = 0 \quad \text{для } c < x_1 < b, \quad (31)$$

$$\langle \sigma_{23} \rangle = 0, \quad \langle H_{23} \rangle = 0, \quad \langle D_2 \rangle = 0, \quad \langle u'_3 \rangle = 0, \quad \langle E_1 \rangle = 0, \quad w'_3 = 0 \quad \text{для } x_1 \notin (c, b), \quad (32)$$

а наявність сумарного електричного заряду величини  $D_0$  на тріщині приводить до наступного рівняння:

$$\int_c^b \langle D_2(x_1) \rangle dx_1 = D_0 \quad (33)$$

Граничні умови (32) з використанням представлень (28) забезпечують неперервність функцій  $F_j(z)$  на відрізках  $x_1 \notin (c, b)$  межі поділу матеріалів, а умова (31) з використанням (27) дає рівняння:

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = 0 \quad \text{для } c < x_1 < b. \quad (34)$$

Умови на нескінченності для функцій  $F_j(z)$  витікають із (27) і мають вигляд

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j, \quad (35)$$

де

$$\tilde{\tau}_j = \frac{r_{j1}\tau^\infty + H_{23}^\infty}{1 + \gamma_j}, \quad \tilde{\sigma}_j = \frac{r_{j3}E^\infty}{1 + \gamma_j}, \quad (j = 1, 2, 3).$$

Враховуємо також, що повинна виконуватись умова яка витікає з (28), а саме

$$\int_c^b \{F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1)\} dx_1 = \int_c^b \{it_{11}\langle u'_3(x_1) \rangle + it_{12}\langle w'_3(x_1) \rangle + t_{13}\langle D_2(x_1) \rangle\} dx_1. \quad (36)$$

Тоді в силу умов однозначності переміщень при обході контуру тріщини маємо

$$\int_c^b \{it_{11}\langle u'_3(x_1) \rangle + it_{12}\langle w'_3(x_1) \rangle\} dx_1 = 0. \quad (37)$$



При врахуванні також умов (33) отримаємо

$$\int_c^b \{F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1)\} dx_1 = t_{13} D_0. \quad (38)$$

Розв'язок задачі (34), (35) та (38) будемо розшукувати у формі [11]

$$F_j(z) = \frac{c_{0j} + c_{1j}z}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{i\varepsilon_j}, \quad (39)$$

де  $c_0, c_1$  - довільні константи.

При розкладенні на безкінечності  $F_j(z)$  отримаємо

$$F_j(z) = c_{1j} + \left\{ c_{0j} + c_{1j} \left[ \frac{b+c}{2} + i(b-c)\varepsilon_j \right] \right\} \frac{1}{z} + O(z^{-2}). \quad (40)$$

З представлень (35) і (38) отримаємо наступні рівняння

$$\begin{aligned} c_{1j} &= \tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j, \\ c_{0j} + c_{1j} \left[ \frac{b+c}{2} + i(b-c)\varepsilon_j \right] &= \frac{it_{13}D_0}{2\pi}. \end{aligned}$$

Будемо розглядати випадок коли  $D_0 \neq 0$  і враховуючи це можемо записати наступні вирази для констант

$$\begin{aligned} c_{1j} &= \tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j, \\ c_{0j} &= \frac{it_{13}D_0}{2\pi} - c_{1j} \left[ \frac{b+c}{2} + i(b-c)\varepsilon_j \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

З врахуванням вище вказаних співвідношень (41) одержуємо рішення

$$F_j(z) = \frac{\frac{it_{j3}D_0}{2\pi} + (\tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j) \left[ z - \frac{b+c}{2} - i\varepsilon_j l \right]}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{i\varepsilon_j}. \quad (42)$$

Також для зручності можливий його запис в формі

$$F_j(z) = \left\{ (\tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j) \frac{z - \frac{b+c}{2} - i\varepsilon_j l}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} + \frac{it_{j3}D_0}{2\pi\sqrt{(z-c)(z-b)}} \right\} \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{i\varepsilon_j}. \quad (43)$$

Як і в випадку відсутності електричного заряду на тріщині, розглянутому в [12, 13], можемо помітити осциляційну сингулярність напружень в безпосередній близькості до вершини тріщини.

Підставляючи вирази (43) в представлення (27) та (28), знаходимо фазонні і фазонні напруження, а також стрибки переміщень і електричного потенціалу на тріщині.

## 5 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Представлене вище рішення використовуємо для дослідження впливу заряду  $D_0$  на тріщині на напруження в околі її вершини та стрибки переміщень її берегів. Дослідження будемо проводити на прикладі біматеріалу скомпозованого з двох одномірних п'єзоелектричних квазікристалів з різними характеристиками для нижнього та верхнього матеріалів:

$$c_{44}^{(1)} = 3.55 \times 10^{10} \text{ Па}, \quad e_{15}^{(1)} = 17 \text{ К/м}^2, \quad K_2^{(1)} = 0.15 \times 10^9 \text{ Па}, \quad R_3^{(1)} = 1.765 \times 10^9 \text{ Па},$$

$$\tilde{e}_{15}^{(1)} = 17 \text{ К/м}^2, \quad \xi_{11}^{(1)} = 15.1 \times 10^{-9} \text{ К}^2 / (\text{Нм}^2) \text{ для верхнього матеріалу,}$$

$$c_{44}^{(2)} = 5.0 \times 10^{10} \text{ Па}, \quad e_{15}^{(2)} = -0.318 \text{ К/м}^2, \quad K_2^{(2)} = 0.3 \times 10^9 \text{ Па}, \quad R_3^{(2)} = 1.2 \times 10^9 \text{ Па},$$

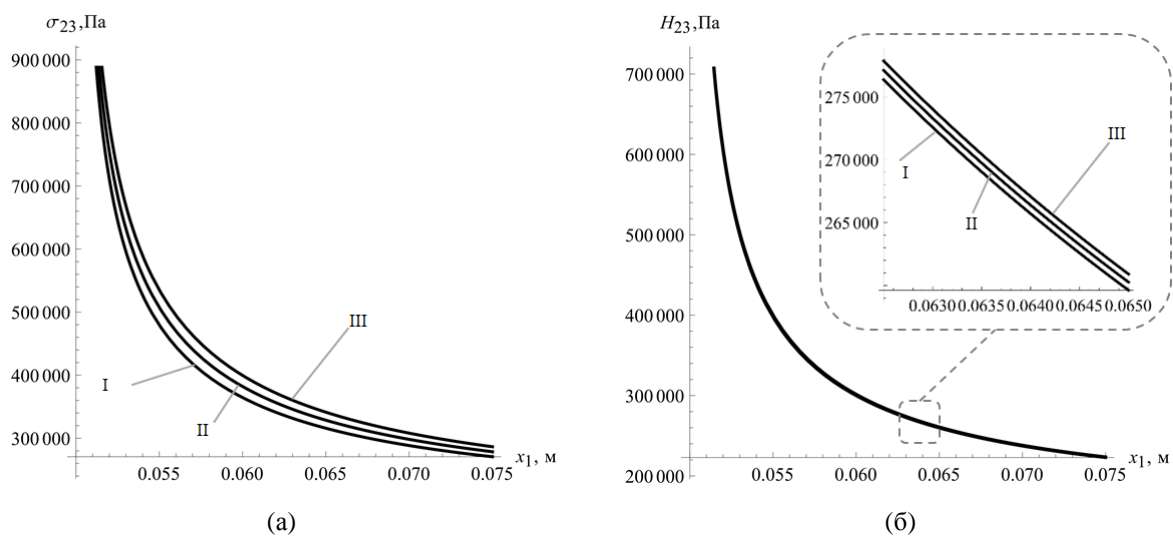
$$\tilde{e}_{15}^{(2)} = -0.16 \text{ К/м}^2, \quad \xi_{11}^{(2)} = 8.25 \times 10^{-12} \text{ К}^2 / (\text{Нм}^2) \text{ для нижнього матеріалу.}$$

Результати отримані для  $c = -0,05 \text{ м}$ ,  $b = 0,05 \text{ м}$  при статичному механічному навантаженні  $\sigma_{23}^\infty = 10^5 \text{ Н/м}^2$  і при змінній величині електричного поля. На всіх рисунках лінії I відповідають  $D_0 = 0$ , II -  $D_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}$ , III -  $D_0 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/м}$ .

## 6 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

На рис. 2(а) показана зміна фонон напруження  $\sigma_{23}$  в околі правої вершини тріщини. Прослідковується незначне зростання цього напруження зі зростанням величини електричного заряду. Має місце також зростання  $\sigma_{23}$  до нескінченості при наближенні до вершини тріщини.

На рис.2 (б) наведено зміну фазон напруження  $H_{23}$  при збільшенні заряду тріщини  $D_0$ . Як і в попередньому випадку при наближенні до вершини тріщини значення напруження зростають до нескінченості і не можуть бути визначені в самій вершині тріщини (особливій точці). Також можна зазначити, що при тих же значень електричного заряду, що і на рис 2(а), розбіжність у значеннях фазон напруження для різних  $D_0$  практично непомітна.



**Рис. 2.** Зміна фонон (а) та фазон (б) напруження в околі вершини тріщини при прикладеному на нескінченості напруженні  $\sigma_{23}^\infty$  і різних значеннях електричного заряду  $D_0$

На рис. 3 наведені фонон та фазон розкриття тріщини при різних значеннях електричного заряду  $D_0$ . Легко помітити що стрибок  $\langle u_3 \rangle$  несуттєво збільшується при збільшенні електричного заряду, а  $\langle w_3 \rangle$  навпаки зменшується для вказаних  $D_0$ .

Важливо відзначити також симетричність графіків відносно середини тріщини, що говорить про симетричність впливу як зовнішнього напруження, так і заряду на фонон і фазон розкриття тріщини.

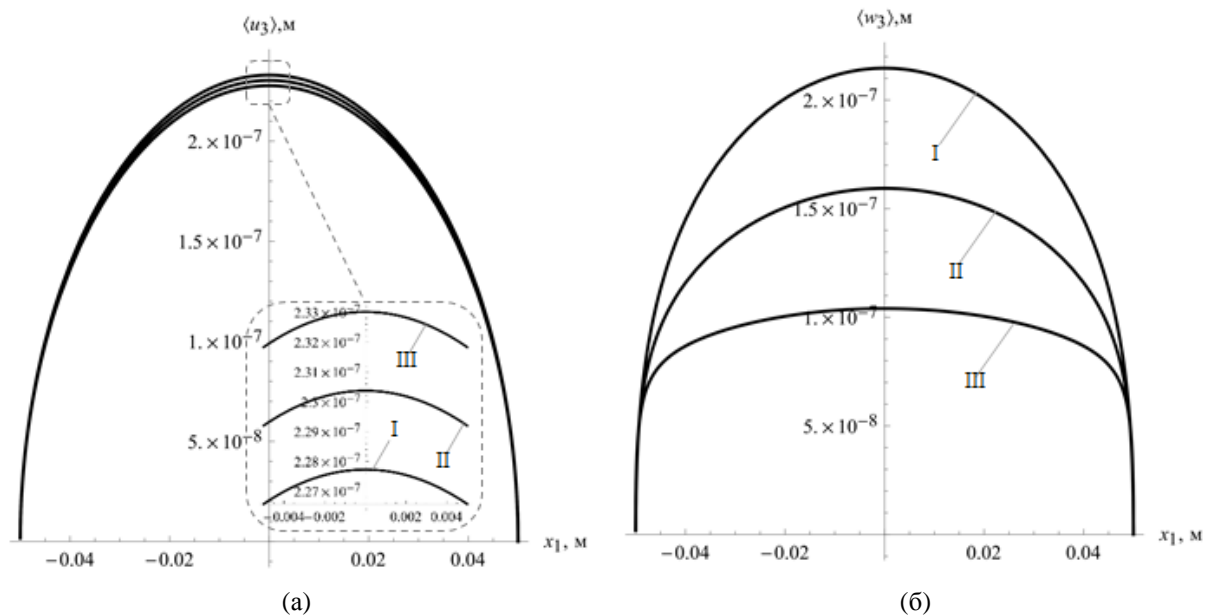


Рис. 3. Стрибок переміщень  $\langle u_3 \rangle$  (а) та  $\langle w_3 \rangle$  (б) при різних значеннях  $D_0$ .

## 7 ВИСНОВКИ

В роботі представлено рішення задачі антиплоского навантаження для одномірного п'єзоелектричного біматеріального квазікристалу з тріщиною під впливом як механічного навантаження прикладеного на безкінечності так і електричного заряду розподіленого вздовж берегів тріщини. Виведений аналітичний алгоритм рішення, який включив в себе:

- сформульовані представлення для напружень та електричного поля (27), а також для похідних від стрибка переміщень та електричного зміщення (28) через вектор-функцію, голоморфну у всій комплексній площині, крім області тріщини;
- на основі представлень (27) та (28) отримана задача лінійного спряження (34) з умовами на нескінченості (35) та умовами балансу заряду тріщини ;
- побудовано аналітичний розв'язок (43) цієї задачі і на його основі знайдені всі необхідні електромеханічні компоненти на межі поділу матеріалів.

На базі отриманого розв'язку проведена чисельна ілюстрація впливу зовнішнього навантаження і заряду тріщини на фонон і фазон напруження та відкриття тріщини.

Встановлено, що так як квазікристали мають п'єзоелектричні властивості, то електричний заряд тріщини впливає на усі характеристики напружено-деформованого стану біматеріального квазікристалічного з'єднання.

## Література

1. Shechtman, D.; Blech, I.; Gratias, D.; Cahn J. W. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. Physical Review Letters 1984, 53 (20), 1951-1953. DOI: 10.1103/PhysRevLett.53.1951.

2. Fan T. Y. *Mathematical theory of elasticity of quasicrystals and its applications*. Beijing: Springer, 2011.
3. Rao K. R. M.; Rao P. H.; Chaitanya B. S. K. Piezoelectricity in quasicrystals. *Pramana-Journal of Physics*, 2007. 68 (3). 481–487. DOI: 10.1007/s12043-007-0051-3.
4. Zhao M. H.; Dang H. Y.; Fan C. Y.; Chen Z. T. Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bi-material, Part 1: Theoretical solution. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017. 179. 59–78. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.04.019.
5. Zhao M. H.; Dang H. Y.; Fan C. Y.; Chen Z. T. Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bi-material, Part 2: Numerical method. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017. 180. 268–281. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.05.042.
6. Shi W. C.; Li H. H.; Gao Q. H. Interfacial cracks of antiplane sliding mode between usual elastic materials and quasicrystals. *Key Eng. Mater.*, 2007. 340–341. 453–458. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.340-341.453.
7. Hu K. Q.; Jin H.; Yang Z.; Chen X. Interface crack between dissimilar one-dimensional hexagonal quasicrystals with piezoelectric effect. *Acta Mech.*, 2019. 230. 2455–2474. DOI: 10.1007/s00707-019-02404-z.
8. Wang X.; Zhong Z. A conducting arc crack between a circular piezoelectric inclusion and an unbounded matrix. *Int. J. Solids Struct.*, 2002. 39. 5895–5911. DOI: 10.1016/S0020-7683(02)00474-2.
9. Onopriienko O.; Loboda V.; Sheveleva A.; Lapusta Y. Bond zone model for a conductive crack at the interface of piezoelectric materials under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings. *Z Angew Math Mech.*, 2019. e201800230. DOI: 10.1002/zamm.201800230.
10. Sheveleva A.; Loboda V.; Lapusta Y. A conductive crack and a remote electrode at the interface between two piezoelectric materials. *Applied Math. Modeling*, 2020. 87. 287–299. DOI: 10.1016/j.apm.2020.06.003.
11. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
12. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concept for interfacial cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 1988. 55, 98–103. DOI: 10.1115/1.3173668.
13. Білий Д. В., Комаров О. В., Лобода В.В. Антиплоска задача для одномірного п'єзоелектричного квазікристала з міжфазною тріщиною. *Bulletin of Zaporizhzhia National University. Physical and Mathematical Sciences*, 2021. No 1. 5–14. DOI: 10.26661/2413-6549-2021-1-01

## References

- 1 Shechtman, D.; Blech, I.; Gratias, D.; Cahn J. W. (1984) Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Physical Review Letters*. 53 (20). 1951–1953. DOI: 10.1103/PhysRevLett.53.1951.
- 2 Fan T. Y. (2011) *Mathematical theory of elasticity of quasicrystals and its applications*. Beijing: Springer.
- 3 Rao K. R. M.; Rao P. H.; Chaitanya B. S. K. (2007) Piezoelectricity in quasicrystals. *Pramana Journal of Physics*. 68 (3). 481–487. DOI: 10.1007/s12043-007-0051-3.
- 4 Zhao M. H.; Dang H. Y.; Fan C. Y.; Chen Z. T. (2017) Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bimaterial, Part 1: Theoretical solution. *Engineering Fracture Mechanics*. 179. 59–78. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.04.019.
- 5 Zhao M. H.; Dang H. Y.; Fan C. Y.; Chen Z. T (2017) Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bimaterial. Part 2: Numerical method. *Engineering Fracture Mechanics*. 180. 268–281. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.05.042.
- 6 Shi W. C.; Li H. H.; Gao Q. H. (2007) Interfacial cracks of antiplane sliding mode between usual elastic materials and quasicrystals. *Key Eng. Mater.* 340–341. 453–458. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.340-341.453.

- 7 Hu K. Q.; Jin H.; Yang Z.; Chen X. (2019) Interface crack between dissimilar one-dimensional hexagonal quasicrystals with piezoelectric effect. *Acta Mech.* 230. 2455–2474. DOI: 10.1007/s00707-019-02404-z.
- 8 Wang X.; Zhong Z. (2002) A conducting arc crack between a circular piezoelectric inclusion and an unbounded matrix. *Int. J. Solids Struct.* 39. 5895–5911. DOI: 10.1016/S0020-7683(02)00474-2.
- 9 Onopriienko O.; Loboda V.; Sheveleva A.; Lapusta Y. (2019) Bond zone model for a conductive crack at the interface of piezoelectric materials under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings. *Z Angew Math Mech.* e201800230. DOI: 10.1002/zamm.201800230.
- 10 Sheveleva A.; Loboda V.; Lapusta Y. (2020) A conductive crack and a remote electrode at the interface between two piezoelectric materials. *Applied Math. Modeling.* 87. 287–299. DOI: 10.1016/j.apm.2020.06.003.
- 11 Muskhelishvili N. I. (1975) *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity.* Noordhoff. Groningen.
- 12 Rice J. R. (1988) Elastic fracture mechanics concept for interfacial cracks. *Journal of Applied Mechanics.* 55. 98–103. DOI: 10.1115/1.3173668.
- 13 Biliy D.V.; Komarov O.V.; Loboda V.V. (2021) *Antyploska zadacha dlya odnomirnoho p'yezoelektrychnoho kvazikrystala z mizhfaznoyu trishchynoyu* [Antiplane problem for a one-dimensional piezoelectric quasicrystal with an interface crack.] *Bulletin of Zaporizhzhia National University. Physical and Mathematical Sciences.* No 1 5–14. DOI: 10.26661/2413-6549-2021-1-01 [in Ukraine]

**Білий Дмитро Володимирович**

Дніпровський Національний Університет імені Олеся Гончара  
аспірант

пр. Гагаріна, 72 Дніпро, Україна, 49010

biliy.dmitry@gmail.com

ORCID: 0000-0001-6873-576

**Лобода Володимир Васильович**

Дніпровський Національний Університет імені Олеся Гончара

доктор фізико-математичних наук

пр. Гагаріна, 72 Дніпро, Україна, 49010

loboda@dnu.dp.ua

ORCID: 0000-0002-0432-629X

*Для посилань:*

Білий Д. В., Лобода В. В. Антиплоска задача для одномірного п'езоелектричного квазікристала з міжфазною тріщиною під впливом внутрішнього електричного заряду. *Механка та математичні методи*, 2022. Том 4. Вип. 1. С. 32–44

*For references:*

Bilyi D., Loboda V. (2022). Antiplane problem for one-dimensional piezoelectric quasicrystal with an interface crack under the influence of internal electric load. *Mechanics and Mathematical Methods.* 4 (1). 32–44

УДК 539.3

## ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ У ТОВСТИХ ПЛИТАХ ПРИ ЛОКАЛІЗОВАНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Соляр Т. Я.<sup>1</sup>, Соляр О. І.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України*

**Анотація:** Розглянуто задачу дослідження напружень у плитах, які перебувають під дією зосереджених сил і локально розподіленого навантаження. Визначення напружень проведено на основі співвідношень тривимірної теорії пружності з використанням двох методів. У першому використано символічний метод Лур'є з додатковим застосуванням формул розкладу Ващенко-Захарченко. Розв'язок побудовано у вигляді рядів, які експоненціально збігаються у віддалених від прикладених сил точках. Однак ці ряди збігаються повільно в околі прикладеного навантаження. У зв'язку з цим розв'язок задачі побудовано іншим методом, з використанням інтегрального перетворення Ханкеля. Запропоновано підхід знаходження особливих інтегралів, які виникають у задачах теорії пружності для плит. Після перетворень отримано співвідношення для визначення напружень, в які входять інтеграли від функцій експоненціально загасаючих на нескінченності. Наведено також співвідношення для визначення напружень у плитах на основі наближених рівнянь, які базуються на гіпотезах Кірхгофа-Лява. Для цього випадку в аналітичному вигляді наведено розв'язки для напружень при дії зосереджених сил та при локально розподіленому навантаженні. На основі отриманих співвідношень виконано розрахунки напружень у плиті, яка перебуває в умовах згину під дією системи само зрівноважених сил або під дією розподіленого навантаження. Встановлено випадки, коли напруження, які знайдені на основі елементарних формул, що отримані на основі рівнянь Кірхгофа-Лява з достатньою для практики точністю можуть бути застосовані в задачах згину плит. Зокрема встановлено, що визначені напруження на протилежній межі від прикладеного локально навантаження виявились розтягувальними і водночас практично точними, якщо область дії зусиль більша за товщину плити. При цьому знайдені напруження під прикладеним навантаженням визначаються з більшими похибками. Однак ці напруження є стискувальними і не є основними в розрахунках на міцність бетонних матеріалів.

**Ключові слова:** плита, напруження, тривимірна задача теорії пружності, рівняння Кірхгофа-Лява, символічний розв'язок Лява, формула розкладу Ващенко-Захарченко, перетворення Ханкеля.

## DETERMINATION OF STRESSES IN THICK PLATES UNDER LOCALIZED LOADS

T. Solyar<sup>1</sup>, O. Solyar<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NASU*

**Abstract:** The problem of investigating the stresses in the plates, which are subjected to the action of concentrated forces and locally distributed load is considered. The stresses were determined on the basis of the relations of the three-dimensional theory of elasticity using two methods. The first uses the symbolic Lurie method with the additional application of Vashchenko-Zakharchenko expansion formulas. The solution is constructed in the form of series, which exponentially converge at points distant from the applied forces. However, these series converge slowly in the vicinity of the applied load. In this regard, the solution of the problem is constructed by another method, using the Hankel integral transformation. The approach to find special integrals appearing in problems of the theory of elasticity for plates is proposed. After transformations, the relations for determining the stresses that include the integrals of the functions exponentially attenuating at infinity are obtained. The relations for determining the stresses in the plates on the basis of approximate equations using the Kirchhoff-





Lev hypotheses are also given. For this case, the solutions for stresses subjected to the action of concentrated forces and under locally distributed load are given in analytical form. There are cases when stresses found by the elementary formulas, obtained on the basis of Kirchhoff-Lev equations with sufficient accuracy for practice, can be applied in plate bending problems. In particular, it is found that the determined stresses at the boundary opposite to the applied local load turn out to be tensile and at the same time practically accurate if the force is greater than the thickness of the plate. In this case the stresses found under the applied load are determined with larger errors. However, these stresses are compressive and are not essential in the calculation of strength of concrete materials.

**Keywords:** Plate, stress, three-dimensional problem of the theory of elasticity, Kirchhoff-Lev equation, symbolic Lev solution, Vashchenko-Zakharchenko expansion formula, Hankel transformation.



## 1 ВСТУП

У техніці та будівництві широко використовуються пластинчаті елементи конструкцій, які перебувають в умовах згину. Тому дослідженню напружено-деформованого стану під дією згинних навантажень присвячено значну кількість робіт. При дослідженні напружень у плитах та оболонках в літературі, як правило, використовують наближені теорії, які базуються на певних гіпотезах. Зокрема, найбільш застосовною є технічна теорія, яка базується на гіпотезах Кірхгофа-Лява. Однак при дослідженні напружень біля локально прикладених навантажень виникає складний напружений стан, який може істотно відрізнятися від лінійного, який приймають в технічній теорії. Тому для достовірного визначення таких напружень необхідно використовувати тривимірну теорію пружності. Ці рівняння значно складніші за рівняння технічної теорії, тому вони в літературі використовуються тільки в окремих випадках. Нижче розглянуто задачі визначення напружень у товстих плитах на основі тривимірної теорії. Отримані результати можуть бути використані також і для локально навантажених пологих оболонок.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Методи розрахунку напружено-деформованого стану пластин різної форми на основі технічної теорії наведено в працях [11, 12]. Для пластин прямокутної форми ефективним виявився метод рядів Фур'є [1, 7]. При розгляді пластин складної форми, послаблених отворами використовуються числові методи, які базуються на методах скінчених або граничних елементів [9, 10, 13]. Отримані результати на основі прикладних теорій є достатньо точними для тонких пластин, навантажених розподіленим навантаженням.

Дослідження задач про пружну рівновагу пластин у тривимірній постановці розглянуто в працях [4, 6, 8]. Для розв'язування таких задач використовують метод інтегральних перетворень. Напруження і переміщення визначаються через невластні інтеграли, які є повільно збіжними. Для деяких випадків, коли шар навантажений зосередженими силами, в [8] запропоновано спосіб обчислення інтегралів методом лишків. Однак такі розв'язки виражені через ряди, які виявились повільно збіжними в околі прикладених сил.

Для обчислення інтегралів, які виникають в задачах теорії пружності для шару, в [6] запропоновано наближений метод, у якому для функції, що є множником для підінтегральних функцій

$$f(u) = \frac{u}{u + sh u}$$

використано апроксимацію вигляду

$$f_1(u) = (-1.55u + 1/2)e^{-1.4u} + 2ue^{-u}.$$

На основі цієї апроксимації в [6] наближено отримано вирази для переміщень і напружень у шарі, що знаходиться під дією зосереджених стискувальних сил, в аналітичному вигляді.

Символічний метод побудови розв'язків рівнянь теорії пружності для шару запропонований в роботах Лур'є [4]. На основі цього методу в [3] запропоновано метод однорідних розв'язків, який використовують при дослідженні напружень біля отворів. Доведено можливість, за допомогою однорідних розв'язків задовольнити крайові

умови для деякого класу плоских задач для прямокутної області, а також задач про згин прямокутної плити.

У праці [5], на основі символічного методу Лур'є, побудовано неоднорідні розв'язки задач теорії пружності для плит, навантажених розподіленим навантаженням.

Розглядається товста пластина  $-h \leq z \leq h$ . Нехай пластина перебуває під дією зусиль, прикладених до межі при  $z = \pm h$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = \sigma_{\pm},$$

де  $\sigma_{\pm} = \sigma_{\pm}(x, y)$  – відомі функції.

Покладемо, що прикладене навантаження є самозрівноваженим.

Прийmemo:

$$\sigma_{\pm} = q \pm p,$$

де  $q = 0.5(\sigma_+ + \sigma_-)$ ,  $p = 0.5(\sigma_+ - \sigma_-)$ .

Побудуємо ефективний розв'язок поставленої задачі та виконаємо на основі нього дослідження напружень при локалізованих навантаженнях у шарі.

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для розв'язування задачі окремо розглянемо симетричну й антисиметричну складові.

**Симетричний випадок.** Розглянемо випадок, коли при  $z = \pm h$  задано напруження

$$\sigma_z = q, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (1)$$

Тоді, на основі [4], маємо вирази для переміщень, які записані у символічному вигляді

$$u = -\frac{h^2}{2G} \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_1(d, \zeta)}{d^2 \Delta} q, \quad w = -\frac{h}{2G} \frac{f_2(d, \zeta)}{\Delta} q, \quad \theta = \frac{1-2\nu}{G} \frac{f_0}{\Delta} q, \quad (2)$$

де

$$\Delta = 1 + \frac{\sin 2d}{2d}, \quad f_0 = \frac{\cos d \zeta \sin d}{d},$$

$$f_1(d, \zeta) = \cos d \zeta \cos d + \zeta \sin d \zeta \sin d - (1-2\nu) \cos d \zeta \sin d / d,$$

$$f_2(d, \zeta) = [-d \cos d \sin d \zeta + d \zeta \cos d \zeta \sin d - 2(1-\nu) \sin d \zeta \sin d] d^{-2},$$

$$\zeta = \frac{z}{h}, \quad d^2 = h^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Напруження визначаються за формулами [4]

$$\sigma_x = 2G \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right) = -h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{f_1(d, \zeta)}{d^2 \Delta} q + 2\nu \frac{f_0(d, \zeta)}{\Delta} q, \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = -h^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{f_1(d, \zeta)}{d^2 \Delta} q.$$

Переміщення  $v$  та напруження  $\sigma_y$  отримуються із співвідношень для  $u, \sigma_x$  шляхом заміни в них  $\partial/\partial x$  на  $\partial/\partial y$  та  $\partial/\partial y$  на  $\partial/\partial x$ .

Максимальні напруження досягаються на граничних площинах пластини. Запишемо величини, які входять у розв'язок при  $z = h (\zeta = 1)$ :

$$f_1 = 1 - (1 - 2\nu) \frac{\sin 2d}{2d} = 2(1 - \nu) - (1 - 2\nu)\Delta, \quad f_0 = \frac{\sin 2d}{2d} = \Delta - 1,$$

$$f_2 = -2(1 - \nu) \frac{\sin^2 d}{d^2}.$$

Тобто при  $\zeta = 1$  маємо

$$\sigma_x = \partial_1^2 \left[ -2(1 - \nu) \frac{1}{d^2 \Delta} + (1 - 2\nu) \frac{1}{d^2} \right] q + 2\nu \left( 1 - \frac{1}{\Delta} \right) q,$$

$$\tau_{xy} = \partial_1 \partial_2 \left[ -2(1 - \nu) \frac{1}{d^2 \Delta} + (1 - 2\nu) \frac{1}{d^2} \right] q, \quad (4)$$

де

$$\partial_1 = h \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = h \frac{\partial}{\partial y}.$$

Тут виникають функції вигляду

$$F = \frac{f(d, \zeta)}{d^2 \Delta} q,$$

де  $f(d, \zeta)$  - ціла функція аргументу  $d$ , причому  $f(-d, \zeta) = f(d, \zeta)$ .

Для неї справедливий розклад [5]

$$F = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f(\alpha_i, \zeta)}{\cos^2 \alpha_i} q_i + 0,5 f(0, \zeta) q_0,$$

де  $\alpha_i$  - корені рівняння  $\Delta = 1 + (\sin 2\alpha / 2\alpha) = 0$ , причому  $\text{Re } \alpha_i > 0$ ,

функції  $q_i$  - розв'язок рівняння  $(d^2 - \alpha_i^2) q_i = q$  при  $i \geq 1$  та  $d^2 q_0 = q$ .

Для розглянутої задачі в [5] отримано розв'язок у вигляді:

$$u = -\frac{h^2}{2G} \frac{\partial}{\partial x} [F_1 + 0,5 f_1(0, \zeta) q_0], \quad w = -\frac{h}{2G} d^2 [F_2 + 0,5 f_2(0, \zeta) q_0],$$

$$\sigma_x = -\partial_1^2 [F_1 + 0,5 f_1(0, \zeta) q_0] + 2\nu d^2 [F_0 + 0,5 f_0(0, \zeta) q_0] =$$

$$= -\partial_1^2 F_1 + 2\nu d^2 F_0 + \nu \partial_2^2 q_0,$$

$$\tau_{xy} = -\partial_1 \partial_2 [F_1 + 0,5 f_1(0, \zeta) q_0] = -\partial_1 \partial_2 [F_1 + \nu q_0],$$

де

$$F_j = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_j(\alpha_i, \zeta)}{\cos^2 \alpha_i} q_i.$$

Антисиметрична задача. Розглянемо випадок, коли при  $z = \pm h$  задано напруження  $\sigma_z = q, \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . (5)

Тоді, на основі [4], маємо вирази для переміщень, які записані у символічному вигляді

$$u = -\frac{h^2}{2G} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi_1(d, \zeta)}{d^2 \delta} p, \quad w = \frac{h}{2G} \frac{\varphi_2(d, \zeta)}{d^2 \delta} p, \quad \theta = -2 \frac{1-2\nu}{2G} \frac{\varphi_0(d, \zeta)}{d^2 \delta} p, \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi_1(d, \zeta) &= (1-2\nu)\varphi_0(d, \zeta) + \psi(d, \zeta), \quad \delta = 1 - \frac{\sin 2d}{2d}, \\ \varphi_2(d, \zeta) &= 2(1-\nu) \cos d \zeta \cos d + d \zeta \sin d \zeta \cos d - d \sin d \cos d \zeta, \\ \varphi_0(d, \zeta) &= \cos d \sin d \zeta / d, \quad \psi(d, \zeta) = \zeta \cos d \zeta \cos d + \sin d \zeta \sin d. \end{aligned}$$

Напруження визначаються за співвідношеннями

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right) = -\partial_1^2 \frac{\varphi_1(d, \zeta)}{d^2 \delta} q - 2\nu \frac{\varphi_0(d, \zeta)}{\delta} q, \\ \tau_{xy} &= -\partial_1 \partial_2 \frac{\varphi_1(d, \zeta)}{d^2 \delta} q. \end{aligned} \quad (7)$$

При  $\zeta = 1$  маємо

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (1-2\nu) \frac{\sin 2d}{2d} + 1 = 2(1-\nu) - (1-2\nu)\delta, \quad \varphi_2(d, \zeta) = 2(1-\nu) \cos^2 d, \\ \varphi_0(d, \zeta) &= \frac{\sin 2d}{2d} = 1 - \delta, \\ \sigma_x &= -\partial_1^2 \frac{2(1-\nu) - (1-2\nu)\delta}{d^2 \delta} q - 2\nu \frac{1-\delta}{\delta} q = \\ &= -\partial_1^2 \left[ 2(1-\nu) \frac{1}{d^2 \delta} - (1-2\nu) \frac{1}{d^2} \right] q - 2\nu \left( -1 + \frac{1}{\delta} \right) q. \end{aligned}$$

Тут виникають функції вигляду

$$\Phi = \frac{\varphi(d, \zeta)}{d^2 \delta} p,$$

де  $\varphi(d, \zeta)$  - ціла функція аргументу  $d$ , причому  $\varphi(-d, \zeta) = \varphi(d, \zeta)$ .

Для неї справедливий розклад [5]

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi(\beta_i, \zeta)}{\sin^2 \beta_i} p_i + A p_0 + B d^2 p_0,$$

де  $\beta_i$  - корені рівняння  $\Delta = 1 - (\sin 2\beta / 2\beta) = 0$ , причому  $\operatorname{Re} \beta_i > 0$ ,

функції  $p_i$  - розв'язок рівняння  $(d^2 - \beta_i^2) p_i = p$  при  $i \geq 1$  та  $d^4 p_0 = p$ .

Тут  $A, B$  - коефіцієнти розкладу в ряд в околі точки  $d = 0$

$$\frac{\varphi(d, \zeta)}{d^2 \delta} = \frac{A}{d^4} + \frac{B}{d^2} + \dots$$

Тоді

$$\begin{aligned} u &= -\frac{h}{2G} \partial_1 (\Phi_1 + \omega_1), \quad w = -\frac{h}{2G} d^2 (\Phi_2 + \omega_2), \\ \sigma_x &= -\partial_1^2 (\Phi_1 + \omega_1) + 2\nu d^2 (\Phi_0 + \omega_0), \quad \tau_{xy} = -\partial_1 \partial_2 (\Phi_1 + \omega_1), \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(\beta_i, \zeta)}{\sin^2 \beta_i} p_i.$$

Тут

$$\omega_j = A_j p_0 + B_j d^2 p_0,$$

$$A_0 = -\frac{3}{2}\zeta, \quad B_0 = \frac{3}{2} \left( 0,3\zeta + \frac{\zeta^3}{6} \right),$$

$$A_1 = 3(1-\nu)\zeta, \quad B_1 = 0.5(\nu-2)\zeta^3 + 0.3(2+3\nu)\zeta,$$

$$A_2 = 3(1-\nu), \quad B_2 = 1.5\nu\zeta^2 - 0.3(8-3\nu).$$

**Дія зосередженої сили.** Розглянемо випадок, коли зосереджена сила  $P_0$  прикладена до верхньої межі пластини в т.  $(0, 0, h)$ . Тоді

$$p = q = \frac{P_0}{2} \delta(x)\delta(y).$$

На основі [5] отримаємо вирази для функцій, через які вище записано розв'язок

$$q_i = -cK_0(\alpha_i \rho)/h^2, \quad i > 0, \quad q_0 = c \ln \rho/h^2,$$

$$p_i = -cK_0(\beta_i \rho), \quad i > 0, \quad d^2 p_0 = c \ln \rho/h^2, \quad p_0 = \frac{c}{4} \ln \rho(\rho^2 - 1)/h^2,$$

де  $K_0(x)$  – функція Макдональда,  $\rho = r/h$ ,  $c = (1/2\pi)(P_0/2)$ .

Напруження, що відповідають симетричній й антисиметричній складовим на верхній межі будуть

$$\sigma_x^s = -\partial_1^2 [F_1 + 0,5f_1(0, \zeta)q_0] + 2\nu d^2 [F_0 + 0,5f_0(0, \zeta)q_0] = -\partial_1^2 F_1 + 2\nu d^2 F_0 + \nu \partial_2^2 q_0,$$

$$\tau_{xy}^s = -\partial_1 \partial_2 [F_1 + 0,5f_1(0, \zeta)q_0] = -\partial_1 \partial_2 [F_1 + \nu q_0].$$

$$\sigma_x^a = -\partial_1^2 (\Phi_1 + \omega_1) + 2\nu d^2 (\Phi_0 + \omega_0), \quad \tau_{xy}^a = -\partial_1 \partial_2 (\Phi_1 + \omega_1).$$

Корені  $\alpha_i, \beta_i$  є комплексними числами. Функції Макдональда при великих значеннях аргументу мають вигляд  $K_0(z) \sim \exp(-\operatorname{Re} z)$ . Тобто,

$$F_j \sim \exp(-\operatorname{Re}(\alpha_1)\rho), \quad \Phi_j \sim \exp(-\operatorname{Re}(\beta_1)\rho),$$

причому [8]

$$\operatorname{Re}(\alpha_1) = 2.165, \quad \operatorname{Re}(\beta_1) = 3.749.$$

Звідси випливає, що при  $\rho > 3$  складовими  $F_j, \Phi_j$  у наведених вище співвідношеннях можна нехтувати. Тобто, для визначення напружень при  $\rho > 3$  маємо прості наближені співвідношення

$$\sigma_x^s = \nu \partial_2^2 q_0, \quad \tau_{xy}^s = -\nu \partial_1 \partial_2 q_0,$$

$$\sigma_x^a = -\partial_1^2 [3(1-\nu)p_0 + (-0.4+1.4\nu)d^2 p_0] + 2\nu(-1.5d^2 p_0 + 0.7p),$$

$$\tau_{xy}^a = -\partial_1 \partial_2 [3(1-\nu)p_0 + (-0.4+1.4\nu)d^2 p_0],$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^a - \sigma_x^s &= -\left[3(1-\nu)\partial_1^2 p_0 + 3\nu(\partial_1^2 + \partial_2^2)p_0\right] - \partial_1^2(-0.4 + 1.4\nu)d^2 p_0 + 1.4\nu p = \\ &= -3(\partial_1^2 p_0 + \nu\partial_2^2)p_0 + \partial_1^2(0.4 - 1.4\nu)d^2 p_0 + 1.4\nu p. \end{aligned}$$

**Визначення напружень із застосуванням інтегрального перетворення Ханкеля.**

Наведений вище розв'язок записано в рядах, які у випадку локалізованих навантажень збігаються повільно. Тому нижче отримано розв'язок з використанням інтегрального перетворення Ханкеля. При використанні даного підходу необхідно розглядати випадок, коли пластина навантажена системою самозрівноважених сил (тільки у цьому випадку далі отримуються збіжні інтеграли)

$$p = \sum_{i=1}^N P_i \delta(x-x_i) \delta(y-y_i), \quad q = \sum_{i=1}^N Q_i \delta(x-x_i) \delta(y-y_i)$$

причому виконуються умови рівноваги

$$\sum_{i=1}^N P_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N x_i P_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N y_i P_i = 0. \tag{9}$$

Зобразимо [5]

$$p = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N P_i \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r_i) d\lambda, \quad q = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N Q_i \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r_i) d\lambda,$$

де  $r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$ .

Врахуємо, що [4]

$$f(d)p = \sum_{i=1}^N \frac{P_i}{2\pi} \int_0^\infty \lambda f(i\lambda h) J_0(\lambda r_i) d\lambda, \quad f(d)q = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{2\pi} \int_0^\infty \lambda f(i\lambda h) J_0(\lambda r_i) d\lambda.$$

Тоді напруження, які відповідають симетричній складовій будуть

$$\sigma_x^s = -\partial_1^2 F_1 + 2\nu F_0 + 2\nu q + (1-2\nu)\partial_1^2 \frac{q}{d^2}, \quad \tau_{xy}^s = -\partial_1 \partial_2 F_1,$$

де

$$F_1 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N Q_i \int_0^\infty \frac{\lambda f_1(i\lambda h, \zeta)}{(i\lambda h)^2 \Delta(i\lambda h)} J_0(\lambda r_i) d\lambda,$$

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N Q_i \int_0^\infty \frac{\lambda f_0(i\lambda h, \zeta)}{\Delta(i\lambda h)} J_0(\lambda r_i) d\lambda.$$

Звідси при  $\zeta = 1$  маємо

$$\begin{aligned} \sigma_x^s &= \frac{2(1-\nu)}{2\pi h^2} \partial_1^2 \sum_{i=1}^N Q_i \int_0^\infty \frac{J_0(\eta \rho_i) - 1}{\eta \Delta(\eta)} d\eta - \\ &\quad - \frac{2\nu}{2\pi h^2} \sum_{i=1}^N Q_i \int_0^\infty \frac{\eta}{\Delta(\eta)} J_0(\eta \rho_i) d\eta + 2\nu q + (1-2\nu)\partial_1^2 \frac{q}{d^2}, \end{aligned}$$

$$\Delta(\eta) = 1 + \text{sh } 2\eta/2\eta, \quad \rho_i = r_i/h. \tag{10}$$

Тут під інтегралом додані складові, які забезпечують збіжність інтегралів. Аналогічно для антисиметричної складової з використанням умов рівноваги (9) маємо

$$\begin{aligned} \sigma_x^a &= \frac{2(1-\nu)}{2\pi h^2} \sum_{i=1}^N P_i \partial_1^2 \int_0^\infty \frac{J_0(\eta \rho_i) - 1 + 0,25\eta^2 \rho_i^2}{\eta \delta(\eta)} d\eta - \\ &\quad - \frac{2\nu}{2\pi h^2} \sum_{i=1}^N P_i \int_0^\infty \frac{\eta}{\delta(\eta)} [J_0(\eta \rho_i) - 1] d\eta + 2\nu p + (1-2\nu) \partial_1^2 \frac{p}{d^2}, \\ \delta(\eta) &= 1 - \text{sh } 2\eta/2\eta. \end{aligned} \tag{11}$$

Запишемо похідні, через які визначаються напруження:

$$\begin{aligned} \partial_1 J_0(\gamma \rho) &= -J_1(\gamma \rho) \gamma \frac{\xi}{\rho}; \\ \partial_1^2 J_0(\gamma \rho) &= - \left[ J_0(\gamma \rho) - \frac{J_1(\gamma \rho)}{\gamma \rho} \right] \left( \gamma \frac{\xi}{\rho} \right)^2 - J_1(\gamma \rho) \frac{\gamma \eta^2}{\rho^3}; \\ \partial_1 \partial_2 J_0(\gamma \rho) &= - \left[ J_0(\gamma \rho) - \frac{J_1(\gamma \rho)}{\gamma \rho} \right] \frac{\gamma^2 \xi \eta}{\rho^2} + J_1(\eta \rho) \frac{\gamma \xi \eta}{\rho^3}, \end{aligned}$$

де  $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ .

**Випадок розподіленого навантаження.** Розглянемо випадок, коли пластина перебуває під дією зусиль, які розподілені по окремих областях, причому прикладене навантаження самозрівноважене. Нехай

$$p = \sum_{j=1}^N P_j s(r_j), \quad q = \sum_{j=1}^N Q_j s(r_j),$$

де  $s(r)$  – відома функція, яка відмінна від нуля в області  $r < R$ ,  $R$  – задана величина.

Зобразимо функцію  $s(r)$  у вигляді інтеграла Ханкеля

$$s(r) = \int_0^\infty \lambda \tilde{s}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda,$$

де

$$\tilde{s}(\lambda) = \int_0^\infty r s(r) J_0(\lambda r) dr = \int_0^R r s(r) J_0(\lambda r) dr.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sigma_x^s &= \frac{2(1-\nu)}{2\pi h^2} \sum_{i=1}^N Q_i \int_0^\infty \tilde{s}(\eta/h) \partial_1^2 \frac{J_0(\eta \rho_i) - 1}{\eta \Delta(\eta)} d\eta - \\ &\quad - \frac{2\nu}{2\pi h^2} \sum_{i=1}^N Q_i \int_0^\infty \tilde{s}(\eta/h) \frac{\eta}{\Delta(\eta)} J_0(\eta \rho_i) d\eta + 2\nu q + (1-2\nu) \partial_1^2 \frac{q}{d^2}, \\ \sigma_x^a &= \frac{2(1-\nu)}{2\pi h^2} \sum_{i=1}^N P_i \int_0^\infty \tilde{s}(\eta/h) \partial_1^2 \frac{J_0(\eta \rho_i) - 1 + 0,25\eta^2 \rho_i^2}{\eta \delta(\eta)} d\eta - \end{aligned}$$





$$-\frac{2\nu}{2\pi h^2} \sum_{i=1}^N P_i \int_0^{\infty} \tilde{s}(\eta/h) \frac{\eta}{\delta(\eta)} [J_0(\eta\rho_i) - 1] d\eta + 2\nu p + (1-2\nu)\partial_1^2 \frac{P}{d^2}.$$

Зокрема, розглянемо випадок, коли

$$s = 1 - \frac{r^2}{R^2}, \quad r < R.$$

Тоді

$$\tilde{s}(\lambda) = \int_0^R r(1-r^2/R^2) J_0(\lambda r) dr = (r = Rt) = R^2 \int_0^1 t(1-t^2) J_0(\lambda Rt) dt.$$

Використаємо інтеграл вигляду [2]

$$\int_0^1 \rho(1-\rho^2) J_0(\gamma\rho) d\rho = -2 \frac{J_0(\gamma)}{\gamma^2} + J_1(\gamma) \left[ \frac{\gamma^2 + 4}{\gamma^3} - \frac{1}{\gamma} \right] = -2 \frac{J_0(\gamma)}{\gamma^2} + 4 \frac{J_1(\gamma)}{\gamma^3}.$$

Тоді

$$\tilde{s}\left(\frac{\lambda}{h}\right) = R^2 S\left(\lambda \frac{R}{h}\right), \quad \text{де } S(\gamma) = -2 \frac{J_0(\gamma)}{\gamma^2} + 4 \frac{J_1(\gamma)}{\gamma^3}.$$

Для цього випадку функція  $p_0$  визначається з рівняння

$$d^4 p_0 = \begin{cases} (1-r^2/R^2), & r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Розв'язок цього рівняння набуде вигляду

$$p_0 = \left(\frac{R}{h}\right)^4 f_2\left(\frac{r}{R}\right), \quad d^2 p_0 = \left(\frac{R}{h}\right)^2 f_1\left(\frac{r}{R}\right),$$

де

$$f_1(u) = \begin{cases} -\frac{u^4}{16} + \frac{u^2}{4} + \frac{1}{16}, & u \leq 1, \\ \frac{1}{4}(\ln u + 1), & u > 1, \end{cases} \quad f_2(u) = \begin{cases} -\frac{u^6}{576} + \frac{u^4}{64} + \frac{u^2}{64} - \frac{17}{576}, & u \leq 1, \\ \frac{1+3u^2}{48} \ln u, & u > 1. \end{cases}$$

Похідні, через які визначаються напруження, будуть

$$\partial_1^2 p_0 = \left(\frac{R}{h}\right)^4 \partial_1^2 f_2\left(\frac{r}{R}\right) = \left(\frac{R}{h}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_2\left(\frac{r}{R}\right) = \left(\frac{R}{h}\right)^2 \left[ f_{22}\left(\frac{r}{R}\right) \xi^2 + f_{21}\left(\frac{r}{R}\right) \right],$$

$$\partial_1^2 d^2 p_0 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_1\left(\frac{r}{R}\right) = f_{12}\left(\frac{r}{R}\right) \xi^2 + f_{11}\left(\frac{r}{R}\right),$$

де  $\xi = x/r$ ,

$$f_{21}(u) = \frac{f_2'(u)}{u} = \begin{cases} -\frac{u^4}{96} + \frac{u^2}{16} + \frac{1}{32}, & u \leq 1, \\ \frac{1}{8} \ln u + \frac{1}{48u^2} + \frac{1}{16}, & u > 1, \end{cases} \quad f_{22}(u) = \frac{1}{u} \left[ \frac{f_2'(u)}{u} \right]' = \begin{cases} -\frac{u^2}{24} + \frac{1}{8}, & u \leq 1, \\ \frac{1}{8u^2} - \frac{1}{24u^4}, & u > 1, \end{cases}$$

$$f_{11}(u) = \frac{f_1'(u)}{u} = \begin{cases} -\frac{u^2}{4} + \frac{1}{2}, & u \leq 1, \\ \frac{1}{4u^2}, & u > 1, \end{cases} \quad f_{12}(u) = \frac{1}{u} \left[ \frac{f_1'(u)}{u} \right]' = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & u \leq 1, \\ -\frac{1}{2u^4}, & u > 1. \end{cases}$$

На великих відстанях від прикладеного навантаження напруження можуть бути розраховані на основі наведених вище наближених співвідношень

$$\begin{aligned} \sigma_x^s &= \nu \partial_2^2 q_0, \quad \tau_{xy}^s = -\nu \partial_1 \partial_2 q_0, \\ \sigma_x^a &= -\partial_1^2 (A_1 p_0 + B_1 d^2 p_0) + 2\nu (A_0 d^2 p_0 + B_0 p), \\ \tau_{xy}^a &= -\partial_1 \partial_2 (A_1 p_0 + B_1 d^2 p_0). \end{aligned} \quad (12)$$

Тут при  $\zeta = 1$  маємо

$$A_0 = -\frac{3}{2}, \quad B_0 = 0.7, \quad A_1 = 3(1-\nu), \quad B_1 = -0.4 + 1.4\nu.$$

У випадку гладкого навантаження уточнені значення для напружень  $\sigma_x^s$  наведені в праці [5]

$$\sigma_x^s = \nu \partial_2^2 q_0 + \sigma_x^\Lambda, \quad (13)$$

де

$$\sigma_x^\Lambda = \frac{1}{3} (\partial_1^2 + \nu \partial_2^2) q.$$

Розглянемо також випадок, коли для даної задачі використовується технічна теорія згину плит, яка базується на гіпотезі Кірхгофа-Лява. Тоді напруження визначаються за формулою [11]

$$\sigma_x = -A_1 \partial_1^2 p_0 + 2\nu A_0 d^2 p_0 = -3(1-\nu) \partial_1^2 p_0 - 3\nu d^2 p_0 = -3(\partial_1^2 + \nu \partial_2^2) p_0. \quad (14)$$

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянуто випадок, коли пластина навантажена зусиллями на верхній межі пластини, причому

$$\sigma_z(x, y, h) = -q_0 s(r) + 0.5q_0 s(r_1) + 0.5q_0 s(r_2),$$

де  $q_0$  – максимальний тиск.

Тут функція  $s$  відмінною від нуля в трьох областях з центром в точках  $(-x_c, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(x_c, 0)$ .

Розрахунки виконано при  $x_c = 6h$  та різних значеннях радіусів областей навантаження. На рис. 1 наведено віднесені до максимального тиску напруження  $\sigma_x$  на

верхній межі пластини при  $y = 0, z = h$  (крива 1) та при  $y = 0$  (крива 2), коли  $R/h = 0.5$ .

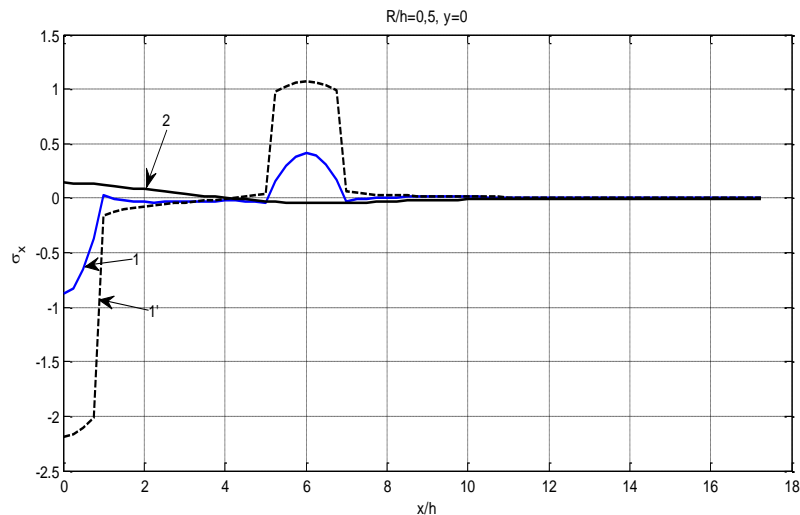


Рис. 1. Відносні напруження при  $R/h = 0.5$

Тут для порівняння кривою 1' наведено розраховані напруження при  $z = h$  на основі наближених співвідношень, які уточнюють теорію Кірхгофа-Лява.

Аналогічні результати розрахунків при  $R/h = 1, 2, 3$  наведено на рис. 2-4.

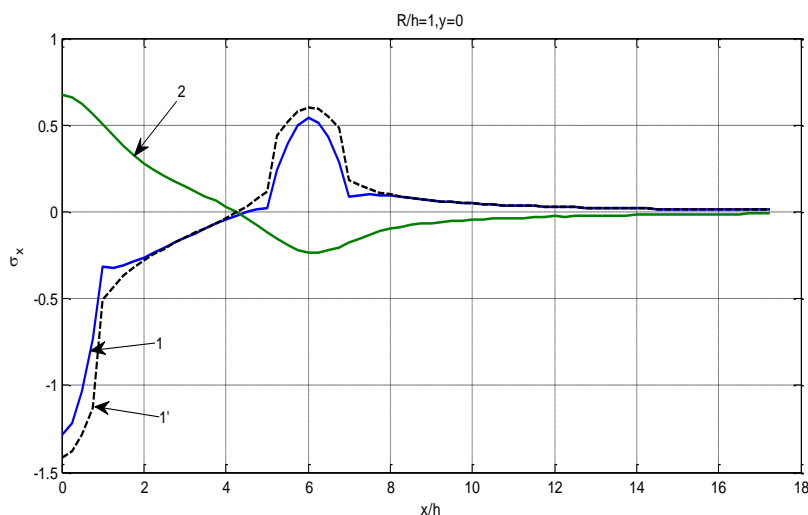


Рис. 2. Відносні напруження при  $R/h = 1$

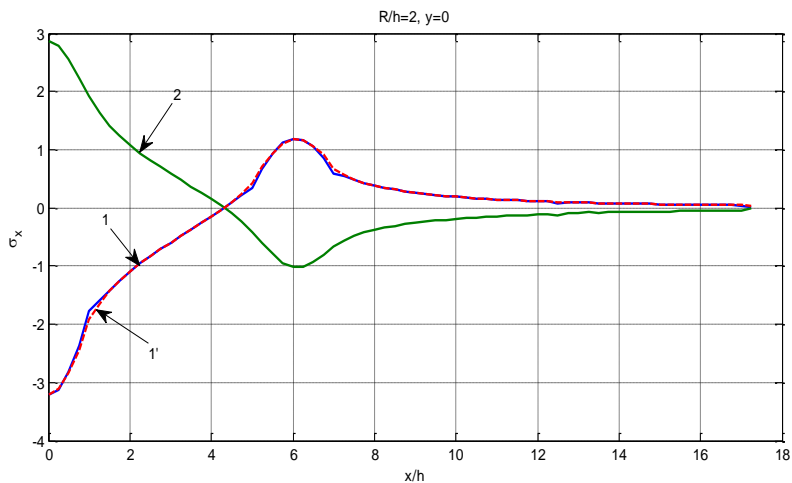


Рис. 3. Відносні напруження при  $R/h = 2$

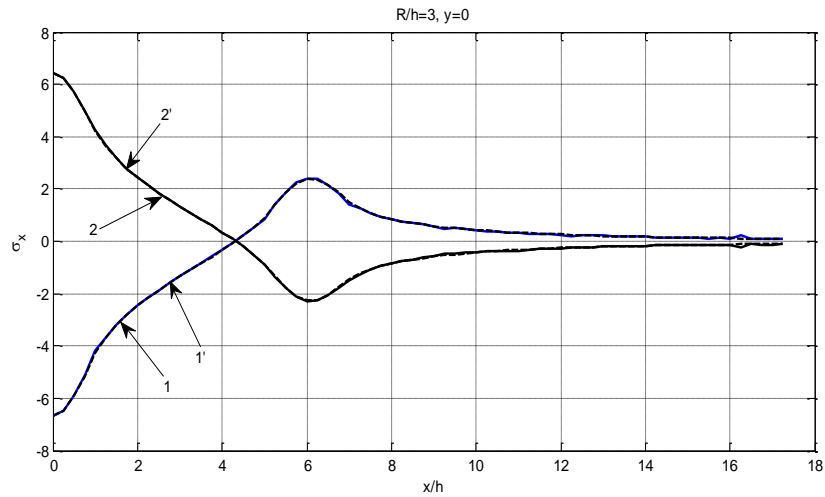


Рис. 4. Відносні напруження при  $R/h = 3$

Сумарне навантаження, яке прикладене до пластини буде  $Q_0 = 0.5\pi R^2 q_0$ . Віднесені до величини  $Q_0$  напруження наведено на рис. 5-9.

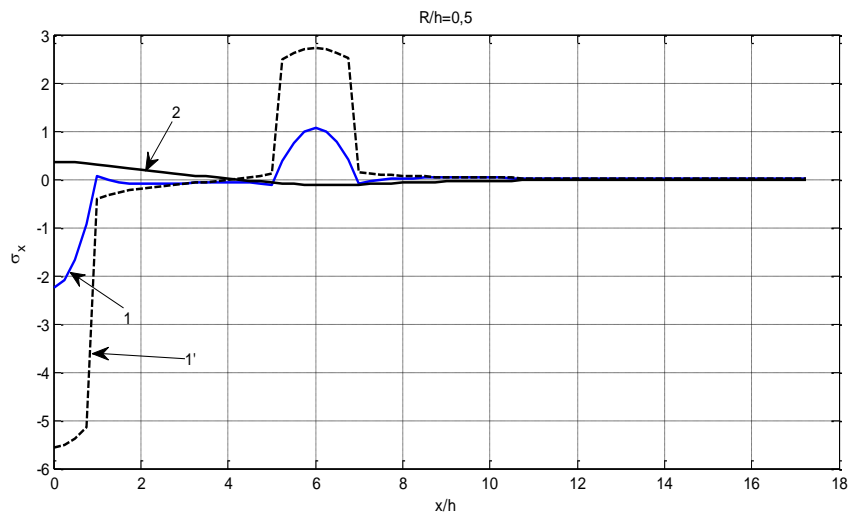


Рис. 5. Відносні напруження при  $R/h = 0.5$

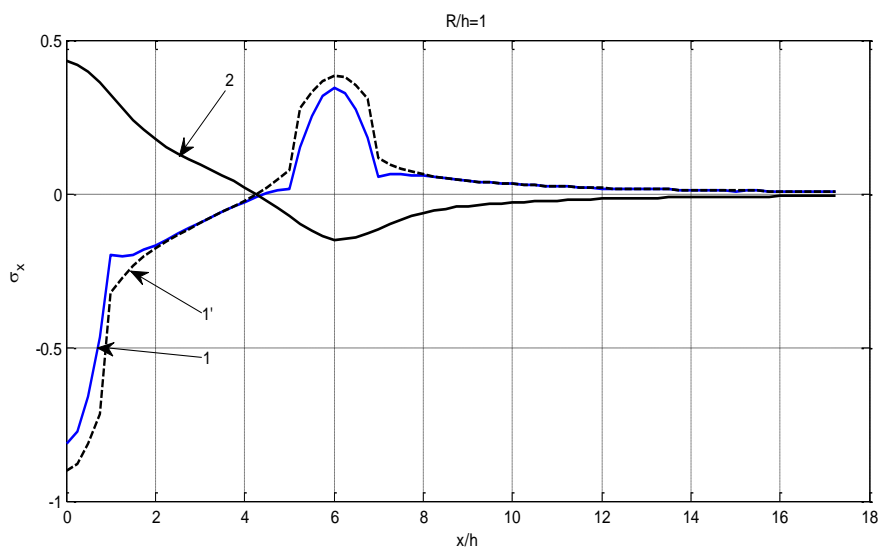
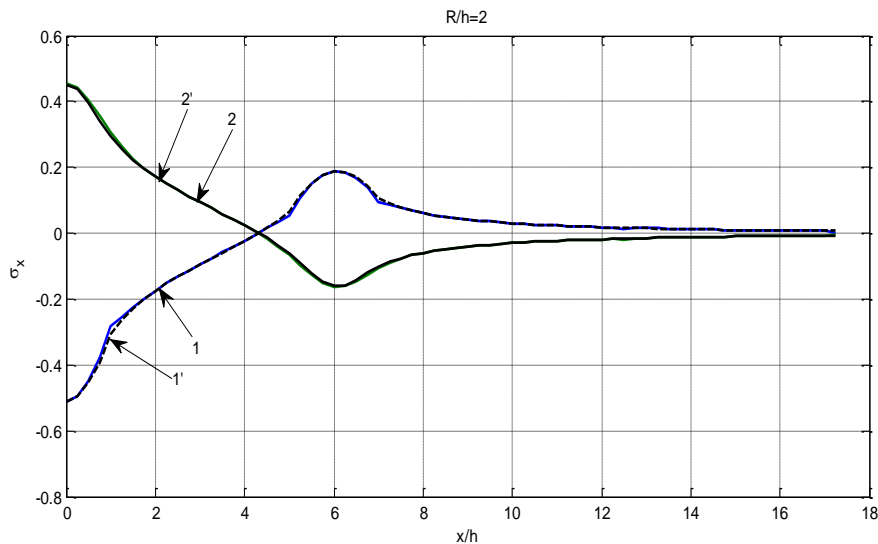
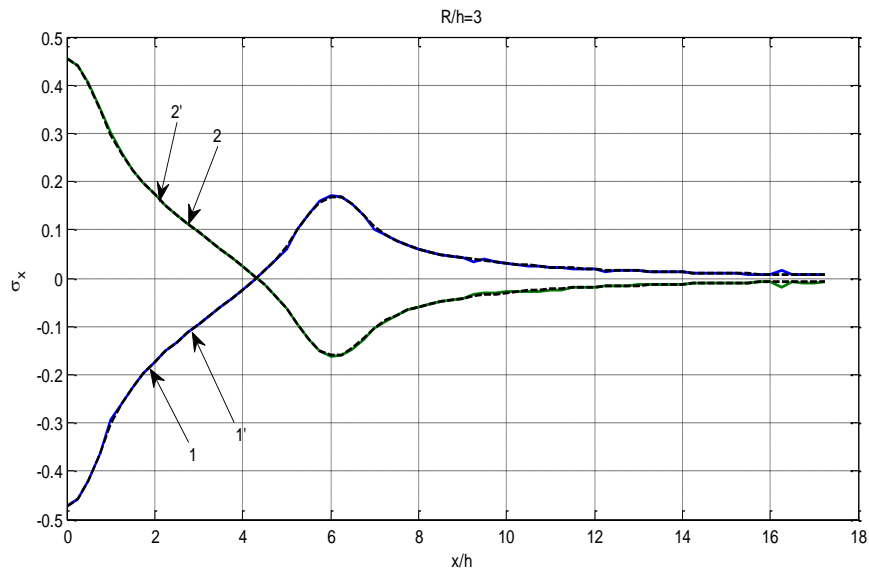


Рис. 6. Відносні напруження при  $R/h = 1$



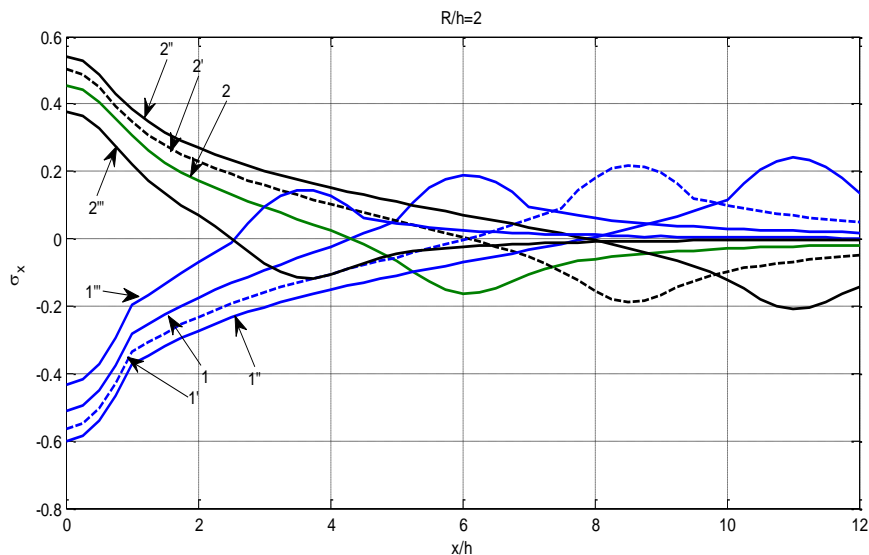
**Рис. 7.** Відносні напруження при  $R/h = 2$



**Рис. 8.** Відносні напруження при  $R/h = 3$

З рис. 5-8 видно, що максимальні напруження, які віднесені до величини повної сили для випадків, коли  $R/h > 1$  виявились близькими за величиною.

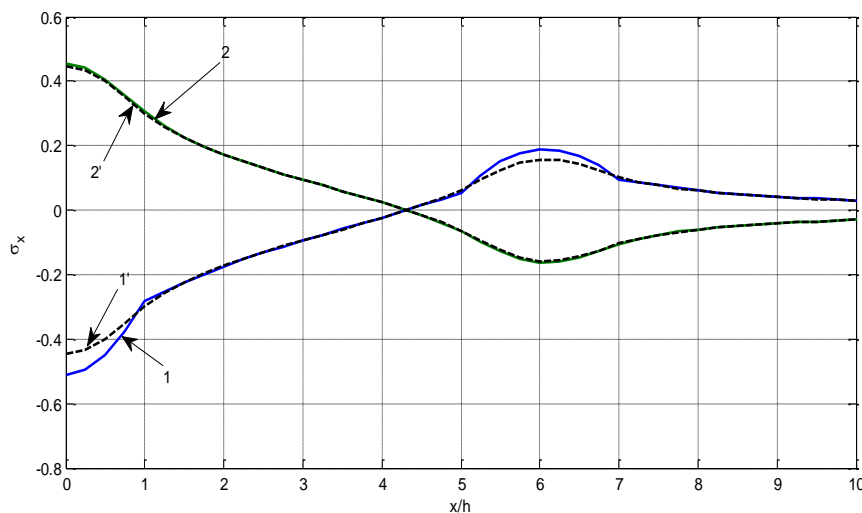
Виконано розрахунок напружень при різних відстанях між прикладеними областями дії зусиль. На рис. 9 кривим 1, 1', 1'', 1''' відповідають віднесені до  $Q_0$  напруження при  $z = h, x_c = 6h, 8.5h, 11h, 3.5h$  наведені результати розрахунків. Аналогічні дані для нижньої межі пластини ( $z = -h$ ) наведено на рис. 9 кривими 2.



**Рис. 9.** Розподіл відносних напружень залежно від відстані між прикладеними зусиллями

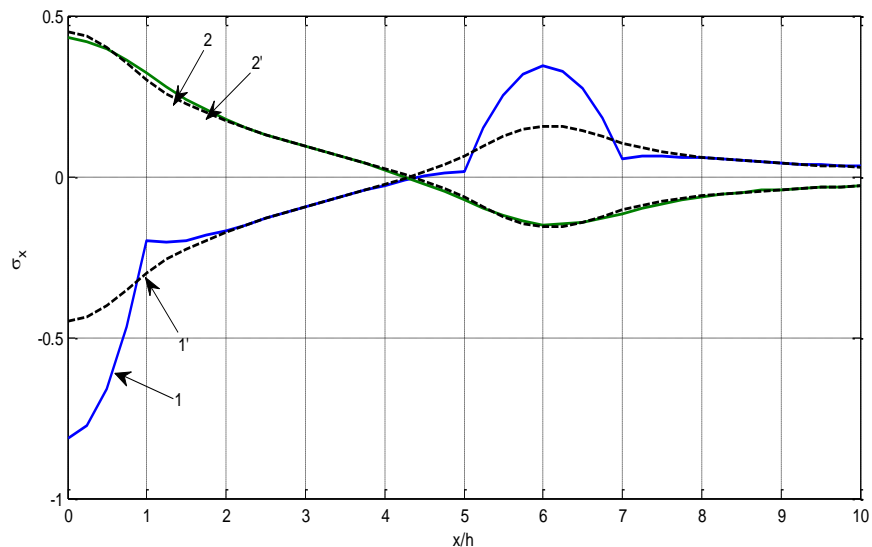
З рисунка видно, що при збільшенні відстані між прикладеними зусиллями максимальні напруження дещо зростають за величиною.

З наведених вище рисунків видно, що при  $R/h > 1$  напруження на обидвох межах можуть розраховуватись на основі спрощених наближених співвідношень. Виконано розрахунки за теорією Кірхгофа-Лява при  $R/h = 2$ , результати яких наведені на рис. 10 кривими 1', 2'.



**Рис. 10.** Порівняння результатів розрахунків за точною теорією та теорією Кірхгофа-Лява при  $R/h = 2$

Аналогічні результати розрахунків при  $R/h = 1$  зображено на рис. 11.

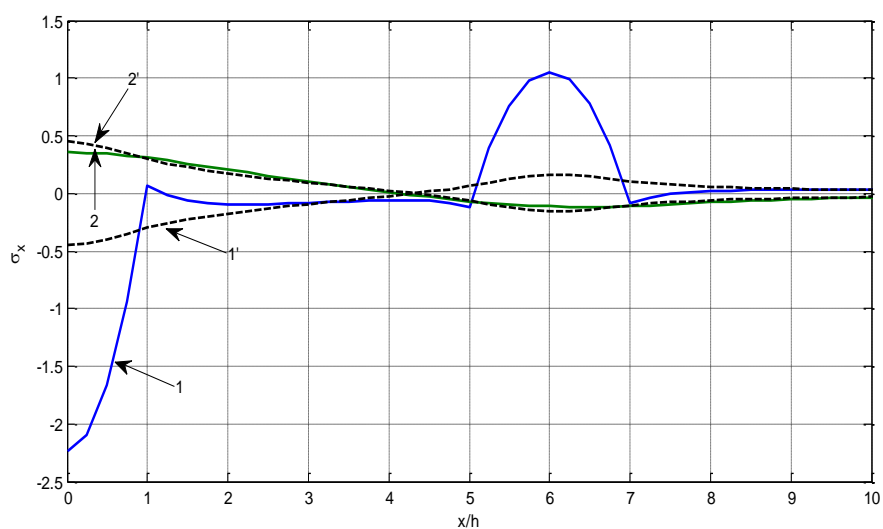


**Рис. 11.** Порівняння результатів розрахунків за точною теорією та теорією Кірхгофа-Лява при  $R/h = 1$

З рис. 10 видно, що напруження під прикладеним навантаженням (криві 1 і 1') дещо відрізняються між собою – максимальне відхилення досягає 14%. Однак ці напруження є стискувальними і для бетонних матеріалів вони не є основними. В той же час напруження на протилежній межі плити (при  $z = -h$ ), обчислені за теорією Кірхгофа-Лява виявились розтягувальними і водночас практично точними.

При  $R/h = 1$  розраховані за технічною теорією напруження під прикладеним навантаженням уже істотно відрізняються від точних (див. рис. 11), в той же час, як розраховані наближено розтягувальні напруження на протилежній межі плити виявились також практично точними.

Звідси випливає, що при розрахунках на міцність бетонних плит в околі опор основні для розрахунків розтягувальні напруження можуть бути визначені на основі технічної теорії плит і у випадку, коли навантаження прикладено локалізовано при  $R \geq h$ . Наведемо ще результати розрахунків при високолокалізованому навантаженні, коли  $R/h = 0,5$ .



**Рис. 12.** Порівняння результатів розрахунків за точною теорією та теорією Кірхгофа-Лява при  $R/h = 0,5$ .



Наведені на рис. 12 дані вказують, що і в цьому випадку для наближеного розрахунку розтягувальних напружень може бути використана технічна теорія згину.

Наведемо результати розрахунків напружень  $\sigma_x$  залежно від коефіцієнта Пуассона. На рис. 12 наведено відносні напруження при  $z = -h$  за значень  $\nu = 0; 0.2; 0.3; 0.5$ ,  $R/h = 2$ . Штриховими кривими наведено напруження, які розраховані за технічною теорією.

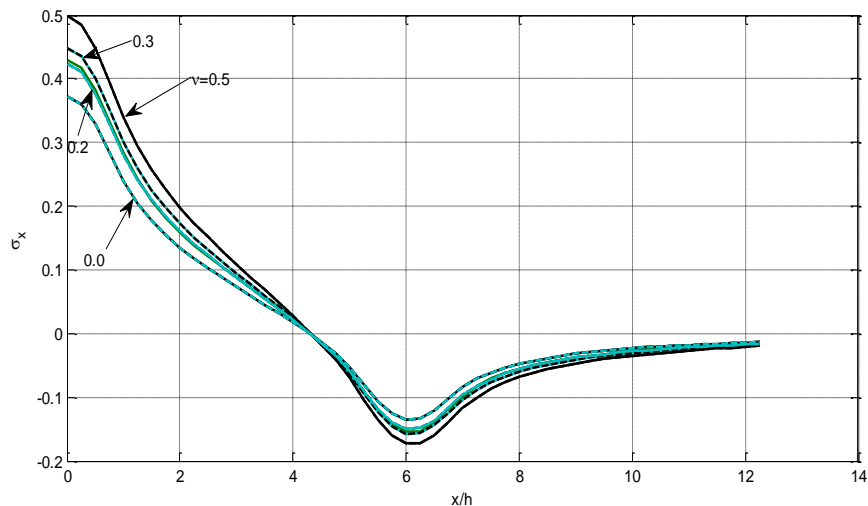


Рис. 13. Залежність напружень від коефіцієнта Пуассона

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Запропоновано два підходи до визначення напружень у плиті, яка перебуває під дією локалізованого навантаження. У першому – розв’язок записано у вигляді рядів, які експоненціально збігаються поза областю дії навантаження. У другому – розв’язок записано через швидкозбіжні інтеграли. Виконано дослідження напружень в шарі при дії зосереджених сил та від дії локалізовано розподіленого навантаження. Проведено порівняння результатів розрахунку напружень за тривимірною теорією пружності та на основі технічних теорій.

Встановлено випадки, коли напруження, які знайдені на основі елементарних формул, що отримані на основі рівнянь Кірхгофа-Лява з достатньою для практики точністю можуть бути застосовані в задачах згину плит. Зокрема встановлено, що визначені напруження на протилежній межі від прикладеного локально навантаження виявились розтягувальними і водночас практично точними, якщо область дії зусиль більша за товщину плити. При цьому знайдені напруження під прикладеним навантаженням обчислюються з більшими похибками. Однак ці напруження є стискувальними і для бетонних матеріалів вони не є основними.

Встановлено, що напруження істотно залежать від коефіцієнта Пуассона. Зокрема, при зростанні цього коефіцієнта максимальні напруження також зростають. Обчислені за технічною теорією розтягувальні напруження виявились також близькими до точних при всіх значеннях коефіцієнта Пуассона.

## 6 ВИСНОВКИ

Розроблено методику дослідження напружень у плитах, які перебувають під дією прикладених системи зосереджених сил і локально розподіленого навантаження. Для визначення напружень використано співвідношення тривимірної теорії пружності. З використанням символічного методу Лур'є та формул розкладу Ващенко-Захарченко розв'язок побудовано у вигляді рядів, які експоненціально збігаються у віддалених від прикладених сил точках. Побудовано також розв'язок задачі іншим методом з використанням інтегрального перетворення Ханкеля. Запропоновано підхід до знаходження особливих інтегралів, які виникають у задачах теорії пружності для плит. Наведено також співвідношення для визначення напружень у плитах на основі наближених рівнянь, які базуються на гіпотезах Кірхгофа-Лява. На основі отриманих співвідношень виконано розрахунки напружень у плиті, яка перебуває в умовах згину під дією системи само зрівноважених сил або під дією розподіленого навантаження.

## Література

1. Баженов В. А., Оробей В. Ф., Дашченко А. Ф., Коломиец Л. В. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов. Одесса: Астропринт, 2001. 285 с.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Наука, 1971. 1108 с.
3. Космодамианский А. С., Ложкин В. Н., Шалдырван В. А. Пространственная задача термоупругости для слоя, ослабленного цилиндрическими полостями. Доп. АН УССР. Сер. А, 1975. № 10. С. 914-918
4. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Москва: ГИТТЛ, 1955. 322 с.
5. Максимович В. Н. Напряженное состояние неравномерно нагретых, нагруженных по граничным поверхностям пластин. Изв. АН СССР, ПММ, 1979. Т. 43. Вып.6. С. 1065-1072.
6. Снеддон И. Преобразование Фурье. Москва: Изд-во иностр. лит, 1955. 668 с.
7. Тимошенко С. П. Пластинки і оболонки. Гостехиздат, 1948.
8. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1967. 402 с.
9. Albuquerque E. L., Sollero P., Venturini W. S., Aliabadi M. H. (2006). Boundary element analysis of anisotropic Kirchhoff plates. *International Journal of Solids and Structures*. 43(14-15). 4029-4046.
10. Cheng Z. Q., Reddy J. N. Octet formalism for Kirchhoff anisotropic plates. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 2022. 458. No. 2022. P. 1499-1517.
11. Hwu C. *Anisotropic elastic plates*. Springer Science. 2010.
12. Szilard R. *Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods*. John Wiley & Sons. 2004.
13. Ventsel E., Krauthammer T. *Thin plates and shells: theory: analysis, and applications* CRC press. 2001.

## References

1. Bazhenov, V. A., Orobei, V. F., Dashchenko, A. F., Kolomiets, L. V. *Konstruktsionnaya (2001). Stroytelnaia mekhanika. Spetsyalnyi kurs. Prynmenenye metoda hranychnykh elementov* [Structural mechanics. Special course. Applying the Boundary Element Method]. Odessa: Astroprint [in Russian].
2. Gradstein, I. S., Ryzhik, I. M. (1971). *Tablitsa integralov, sum, riadov i proizvedenii* [Table of integrals, sums, series and products]. Moskva: Science.[in Russian].
3. Kosmodamiansky, A. S., Lozhkin, V. N., Shaldyrvan, V. A. (1975). *Prostranstvennaia zadacha termouprugosti dlia sloya oslablennogo tsylindricheskimi polostiami* [Spatial problem of thermoelasticity for a layer weakened by cylindrical cavities]. *Reports AS Ukr. SSR.- Ser. A*. (10). 914-918. [in Russian].

4. Lurie, A. I. (1955). *Prostranstvennaya zadacha teorii uprugosti* [Spatial problems of the theory of elasticity]. M.: GITTL. [in Russian].
5. Maksimovich, V. N. (1979). Napriazhonnoie sostoyaniye neravnomerno nagretykh, nagruzhennykh po granichnym poverkhnostiam plastin [The stress state of unevenly heated plates loaded on the boundary surfaces]. *Reports. AS USSR. PMM.* 43(6). 1065-1072. [in Russian].
6. Sneddon, I. (1955). *Prevrashchenie Fyrie* [Fourier transform]. Moskva: Publ. House: Inostr. lit. [in Russian].
7. Tymoshenko, S. P. (1948). *Plastynky and obolonky* [Plates and Shells]. Moskva: Gostekhizdat. [in Ukrainian].
8. Ufland, J. S. (1967). *Integralnoie preobrazovanie v zadachakh teorii uprugosti* [Integral transformations in problems of the theory of elasticity]. Leningrad: Nauka. [in Russian].
9. Albuquerque, E. L., Sollero, P., Venturini, W. S., Aliabadi, M. H. (2006). Boundary element analysis of anisotropic Kirchhoff plates. *International Journal of Solids and Structures.* 43(14-15). 4029–4046.
10. Cheng, Z. Q., Reddy, J. N. (2002, June). Octet formalism for Kirchhoff anisotropic plates. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* 458(2022). 1499–1517.
11. Hwu, C. (2010). *Anisotropic elastic plates.* Springer Science
12. Szilard, R. (2004). *Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods.* John Wiley & Sons.
13. Ventsel, E., Krauthammer, T. (2001). *Thin plates and shells: theory: analysis, and applications.* CRC press.

**Соляр Тетяна Ярославівна**

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України  
к.ф.-м.н., старший науковий співробітник  
вул. Наукова, 36, Львів, Україна, 79060  
t\_solyar@ukr.net,  
ORCID: 0000-0003-3826-8881

**Соляр Ольга Ігорівна**

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України  
інженер  
вул. Наукова, 36, Львів, Україна, 79060  
solyarolya@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-7504-3756

*Для посилань:*

Соляр Т. Я., Соляр О. І. Визначення напружень у товстих плитах при локалізованих навантаженнях. Механіка та математичні методи, 2022. Т. 4. № 1. С. 45–63.

*For references:*

Solyar T., Solyar O. (2022). Determination of stresses in thick plates under localized loads. *Mechanics and Mathematical Methods.* 4 (1). 45–63

УДК 539.3

## ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕФОРМУВАННЯ БАГАТОШАРОВОЇ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОЇ ПЛИТИ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ ЗА БЕЗЗГИНОВОЮ УТОЧНЕНОЮ КОНТИНУАЛЬНОЮ МОДЕЛЛЮ

Гуртовий О. Г.<sup>1</sup>, Тинчук С. О.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Національний університет водного господарства та природокористування

**Анотація:** Високоточна оцінка напружено-деформованого стану (НДС) багатошарових плит на жорстких основах при дії стаціонарного поперечного навантаження є актуальною задачею, оскільки до неї зводяться розрахунки міцності та деформативності різного роду однорідних та багатошарових покриттів. Це розрахунок дорожнього одягу на відносно жорстких мостових конструкціях, або на недеформівному підстилаючому шарі чи захисних багатошарових покриттів плоских елементів конструкцій більшої жорсткості, ніж покриття, тощо. Об'єднання матеріалів з ізотропними та трансверсально-ізотропними фізичними характеристиками в багатошаровий пакет дозволяє створювати багатофункціональні конструкції. НДС таких конструкцій, зважаючи на їх структурну неоднорідність та відносно низьку поперечну жорсткість окремих шарів, суттєво пов'язаний з впливом деформацій поперечного зсуву та деформацій поперечного обтиснення. Тому актуальною є задача уточненого моделювання НДС плит, яка б враховувала ці види деформацій. Грунтуючись на розкладанні НДС плити на згинові та беззгинові складові, пропонується оптимізація розрахункової схеми деформування прямокутної багатошарової плити на жорсткій основі. Суть оптимізації полягає в розгляді такої розрахункової схеми плити, в якій НДС плити повністю описувався б лише одною складовою, а саме беззгиновою складовою НДС. Для цього замість реальної конструкції багатошарової плити, що деформується без відриву від основи, пропонується розглядати розрахункову схему плити, яка утворена симетричною добудовою відносно поверхні контакту даної плити з основою. У цьому випадку плита буде двосторонньо симетрично навантаженою відносно серединної поверхні плити, а товщина плити збільшиться вдвоє. НДС плити буде беззгиновим, що суттєво спрощує його моделювання. Для беззгинового НДС побудована в пружній постановці двовимірною, високого ступеня ітераційного наближення, але тривимірною за характером відображення НДС модель деформування багатошарових прямокутних плит на жорсткій основі з ізотропними та трансверсально-ізотропними шарами, яка достатньо повно враховує деформації поперечного зсуву та поперечного обтиснення при поперечному навантаженні плити. Виконано методом скінченних різниць розрахунки однорідних та двошарових трансверсально-ізотропних плит на жорсткій основі під дією рівномірно розподіленого по поверхні плити та локалізованого поперечних навантажень.

**Ключові слова:** багатошарова плита, жорстка основа, поперечний зсув, поперечне обтиснення, континуальна модель.

## INVESTIGATION DEFORMATION OF A MULTILAYERED TRANSVERSAL-ISOTROPIC PLATE ON A RIGID FOUNDATION BY UNFLEXURAL REFINED CONTINUAL MODEL

O. Gurtovyi<sup>1</sup>, S. Tynchuk<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National University of Water and Environmental Engineering

**Abstract:** The high-precision estimation of the stress-strain state (SSS) of multilayered plates on a rigid foundation under the action of stationary transverse loading is an urgent task. As its includes

the calculations of strength and deformability of various homogeneous and multilayer coatings. This is the calculation of road surface on relatively rigid bridge structures, or on a non-deformable underlying layer or calculation protective multilayer coatings of flat structural elements of greater rigidity than coatings, etc. The combining of materials with isotropic and transversal-isotropic physical characteristics into a multilayer package allows creating of the multifunctional designs. The SSS of such structures due to their structural heterogeneity and the relatively low transverse stiffness of the individual layers is significantly associated with the effect of transverse shear deformations and transverse compression deformations. Therefore, the problem of refined modelling of SSS of plates, which takes into account these types of deformations, is an urgent one. Based on the decomposition the SSS of plate into the flexural and unflexural components, it is proposed to optimize the design diagram of deformation a rectangular multilayer plate on a rigid foundation. The essence of optimization is to consider such a design diagram of the plate, in which the SSS of plate would be fully described by only one component, namely the unflexural component of SSS. To do this, instead of the actual design of the multilayer plate, which is deformed without separation from the foundation, it is suggested to consider the design diagram of the plate, which is formed by supplementing it with a symmetric one about the contact surface of the foundation. In this case, the plate will be symmetrically loaded with respect to the middle surface of the plate, and the thickness of the plate will double. The SSS of plate will be unflexural, which greatly simplifies its modeling. For unflexural SSS, a two-dimensional and high-degree iterative approximation but three-dimensional by the nature reflection of SSS, model of deformation of multilayer rectangular plates on a rigid foundation with isotropic and transverse-isotropic layers is constructed in an elastic formulation. This model takes full account deformations of transverse shear and of transverse compression at transverse loading of a plate. Calculations of homogeneous and two-layer transverse-isotropic plates on a rigid foundation under the action evenly distributed and localized transverse loads on the surface of a plate are performed by the finite difference method.

**Keywords:** a multilayered plate, a rigid foundation, transverse shear, transverse compression, continual model.

## 1 ВСТУП

Розробка і числова реалізація уточнених методик розрахунку анізотропних багатошарових плит на жорсткій основі є важливою задачею інженерних розрахунків дорожніх покриттів на недеформівних (скельних) основах, покриттів дорожнього полотна залізобетонних мостів, захисних багатофункціональних покриттів плоских конструкцій. І оскільки ці покриття можуть мати досить багато шарів, важливим являється розробка континуальних за характером розрахункових моделей, в яких порядок диференціювання розрахункових рівнянь не залежить від кількості шарів. Моделі деформування плит на жорсткій основі мають свою специфіку, оскільки в них переважає беззгинова складова НДС і важливу роль відіграють, окрім деформацій поперечного зсуву, також деформації поперечного обтиснення.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Ефекти обтиснення та поперечного зсуву в трансверсально-ізотропних плитах та пластинах на пружних основах та в контактних задачах для плит всесторонньо досліджувалась В. Г. Піскуновим та В. К. Присяжнюком, В. І. Шваб'юком, останнім, зокрема, в [1]. Показано, що врахування поперечного обтиснення суттєво уточнює НДС плит, а також усуває ті протиріччя в розподілі контактних зусиль, що характерні для чисто-зсувних теорій. Проте ними застосовувались згинові уточнені моделі пластин, а основи були недеформівними. Задачі деформування плит на жорсткій основі розглядалися в уточненій постановці О. Г. Гуртовим [2], а в тривимірній постановці О. В. Марчуком [3]. Останній підхід використано для розрахунку багатошарового дорожнього полотна моста О. В. Марчуком та Б. В. Гриневицьким [4]. Підходи для побудови уточнених моделей в тому числі ітераційних за своїм змістом, викладено в [5,6]. Проте ці моделі являються згиновими за своїм змістом. А при деформуванні плит на недеформівній основі переважає беззгинова компонента НДС. Тому актуальною є розробка та числова реалізація беззгинової уточненої моделі НДС багатошарових плит на жорстких основах, причому важливим фактором є її континуальна концепція.

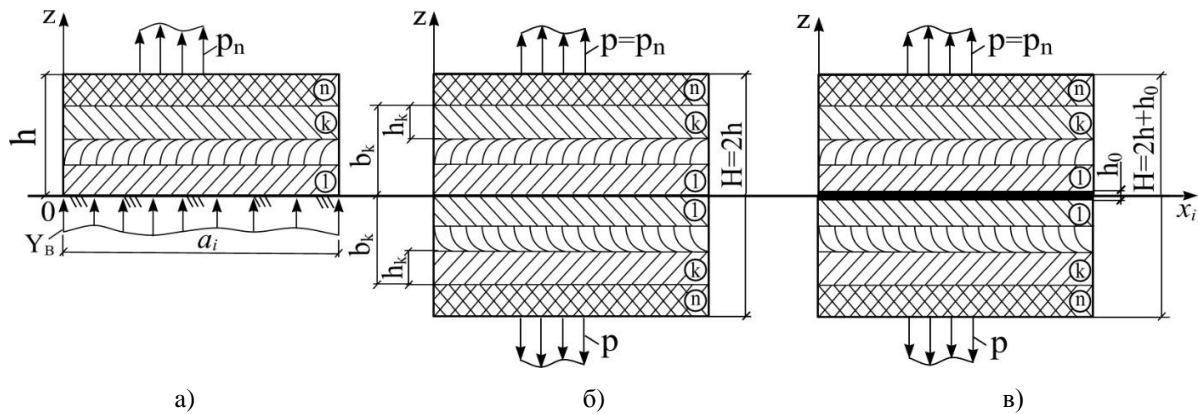
## 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою роботи є розробка уточненої моделі беззгинового НДС плит та її застосування для дослідження НДС багатошарових ізотропних та трансверсально-ізотропних плит, що опираються на жорсткі основи, за дії поперечних навантажень, зокрема локалізованого навантаження.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ґрунтуючись на розкладанні НДС плити на згинові та беззгинові складові, пропонується оптимізація розрахункової схеми деформування прямокутної багатошарової плити на жорсткій основі. Суть оптимізації полягає в розгляді такої розрахункової схеми плити, в якій НДС плити повністю описувався б лише одною складовою, а саме беззгиновою складовою НДС. Для цього замість реальної конструкції багатошарової плити (рис. 1, а), що деформується без відриву від основи, пропонується розглядати розрахункову схему плити, яка утворена симетричною добудовою відносно поверхні контакту даної плити з основою. У цьому випадку плита буде двосторонньо симетрично навантаженою відносно серединної поверхні плити, а товщина плити збільшиться вдвоє (рис. 1, б).





**Рис. 1.** Варіанти оптимізації розрахункової схеми плити:

- а) задана розрахункова схема; б) оптимізована розрахункова схема плити за умови ковзкого контакту з основою; в) оптимізована розрахункова схема плити за умови жорсткого контакту з основою

Розв'язання задачі з визначення НДС плити виконаємо наближено, зведенням тривимірної задачі до двовимірної. Застосуємо для цього метод гіпотез, зокрема континуальний підхід [5], задавши гіпотетично функції розподілу НДС за поперечною координатою  $z$ . Застосовуючи континуальне по товщині пластини моделювання, тангенціальні до поверхні  $x_1x_2$  складові вектору зміщень  $u_i^{(k)}(x_j, z)$  ( $i, j = \overline{1, 2}$ ) для  $k$ -го шару будемо шукати шляхом інтегрування по поперечній координаті  $z$  співвідношень Коші у вигляді [6, 7, 8, 9 та ін.]:

$$u_i^{(k)} = u_i - \int_{\delta_i}^z u_{3,i}^{(s)} dz + \int_{\delta_i}^z 2e_{i3}^{(s)} dz, \quad s = \overline{l_i, k}, \quad i, j = \overline{1, 2}, \quad (1)$$

де  $u_i(x_j)$  – невідомі функції тангенціальних зміщень на довільній поверхні  $z = \delta_i = const$  в шарі  $l_i$  ( $i, j = \overline{1, 2}$ );  $u_3^{(s)}(x_j, z)$  – нормальні до площини плити зміщення, а  $e_{i3}^{(s)}(x_j, z)$  – відносні поперечні дотичні деформації в довільній точці шару  $s$ , що задаються гіпотетично. Тут і далі диференціювання позначено нижнім індексом після коми. Застосовується також підсумовування за нижніми індексами, що повторюються.

Відносні деформації поперечного зсуву  $e_{i3}^{(k)}$  визначаємо із закону Гука, попередньо задавши гіпотези про характер розподілу по товщині плити поперечних дотичних напружень  $\sigma_{i3}^{(k)}$ .

Тоді вираз (1) має вигляд:

$$u_i^{(k)} = u_i - \int_{\delta_i}^z u_{3,i}^{(s)} dz + \int_{\delta_i}^z 4a_{i3i3}^{(s)} \sigma_{i3}^{(s)} dz \quad (2)$$

Нормальні зміщення  $u_3^{(k)}$  при поперечному навантаженні визначатимемо наближено із співвідношення [7, 8, 9 та ін.]

$$u_3^{(k)} = w(x_j) + \int_{\delta_w}^z a_{3333}^{(s)} \sigma_{33}^{(s)} dz; \quad s = \overline{l_3, k}, \quad (3)$$

де функція прогинів  $w(x_j)$  визначається в довільному шарі  $l_3$  на довільній поверхні  $z = \delta_w = const$ ;  $\sigma_{33}^{(s)}(x_j, z)$  – гіпотетично задана функція поперечних нормальних напружень в  $s$ -му шарі.



Залежність (3) отримано інтегруванням за координатою  $z$  співвідношення Коші  $e_{33} = u_{3,3}$ . Відмітимо, що у гіпотетичному представленні  $u_3^{(k)}$  за (3) нехтується ефектом Пуассона в залежності для  $e_{33}$  закону Гука, тобто приймається наближено  $e_{33} \approx a_{3333}\sigma_{33}$ .

Гіпотези для дотичних напружень  $\sigma_{i3}$  та для нормальних напружень  $\sigma_{33}$  в плиті значно простіше задавати, розглядаючи двостороннє симетричне беззгинове навантаження  $p(x_j)$ .

Оскільки у випадку жорсткої основи деформації основи відсутні, координатну поверхню  $x_1 0 x_2$  сумістимо з поверхнею контакту плити і основи (рис. 1, б). Тоді функція прогину на цій поверхні  $w(x_j) \equiv 0$  при  $z = \delta_w = 0$ , і отже  $w$  не увійде у вираз (3) для зміщень  $u_3^{(k)}$ , що спрощує залежності (2), (3).

В результаті замість співвідношення (3) для нормальних зміщень  $u_3^{(k)}$  отримаємо

$$u_3^{(k)} = \int_0^z a_{3333}^{(s)} \sigma_{33}^{(s)} dz, \quad s = \overline{l_3, k}. \quad (4)$$

В оптимізованій схемі відпадає потреба у визначенні функції відпору основи  $Y_B$  як шуканої невідомої функції. Симетрична складова функції навантаження  $p$  не залежить від відпору основи  $Y_B$  і становить

$$p = p_n, \quad (5)$$

а відпір основи  $Y_B(x_i)$  буде визначено як напруження  $\sigma_{33}(x_i, 0)$  на поверхні  $z = 0$ .

У розрахунковій схемі з рис. 1, б на поверхні контакту плити з основою  $z = 0$  моделюється ковзкий контакт без тертя ( $\sigma_{i3} = 0$ ) та без відриву плити від основи. Граничні умови контакту для всіх трьох компонентів вектора зміщень  $u_\alpha$  та для напруження  $\sigma_{\alpha\beta}$  мають на поверхні  $z = 0$  вигляд:

$$u_3^{(1)} = 0; \quad u_i^{(1)} \neq 0; \quad \sigma_{i3}^{(1)} = 0 \quad (\text{при } z = 0). \quad (6)$$

Для моделювання жорсткого контакту плити з основою в розрахунковій схемі (рис. 1, в) всередині плити потрібно додатково вводити відносно тонкий, у порівнянні з іншими шарами, товщиною  $h_0$  „абсолютно” жорсткий прошарок, позначений  $k = 0$ . „Абсолютна” жорсткість прошарку (відносно жорсткості інших шарів) забезпечується прийняттям відносно великих модулів пружності  $E^{(0)} = E'^{(0)} = nE$ ;  $G^{(0)} = G'^{(0)} = nG$ ;  $\nu = \nu' \equiv 0$ , де  $n \approx 10^3$ , а  $E$  і  $G$  – найбільші значення модулів пружності та зсуву із усіх наявних для матеріалу шарів плити, що розглядається. У цьому випадку граничні умови при  $z = \pm h_0 / 2$  матимуть вигляд:

$$u_3^{(1)} = 0; \quad u_i^{(1)} = 0; \quad \sigma_{i3}^{(1)} \neq 0 \quad (\text{при } z = \pm h_0 / 2), \quad (7)$$

хоча на поверхні  $z = 0$  залишаються справедливими умови (6), проте  $u_i^{(1)} \rightarrow 0$  внаслідок відносно великої жорсткості прошарку.

Між шарами плити виконуються умови жорсткого контакту без проковзування. Проте, вводячи додаткові відносно тонкі прошарки заданої малої відносно жорсткості, можна без змін у постановці задачі розглядати також інші умови контакту між шарами, моделюючи ефекти проковзування без тертя, ковзання з тертям, розшарування, тощо.

При розгляді беззгинового НДС оптимізованої (рис. 1, б, в) двосторонньо обтиснутої поперечним симетричним заданим навантаженням  $p(x_i) = p_n(x_i)$  багат шарової плити для отримання НДС обов'язковим є врахування поперечного обтиснення ( $e_{33} \neq 0$ ), оскільки інакше отримуємо тривіально-нульовий розв'язок задачі. Тому прийємо гіпотези для поперечних нормальних напружень  $\sigma_{33}^{(k)}$  і напружень поперечного зсуву  $\sigma_{i3}^{(k)}$  у вигляді, запропонованому в роботі [7], як перше наближення беззгинового НДС:

$$\sigma_{i3}^{(k)} = f_i^{(k)}(z)\beta_i(x_j); \quad \sigma_{33}^{(k)} = f_3^{(k)}(z)\beta_3(x_j) + p, \quad (8)$$

і які задовольняють умовам жорсткого контакту шарів та умовам на зовнішніх поверхнях для цих напружень.

Тут  $\beta_\alpha(x_j)$  – невідомі функції зміщень (функції поперечного зсуву та поперечного обтиснення);  $f_\alpha^{(k)}(z)$  – обґрунтовано задані степеневі апроксимації по  $z$ , що моделюють самозрівноважений по товщині плити розподіл напруження  $\sigma_{i3}^{(k)}$  та симетричний відносно  $z = 0$  розподіл напружень  $\sigma_{33}^{(k)}$ .

Із рівнянь рівноваги  $\sigma_{\alpha 3, \alpha}^{(k)} = 0$  ( $\alpha = \overline{1, 3}$ ) випливає, що порядок апроксимації напружень поперечного обтиснення  $\sigma_{33}^{(k)}$  повинен бути на одиницю більшим, ніж  $\sigma_{i3}^{(k)}$ .

Функції розподілу напружень по висоті плити запишемо у вигляді [7]:

$$f_i^{(k)} = \int_{-b_n}^z A_{iiii}^{(s)} [f_0^{(s)}(z) - c_0 z + c_0 \theta_i - d_i / b_i] dz;$$

$$f_3^{(k)} = \int_{-b_n}^z (f_1^{(s)} + f_2^{(s)}) dz; \quad s = \overline{1, k}, \quad (9)$$

де функція  $f_0^{(s)}(z)$  в (9) має вигляд:

$$f_0^{(s)}(z) = R_0 \int_{-b_n}^z \int_{-b_n}^z a_{3333}^{(r)} dz^2; \quad R_0 = H / \int_{-b_n}^{b_n} a_{3333}^{(k)} dz; \quad r = \overline{1, s}; \quad k = \overline{1, n},$$

а коефіцієнти в (9) мають вигляд:

$$b_i = \int_{-b_n}^{b_n} A_{iiii}^{(t)} dz; \quad d_i = \int_{-b_n}^{b_n} A_{iiii}^{(t)} f_0^{(t)} dz; \quad \theta_i = \int_{-b_n}^{b_n} A_{iiii}^{(t)} z dz / b_i; \quad t = \overline{1, n};$$

$$c_{0i} = \frac{\int_{-b_n}^{b_n} \int_{-b_n}^z A_{iiii}^{(t)} (f_0^{(t)} - d_i / b_i) dz^2}{\int_{-b_n}^{b_n} \int_{-b_n}^z A_{iiii}^{(t)} (z - \theta_j) dz^2},$$

та задовольняють умовам  $f_\alpha^{(n)}(z = \pm H / 2) = 0$ .

Причому  $A_{mlkp}^{(k)}$  і  $a_{mlkp}^{(k)}$  – коефіцієнти закону Гука;  $z = b_n$  – координата точок на верхній поверхні шару  $n$  ( $b_n = H / 2$ ), а  $z = -b_n$  – координата точок на нижній поверхні симетрично добудованої плити.

Функції  $f_\alpha^{(k)}$  отримані процедурою послідовних уточнень, за якою при початкових гіпотезах  $\sigma_{i3}^{(k)}(x_i, z) = 0$ ,  $\sigma_{33}^{(k)}(x_i, z) = p$  за (2) визначались функції зміщень  $u_3^{(k)}$ ,  $u_i^{(k)}$ , а далі із співвідношень Коші – деформацій  $e_{\alpha\beta}$ . За цими деформаціями із закону Гука знаходились вирази для напружень  $\sigma_{ij}^{(k)}(i, j = \overline{1, 2})$ . Вирази для напружень  $\sigma_{ij}^{(k)}$  підставлялись в рівняння рівноваги  $\sigma_{i\alpha, \alpha}^{(k)} = 0$ , із яких інтегруванням за поперечною координатою  $z$  знаходились уточнені вирази поперечних дотичних напружень  $\sigma_{i3}^{(k)}$ . Підстановка уточнених  $\sigma_{i3}^{(k)}$  в третє рівняння рівноваги  $\sigma_{\alpha 3, \alpha}^{(k)} = 0$  та інтегрування його за  $z$  дозволило знайти уточнені вирази для поперечних нормальних напружень  $\sigma_{33}^{(k)}$ .

Відмітимо, що різні процедури послідовних уточнень для отримання некласичних континуальних моделей НДС пластин застосовувалась також в роботах [6, 10, 11 та ін.], однак у цих роботах використовувались інші початкові гіпотези.

Функції вищих наближень записуються у вигляді:

$$\begin{aligned}
 f_{i(\omega+1)}^{(k)} &= \int_{-b_n}^z A_{iii}^{(r)} \int_0^z a_{i3i3}^{(s)} f_{i\omega}^{(k)} dz^2 - \phi_i^{(k)} \int_{-b_n}^{b_n} A_{iii}^{(l)} \int_0^z a_{i3i3}^{(p)} f_{i\omega}^{(p)} dz^2; \quad \omega = \overline{1, 3}; \\
 \phi_i^{(k)} &= \int_{-b_n}^z A_{iii}^{(r)} dz \Big/ \int_{-b_n}^{b_n} A_{iii}^{(l)} dz; \quad k, l = \overline{1, n}; \quad r = \overline{1, k}; \quad s = \overline{1, r}; \quad p = \overline{1, l}; \\
 f_t^{(k)} &= \int_{-b_n}^z (f_{1t}^{(r)} + f_{2t}^{(r)}) dz; \quad t = \overline{1, 2}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Підставивши уточнені вирази для напружень в рівняння (4) та (2), отримаємо, з врахуванням закону Гука, нормальні  $u_3^{(k)}$  і тангенціальні  $u_i^{(k)}$  компоненти вектора зміщень по відношенню до координатної (серединної) поверхні  $x_1 0 x_2$  (рис. 1) для випадку безгинового деформування плити. При цьому компоненти зміщень представлені сумами добутків гіпотетично заданих степеневих функцій  $\psi_{3t}^{(k)}$ ,  $\psi_{ir}^{(k)}$  поперечної координати  $z$  та шуканих функцій  $\gamma_t$ ,  $\beta_{ir}$  і  $v_i$  координатної поверхні  $x_1 0 x_2$ .

Таким чином, компоненти зміщень в кінематичній моделі мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(k)} &= \psi_{3t,3}^{(k)}(z) \gamma_t + \psi_{33,3}^{(k)}(z) p; \quad t = \overline{1, 2}; \\
 u_i^{(k)} &= v_i - \psi_{3t}^{(k)}(z) \gamma_{t,i} - \psi_{33}^{(k)}(z) p_{,i} - \psi_{ir}^{(k)}(z) \beta_{ir}; \quad r = \overline{1, 4}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Отже, тривимірна задача НДС зведена до уточненої двовимірної задачі НДС з шуканими функціями двох координат  $x_1, x_2$ .

Для підвищення точності апроксимації безгинового НДС у модель (11) включені запропоновані в [7, 12] функції, що моделюють ефекти від поперечних зсувних деформацій та від деформацій поперечного обтиснення у вищих наближеннях. Ці апроксимуючі за координатою  $z$  функції мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \psi_{3t,3}^{(k)} &= \int_0^z a_{3333}^{(s)} f_t^{(s)} dz; \quad \psi_{33,3}^{(k)} = \int_0^z a_{3333}^{(s)} dz; \\
 \psi_{ir}^{(k)} &= - \int_0^z a_{i3i3}^{(s)} f_{ir}^{(s)} dz; \quad \psi_{3l}^{(k)} = \int_0^z \psi_{3l,3}^{(s)} dz; \quad s = \overline{1, k}; \quad l = \overline{1, 3}.
 \end{aligned}$$

Функції  $[\psi_{3l,3}] = a_l^{(k)} z^{2l+1}$  – непарного степеня  $z$ , а функції  $[\psi_{3l}; \psi_{ir}] = a_l^{(k)} z^{2l}$  – парного степеня  $z$ .

За варіаційним принципом Лагранжа отримано розрахункові рівняння в узагальнених зусиллях з відповідними граничними умовами, а також диференціальні розрахункові рівняння у відносно функцій зміщень. Система має вигляд:

$$[L] \cdot [u] = [p], \quad (12)$$

де  $[u]$  – матриця шуканих функцій, яка має вигляд

$$[u] = [v_1, v_2, \gamma_t, \beta_{1r}, \beta_{2r}]^T,$$

$[L]$  – матриця диференціальних операторів,

$[p]$  – матриця, що враховує задане зовнішнє навантаження  $p$  і має вигляд

$$[p] = [p_{v_1}, p_{v_2}, p_{\gamma_t}, p_{\beta_{1r}}, p_{\beta_{2r}}]^T \cdot p.$$

Оскільки модель континуальна, загальний порядок диференціювання розрахункової системи рівнянь не залежить від кількості шарів в плиті, а залежить лише від ступеня застосованого для розв'язання задачі наближення в гіпотезах поперечного зсуву та поперечного наближення.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розрахункова система рівнянь (12) реалізована методом скінченних різниць.

Досліджувався при циліндричному деформуванні вплив на НДС трансверсально-ізотропних плит характеру навантаження на прикладі плит на жорсткій основі при жорсткому защемленні країв (табл. 1). Розглянуто два випадки прикладання рівномірно розподіленого навантаження: 1 – по всій дожині плити; 2 – на половині довжини посередині плити. Контакт плит з жорсткою основою – ковзкий, а на краях плита є жорстко защемленою. У варіантах 1, 2 (табл. 1) розглянуто одношарову трансверсально-ізотропну плиту з  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $E' = 2 \cdot 10^4$  МПа ( $E/E' = 10$ );  $\nu = 0,25$ ;  $\nu' = 0,01$ . Для схем 4, 5 – двохшарову плиту з трансверсально-ізотропними шарами ( $(E^{(k)}/E'^{(k)} = 10)$ ) однакової товщини  $h_1 = h_2 = 0,5h$  з пружними характеристиками:  $E^{(1)} = 1 \cdot 10^4$  МПа;  $E^{(2)} = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,25$ ;  $\nu'^{(1)} = \nu'^{(2)} = 0,01$ . В розрахунку застосовано розрахункові схеми плит, що симетрично побудовані відносно поверхні контакту з основою ( $a/h = 4$ ;  $a/H = 2$ ). Застосовано модель другого ітераційного наближення.

**Таблиця 1**

Зміщення і напруження в плитах ( $a/h = 4$ ) з жорстко защемленими краями за ковзкого контакту з основою

Варіанти схем плит та навантаження	$z/h$	$u_3^\#$		$u_1^\#$	Епюри $\sigma_{11}^\#$
		$x = a/2$	$x = a/4$	$x = a/4$	$x = a/2$
1	2	3	4	5	6
	1,0	9,52	7,08	-1,31	
	0,5	5,02	2,68	0,32	
	0	0	0	0,85	
	1,0	8,33	4,48	-1,67	
	0,5	3,60	1,98	0,40	
	0	0	0	0,72	
	1,0	39,05	23,82	-6,23	
	0,5	35,60	20,24	5,64	
	0	0	0	7,41	
	1,0	32,85	17,64	-5,71	
	0,5	29,40	15,59	4,90	
	0	0	0	5,86	

Показано (табл. 1), що в однорідній плиті при дискретному навантаженні (варіант 2) відносні поперечні зміщення  $u_3^\# = u_3 E / p h$  зменшуються порівняно з варіантом 1. У двохшаровій плиті, за наявності слабшого нижнього шару (варіанти 5 і 6), відносні зміщення  $u_\alpha^\# = u_\alpha E^{(2)} / p h$  збільшуються в п'ять разів та майже в десять разів збільшуються відносні напруження  $\sigma_{11}^\# = \sigma_{11} / p$  у порівнянні з НДС однорідної плити.

## 6 ВИСНОВКИ

Побудовано варіант уточненої структурно-континуальної моделі з гіпотезами ітераційного типу та реалізовано методику високоточного розрахунку в пружній постановці НДС поперечно навантажених багатошарових прямокутних товстих плит на жорсткій основі з ізотропними та трансверсально-ізотропними шарами. Модель беззгинового НДС враховує деформації поперечного зсуву та поперечного обтиснення. З варіаційного принципу Лагранжа отримано систему розрахункових рівнянь.

Встановлено певні особливості НДС: в трансверсально-ізотропній плиті напруження  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  локалізуються біля навантаженої верхньої поверхні плити, тоді як в ізотропних плитах  $\sigma_{ii}$  по висоті перерізу плити розподіляються рівномірніше. Із зростанням співвідношення  $E/E'$  локалізація і абсолютні значення  $\sigma_{11}$  зростають, що може призвести до руйнування поверхні плити.

При стиску плити і ковзкому контакті з основою в плиті біля основи з'являються напруження розтягу, що може бути небезпечним для плити або шару з крихкого матеріалу.

## Література

1. Шваб'юк В. І., Ротко С. В., Бондарський О. Г., Шваб'юк В. В. Уточнений розрахунок композитних плит на пружних основах за дії локальних навантажень. В зб.: Механіка та математичні методи. Одеса: ОДАБА, 2019. №1. С. 35–45.
2. Гуртовий А. Г. Контактная задача для анизотропной слоистой плиты с упругим и с абсолютно жестким основаниями. В зб.: Теоретическая и прикладная механика. Харьков: «Основа», 2002. Вып. 35. С. 163–169.
3. Марчук А. В. Применение вариационного подхода для исследования напряженно-деформированного состояния слоистых пластин на жестком основании в трехмерной постановке. Проблемы прочности, 1997. № 6. С. 86–94.
4. Марчук О. В. Гриневецкий Б. В. Розрахунок напружень у шаруватому дорожньому одязі плитно-ребристого моста. Автомобільні дороги і дорожнє будівництво: Міжвідомчий наук.-техн. збірник. К.: НТУ, 2001. Вип.62. С. 211–215.
5. Пискунов В. Г., Рассказов А. О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек. Прикладная механика, 2002. Т. 38. № 2. С. 22–57.
6. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1987. 360 с.
7. Гуртовий А. Г. Высокоточное моделирование деформирования слоистых структур. Механика композит. Материалов, 1999. Т. 35. № 1. С. 13–28.
8. Гуртовий А. Г., Пискунов В. Г. Новые расчетные модели и сравнение приближенных уточненных с точными трехмерными решениями задач изгиба слоистых анизотропных пластин. Механика композит. Материалов, 1988. № 1. С. 23–29.
9. Пискунов В. Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем. Механика композитных материалов, 2003. Т. 39 № 1. С. 3–24.
10. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
11. Пискунов В. Г., Вериженко В. Е., Присяжнюк В. К., Сипетов В. С., Карпиловский В. С. Расчет неоднородных оболочек и пластин методом конечных элементов. К.: Вища школа, 1987. 200 с.
12. Гуртовий А. Г. Континуальные аппроксимации перемещений в толстых слоистых пластинах при разделении термомеханических нагрузок на двухсторонние симметрические и косо-симметрические составляющие. Механика композит. Материалов, 1999. Т. 35. № 6. С. 743–756.

## References

1. Schwabyuk, V. I., Rotko, S. V., Bondarsky, O. G., Schwabyuk, V. V. (2019). Utochnenyi rozrakhunok kompozytnykh plyt na pruzhnykh osnovakh za diyi lokal'nykh navantazhen [Refined calculation of composite slabs on elastic foundations under the action of local loads]. *Mekhanika ta matematychni metody*. Odessa: ODABA. 1. 35-45. [in Ukraine].
2. Gurtovyi, A. G. (2002). Kontaktnaya zadacha dlya anizotropnoy sloistoy plity s uprugim i s absolutno zhestkim osnovaniyami [Contact problem for an anisotropic layered plate with elastic and absolutely rigid foundations]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*. Kharkov: "Osnova". 35. 163–169. [in Russian].
3. Marchuk, A. V. (1997). Primeneniye variatsionnogo podkhoda dlya issledovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya sloistykh plastin na zhestkom osnovanii v trekhmernoy postanovke



- [Application of the variational approach for the study of the stress-strain state of layered plates on a rigid foundation in a three-dimensional setting]. *Problemy prochnosti*. 6. 86–94. [in Russian].
4. Marchuk, O. V. Hrynevitsky, O. V. (2001). Rozrakhunok napruzhen u sharuvatomu dorozhn'omu odyazi plytno-rebrystoho mosta [Calculation of stresses in the layered road clothes of the slab-ribbed bridge] *Avtomobil'ni dorohy i dorozhnye budivnytstvo: Mizhvidomchyy nauk.-tekhn. zbirnyk*. Kyiv: NTU. 62. 211–215. [in Ukraine].
  5. Piskunov, V. G., Rasskazov, A. O. (2002). Razvitiye teorii sloistyykh plastin i obolochek [Development of the theory of layered plates and shells]. *Prikladnaya mekhanika*. 38(2). 22–57. [in Russian].
  6. Ambartsumyan, S. A. (1987). *Teoriya anizotropnykh plastin. Prochnost', ustoychivost' i kolebaniya* [Theory of anisotropic plates. Strength, stability and fluctuations]. 2nd ed., revised and add. Moskva: Nauka. [in Russian].
  7. Gurtovy, A. G. (1999). Vysokotochnoye modelirovaniye deformirovaniya sloistyykh struktur [High-precision modeling of deformation of layered structures]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 35(1). 13–28. [in Russian].
  8. Gurtovyi, A. G., Piskunov, V. G. (1988). Novyye raschetnyye modeli i sravneniye priblizhennykh utochnennykh s tochnymi trekhmernymi resheniyami zadach izgiba sloistyykh anizotropnykh plastin [New computational models and comparison of approximate refinement problems of bending of layered anisotropic plates with exact three-dimensional solutions]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 1. 23–29. [in Russian].
  9. Piskunov, V. G. (2003). Iteratsionnaya analiticheskaya teoriya v mekhanike sloistyykh kompozitnykh sistem [Iterative analytical theory in the mechanics of layered composite systems]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 39(1). 3–24. [in Russian].
  10. Ambartsumyan, S. A. (1974). *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek* [General theory of anisotropic shells]. Moskva: Nauka. [in Russian].
  11. Piskunov, V. G. Verizhenko, V. E., Prisyazhnyuk, V. K., Sipetov, B. C., Karpilovsky, B. C. (1987). *Raschet neodnorodnykh obolochek i plastin metodom konechnykh elementov* [Calculation of inhomogeneous shells and plates by the finite element method]. Kyiv: Higher school. [in Russian].
  12. Gurtovyi, A. G. (1999). Kontinual'nyye approksimatsii peremeshcheniy v tolstykh sloistyykh plastinakh pri razdelenii termomekhanicheskikh nagruzok na dvukhstoronniye simmetricheskiye i kososimmetricheskiye sostavlyayushchiye [Continuous approximations of displacements in thick layered plates during the separation of thermomechanical loads into bilateral symmetric and obliquely symmetric components]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 35(6). 743–756. [in Russian].

**Гуртовий Олексій Григорович**

Національний університет водного господарства та природокористування  
к.т.н., доцент  
Вул. Соборна, 11, Рівне, Україна, 33028  
o.g.gurtovyi@nuwm.edu.ua  
ORCID 0000-0002-2651-948X

**Тинчук Сергій Олександрович**

Національний університет водного господарства та природокористування  
к.т.н., доцент  
Вул. Соборна, 11, Рівне, Україна, 33028  
s.o.tynchuk@nuwm.edu.ua  
ORCID 0000-0002-1763-8620

*Для посилань:*

Гуртовий О. Г., Тинчук С. О. Дослідження деформування багатoshарової трансверсально-ізотропної плити на жорсткій основі за безгиновою уточненою континуальною моделлю. *Механіка та математичні методи*, 2022. Т. 4. №. 1. С. 64–74.

*For references:*

Gurtovyi O., Tynchuk S. (2022). Investigation deformation of a multilayered transversal-isotropic plate on a rigid foundation by unflexural refined continual model. *Mechanics and Mathematical Methods*. 43 (1). 64 – 74.



UDC 533.06

## CALCULATION OF MULTISPAN FRAME STABILITY WITH REGARD TO GEOMETRIC NONLINEARITY

P. Balduk<sup>1</sup>, G. Balduk<sup>1</sup>, E. Yaremenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract:** The paper considers the methodology of determining the critical value of the load acting on a flat multi-span frame, taking into account geometric nonlinearity. The elements of the frame have arbitrary stiffnesses constant along the length. The problem is solved in two stages. At the first stage, the strain calculation of the frame is performed, the main goal of which is to obtain the values of longitudinal forces in the struts. At the second stage, loss of stability of the first kind is considered in relation to the longitudinal bending of the props under the action of vertical forces. In both calculations, practically the same system of nonlinear equations of displacement method is solved. The compact notation of generalized stiffness matrix coefficients obtained earlier by the authors facilitates the development of the algorithm and computer programs designed for solving the problems set in the paper. The algorithm is implemented in Excel spreadsheets. To verify the obtained results, test calculations for both stages of the calculation have been performed. Using the proposed methodology, the stability of a flat free one-story frame with a periodic structure has been calculated. In the ANSYS software package, the calculations of this frame according to the deformed scheme were performed, with the subsequent determination of the value of critical longitudinal force in the struts. Comparison of the results of calculations by the offered technique and in the ANSYS program complex shows their practically complete coincidence: the difference in the values of longitudinal forces in the frame struts with allowance for geometric nonlinearity is less than 0.01 %; the calculation results of the first two critical forces differ by 0.06 %. The proposed methodology allows us to use a unified approach to the formation of systems of solving nonlinear equations, both in the strain calculation and in the calculation of stability. In addition, this approach releases from the use of expensive computer programs, the use of which requires special training.

**Keywords:** strain calculation, rod stability, displacement method, multi-span frame, stability equation, critical longitudinal forces, Excel, ANSYS.

## РОЗРАХУНОК БАГАТОПРОЛЬОТНОЇ РАМИ НА СТІЙКІСТЬ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ

Балдук П. Г.<sup>1</sup>, Балдук Г. П.<sup>1</sup>, Яременко О. О.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація:** У статті розглядається методика визначення критичного значення навантаження, що діє на плоску багатопрогону раму з урахуванням геометричної нелінійності. Елементи рами мають довільні жорсткості, постійні по довжині. Поставлене завдання вирішується у два етапи. На першому етапі виконується деформаційний розрахунок рами, основною метою якого є набуття значень поздовжніх зусиль у колонах. На другому етапі розглядається втрата стійкості першого роду стосовно поздовжнього вигину колон під дією вертикальних сил. В обох розрахунках вирішується практично однакова система нелінійних рівнянь способу переміщень. Раніше отриманий авторами компактний запис узагальнених коефіцієнтів матриці жорсткості суттєво полегшує розробку алгоритму та комп'ютерних програм, призначених для вирішення поставлених у роботі завдань. Реалізація алгоритму виконано у загальнодоступних таблицях Excel. Для верифікації отриманих результатів виконані тестові розрахунки обох етапів розрахунку. За запропонованою методикою виконано розрахунок на стійкість плоскої вільної шести прогонувої одноповерхової симетричної рами. На першому етапі обчислень на раму діє система зосереджених вертикальних сил у вузлах та



рівномірно розподілене навантаження у всіх прольотах. Внаслідок виконання деформаційного розрахунку визначено внутрішні зусилля в елементах моделі. При розрахунку стійкість на раму діє лише приведені вузлові вертикальні сили, значення яких пропорційні поздовжнім зусиллям у колонах, отриманим першому етапі. В результаті виконаного розрахунку визначено критичні значення поздовжніх зусиль у колонах, що відповідають двом першим формам втрати стійкості. У програмному комплексі ANSYS виконано розрахунки цієї рами за деформованою схемою, з подальшим визначенням величини критичного поздовжнього зусилля в колонах. Порівняння результатів розрахунків за запропонованою методикою та у програмному комплексі ANSYS показує їх практично повний збіг як у значеннях поздовжніх сил у колонах рами з урахуванням геометричної нелінійності, так і в результатах обчислень перших двох критичних сил. Запропонована методика дозволяє використовувати єдиний підхід до формування систем нелінійних рівнянь, як у деформаційному розрахунку, так і в розрахунку на стійкість.

**Ключові слова:** деформаційний розрахунок, стійкість стрижня, метод переміщень, багатопрогонова рама, рівняння стійкості, критичне поздовжнє зусилля, Excel, ANSYS.

## 1 INTRODUCTION

Widespread construction structures include multi-span frames of industrial and residential buildings. It is possible to distinguish several decisive factors determining the bearing capacity of such frames consisting of flexible compressed and compression-curved elements: possibility of stability loss of separate elements or of the whole structure; consideration of geometrical deformations of frame elements. It is a complicated mathematical problem of obtaining the exact solution of set tasks considering these factors for multi-span frames. There are several ways of its solution. In some cases, additional hypotheses are introduced, allowing to essentially simplify the frame calculation scheme and, as a consequence, to obtain an exact solution. In other cases, approximate calculation methods are used, which are implemented with the use of modern computing software complexes. However, for multi-span flat frames of a periodic structure subjected only to the vertical load, it is possible to combine these ways - without changing the frame calculation scheme, to obtain the exact solution of the task in view of the above factors.

## 2 ANALYSIS OF LITERATURE DATA AND PROBLEM STATEMENT

The issue of determining the critical load at loss of stability in multi-span frames with regard to nonlinearity is reflected in numerous works of domestic and foreign scientists.

Works [1-5] are devoted to development of methods of engineering calculation of spatial frames for stability taking into account physical and geometrical nonlinearities. The modern state of the problem of accounting geometric nonlinearity in structural models is considered in [6].

In a number of works to solve this problem, the classical method of displacements is used with subsequent determination of critical load from nonlinear equations. For this purpose, approximate methods are used in which geometric assumptions are introduced into the mathematical model in frame models [7-9]. Other works use the correction of model element stiffnesses [5, 10, 11]. In works [1, 2, 9, 12] and many others, the engineering methods of stability calculation are oriented to the use of modern computer software, although for flat frames of periodic structure it is not always economically feasible.

The closest to the problem considered in this article is the engineering method of calculation [12], which allowed to simplify the testing of frame rods for stability without using modern software computing complexes for this purpose. However, there are no proposals for the use of engineering methods to account for geometric nonlinearity in the calculation of multispan frames for stability in the literature.

## 3 PURPOSE AND OBJECTIVES OF THE RESEARCH

The purpose of this work is to develop a technique for determining the critical value of the load acting on a flat multi-span frame, taking into account geometric nonlinearity.

## 4 RESEARCH RESULTS

Consider a flat multi-span frame of periodic structure under the action of a system of vertical loads (Fig. 1). In the general case, the elements of the frame have arbitrary geometrical and physical-mechanical characteristics constant along the length of the elements. On the example of such a frame, let's develop a technique for determining the critical value of the load, taking into account geometric nonlinearity. In order to achieve the set task, we shall sequentially perform two calculations - strain calculation of a flat multi-span frame under the action of a vertically placed combined load system and calculation of the stability of the same

frame under the action of vertical forces. All calculations will be performed by means of displacement method.

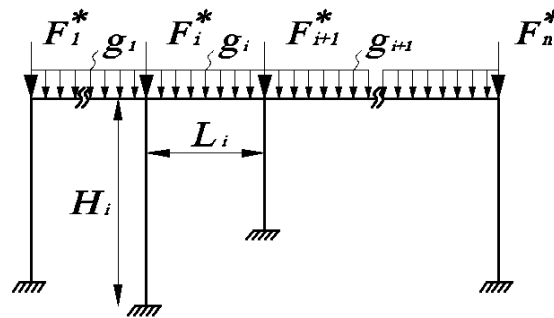


Fig. 1. Model of a flat multi-span frame

As a result of the first calculation, let's determine the longitudinal forces in vertical bars of the frame, with due account for geometric changes of the given model. Let's consider an elastic statement of the problem under the assumption of small deformations [14]. Let us perform the calculation step by step. At the first step, we define the internal forces in the frame according to the nondeformed scheme, and perform the subsequent calculation by the method of successive approximations, taking into account the values of longitudinal forces in the compressed rods of the frame obtained during the previous iterations.

Given that the unknowns of the displacement method are angular and linear displacements, this model of the frame has the number of unknowns of the displacement method equal to  $n+1$ , where  $n$  is the number of columns. The basic system of the displacement method of the model is shown in Fig. 2.

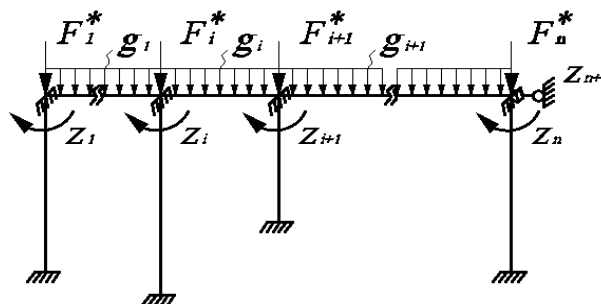


Fig. 2. The basic system of displacement method in strain calculations

The system of canonical equations of the displacement method in matrix form has the form:

$$\begin{bmatrix} r_{1,1}(v) & r_{1,2}(v) & \dots & r_{1,n}(v) & r_{1,n+1}(v) \\ r_{2,1}(v) & r_{2,2}(v) & \dots & r_{2,n}(v) & r_{2,n+1}(v) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n,1}(v) & r_{n,2}(v) & \dots & r_{n,n}(v) & r_{n,n+1}(v) \\ r_{n+1,1}(v) & r_{n+1,2}(v) & \dots & r_{n+1,n}(v) & r_{n+1,n+1}(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_n \\ Z_{n+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \\ R_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Let us construct the unit diagrams necessary to determine the coefficients of the system of canonical equations. At their construction we will take into account the longitudinal bending from the action of the system of forces, and the influence of compressive forces will be taken into account by means of the corresponding nonlinear functions  $\varphi_2(v_i)$ ,  $\varphi_4(v_i)$ ,  $\eta_2(v_i)$ :



$$\varphi_2(v_i) = \frac{v_i \cdot (tg v_i - v_i)}{8tg v_i \cdot \left( tg \frac{v_i}{2} - \frac{v_i}{2} \right)}; \quad \varphi_4(v_i) = \frac{\left( \frac{v_i}{2} \right)^2 tg \frac{v_i}{2}}{3 \left( tg \frac{v_i}{2} - \frac{v_i}{2} \right)}; \quad \eta_2(v_i) = \frac{\left( \frac{v_i}{2} \right)^3}{3 \left( tg \frac{v_i}{2} - \frac{v_i}{2} \right)},$$

where  $v_i = \alpha_i H_i = H_i \sqrt{F_i / EI_{Ci}}$ .

For the considered frame model, we will represent the symmetric matrix of the coefficients of equation (1) with dimensions  $(n+1) \times (n+1)$  in the block form:

$$\begin{pmatrix} \left| \begin{matrix} r_{1,1}(v) & r_{1,2}(v) & \dots & r_{1,n}(v) \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} r_{1,n+1}(v) \end{matrix} \right| \\ \left| \begin{matrix} r_{2,1}(v) & r_{2,2}(v) & \dots & r_{2,n}(v) \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} r_{2,n+1}(v) \end{matrix} \right| \\ \dots & \dots \\ \left| \begin{matrix} r_{n,1}(v) & r_{n,2}(v) & \dots & r_{n,n}(v) \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} r_{n,n+1}(v) \end{matrix} \right| \\ \left| \begin{matrix} r_{n+1,1}(v) & r_{n+1,2}(v) & \dots & r_{n+1,n}(v) \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} r_{n+1,n+1}(v) \end{matrix} \right| \end{pmatrix}. \quad (2)$$

The physical meaning of the elements of blocks I (symmetric ribbon matrix of size  $n \times n$ ) and II (column of size  $n$ ) are the reaction moments in the superimposed rigid links; the elements of blocks III (transposed block II) and VI (one element) are the reactions in the superimposed linear links.

Taking into account the introduced coefficients of variation of the model characteristics and (lengths of struts and beams); and (values of bending stiffness of struts and beams); and (values of concentrated forces and intensity of uniformly distributed load), let us define all its design characteristics:

$$\begin{aligned} H_i &= H_o h_i; \quad L_i = L_o k_i; \\ EI_{Ci} &= EI_{Co} s_i; \quad EI_{Pi} = EI_{Po} p_i; \\ F_i &= F_o f_i; \quad q_i = q_o z_i \end{aligned} \quad (3)$$

Taking into account the symbols introduced for the constants  $a = 4EI_{Co} / H_o$ ;  $b = 4EI_{Po} / L_o$ ;  $c = 12EI_{Co} / H_o^3$ ;  $d = -6EI_{Co} / H_o^2$ , formulas of 4 generalized coefficients of the specified blocks [13], we obtain a compact notation of any of the elements of the block matrices of the general equation (1):

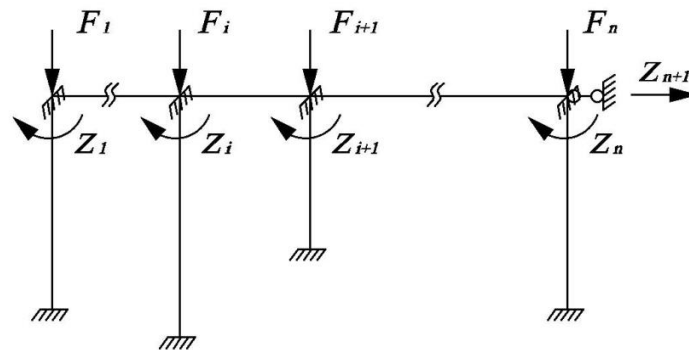
$$\begin{aligned} r_{i,i} &= a \cdot \frac{s_i}{h_i} \varphi_2(v_i) + b \cdot \frac{p_{i-1}}{k_{i-1}} + b \cdot \frac{p_i}{k_i}; \quad r_{i,i-1} = \frac{b}{2} \cdot \frac{p_i}{k_i}; \\ r_{n+1,i} &= -\frac{6EI_{Ci}}{H_i^2} \varphi_4(v_i) = d \cdot \frac{s_i}{h_i^2} \varphi_4(v_i); \\ r_{n+1,n+1} &= c \cdot \left[ \frac{s_1}{h_1^3} \eta_2(v_1) + \frac{s_2}{h_2^3} \eta_2(v_2) + \dots + \frac{s_n}{h_n^3} \eta_2(v_n) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

At the first step of the deformation calculation in the system of canonical equations (1) all nonlinear functions  $\varphi_2(v_i)$ ,  $\varphi_4(v_i)$ ,  $\eta_2(v_i)$  are taken as singular (5). We find the displacements of nodes in the model in the elastic formulation of the problem, followed by determination of all internal forces in the rods.

$$\begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & r_{1,n} & r_{1,n+1} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \dots & r_{2,n} & r_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n,1} & r_{n,2} & \dots & r_{n,n} & r_{n,n+1} \\ r_{n+1,1} & r_{n+1,2} & \dots & r_{n+1,n} & r_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_n \\ Z_{n+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \\ R_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

On the second and subsequent iterations of the strain calculation, the influence of the compressive forces obtained earlier for each rod of the model is taken into account by calculating (correcting) the corresponding nonlinear functions of longitudinal bending  $\varphi_2(v_i)$ ,  $\varphi_4(v_i)$ ,  $\eta_2(v_i)$ . We determine anew the values of all coefficients (4) and solve the system of equations (1). The number of such iterations depends on the convergence of the computational process. As the criterion of convergence, we choose the value of maximum difference in longitudinal forces of each rod in the last two iterations of the calculation.

Now, let's proceed to the second calculation, the goal of which is to determine the critical forces in the problem of loss of stability of the first kind as applied to the longitudinal bending of columns. In contrast to the previously considered calculation scheme, in the second calculation we will consider only the system of vertical concentrated forces in the nodes. The values of these forces are obtained in the deformation calculation and are equal to the values of longitudinal forces in the columns. The basic system of displacement method in the stability analysis is illustrated in Fig. 3.



**Fig. 3.** Basic system of displacement analysis in stability analysis

Let us connect the vertical forces equal in magnitude to the longitudinal forces, obtained in the deformation analysis. They will change in proportion to a single parameter  $F_o$ :

$$F_1 = f_1 \cdot F_o; \dots F_2 = f_2 \cdot F_o; \dots, F_n = f_n \cdot F_o. \quad (6)$$

We shall equate the weight coefficients of the system of equations (1) to zero due to the nodal application of the load:

$$\begin{bmatrix} r_{1,1}(v) & r_{1,2}(v) & \dots & r_{1,n}(v) & r_{1,n+1}(v) \\ r_{2,1}(v) & r_{2,2}(v) & \dots & r_{2,n}(v) & r_{2,n+1}(v) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n,1}(v) & r_{n,2}(v) & \dots & r_{n,n}(v) & r_{n,n+1}(v) \\ r_{n+1,1}(v) & r_{n+1,2}(v) & \dots & r_{n+1,n}(v) & r_{n+1,n+1}(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_n \\ Z_{n+1} \end{bmatrix} = 0. \quad (7)$$

The search for critical forces consists in determining the roots of the general stability equation, which we will obtain by equating the determinant of the coefficient matrix of the system (7) to zero, provided that the displacements  $Z_i \neq 0$ :

$$D(\nu) = \begin{vmatrix} r_{1,1}(\nu) & r_{1,2}(\nu) & \dots & r_{1,n}(\nu) & r_{1,n+1}(\nu) \\ r_{2,1}(\nu) & r_{2,2}(\nu) & \dots & r_{2,n}(\nu) & r_{2,n+1}(\nu) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n,1}(\nu) & r_{n,2}(\nu) & \dots & r_{n,n}(\nu) & r_{n,n+1}(\nu) \\ r_{n+1,1}(\nu) & r_{n+1,2}(\nu) & \dots & r_{n+1,n}(\nu) & r_{n+1,n+1}(\nu) \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

All nonlinear parameters  $\nu_i$  of functions  $\varphi_2(\nu_i)$ ,  $\varphi_4(\nu_i)$ ,  $\eta_2(\nu_i)$ , included in the general stability equation (8), are reduced to the same argument  $\nu_o$ . Then all coefficients  $r_{i,k}(\nu)$  of the determinant will be functions of only one parameter  $\nu_o$ :

$$r_{i,k}(\nu) = \Phi_{i,k}(\nu_o). \quad (9)$$

Equation (8) will take the following form:

$$D(\nu_o) = |\Phi_{i,k}(\nu_o)| = 0. \quad (10)$$

By determining the parameters  $\nu_o$ , we find the values of the critical forces  $F_{i,kp}$ . The smallest positive value  $\nu_{i,kp}$  determines the critical value of any of the vertical forces of the system

$$F_{i,kp} = \frac{\nu_{i,kp}^2 EI_{Ci}}{H_i^2}. \quad (11)$$

## 5 NEGOTIATING THE RESULTS OF THE STUDY

The compact form of recording the generalized stiffness matrix coefficients [13], made it possible to carry out the deformation and stability calculations in flat multi-story frames of periodic structure using a unified method of forming the equations of the displacement method (1).

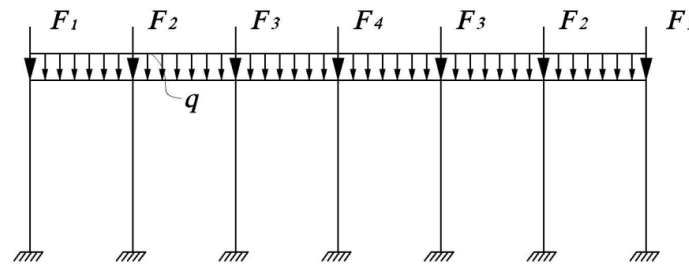
A numerical implementation of the proposed method has been performed. For this purpose, an algorithm has been developed and a program in Excel tables has been written. Solving of the system of solving transcendental equations (1) of the deformation calculation is performed by the method of successive approximations. The stability equation (8) is solved by choosing the parameter  $\nu_o$ . The program makes it easy to analyze the influence of force, geometric and physical-mechanical parameters of model elements on the values of longitudinal forces in the supports of the previously mentioned frames.

To verify the calculation results, a number of test frame calculations for deformation calculation and stability with exact or approximate solutions have been performed [1, 7].

Stability analysis with a geometrical nonlinearity of a flat free frame of a periodic structure (Fig. 4), the model of which was considered in [13].

A physical model of the system “steel structure - fire-retardant coating” has been developed (Fig. 6).





**Fig. 4.** Model of the frame

Initial data of the model: all columns (height of 6 m) and all ledgers (span of 12 m) are made of steel with modulus of elasticity  $E = 2 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ . The columns have a rectangular cross-section ( $a=0.2 \text{ m}$ ;  $b=0.5 \text{ m}$ ), the moment of inertia of the cross-section of the transom is 2.5 times greater than the moment of inertia of the column cross-section.

At the first stage of the calculations, a system of concentrated vertical forces at the nodes acts on the frame + and uniformly distributed load with intensity  $q = 72 \text{ kN/m}$  in all spans.

As a result of the deformation calculation, the internal forces in the elements of the model are determined. The maximum compression force occurs in the second and sixth columns. The values of longitudinal forces in the columns are presented in Table 1 (taking into account the symmetry of the model).

**Table 1**

Values of longitudinal forces in the frame columns

№		$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$
1	kN	680,08	1525,72	1452,04	1468,33
2	proportionality parameter $f_i$	1,00	2,44	2,24	2,28

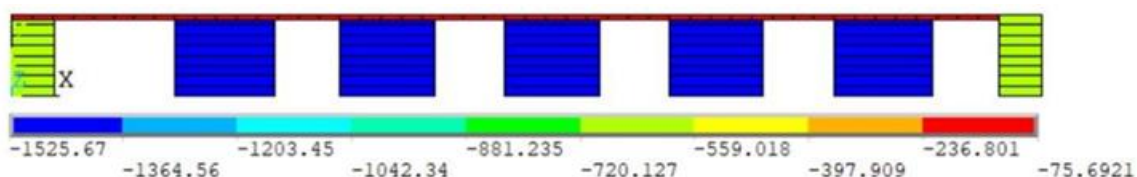
In the stability analysis, only the vertical forces (6) are applied to the frame. Their magnitude is proportional to the values of longitudinal forces in the columns, obtained in the deformation calculation (line 2 of Table 1). As a result of the performed calculation, critical values of longitudinal forces in the columns, corresponding to the first two forms of stability loss, were obtained (Fig. 6). The results of the calculations are summarized in Table 2.

**Table 2**

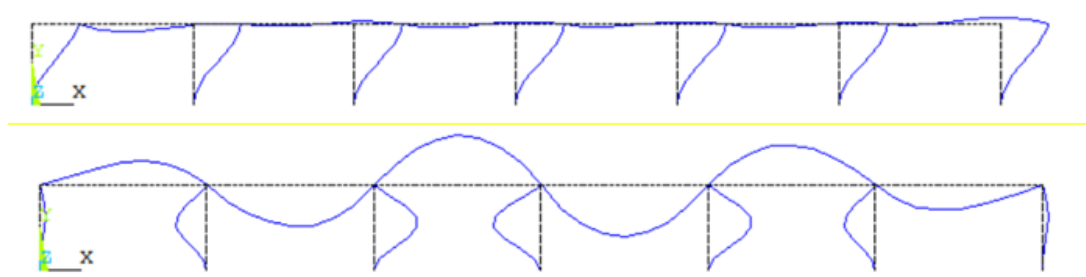
Critical value of the longitudinal force (in kN)

№		as per the proposed methodology	ANSYS
1	first form of instability	4955,85	4952,74
2	second form of instability	14921,6	14927,1

In order to verify the obtained results, the deformation and stability calculations of this frame model were performed in the ANSYS software package.



**Fig. 5.** Longitudinal force diagram (in kN)



**Fig. 6.** The first and second forms of frame stability loss (ANSYS)

Comparison of the results of calculations by the proposed method and in the ANSYS software package shows their almost complete coincidence: the difference in the values of longitudinal forces in the frame struts with allowance for geometric nonlinearity is less than 0.01 %; the results of calculations of the first two critical forces differ by 0.06 %.

## 6 CONCLUSIONS

A methodology for determining the critical values of longitudinal forces in the stability problems of flat multi-span frames by displacement method with regard for geometric nonlinearity is proposed. It allows to use a unified approach to the formation of the systems of the solving nonlinear equations both in the deformation calculation and in the stability calculation. At the first stage, calculation of a frame under the action of a system of concentrated and distributed forces is performed, the ultimate goal of which is to obtain values of longitudinal forces in the frame struts with allowance for geometric nonlinearity. At the second stage of calculations, the critical value of longitudinal force in the frame struts is determined. The algorithm of the proposed method is implemented in the program, which is written in Excel spreadsheets. The verification of the obtained results is confirmed by test calculations for both stages of the calculation. Stability calculations for a flat free one-story frame of periodic structure have been performed using the proposed methodology. Calculations of this frame by the deformed scheme with the subsequent determination of the critical longitudinal force have been performed in the ANSYS software package. The calculation results are compared.

For planar frames of a periodic structure, the suggested method makes it possible to solve the set problems with the same accuracy more economically efficient, since the calculations do not involve the universal computational complexes (ANSYS, LIRA and others).

## References

1. Son, M. P. (2010). *Eksperymentalno-teoretycheskoe yssledovanye ustoychivosti prostranstvennykh ramnykh sistem y razrabotka ynzhenernoi metodyky opredeleniya krytycheskoi syly s uchetom nelyneynosti* [Experimental and theoretical study of the stability of spatial frame systems and the development of an engineering technique for determining the critical force, taking into account nonlinearity]. DySSERTatsiya na soyskanye uchenoi stepeny kandydata tekhnicheskyykh nauk. Spetsyalnost 05.23.17. Moskva. <https://www.dissercat.com/content/eksperymentalno-teoreticheskoe-issledovanie-ustoychivosti-prostranstvennykh-ramnykh-sistem> [in Russian].
2. Son, M. P., Kaiumov, R. A., Mukhamedova, Y. Z. (2015). Yssledovanye ustoychivosti prostranstvennykh ramnykh sistem [Study of the stability of spatial frame systems. Bulletin of Kazan Technological University]. *Vestnyk Kazanskoho tekhnolohycheskoho unyversyteta*. 18(17). 203–206. <https://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-ustoychivosti-prostranstvennykh-ramnyh-sistem> [in Russian].
3. Repyna, O. A. (2013). Opredelenye optimalnogo sootnosheniya kolonn pry raschete prostranstvennoho ramnoho karkasa na ustoychivost [Determination of the optimal ratio of columns when calculating the stability of a spatial frame frame]. *Perspective innovations in*

- science, education, production and transport. *SWorld*. 17–26. <http://www.sworld.com.ua/index.php/ru/conference/the-content-of-conferences/archives-of-individual-conferences/dec-2013> [in Russian].
4. Okonkwo, V. O., Onyeyili, I. O., Aginam, C. H., Onodagu, P. D. (2012). Analysis of deformation behaviour of single storey frames subjected to different loading forces. *Journal of Innovative Research in Engineering and Sciences*. 3(1). 421–433.
  5. Slobodianiuk, S. O., Buratynskiy, A. P. (2019). Deformatsiyni rozrakhunok prostorovykh zalizobetonnykh ram MSE z urakhuvanniam vibropovzuchosti betonu [Deformation calculation of spatial reinforced concrete frames of the ITU taking into account the vibration creep of concrete]. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 103. 219–234. [in Ukrainian].
  6. Perelmuter, A. V., Slyvker, V. Y. (2007). *Raschetnye modeli sooruzheniy i vozmozhnost ykh analiza* [Calculation models of structures and the possibility of their analysis]. M.: DMK Press. [in Russian].
  7. Snytko, N. K. (1968). *Ustoichyvost sterzhnevyykh sistem v upruho-plasticheskoj oblasti* [Stability of rod systems in the elastic-plastic region]. Leningrad: Stroyizdat. [in Russian].
  8. Webber, A., Orr, J. J., Shepherd, P., Crothers, K. (2015). The effective length of columns in multi-storey frames. *Engineering Structures*. 102. 132–143. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.1006.3>.
  9. Quanwang, L., Aming, Z., Hao, Z. (2016). A simplified method for stability analysis of multi-story frames considering vertical interactions between stories. *Journal of Structural Engineering* 19(4). 599–610. 120(4): 1272–1290. <https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/1369433216630191>
  10. Wood, R. H. (1974). Effective lengths of columns in multi-storey buildings. Parts 1, 2, 3', *Struct. Engr.* 52 (Nos 7, 8, 9). 235–244, 295–302, 341–346.
  11. Ewnetie, A., Zerayohannes, G. (2015). Investigation on applicability of substitute beam - Column frame for design of reinforced concrete sway frames. *Journal of EEA* 33. 13–25.
  12. Askynazy, V. Iu. (2017). *Prostranstvennaia ustoichyvost elementov stalnykh ramnykh konstruktsiyi peremennoi zhestkosti* [Spatial stability of elements of steel frame structures of variable stiffness]. DySSERTatsiya na soyskanye uchenoi stepeny kandydata tekhnicheskyykh nauk. Spetsyalnost 05.23.01. Sankt-Peterburh. [in Russian].
  13. Balduk, P., Balduk, H., Yaremenko, O., Yaremenko, N. (2021). Calculation of a multi-span frame for stability. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 1164 012008. doi:10.1088/1757-899X/1164/1/012008
  14. Ysakhanov, H. V., Hranat, S. Ia., Melnychenko, H. Y., Shyshov, O. V. (1990). *Stroytelnaia mekhanika. Raschet sterzhnevyykh sistem na EVM* [Structural mechanics. Calculation of rod systems on a computer]. K.: Vyshcha shkola. [in Russian].

## Література

1. Сон М. П. Экспериментально-теоретическое исследование устойчивости пространственных рамных систем и разработка инженерной методики определения критической силы с учетом нелинейности. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Специальность 05.23.17. Москва, 2007. 149 с. <https://www.dissercat.com/content/eksperimentalno-teoreticheskoe-issledovanie-ustoichivosti-prostranstvennykh-ramnykh-sistem>
2. Сон М. П., Каюмов Р. А., Мухамедова И. З. Исследование устойчивости пространственных рамных систем. Вестник Казанского технологического университета, 2015. Т. 18. №17, С. 203–206 <https://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-ustoichivosti-prostranstvennykh-ramnykh-sistem>
3. Репина О. А. Определение оптимального соотношения колонн при расчете пространственного рамного каркаса на устойчивость. *Perspective innovations in science, education, production and transport*, 2013. 17–26 <http://www.sworld.com.ua/index.php/ru/conference/the-content-of-conferences/archives-of-individual-conferences/dec-2013> <https://www.sworld.com.ua/konfer33/697.pdf>

4. Okonkwo V. O., Onyeyili I. O., Aginam C. H. and Onodagu P. D. Analysis of deformation behaviour of single storey frames subjected to different loading forces. *Journal of Innovative Research in Engineering and Sciences*, 2012. 3(1). pp. 421–433. © Global Research Publishing
5. Слободянюк С.О., Буратинський А.П. Деформаційний розрахунок просторових залізобетонних рам МСЕ з урахуванням віброповзучості бетону. Опір матеріалів і теорія споруд/*Strength of Materials and Theory of Structures*, 2019. № 103. С. 219–234.
6. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. М.: ДМК Пресс, 2007. 600с.
7. Снитко Н.К. Устойчивость стержневых систем в упруго-пластической области. Ленинград. Стройиздат, 1968. 250 с.
8. Webber A., Orr J.J., Shepherd P., Crothers K. The effective length of columns in multi-storey frames. *Engineering Structures*, 2015. 102. pp. 132–143.
9. Quanwang L., Aming Z., Hao Z. A simplified method for stability analysis of multi-story frames considering vertical interactions between stories *Journal of Structural Engineering*: 2016. Volume: 19 issue: 4. page(s): pp. 599-610. *Journal of Structural Engineering: ASCE* 120(4): pp. 1272–1290. <https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/1369433216630191>
10. Wood R. H. 'Effective lengths of columns in multi-storey buildings; Parts 1, 2, 3', *Struct. Engr*, 1974. 52 (7, 8, 9). pp. 235–244, 295–302, 341–346.
11. Ewnetie A., Zerayohannes G. Investigation on applicability of substitute beam - Column frame for design of reinforced concrete sway frames. *Journal of EEA*, 2015. 33. pp. 13–25.
12. Аскинази В.Ю. Пространственная устойчивость элементов стальных рамных конструкций переменной жесткости. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Специальность 05.23.01. Санкт-Петербург, 2017. 199 с. <https://www.dissercat.com/content/prostranstvennaya-ustoichivost-elementov-stalnykh-ramnykh-konstruktsii-peremennoi-zhestkosti>
13. P. Balduk, H. Balduk, O. Yaremenko and N. Yaremenko Calculation of a multi-span frame for stability. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 1164. 012008 doi:10.1088/1757-899X/1164/1/012008
14. Исаханов Г. В., Гранат С. Я., Мельниченко Г. И., Шишов О. В. Строительная механика. Расчет стержневых систем на ЭВМ. К.: «Выща школа», 1990. 230с.

**Balduk Pavlo**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Ph.D., Associate Professor  
Didrihsona str., 4 Odessa, Ukraine, 65029  
baldook.p@ogasa.org.ua  
ORCID: 0000-0002-9055-9005

**Balduk Georgiy**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Ph.D.  
Didrihsona str., 4 Odessa, Ukraine, 65029  
g.p.balduck@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-0627-4841

**Yaremenko Elena**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Ph.D., Associate Professor  
Didrihsona str., 4 Odessa, Ukraine, 65029  
olenaiaremenko@ogasa.org.ua  
ORCID: 0000-0002-0452-1693

*For references:*

Balduk P., Balduk G., Yaremenko E. (2022). Calculation of multispan frame stability with regard to geometric nonlinearity. *Mechanics and Mathematical Methods*. 4 (1). 75 – 85

*Для посилань:*

Балдук П. Г., Балдук Г. П., Яременко О. О. Розрахунок багатопрольотної рами на стійкість з урахуванням геометричної нелінійності. *Механіка та математичні методи*, 2022. Т. 4. №. 1. С. 75–85.

UDC 621.791.3/.8

## MODELING OF WELDING PROCESSES FOR TRANSFERRING TECHNOLOGIES TO EXTRATERRESTRIAL CONDITIONS

N. Kobzar<sup>1</sup>, Ye. Chvertko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"*

**Abstract:** The process of computer modeling occupies an increasingly important niche in scientific and technical evolution. Modeling of welding processes provides an opportunity to make preliminary calculations without wasting materials and to avoid rough work. Welding modeling is the latest technology, which is used not only for economically feasible optimization of the process, but also to predict its consequences, including thermal impact and possible deformations in the future during structure operation. Modern software provides a wide range of possibilities, from characterizing the external conditions under which welding takes place, namely: temperature, gravity, pressure, etc. up to highlighting the processes that occur with the material after welding, even after years.

Relatively recently people have begun to experiment with different technological processes in conditions, different from the usual ones, namely Earth. Welding is no exception and is being experimented with from underwater to space. Modeling of such processes is crucial, it doesn't just simplify the work of welders, but also saves lives.

With the advent of a new goal - to perform quality welding in space - new challenges have emerged in all areas. The astronaut's suit (spacesuit) should be more adapted to work with molten metals, gloves should be more mobile for the astronaut to perform manipulations, a helmet with the function of protecting the eyes from bright radiation. Creating power generators of a completely new era, not adapted from terrestrial conditions is also a challenge. Pre-flight training of astronauts expands the range of skills and knowledge required. Design and development of new welding machines, taking into account important factors of work - weight, limited size, ease of use, technological versatility (one machine performs several functions), the maximum possible automation, possible work in vacuum and weightlessness. The question of simplicity of adaptation of this or that technology under conditions different from terrestrial remains actual.

**Keywords:** welding, extraterrestrial conditions, modeling, thermal exposure.

## МОДЕЛЮВАННЯ ЗВАРЮВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ ДЛЯ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЙ У ПОЗАЗЕМНИХ УМОВАХ

Кобзар Н. П.<sup>1</sup>, Чвертко Є. П.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»*

**Анотація:** Процес комп'ютерного моделювання займає все важливішу нішу в науковій і технічній еволюції. Моделювання процесів зварювання надає можливість здійснити попередні розрахунки без витрат матеріалів і уникнути чорнової роботи. Моделювання зварювання є новітньою технологією, яку використовують не тільки для економічно-доцільного розрахунку процесу, але і для прогнозування його наслідків, зокрема термічного впливу та можливих деформацій у майбутньому при експлуатації конструкції. Сучасні програми для розрахунків мають широкий спектр можливостей, від встановлювання характеристики зовнішніх умов при яких відбувається зварювання, а саме: температура, гравітація, тиск і т. д. до висвітлювання процесів, які відбуваються з матеріалом після зварювання, навіть через роки.

Відносно нещодавно люди почали експериментувати з різними технологічними процесами, змінюючи умови, що відрізняються від звичайних — Земних. Зварювання не стало виключенням. Занурювались у воду, або навпаки летіли в космос. Моделювання таких процесів



є надважливим, воно не тільки здатне спростити роботу зварювальникам, але і врятувати життя.

З появою нової цілі - виконання якісних зварювальних робіт у космосі - з'явилися нові задачі по всіх пересічних сферах. Костюм космонавта (скафандр) повинен стати більш адаптованим під роботи з розплавленими металами, рукавиці більш мобільні для виконання астронавтом маніпуляцій, шолом з функцією захисту очей від яскравого випромінювання. Створення генераторів живлення зовсім нової епохи, а не адаптовані із земних умов. Підготовка космонавтів перед польотом розширює спектр потрібних навичок і знань. Проектування і розробка нових зварювальних апаратів, враховуючи важливі фактори роботи - вага, обмежені розміри, зручність у використанні, універсальність у роботі (одна машина виконує декілька функцій), максимально можлива автоматизація, можлива робота у вакуумі і невагомості. Актуальним залишається питання простоти адаптації тієї чи іншої технології під умови, відмінні від земних.

**Ключові слова:** зварювання, позаземні умови, моделювання, термічний вплив.

## 1 INTRODUCTION

Only 53 years ago (in 1969), Soviet cosmonauts Valery Kubasov and Georgy Shonin performed welding in space for the first time using "Vulkan" system developed by the E.O. Paton Electric Welding Institute. In total, they conducted three experiments — manual metal arc, electric beam and plasma (compressed arc) welding. In 1984 (38 years ago) an extremely important experiment was conducted on welding, cutting, soldering and spraying in open space by Svetlana Savitskaya and Vladimir Janibekov. These experiments launched a new, completely unexplored field of research [1].

Space missions, which are set by modern progressive teams and companies (for example, SpaseX) build an idea of space exploration at a very fast pace. Adapting the growing manipulation of the lunar surface is a matter of time, not simply an opportunity, as it was before. Mankind is currently actively studying the topic of colonization of the planets, which offers great opportunities. Among them are new resources, new conditions for human adaptation, new territories for life, etc.

Modern tools for forecasting and modeling provide researchers with opportunity to assess the problems they will face in certain conditions. In particular, when studying and analyzing welding work in conditions other than Earth's, it is possible to use models to identify problems or, conversely, the benefits using different approaches.

## 2 STATE OF ART ANALYSIS AND STATEMENT OF THE PROBLEM

Welding is an important and widespread technological process for the production and repair of structures for various purposes. However, most welding processes involve the use of heat sources, so in most cases, when joining metallic materials, we face the effects of the thermal cycle. In particular, thermal exposure leads to the formation of a heat affected zone (HAZ) - the area adjacent to the joint zone, in which due to heating and further cooling changes in structure, mechanical properties, chemical composition are observed [2]. Depending on the technology and technique of welding, thermal exposure leads to the formation of residual deformations and stresses, which also lead to changes in the characteristics of the structural material. Depending on the operating conditions, such changes may even cause local damage and failure of the structure as a whole [3].

In the general case, the thermal effect of the welding process on the structure is determined by technology (welding with or without melting the metal, the formation of the connection gradually along the joint or simultaneously), material (heat capacity, thermal conductivity, melting point, etc.), geometry of parts (shape, mutual location), energy characteristics of the heat source (power, energy density, heat input) and the environment [2]. The environment, in particular, will determine the initial temperature of the parts and the conditions of cooling and heat dissipation from the heating zone. In addition, it will affect the need to apply protection to the welding zone.

It is obvious that when performing welding work in extraterrestrial conditions, the characteristics of the environment will differ at least from the terrestrial ones. In addition, a number of welding methods are gravitationally dependent, so there will be an impact on the technology as such. Therefore, modeling, in particular, thermal welding cycles for conditions other than terrestrial, is a relevant and interesting task.

## 3 RESEARCH AIM AND OBJECTIVES

The aim of the study is to model and visualize the temperature fields in the welded joint for cases where welding is performed in extraterrestrial conditions.



The objectives of the study are to determine the parameters for model construction and compare, in particular, the values of the width of the HAZ under different welding conditions.

## 4 RESULTS

Analysis was performed for welded structures located in three most different conditions, namely: the Earth, Mars and the Moon.

Simulation is carried out using a specialized software environment.

The structure consists of a plate and a pipe (one-sided T-joint). Dimensions of the plate: 150 x 150 mm, thickness 50 mm. Pipe dimensions: outer diameter 400 mm, thickness 20 mm, height 400 mm. The pipe is located on the plate with a shift relative to the point of intersection of the axes of symmetry of the plate, which makes it possible to estimate the temperature effect in more remote areas without increasing the size and, consequently, speeds up calculations.

Simulation was performed for single pass welding without beveled edges and without preheating. The joint is formed in the sector of the pipe between the radii drawn at an angle of 45°.

The material of the parts is an analog of 2024-AlCuMg2 alloy (solidus temperature 640°C, liquidus temperature 500°C, latent heat - 0.922 J/kg) [4]. 2024 type alloys, alloyed with copper and magnesium, are one of the most common in the production of aerospace structures [5].

Aluminum alloys for aviation and space use, in particular 2024, are sensitive to heat treatment, the heat affected zone is limited by the isotherm of 200°C [6].

The thermal impact of the process was assessed for the time stamp, which indicates the intermediate result, immediately after the end of welding and at the thirty second after the start of welding, when the introduction of heat into the weld is stopped, but its distribution in parts continues.

The model is built for the case of fusion welding using a heat source of medium density ~ 105 W/cm<sup>2</sup> at a temperature of 8000°C. To do this, the model uses the type of welding ARC welding with the following parameters [7]:

- Welding speed - 5 mm/s
- Voltage - 17 V
- Electric current - 100 A

Heat input is 340 J/mm, i.e. is within the values recommended for arc welding of aluminum alloys sensitive to heat treatment [8].

Other parameters of modeling of welding in the conditions of the Earth, the Moon and Mars are given in table 1 (data taken from open sources).

**Table 1**  
Simulation parameters for different conditions

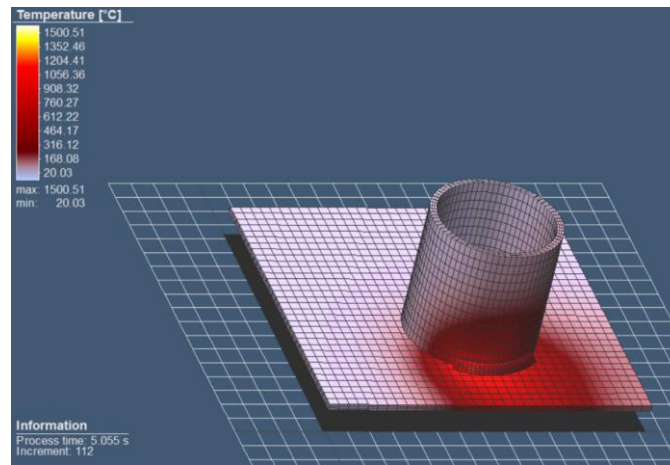
Conditions of welding	Starting temperature, °C	Starting part temperature, °C	Gravity on the structure, m/c <sup>2</sup>
Earth	+20	+20	9.80665
Mars	-123 (minimal)	-123	3.721
Moon	+116.8 (maximal)	+116.8	1.63444

Models in all cases of the image at zero coefficient of deformation.

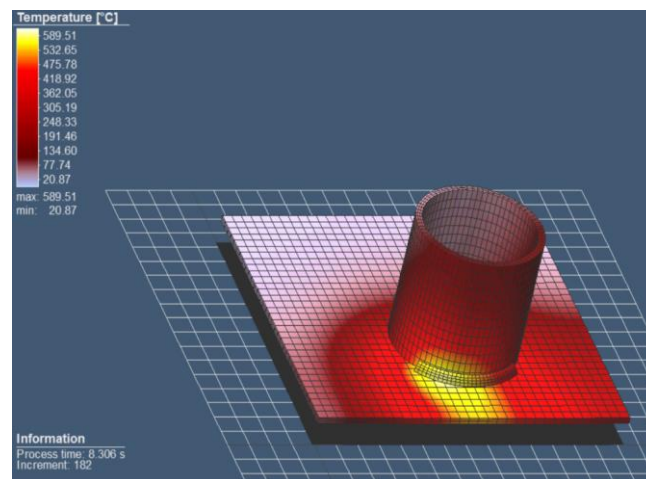
The screenshots show the moments of maximum heating and completion of modeling (state of the structure after 30 seconds from the beginning of the process).

In the upper left corner is a column of temperature fluctuations, and their distribution by color. The color changes depending on the results that are displayed on the model, so for different simulation parameters, the same temperature can be indicated by different colors.

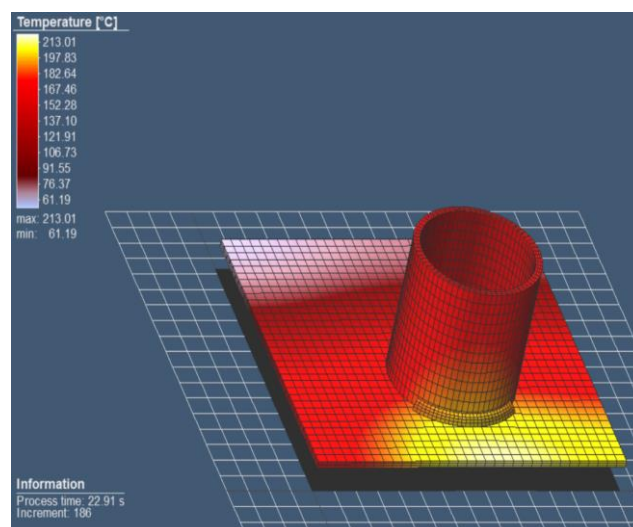
Results of simulation for different conditions are given on Fig.1 - 3.



a

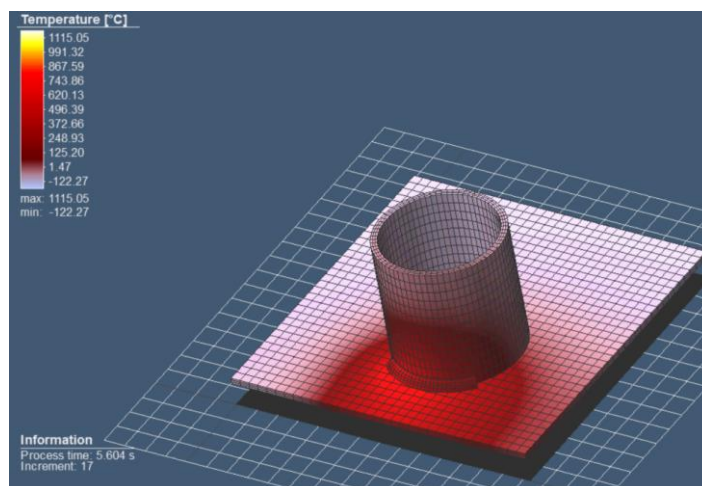


b

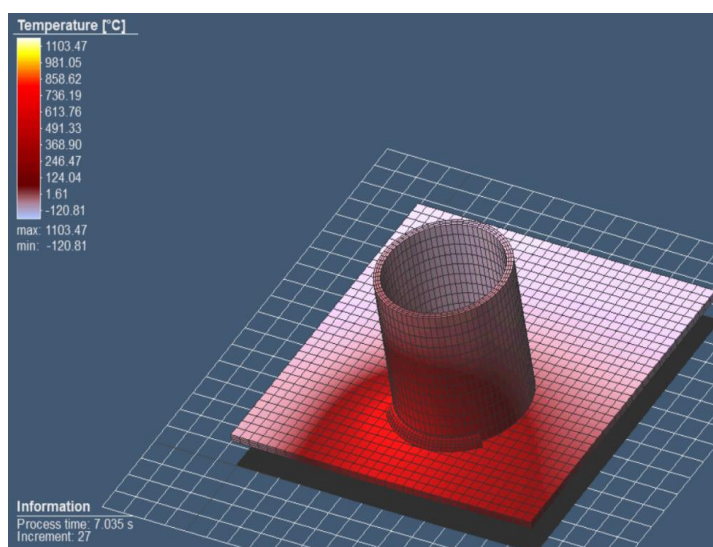


c

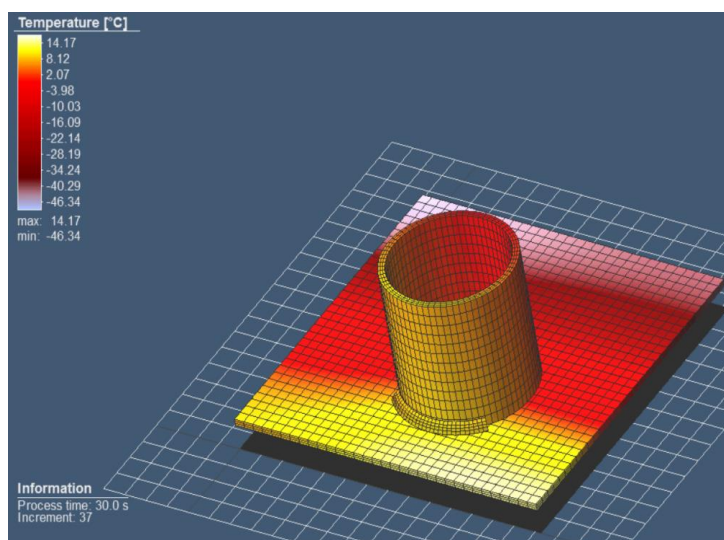
**Fig. 1.** Modeling of welding in terrestrial conditions: a – 5 s after the beginning of the process; b - completion of the welding process; c – 30 s from the beginning of welding



a

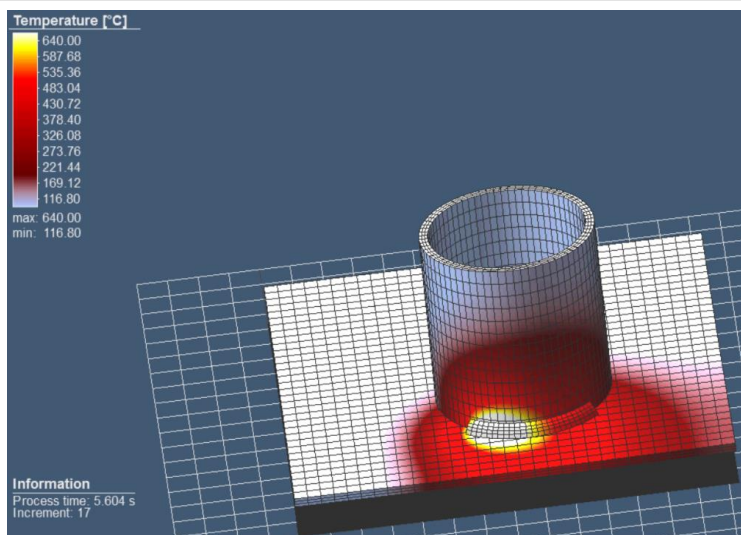


b

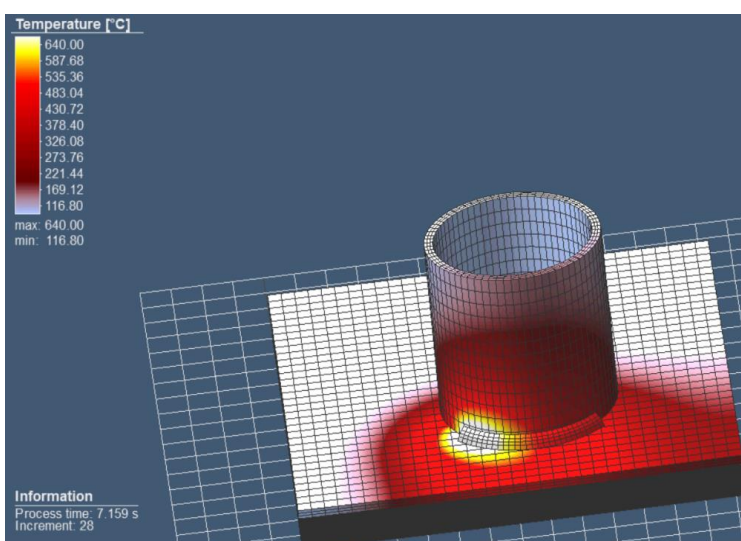


c

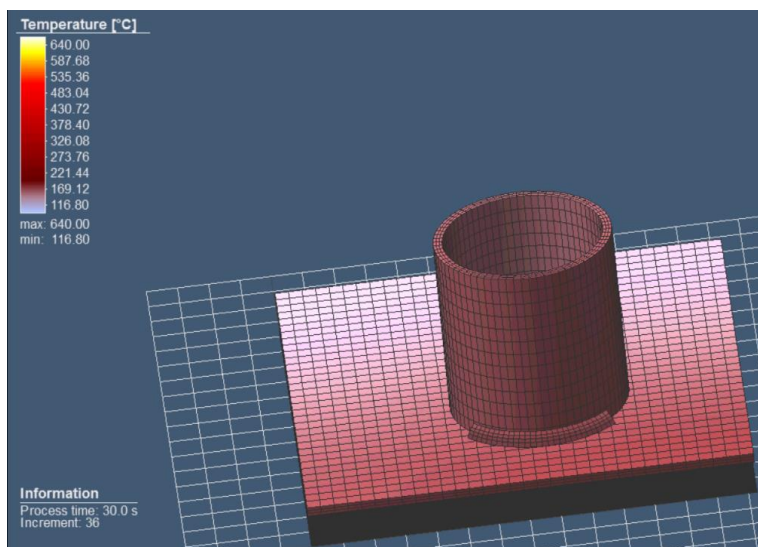
**Fig. 2.** Modeling of welding in Mars conditions: a – 5 s after the beginning of the process; b - completion of the welding process; c – 30 s from the beginning of welding



a



b



c

**Fig. 3.** Modeling of welding in Moon conditions: a – 5 s after the beginning of the process; b - completion of the welding process; c – 30 s from the beginning of welding



## 5 DISCUSSION OF RESULTS

The model for terrestrial conditions shows that after 3 seconds from the start of welding the most active temperature effect occurs in the area of 40x21x20 mm, and after 5 seconds this area expands to 60x21x20 mm. 30 seconds after, the entire surface of the structure, except for the most remote part of the corner with a bisector of 20 mm - was in conditions of adverse temperature effects.

Models for the conditions of Mars and the Moon show a similar nature of heat distribution, but differ significantly in temperature values.

In this simulation it is possible to observe changes in temperature in several processes, namely - heating, welding effects, heat distribution in the structure and the cooling process. Since all three simulations reflect a process that lasts about 7 seconds, it is obvious that further changes in the picture are the process of cooling parts with the simultaneous spread of heat from the hottest zone. At the lowest external temperature (-123°C - Mars) after 3 seconds the highest temperatures are observed in the area of 42x22x21 mm. After 12 seconds the temperature in the whole structure will rise, but at the same time its most remote edge has a temperature lower by an average of 110°C. After welding (the time interval is marked as the time after the 7th second), the part of the structure close to the weld has an average temperature of + 14°C, the average temperature throughout the structure ranges from -30°C to -3°C, and the most remote plate angle of 18x42x35 has the smallest influence, its temperature -46.34°C.

Given the sensitivity of the material to thermal cycles (susceptibility to quenching), it can be predicted that the reproduction of modern technological approaches to its welding will lead to deterioration of performance due to high values of cooling rates. Therefore, it will be advisable to either carry out pre-heating and associated heating, or switch to solid-phase welding technology, in which the temperature of the heat source is lower than the melting point of the metal structure.

For the conditions of the Moon on the third second the maximum temperature influence has a site of 47x15x23 mm. After 12 seconds the whole structure is under the influence of temperature changes, the temperature difference between its most remote edge and the average of the structure is 150°C. After welding (the time interval is marked as the time after the 7th second) the entire surface of the part was significantly affected, while the area adjacent to the far corner, measuring 20x40x36 mm has an increase in temperature by only 2°C. Thus, it is possible to transfer modern technological techniques without significant changes.

## 6 CONCLUSIONS

Modeling of the extraterrestrial welding process has shown that the general patterns of heat distribution from the heat source in the part remain unchanged. At the same time, the dimensions of the zone heated above the temperature threshold and the average temperature of the structure differ significantly. In some cases, it is possible to directly transfer modern technological techniques to extraterrestrial conditions.

### References

1. Paton, B. E., Kubasov, V. N. (1970). *Eksperyment po zvariuvanniu v kosmosi* [Experiment on welding in space]. Avtomat. Zvariuvannia. №5. [in Ukrainian].
2. Fomychev, S. K. (2012). *Svarochnyye protsessy y oborudovanye* [Welding processes and equipment]. Uchebnyk dlia stud. vyssh. ucheb. zaved., kotorye obuch. po naprav. podhot. "Svarka". K.: NTUU "KPI". [in Russian].

3. Chertov, I.M. (2012). *Zvarni konstruktsii* [Welded structures]. Navch. posib. dla stud. vyshchyykh navch. zakl., yaki navch. za napriamom pidhotovky "Zvariuvannia". K.: NTUU "KPI". [in Ukrainian].
4. Marochnyk stalei i splaviv [Vintage steel and alloys]. [http://www.splav-kharkov.com/choose\\_type\\_all.php](http://www.splav-kharkov.com/choose_type_all.php). [in Ukrainian].
5. Kaushik, Ya., Kant, S., Jawalkar, S C. (2015) A Review on use of Aluminium Alloys in Aircraft Components. *Journal on Material Science*. 3. 33–38.
6. Paton B.E., Dudko D.A., Bernadskyi V.N. y dr. (1976). Prymenenye svarky dla remonta kosmycheskykh ob'ektov [Application of welding for repair of space objects]. *Kosm. yssled. na Ukrainy*. 9. 3–5. [in Russian].
7. Nazemi, N., Ghrib, F., Sokolowski, J. (2013). The HAZ in Aluminum Welding Revisited. *CSCE 3rd Specialty Conference on Engineering Mechanics and Materials* [https://www.researchgate.net/publication/319141465\\_The\\_HAZ\\_in\\_Aluminum\\_Welding\\_Revisited](https://www.researchgate.net/publication/319141465_The_HAZ_in_Aluminum_Welding_Revisited)
8. Rojas, H., Molina-Ocampo, A., Valdez, S., Campillo, B. (2020). The impact of heat input on the microstructures, fatigue behaviors, and stress lives of TIG-welded 6061-T6 alloy joints. *Materials Research Express*. 7(12).126512 DOI:10.1088/2053-1591/abd136
9. Paton, B. E., Dudko, D. A., Bernadskyi, V. H. y dr. (1977). O vozmozhnosti ruchnoi elektronno-luchevoi svarky v kosmose [About the possibility of manual electron beam welding in space]. *Kosmycheskoe materiyalovedenye y tekhnolohiya*. M.:Hauka, 1977. 17–22. [in Russian].
10. Bondarev, A. A., Lapchynskyi, V. F., Lozovska, A. V. i insh. (1978). *Doslidzhennia struktury i rozpodily elementiv v zvarnykh ziednanniakh, vykonanykh elektronnym promenem na splavakh 1201 i Am-H6 v umovakh nevahomosti* [Investigation of the structure and distribution of elements in welded joints made of electron beam on alloys 1201 and Am-G6 under conditions of weightlessness]. M.: Nauka. [in Ukrainian].
11. Zahrebelnyi, A. A., Tsyhankov, O. S. (2002). Svarka v kosmosi [Quarrel in space]. *Zvariuvalne vyrobnytstvo*. №12. [in Ukrainian].
12. Paton, B. E., Paton, V. E., Dudko, D. A. i insh. (1973). *Kosmichni doslidzhennia v Ukraini* [Space research in Ukraine]. Kyiv: Nauk. dumka. [in Ukrainian].

## Література

1. Патон Б. Е., Кубасов В. Н. Эксперимент по зварюванню в космосі. Автомат. Зварювання, 1970. №5.
2. Фомичев С.К. Сварочные процессы и оборудование : учебник для студ. высш. учеб. завед., которые обуч. по направ. подгот. "Сварка". К.: НТУУ "КПИ", 2012. 488 с.
3. Чертов І.М. Зварні конструкції : (для самостійної роботи студентів ) : навч. посіб. для студ. вищих навч. закл., які навч. за напрямом підготовки "Зварювання". К.: НТУУ "КПИ", 2012. 140 с.
4. Марочник сталей і сплавів. 2003-2020 [http://www.splav-kharkov.com/choose\\_type\\_all.php](http://www.splav-kharkov.com/choose_type_all.php)
5. Kaushik Ya., Kant S., Jawalkar S C. A Review on use of Aluminium Alloys in Aircraft Components. *Journal on Material Science*, 2015. 3. 33–38.
6. Патон Б. Е., Дудко Д. А., Бернадский В. Н. и др. Применение сварки для ремонта космических объектов. *Косм. иссл. на Украине*, 1976. Вып. 9. С. 3–5.
7. Nazemi N., Ghrib F., Sokolowski J. The HAZ in Aluminum Welding Revisited. *CSCE 3rd Specialty Conference on Engineering Mechanics and Materials*, 2013 [https://www.researchgate.net/publication/319141465\\_The\\_HAZ\\_in\\_Aluminum\\_Welding\\_Revisited](https://www.researchgate.net/publication/319141465_The_HAZ_in_Aluminum_Welding_Revisited)
8. Rojas H., Molina-Ocampo A., Valdez S., Campillo B. The impact of heat input on the microstructures, fatigue behaviors, and stress lives of TIG-welded 6061-T6 alloy joints. *Materials Research Express*. 2020. 7(12). 126512 DOI:10.1088/2053-1591/abd136
9. Патон Б. Е., Дудко Д. А., Бернадский В. Н. и др. О возможности ручной электронной лучевой сварки в космосе. *Космическое материаловедение и технология*. М.: Наука, 1977. С. 17–22.

10. Бондарев А. А., Лапчинський В. Ф., Лозовська А. В. і інш. Дослідження структури і розподіли елементів в зварних з'єднаннях, виконаних електронним променем на сплавах 1201 і Ам-Г6 в умовах невагомості. М.: Наука, 1978.
11. Загребельний А. А., Циганков О. С. Сварка в космосі. Зварювальне виробництво, 2002. №12.
12. Патон Б. Е., Патон В. Е., Дудко Д. А. і інш. Космічні дослідження в Україні. Київ: Наук. думка, 1973.

**Kobzar Nataliia**

National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”

MSc

Dashavska str., 6/2, Kyiv, Ukraine, 03056

n.kobzar-2022@kpi.ua

ORCID:0000-0002-4355-9176

**Chvertko Yevgenia**

National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”

Ph.D., Associate Professor

6/2 Dashavska str., Kyiv, Ukraine, 03056

e.chvertko@kpi.ua

ORCID:0000-0003-3073-1034

*For references:*

Kobzar N., Chvertko Ye. (2022). Modeling of welding processes for transferring technologies to extraterrestrial conditions. *Mechanics and Mathematical Methods*. 4 (1). 86–95.

*Для посилань:*

Кобзар Н. П., Чвертко Є. П. Моделювання зварювальних процесів для застосування технологій у позаземних умовах. *Механіка та математичні методи*, 2022. Т. 4. №. 1. С. 86–95.



UDC 539.3:624.046.3

## ON THE OPTIMAL POSITION OF THE INTERMEDIATE SUPPORT OF THE COMPRESSED THREE-SPAN ROD AND ITS QUALITATIVE FEATURES

S. Bekshaev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract:** The optimization problem is considered, which consists in maximizing the main critical force of a three-span longitudinally compressed rod supported at the ends on absolutely rigid hinge supports due to the optimal choice of the position of one of the intermediate supports. It is known that in many cases this position is a node of the buckling form, which corresponds to the second critical force in the spectrum of the two-span rod formed by removing the moving support. A range of recent studies have described cases where the maximum critical force is reached at other positions. This, in particular, occurs at a finite stiffness of one or both end supports of the rod. The proposed work seeks the optimal position of the rigid intermediate support, provided that the second intermediate support has a finite stiffness and a fixed position. The compressive force is assumed to be constant along the length of the rod, bending stiffness can vary according to the length of the rod according to arbitrary way. It is established that under certain conditions the solution of this problem can be reduced to the solution of another, previously studied problem, which seeks the maximum critical force of a two-span rod by changing its length, at which some segment of the rod adds or removes at one end of the rod with the transfer of the corresponding hinged support at the end of the newly created rod. The paper finds and describes the characteristic qualitative features of the buckling forms, which correspond to the maximum of the main critical force, in particular the absence of deformation of the bending of the end span adjacent to the moving support. The limitations in which the approach proposed in the paper leads to the determination of the desired optimal position of the movable support are studied. The results are obtained mainly on the basis of the systematic use of qualitative methods and allow to obtain qualitative estimates for the localization of the moving support and the value of the corresponding critical force. An example illustrating the proposed approach and the reliability of the results of its application are considered.

**Keywords:** compressed rod, critical force, optimization, buckling form, length effect, qualitative sign.

## ПРО ОПТИМАЛЬНЕ ПОЛОЖЕННЯ ПРОМІЖНОЇ ОПОРИ СТИСНЕННОГО ТРИПРОЛІТНОГО СТЕРЖНЯ ТА ЙОГО ЯКІСНІ ОСОБЛИВОСТІ

Бекшаєв С. Я.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація:** У роботі розглядається задача оптимізації, яка полягає у максимальному підвищенні основної критичної сили трипролітного шарнірно опертого по кінцях на абсолютно жорсткі шарнірні опори поздовжньо стисненого стрижня за рахунок оптимального вибору положення однієї з проміжних опор. Відомо, що у багатьох випадках таким положенням є вузол форми втрати стійкості, що відповідає другій за номером критичній силі в спектрі двопрогонового стрижня, утвореного видаленням опори, що переміщується. У ряді досліджень останніх років були описані випадки, коли максимум критичної сили досягається при інших її положеннях. Це, зокрема, має місце при скінченій жорсткості однієї або обох кінцевих опор стрижня. У запропонованій роботі розшукується оптимальне положення жорсткої проміжної опори за умови, що друга проміжна опора має скінчену жорсткість та фіксоване положення.

Стискаюча сила передбачається постійною за довжиною стрижня, згинальна жорсткість може змінюватися за довжиною стрижня за довільним законом. Встановлено, що при певних умовах розв'язання цього завдання може бути приведено до розв'язання іншої, раніше дослідженої задачі, в якій розшукується максимум основної критичної сили двопрогнового стрижня за рахунок зміни його довжини, при якій на одному з кінців стрижня приєднується або видаляється деяка ділянка стрижня з перенесенням відповідної шарнірної опори у кінець новоствореного стрижня. В роботі виявлено і описано характерні якісні особливості форм втрати стійкості, які відповідають максимуму основної критичної сили, зокрема відсутність деформації вигину крайнього прольоту, що примикає до опори, яка переміщується. Вивчено обмеження, у яких запропонований у роботі підхід призводить до визначення шуканого оптимального положення переміщуваної опори. Результати отримано в основному на підставі систематичного використання якісних методів і дозволяють отримати якісні оцінки для локалізації опори, що переміщується, і значення відповідної критичної сили. Розглянуто приклад, що ілюструє запропонований підхід та достовірність результатів його застосування.

**Ключові слова** стиснутий стрижень, критична сила, оптимізація, форма втрати стійкості, вплив довжини, якісна ознака.

## 1 INTRODUCTION

Further abbreviations are used: CRF – critical force; BF – buckling form; 2nd BF – BF, which corresponds to the second CRF by number in the spectrum of CRFs.

For reliable operation of many engineering structures containing compressed elements, it is necessary to ensure their stability. In this regard, the task of finding ways to improve the stability of such elements, both at the design stage and during the operation of the structure, acquires great practical importance.

One of the ways to increase the stability of multi-span rods is to vary the position of their intermediate supports in order to increase their CRF. At the same time, the optimal positions of the movable supports, which provide the maximum of the main CRF of the rod, have some qualitative features. In particular, for a number of simple cases it has been established [1, 2] that the optimal position of the internal support is the node of the 2nd BF in the spectrum of the rod formed by the removal of the movable support. However, it cannot be guaranteed that this conclusion will be valid under various support conditions, just as it is impossible to guarantee the existence of a node at the 2nd BF of the rod. These circumstances prompted research, the results of which are presented in this paper.

## 2 LITERATURE ANALYSIS AND PROBLEM STATEMENT

As recent studies [3 – 7] have shown, under certain conditions, in particular, with finite stiffness of the extreme supports, the node of the 2nd BF, even if it exists, does not provide the maximum CRF. Under these conditions, the search for the optimal position requires a different approach and, in some cases, leads to the appearance of special semi-curved BFs with rectilinear horizontal sections. The cases considered so far have been limited to rods with absolutely rigid intermediate supports. At the same time, in practice, rods with elastic intermediate supports can be encountered, the optimization of which has its own features, and the study of these features is of great theoretical and practical interest. The results presented below refer to the solution of some of the problems that arise in this case. This solution is based on the use of qualitative methods.

## 3 THE PURPOSE AND OBJECTIVES OF THE STUDY

In this paper, the problem of determining the optimal position of an absolutely rigid intermediate support is considered using the example of a three-span rod (Fig. 1a), in which one intermediate support has a finite rigidity and a fixed position.

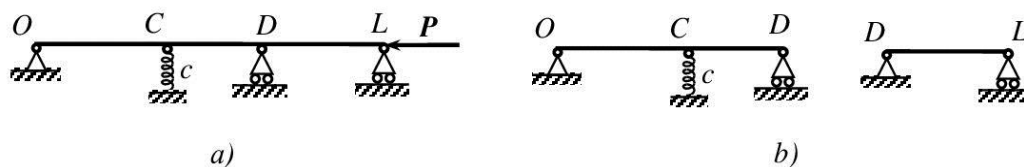


Fig. 1. The rod  $S$  to be optimized (a) and its components (b)

The ends of the rod are hinge supported on rigid supports. The distribution of bending stiffness along the length of the rod is assumed to be arbitrary. The compressive force in all sections is the same. We look for the optimal position of the rigid support. The optimal position is understood as such a position of the support, in which the main CRF of the rod reaches its maximum value.

## 4 RESEARCH RESULTS

4.1. Preliminary results. The following notations are used:

( $MN$ ) is a single-span rod, hinged at the ends  $M$  and  $N$  on absolutely rigid supports;  $P(MN)$  is the main CRF of the rod ( $MN$ ),  $A$  is the node of the 2nd BF of the rod ( $OL$ ),  $A_1$  and  $A_2$  are the nodes of the 3rd BF of the rod ( $OL$ ), numbered from left to right;

Further, the following results are systematically used.

4.1.1. The imposition of one constraint on a rod system containing compressed elements cannot decrease any of its CRFs and cannot make the CRF higher than the next one by number in the spectrum of the system before the constraint is imposed [1].

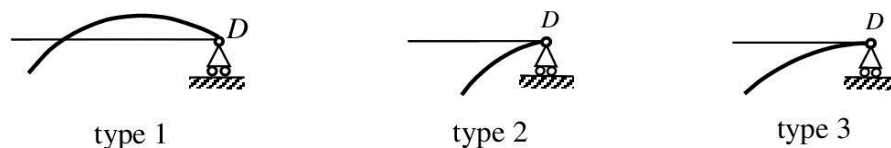
4.1.2. Let us agree to say that a constraint is established in a generalized BF node or that a constraint is orthogonal to a BF, if the work of the reaction of the constraint on this BF is equal to zero.

The number of CRFs, which are strictly less than some CRF, does not change as a result of imposing a constraint, if this constraint is not orthogonal to at least one of the BFs corresponding to this CRF.

In order to the multiplicity of the CRF not to decrease after the introduction of the constraint, it is necessary and sufficient that this constraint be imposed in the generalized node of each of the BFs corresponding to this CRF, which, therefore, will be the CRF of the system formed after the constraint has been set. In particular, for a simple CRF to be preserved in the spectrum after a constraint is set, it is necessary and sufficient that the constraint is superimposed in the generalized node of the corresponding BF [1].

4.1.3. The reaction  $R$  of the intermediate hinged support is considered positive when it is directed upwards. The slope angle  $\theta$  of the rod cross section is positive if it is turned clockwise. Then, for a sufficiently small displacement of the support to the right, the simple CRF increases if  $R\theta > 0$ , and decreases if  $R\theta < 0$ . If, at a certain position of the support, the CRF reaches an extremum, in this position  $R\theta = 0$  [8].

4.1.4. The CRF of a two-span rod  $OD$  with an elastic intermediate support (Fig. 1 *b* on the left) changes with a change in the length of the segment with the transfer of the extreme hinged support to the end of the elongated or shortened rod. In [9], the existence of such a value  $c_{cr}$  of the stiffness coefficient of the intermediate support was established that at  $c > c_{cr}$  the main CRF of the rod reaches a maximum at a certain length  $|CD|$ ; this maximum is greater than  $P(OC)$ .



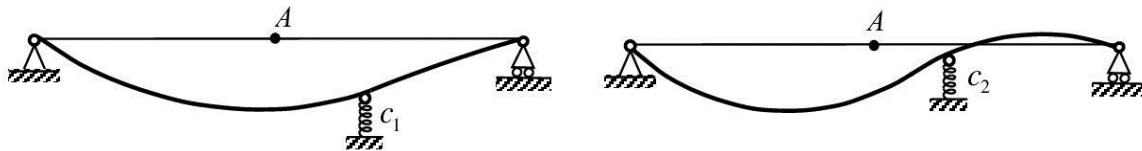
**Fig. 2.** Typical configurations of the BF of the rod at the end adjacent to the hinged support

The behavior of the main CRF of the rod  $OD$  with a change in its length is determined by the configuration of the end segment of the corresponding BF, adjacent to the movable support (Fig. 2), and this CRF with increasing length decreases for type 1 BF, increases for type 2 BF, and reaches a maximum for BF of the 3rd type, which has a zero slope of the end cross section. The value  $c_{cr}$  is equal to the stiffness coefficient of the elastic support, which provides the maximum increase in the main CRF of the two-span rod  $OD$  (Fig. 1 *b* on the left), provided that  $C$  is the node of the 2nd BF of the rod ( $OD$ ). It is defined by the equalities

$$P(OC) = P(CD) = c_{cr} / \left( \frac{1}{|OC|} + \frac{1}{|CD|} \right). \quad (1)$$

In particular, for a rod with the bending stiffness  $EJ$  constant along the length  $c_{cr} = 2\pi^2 EJ / |OC|^3$ . Generalizations of the results of [9] concerning the relationship between the CRFs and the length of the rod are presented in [10].

4.1.5. The main BF of a two-span rod, hinged with its ends on rigid supports, with an elastic intermediate support, has no nodes inside the segment containing a node of the 2nd BF of the rod, devoid of an intermediate support (Fig. 3) [11].



**Fig. 3.** Characteristic configurations of the main BF of a two-span rod.  $A$  – node of the 2nd BF of a single-span hinged rod,  $c_1 < c_2$

**4.2. Determination of the optimal position of the support  $D$ .** Mentally position ourselves so that the elastic support  $C$  (see Fig. 1 *a*) is to the left of the node  $A$  of the 2nd BF of the rod ( $OL$ ), and when searching for the optimal position of the support  $D$ , we restrict ourselves to the right segment  $CL$ , since it is less stable ( $P(OC) > P(CL)$ ).

4.2.1. **Approach idea.** The idea of finding the optimal position of the support  $D$  uses the mental division of the optimized rod into two parts (Fig. 1*b*). As noted in Sec. 4.1.4, at sufficiently high values of the stiffness coefficient  $c$  of the elastic support, the CRF of the left segment  $OD$  reaches its maximum value at a certain position  $D^*$  of the support  $D$  and, accordingly, at a certain length of the segment  $OD$ . If the cut  $D$  is located to the left of  $D^*$ , the CRF of the segment  $OD$  is less than its maximum. By moving the cut to the right, we will increase the CRFs of both the segments  $OD$  (until it reaches the maximum) and the right rod ( $DL$ ), and it is natural to assume that the CRF of the rod  $S$  will also increase. When the moved cut is in the position  $D^*$  that ensures the maximum CRF of the segment  $OD$ , the BF of this segment will belong to the 3rd type (see Sec. 4.1.4, Fig. 2), and its smooth conjugation with the undeformed segment  $DL$  forms a semi-curved BF of the optimized rod  $S$ , since “splicing” segments  $OD^*$  and  $D^*L$  is a superimposition of a constraint orthogonal to the corresponding BF of a split rod (Sec. 4.1.2). As follows from Sec. 4.1.3, the corresponding position of the support  $D$  satisfies the necessary condition for the extremum of the CRF of the rod  $S$ . Further, some sufficient conditions are established under which this position ensures the maximum of the main CRF of the rod  $S$ . In what follows, we will call the point  $D^*$  a conjugation point or a singular point of a semicurved BF.

4.2.2. **Theorem.** If at  $c > c_{cr}$  the main CRF corresponds to a semi-curved BF, then the optimal position of the support is the conjugation point of this BF.

The existence of a semi-curved BF for  $c > c_{cr}$  follows from what was said in Sec. 4.2.1. Therefore, to prove the theorem, it suffices to prove that this BF corresponds to the maximum of CRF, if it is also the main one.

If the considered main CRF is a multiple, then (regardless of the configuration of BFs corresponding to it) the movement of the support can be carried out by first removing the support, thereby reducing the main CRF and not changing the 2nd CRF (Sec. 4.1.1), and then installing it in a new place, after whereby the main CRF becomes no higher than the initial multiple CRF, i.e. that this initial CRF is the maximum, which was to be proved.

Next, we consider the case when the considered CRF is simple.

First, let us prove that the installation of a movable support at the conjugation point of the BF provides a local maximum of CRF.

Let  $D^*$  be a singular point of a semicurved BF. Moving the support to the right of  $D^*$  can be done in two steps. On the first, keeping the support in position  $D^*$ , an additional support is placed on the right in a straight segment. This support does not distort the semicurved BF and does not change the corresponding main CRF of the rod  $S$ . At the second step, the support that was in  $D^*$  is removed, which leads to a decrease in the CRF. Thus, it has been established that when the support is displaced to the right of  $D^*$ , CRF decreases.

With a small displacement of the support to the left, we consider two cases: the first case is that the CRF of the rod ( $D^*L$ ) is less than or equal to the CRF of the entire rod  $S$ , the second is that the CRF of the rod ( $D^*L$ ) is greater than the CRF of the rod  $S$ .

In the first case, with a small displacement of the support  $D$  from the position  $D^*$ , a rod is formed, cutting which on the support  $D$ , we get two rods –  $OD$  and  $(DL)$ , each of which has CRF less than the CRF of the original rod. By imposing a constraint that eliminates the cut, it is impossible to increase the main CRF above the second one in the spectrum (Sec. 4.1.1), whence it follows that as a result of the displacement, the CRF decreased.

In the second case, we note that the spectra and BFs of the rod  $S$  and the two-span rod  $OD$  (Fig. 1b on the left) continuously depend on the position of the support  $D$ . The same conclusion is also valid for the rod  $\bar{S}$  formed from  $S$  by setting a rigid clamping, combined with the support  $D$ . Then there is such a neighborhood of the point  $D^*$  that when moving the support  $D$  to any of its points to the left of  $D^*$

- a) the main CRFs of rods  $S$  and  $\bar{S}$  remain simple,
- b) the main CRF of a two-span rod  $OD$  decreases when the support  $D$  moves to the left and it corresponds to a BF of the 2nd type,
- c) CRF of rod  $(DL)$  remains greater than CRF of the rod  $S$  and the reaction of the displaced support at buckling of the rod  $S$  along the main BF remains directed downward, i.e. in the direction of the transverse displacement of the cross section  $C$ .

Let us consider a two-span rod  $OD$  (Fig. 1b on the left), introduce elastic clamping in its cross section  $D$ , and watch the change in its main CRF and the BF corresponding to it with a continuous increase in the clamping stiffness. The following statements are true.

I. At no finite value of the clamping stiffness, the slope of the cross section  $D$  of the main BF vanishes. Otherwise, the rod  $OD$ , in the absence of clamping, would have a main BF of the 3rd type, which contradicts statement b) above.

II. At no value of the clamping stiffness, the deflection in the cross section  $C$  of the main BF of the rod  $OD$  vanishes. Otherwise, with some clamping stiffness, the main BF of the single-span rod  $OD$ , formed by removing the elastic support  $C$ , would have a node at  $C$ , which would imply the existence of two internal inflection points of the main BF of this rod. This would mean that its main CRF is higher than the 2nd CRF of the rod  $(OD)$ . At the same time (Sec. 4.1.1), one constraint in the form of clamping introduced in the cross section  $D$  of the rod  $(OD)$  cannot raise the main CRF above the 2nd CRF of the rod  $(OD)$ .

III. For any finite clamping stiffness in the cross section  $D$ , the slope of this section in the main BF of the rod  $OD$  has the same direction as the rectilinear segment  $CD$ . This follows from the fact that at zero clamping stiffness in the main BF (type 2) of the rod  $OD$ , these directions coincide, and with a continuous increase in clamping stiffness, this coincidence is preserved, because otherwise, one of statements I or II would not hold.

In consist of the rod  $S$ , the fragment  $OD$  can be considered as a rod elastically clamped on the support  $D$ , since joining the segment  $DL$ , provided that  $\text{CRF of } (DL) > \text{CRF of } S$ , at buckling is equivalent to the introduction of elastic clamping in the section  $D$ .

Statements I - III lead to the conclusion that with a small moving of the support  $D$  to the left of  $D^*$ , the main BF of the rod  $S$  can be schematically represented in the form of Fig. 4, where the



arrows indicate the directions of the reactions of the supports. As can be seen from the figure, condition  $R\theta > 0$  is satisfied in the section  $D$  of the rod, which, in accordance with Sec. 4.1.3, means that the main CRF of the rod  $S$  decreases when the support  $D$  moves to the left.

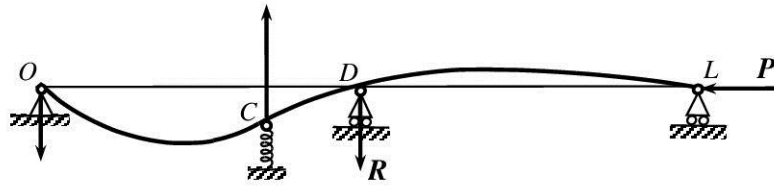


Fig. 4. BF of the rod  $S$  with a small displacement of the support  $D$  to the left from  $D^*$

Thus, the main CRF of the rod  $S$  decreases when the support  $D$  is moved both to the right and to the left from the position  $D^*$ , which implies that when the support  $D$  is placed in the position  $D^*$ , the main CRF has a local maximum (which does not exclude the possibility of other local extrema, among which may be the desired absolute maximum of the CRF).

Let  $P(D)$  be the main CRF of the rod  $S$  corresponding to the position of the support in  $D$ . If, for some position  $D$  to the left of  $D^*$ , the inequality  $P(D) > P(D^*)$  was satisfied, between  $D$  and  $D^*$  there would be a position  $D'$  providing the minimum CRF, for which, according to Sec. 4.1.3, one of the equalities  $\theta = 0$  or  $R = 0$  would hold. The first is impossible due to the following circumstances.

If, for  $\theta = 0$ , the corresponding main BF was deformed on both sides of the support  $D'$ , the installation of a rigid clamping on this support would preserve  $P(D')$  in the spectrum (Sec. 4.1.2), but would make it double, because it would correspond to two linearly independent forms having a horizontal segment on one side of the support. This would mean the existence in the spectrum before the introduction of a rigid clamping CRF smaller than  $P(D')$ , i.e.  $P(D')$  would not be the main one.

If the value  $P(D')$  corresponded to a semi-curved BF, the part of the rod either to the left or to the right of  $D'$  would remain horizontal. If the left segment is not deformed, the right part ( $D'L$ ) must have a zero slope of BF in the cross section  $D'$ , which is impossible, since the BFs of a hinged single-span rod ( $D'L$ ) are solutions of a 2nd order linear differential equation [12], for which the only solution vanishing at the boundary together with the first derivative, is the identical zero.

If the right section is not deformed, the inequality  $P(D') > P(D^*)$  must be satisfied, because the corresponding BF is the BF of a rod formed from the  $S$  by imposition of constraints that prevent deformation of the section  $D'L$  (Sec. 4.1.1, 4.1.2). This inequality contradicts the assumption that  $P(D')$  is minimum.

Equality  $R = 0$  means that  $D'$  is the node of the corresponding BF, which, taking into account the minimality of  $P(D')$ , should be the main one for the rod formed from  $S$  by removing the support  $D$ . But according to Sec. 4.1.5 (see Fig. 3), the main BF of such a rod does not have nodes in the segment  $CL$ .

Thus, the assumption that there is a position to the left of  $D^*$  that ensures the minimum of the main CRF of the rod  $S$  leads to a contradiction, from which it follows that as the support  $D$  moves continuously to the left from  $D^*$  to  $C$ , the CRF  $P(D)$  monotonically decreases and, therefore, cannot exceed  $P(D^*)$ .

For any position  $D$  to the right of  $D^*$ , the inequality  $P(D) > P(D^*)$  is satisfied due to the same circumstances as the inequality  $P(D') > P(D^*)$  above. Thus, for all positions of the



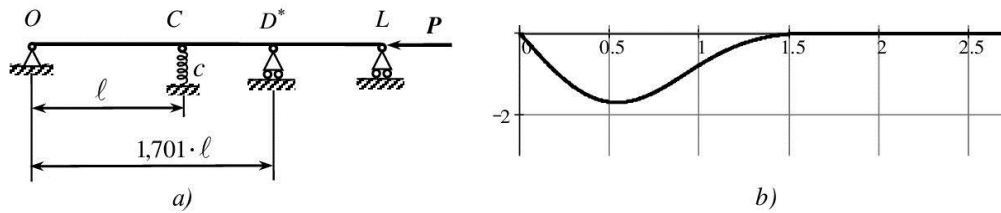
support  $D$ , both to the right and to the left of  $D^*$ , the relation  $P(D^*) > P(D)$  is satisfied, from which the validity of the theorem follows.

**Remark.** The requirement to locate the support  $C$  to the left of the node  $A$  is essential. Otherwise, it can be proved that the semi-curved BF described in Sec. 4.2.1, which can exist at a sufficiently high stiffness  $c$  and for  $P(OC) < P(CL)$ , provides a local maximum of main CRF, which may not be absolute.

**4.2.3. Limitations.** The proved theorem describes the sought-for optimal position only under the condition that the considered CRF is the main one. This condition is satisfied, in particular, if the length of the rod  $S$  is such that the segment  $D^*L$  is more stable than  $OD^*$ ,  $P(D^*L) > P(D^*)$ , because in this case, the loss of stability occurs due to the buckling of the segment  $OD^*$ . Elongation or shortening of the rod  $S$  due to the segment  $D^*L$  does not affect the value of its CRF, equal to  $P(D^*)$ , determined by the buckling of the curved segment  $OD^*$  of the semi-curved BF, however, if  $|D^*L|$  exceeds a certain limit value  $|D^*L|_{\text{lim}}$ ,  $P(D^*)$  remains in the spectrum of the CRFs of the rod  $S$ , but becomes not the main one, but one of the senior ones. For example, if the length of the rod  $S$  is such that the node  $A_1$  of the 3rd BF of the rod  $(OL)$  is located to the right of the elastic support  $C$ , at any position of the support  $D$ , the CRF of the rod  $S$  will be less than the 3rd CRF of the rod  $(OL)$  (because the supports  $C$  and  $D$  do not fall into the nodes  $A_1$  and  $A_2$  of its 3rd BF, (see Sec. 4.1.2) equal to the CRF of the rod  $(OA_1)$ ). In this case, the CRF  $P(D^*)$  of the rod  $S$  corresponding to the semi-curved BF described in Sec. 4.2.1 will be present in the spectrum of CRFs of the rod  $S$ , but will not be the main one, because according to Sec. 4.1.4  $P(D^*) > \text{CRF}(OC) > \text{CRF}(OA_1)$ .

**4.2.4. Limit length.** The following considerations can be used to determine  $|D^*L|_{\text{lim}}$ . Let  $P(D^*)$  be a simple main CRF of the rod  $S$ . If you increase its length by moving the support  $L$ , you will find its position when its 2nd CRF, decreasing, becomes equal to  $P(D^*)$ , which, thus, will become double and, with a further increase in the length of the rod  $S$ , will become the second in its spectrum (due to a change in number). This position marks the limit length  $|D^*L|_{\text{lim}}$ . Then, from two linearly independent BFs of the rod  $S$  corresponding to  $P(D^*)$ , one can form a BF having a node at  $D^*$  or at  $C$ . This BF will belong to the spectrum of the rod formed from the  $S$  by removal of the support  $D$ . As a result of the removal of the constraint, the main CRF will become smaller and  $P(D^*)$  will be the second in the spectrum of the two-span rod (without support  $D$ ), which corresponds to the BF with the node in  $D^*$ . Zero deflection in the section  $D^*$  of the 2nd BF of a two-span rod, compressed by force  $P(D^*)$ , can serve as a condition for determining the limiting length. Instead  $D^*$ , you can take the cross section  $C$ , but in a different rod, removing the support  $C$  and keeping the support  $D$ .

**4.2.5. Example.** The results of the work are illustrated by a numerical example in which the rod  $S$  (Fig. 5 a) has a constant bending stiffness along its length,  $EJ = \text{const.}$ ,  $c_{\text{cr}} = 2\pi^2 EJ / \ell^3$ ,  $c = 2c_{\text{cr}}$ .



**Fig. 5.** Optimal prismatic rod *S* (a) and its main semi-curved BF (b)

As a result of the analysis of the exact equation of CRFs, got on the basis of exact expressions for the influence functions of a compressed prismatic rod [12], the optimal position of the support *D* was found at a distance  $1,701 \cdot \ell$  from the left end of the rod. The corresponding value of CRF is  $P_{\max} = 1,181 \cdot P_E$ , where  $P_E = \pi^2 EJ / \ell^2$ , and the BF corresponding to it, normalized so that the reaction of the elastic support is equal to 1, calculated on the basis of the same expressions, is shown in Fig. 5 b; ordinates are given in ratio to  $\ell^3 / \pi^3 EJ$ , abscissas - in ratio to  $\ell$ . This form retains its configuration and remains the main one until the distance  $|DL|$  exceeds the limit value  $|DL|_{\lim} = 1,036 \cdot \ell$  calculated from the considerations given in Sec. 4.2.4.

## 5 RESEARCH RESULTS DISCUSSION

The results of the work reveal some little-known aspects of the operation of longitudinally compressed rods. On their basis, answers can be obtained to a number of questions that arise during the operation and design of structures containing compressed elements. In particular, the presence of undeformed zones in the case of buckling of optimal rods gives the designer important and useful information, since in some cases it makes it possible to achieve savings due to these zones. If it is necessary to strengthen the structure, it also makes no sense to establish any constraints in these zones, since, as follows from the results of the work, these constraints will not be able to increase its critical force.

## 6 CONCLUSIONS

The problem of determining the position of an intermediate hinged support of a three-span rod, which ensures the maximum value of its main critical force, is considered, provided that the second intermediate support has a fixed position and finite stiffness. It is shown that the solution of the formulated problem depends on the stiffness and position of the intermediate elastic support, on the length of the rod, and also on the value and distribution of the bending stiffness, and qualitatively different solutions correspond to different combinations of these parameters. The conditions that must be satisfied by the stiffness and position of the elastic support are specified, under which the buckling of the optimal rod occurs in a semi-curved form, in which the segment of the rod on one side of the movable support remains undeformed. The results obtained allow us to better understand the behavior of compressed rods and can be used in the design and operation of engineering structures containing compressed elements.

The subject of further research should be a more complete and accurate determination of combinations of rod characteristics that provide qualitatively different solutions and the extension of conclusions to multi-span rods and more complex bar systems.

## References

- 1 Nudelman Ya. L. (1949). *Metody opredelenia sobstvennykh chastot i kriticheskikh sil dlya sterzhnevyykh sistem* [Methods of determination of natural frequencies and critical forces of bar systems]. M. - L.: GTTI. [in English].
- 2 Nudelman Ya. L. (1939). Ustoychivost' uprugogo opertykh balok [Stability of elastically supported bars]. *PMM*. III (4). 33 – 48. [in Russian].
- 3 Bekshaev S. Ya. (2015). Ob optimal'nom raspolozhenii promezhutochnoy opory prodol'no szhatogo sterzhnya [On the optimal location of the intermediate support of longitudinally compressed bar]. *Visnyk Odes'koyi derzhavnoyi akademiji budivnytva ta arkhitektury*. 60. 400 – 406.
- 4 Bekshaev S. Ya. (2016). Kachestvennyye metody v zadachah povysheniya ustoychivosti szhatykh sterzhney [Qualitative methods in problems of increase of stability of compressed bars]. *Visnyk Kyivivs'koho natsional'noho universytetu tekhnolohiy ta dyzaynu. Seriya "Tekhnichni nauki"*. 3 (98). 74 – 82 [in English].
- 5 Bekshaev S. Ya. (2016). Poluizognutyie formy poteri ustoychivosti i ih ekstremal'nye svoystva [Semi-curved forms of buckling and its extremal properties]. *Contemporary problems of natural sciences. Abstr. of 5-th international scientific conference "Tarapov readings – 2016"*. Kharkov, Ukraine, March, 1 – 15. 81 – 82. [in Russian].
- 6 Bekshaev S. Ya. (2016). Poluizognutyie formy poteri ustoychivosti v zadache optimizatsii szhatogo trjohproljotnogo sterzhnya [Semi-curved forms of buckling in the problem of optimization of compressed three-span rod]. *Visnyk NTUU "KPI". Ser. Mashinobuduvannya*. 2 (77). 132 – 139. [in Russian].
- 7 Bekshaev S. Ya. (2019). Ob optimal'nom polozhenii promezhutochnoy opory trehproljotnogo sterzhnya [On the optimal position of the intermediate support of a three-span rod]. *Materials XX mizhnarodnoi naukovo-technichnoi konferencii "Progresivna tehnika, tehnologiya ta inzhenerna osvita"*. 23 – 25.
- 8 Nudelman Ya. L., Giterman D. M., Bekshaev S. Y. (1976). Vliyanie raspolozheniya uprugih opor na prodol'ny izgib mnogoprolyotnogo sterzhnya [Influence of location of elastic supports on buckling of multispan bar]. Abstract information on the completed scientific research in the universities of the Ukrainian SSR. Structural mechanics and design of structures. 7. 18. [in Russian].
- 9 Bekshaev S. Ya. (2018). Povyszenie ustoychivosti sterzhnya za schet izmeneniya dliny [Increasing the stability of the rod by changing the length]. *«World Science»*, № 6 (34). 2, 12 – 16.
- 10 Bekshaev S. Ya. (2018). O vliyanii dliny sterzhnya na ego kriticheskie sily [On the influence of the rod length at its critical forces]. *Proceedings of the VII International Scientific and Practical Conference «International Trends in Science and Technology»*. 1. 59 – 64.
- 11 Bekshaev S. Ya. (2016). Nekotorye voprosy ustoychivosti mnogoprolyotnykh sterzhney [Some questions of stability of multi-span continuous rods]. *Visnyk Odes'koyi derzhavnoyi akademiji budivnytva ta arkhitektury*. 65, 21 – 27.
- 12 Timoshenko S. P., Gere J. M. (1961). *Theory of elastic stability*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill.

## Література

1. Нудельман Я. Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем. М.-Л.: ГТТИ, 1949. 176 с.
2. Нудельман Я. Л. Устойчивость упруго опертых балок. ПММ. т. III, вып. 4, 1939. С. 33 – 48.
3. Бекшаев С. Я. Об оптимальном расположении промежуточной опоры продольно сжатого стержня. Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Одеса, 2015. Вип. №60. С. 400 – 406.
4. Бекшаев С. Я. Качественные методы в задачах повышения устойчивости сжатых стержней. Вісник Київського національного університету технологій та дизайну. Серія «Технічні науки», 2016. № 3(98). С. 74 – 82.
5. Бекшаев С. Я. Полуизогнутые формы потери устойчивости и их экстремальные свойства. Тезисы докладов 5-й международной научной конференции [Современные проблемы естественных наук](#) «Тараповские чтения – 2016», Харьков, 1 – 15 марта 2016 г. С. 80 – 81.

6. Бекшаев С. Я. Полуизогнутые формы потери устойчивости в задаче оптимизации сжатого трехпролетного стержня. Вісник НТУУ «КПІ». Серія машинобудування, 2016. №2 (77). С. 132 – 139.
7. Бекшаев С. Я. Об оптимальном положении промежуточной опоры трехпролетного стержня. Матеріали ХХ міжнародної науково-технічної конференції «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта», 10 – 13 вересня 2019 р., м. Київ – м. Херсон. 2019. С. 23 – 25.
8. Нудельман Я. Л., Гитерман Д. М., Бекшаев С. Я. Влияние расположения упругих опор на продольный изгиб многопролетного стержня. «Реферативная информация о законченных научно-исследовательских работах в вузах Украинской ССР. Строительная механика и расчет сооружений». Киев. «Вища школа», 1976. Вып.7. С. 18.
9. Бекшаев С. Я. Повышение устойчивости стержня за счет изменения длины. «World Science», 2018. № 6 (34). Vol. 2. p. 12 – 16.
10. Бекшаев С. Я. О влиянии длины стержня на его критические силы. Proceedings of the VII International Scientific and Practical Conference «International Trends in Science and Technology», 2018. Vol. 1. November 30, 2018, Warsaw. Poland. p. 59 – 64.
11. Бекшаев С. Я. Некоторые вопросы устойчивости многопролетных стержней. Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури, 2016. Вип. №65. Одеса. С. 21 – 27.
12. Timoshenko S. P., Gere J. M. Theory of elastic stability. New York. McGraw-Hill, 1961. second edition. 541 pp.

**Sergey Bekshaev**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Senior Lecturer  
Didrihsona str., 4, Odessa, Ukraine, 65029  
s.bekshayev@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-5752-5321

*For references:*

Bekshaev S. (2022). On the optimal position of the intermediate support of the compressed three-span rod and its qualitative features. Mechanics and Mathematical Methods. 4 (1). 96–106.

*Для посилань:*

Бекшаев С. Я. Про оптимальне положення проміжної опори стисненого трипролітного стержня та його якісні особливості. Механіка та математичні методи, 2022. Том 4. Вип. 1. С. 96–106.

Наукове видання

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ  
MECHANICS AND MATHEMATICAL METHODS

Науковий журнал

(українською та англійською мовами)

Відповідальний за випуск: Ковров А. В.

Підписано до друку 26.06.2022 р.  
Формат 60×84/8 Папір офісний Гарнітура Times  
Цифровий друк. Ум.-друк. арк. 12,94.  
Наклад 50 прим. Зам. №21-16Е

Видавець і виготовлювач:  
**Одеська державна академія будівництва та архітектури**  
Свідоцтво ДК № 4515 від 01.04.2013 р.  
Україна, 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 4.  
тел.: (048) 729-85-34, e-mail: [rio@ogasa.org.ua](mailto:rio@ogasa.org.ua)

---

Надруковано в авторській редакції з готового оригінал-макету  
в редакційно-видавничому відділі ОДАБА