

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ У ТОВСТИХ ПЛИТАХ ПРИ ЛОКАЛІЗОВАНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Соляр Т. Я.¹, Соляр О. І.¹

¹*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України*

Анотація: Розглянуто задачу дослідження напружень у плитах, які перебувають під дією зосереджених сил і локально розподіленого навантаження. Визначення напружень проведено на основі співвідношень тривимірної теорії пружності з використанням двох методів. У першому використано символічний метод Лур'є з додатковим застосуванням формул розкладу Ващенко-Захарченко. Розв'язок побудовано у вигляді рядів, які експоненціально збігаються у віддалених від прикладених сил точках. Однак ці ряди збігаються повільно в околі прикладеного навантаження. У зв'язку з цим розв'язок задачі побудовано іншим методом, з використанням інтегрального перетворення Ханкеля. Запропоновано підхід знаходження особливих інтегралів, які виникають у задачах теорії пружності для плит. Після перетворень отримано співвідношення для визначення напружень, в які входять інтеграли від функцій експоненціально загасаючих на нескінченності. Наведено також співвідношення для визначення напружень у плитах на основі наближених рівнянь, які базуються на гіпотезах Кірхгофа-Лява. Для цього випадку в аналітичному вигляді наведено розв'язки для напружень при дії зосереджених сил та при локально розподіленому навантаженні. На основі отриманих співвідношень виконано розрахунки напружень у плиті, яка перебуває в умовах згину під дією системи само зрівноважених сил або під дією розподіленого навантаження. Встановлено випадки, коли напруження, які знайдені на основі елементарних формул, що отримані на основі рівнянь Кірхгофа-Лява з достатньою для практики точністю можуть бути застосовані в задачах згину плит. Зокрема встановлено, що визначені напруження на протилежній межі від прикладеного локально навантаження виявились розтягувальними і водночас практично точними, якщо область дії зусиль більша за товщину плити. При цьому знайдені напруження під прикладеним навантаженням визначаються з більшими похибками. Однак ці напруження є стискувальними і не є основними в розрахунках на міцність бетонних матеріалів.

Ключові слова: плита, напруження, тривимірна задача теорії пружності, рівняння Кірхгофа-Лява, символічний розв'язок Лява, формула розкладу Ващенко-Захарченко, перетворення Ханкеля.

DETERMINATION OF STRESSES IN THICK PLATES UNDER LOCALIZED LOADS

T. Solyar¹, O. Solyar¹

¹*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NASU*

Abstract: The problem of investigating the stresses in the plates, which are subjected to the action of concentrated forces and locally distributed load is considered. The stresses were determined on the basis of the relations of the three-dimensional theory of elasticity using two methods. The first uses the symbolic Lurie method with the additional application of Vashchenko-Zakharchenko expansion formulas. The solution is constructed in the form of series, which exponentially converge at points distant from the applied forces. However, these series converge slowly in the vicinity of the applied load. In this regard, the solution of the problem is constructed by another method, using the Hankel integral transformation. The approach to find special integrals appearing in problems of the theory of elasticity for plates is proposed. After transformations, the relations for determining the stresses that include the integrals of the functions exponentially attenuating at infinity are obtained. The relations for determining the stresses in the plates on the basis of approximate equations using the Kirchhoff-



Lev hypotheses are also given. For this case, the solutions for stresses subjected to the action of concentrated forces and under locally distributed load are given in analytical form. There are cases when stresses found by the elementary formulas, obtained on the basis of Kirchhoff-Lev equations with sufficient accuracy for practice, can be applied in plate bending problems. In particular, it is found that the determined stresses at the boundary opposite to the applied local load turn out to be tensile and at the same time practically accurate if the force is greater than the thickness of the plate. In this case the stresses found under the applied load are determined with larger errors. However, these stresses are compressive and are not essential in the calculation of strength of concrete materials.

Keywords: Plate, stress, three-dimensional problem of the theory of elasticity, Kirchhoff-Lev equation, symbolic Lev solution, Vashchenko-Zakharchenko expansion formula, Hankel transformation.

1 ВСТУП

У техніці та будівництві широко використовуються пластинчаті елементи конструкцій, які перебувають в умовах згину. Тому дослідженню напружено-деформованого стану під дією згинних навантажень присвячено значну кількість робіт. При дослідженні напружень у плитах та оболонках в літературі, як правило, використовують наближені теорії, які базуються на певних гіпотезах. Зокрема, найбільш застосовною є технічна теорія, яка базується на гіпотезах Кірхгофа-Лява. Однак при дослідженні напружень біля локально прикладених навантажень виникає складний напружений стан, який може істотно відрізнятися від лінійного, який приймають в технічній теорії. Тому для достовірного визначення таких напружень необхідно використовувати тривимірну теорію пружності. Ці рівняння значно складніші за рівняння технічної теорії, тому вони в літературі використовуються тільки в окремих випадках. Нижче розглянуто задачі визначення напружень у товстих плитах на основі тривимірної теорії. Отримані результати можуть бути використані також і для локально навантажених пологих оболонок.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Методи розрахунку напружено-деформованого стану пластин різної форми на основі технічної теорії наведено в працях [11, 12]. Для пластин прямокутної форми ефективним виявився метод рядів Фур'є [1, 7]. При розгляді пластин складної форми, послаблених отворами використовуються числові методи, які базуються на методах скінчених або граничних елементів [9, 10, 13]. Отримані результати на основі прикладних теорій є достатньо точними для тонких пластин, навантажених розподіленим навантаженням.

Дослідження задач про пружну рівновагу пластин у тривимірній постановці розглянуто в працях [4, 6, 8]. Для розв'язування таких задач використовують метод інтегральних перетворень. Напруження і переміщення визначаються через невластні інтеграли, які є повільно збіжними. Для деяких випадків, коли шар навантажений зосередженими силами, в [8] запропоновано спосіб обчислення інтегралів методом лишків. Однак такі розв'язки виражені через ряди, які виявились повільно збіжними в околі прикладених сил.

Для обчислення інтегралів, які виникають в задачах теорії пружності для шару, в [6] запропоновано наближений метод, у якому для функції, що є множником для підінтегральних функцій

$$f(u) = \frac{u}{u + sh u}$$

використано апроксимацію вигляду

$$f_1(u) = (-1.55u + 1/2)e^{-1.4u} + 2ue^{-u}.$$

На основі цієї апроксимації в [6] наближено отримано вирази для переміщень і напружень у шарі, що знаходиться під дією зосереджених стискувальних сил, в аналітичному вигляді.

Символічний метод побудови розв'язків рівнянь теорії пружності для шару запропонований в роботах Лур'є [4]. На основі цього методу в [3] запропоновано метод однорідних розв'язків, який використовують при дослідженні напружень біля отворів. Доведено можливість, за допомогою однорідних розв'язків задовольнити крайові

умови для деякого класу плоских задач для прямокутної області, а також задач про згин прямокутної плити.

У праці [5], на основі символічного методу Лур'є, побудовано неоднорідні розв'язки задач теорії пружності для плит, навантажених розподіленим навантаженням.

Розглядається товста пластина $-h \leq z \leq h$. Нехай пластина перебуває під дією зусиль, прикладених до межі при $z = \pm h$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_z = \sigma_{\pm},$$

де $\sigma_{\pm} = \sigma_{\pm}(x, y)$ – відомі функції.

Покладемо, що прикладене навантаження є самозрівноваженим.

Прийmemo:

$$\sigma_{\pm} = q \pm p,$$

де $q = 0.5(\sigma_+ + \sigma_-)$, $p = 0.5(\sigma_+ - \sigma_-)$.

Побудуємо ефективний розв'язок поставленої задачі та виконаємо на основі нього дослідження напружень при локалізованих навантаженнях у шарі.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для розв'язування задачі окремо розглянемо симетричну й антисиметричну складові.

Симетричний випадок. Розглянемо випадок, коли при $z = \pm h$ задано напруження

$$\sigma_z = q, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (1)$$

Тоді, на основі [4], маємо вирази для переміщень, які записані у символічному вигляді

$$u = -\frac{h^2}{2G} \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_1(d, \zeta)}{d^2 \Delta} q, \quad w = -\frac{h}{2G} \frac{f_2(d, \zeta)}{\Delta} q, \quad \theta = \frac{1-2\nu}{G} \frac{f_0}{\Delta} q, \quad (2)$$

де

$$\Delta = 1 + \frac{\sin 2d}{2d}, \quad f_0 = \frac{\cos d \zeta \sin d}{d},$$

$$f_1(d, \zeta) = \cos d \zeta \cos d + \zeta \sin d \zeta \sin d - (1-2\nu) \cos d \zeta \sin d / d,$$

$$f_2(d, \zeta) = [-d \cos d \sin d \zeta + d \zeta \cos d \zeta \sin d - 2(1-\nu) \sin d \zeta \sin d] d^{-2},$$

$$\zeta = \frac{z}{h}, \quad d^2 = h^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Напруження визначаються за формулами [4]

$$\sigma_x = 2G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right) = -h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{f_1(d, \zeta)}{d^2 \Delta} q + 2\nu \frac{f_0(d, \zeta)}{\Delta} q, \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = -h^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{f_1(d, \zeta)}{d^2 \Delta} q.$$

Переміщення v та напруження σ_y отримуються із співвідношень для u, σ_x шляхом заміни в них $\partial/\partial x$ на $\partial/\partial y$ та $\partial/\partial y$ на $\partial/\partial x$.

Максимальні напруження досягаються на граничних площинах пластини. Запишемо величини, які входять у розв'язок при $z = h (\zeta = 1)$:

$$f_1 = 1 - (1 - 2\nu) \frac{\sin 2d}{2d} = 2(1 - \nu) - (1 - 2\nu)\Delta, \quad f_0 = \frac{\sin 2d}{2d} = \Delta - 1,$$

$$f_2 = -2(1 - \nu) \frac{\sin^2 d}{d^2}.$$

Тобто при $\zeta = 1$ маємо

$$\sigma_x = \partial_1^2 \left[-2(1 - \nu) \frac{1}{d^2 \Delta} + (1 - 2\nu) \frac{1}{d^2} \right] q + 2\nu \left(1 - \frac{1}{\Delta} \right) q,$$

$$\tau_{xy} = \partial_1 \partial_2 \left[-2(1 - \nu) \frac{1}{d^2 \Delta} + (1 - 2\nu) \frac{1}{d^2} \right] q, \quad (4)$$

де

$$\partial_1 = h \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = h \frac{\partial}{\partial y}.$$

Тут виникають функції вигляду

$$F = \frac{f(d, \zeta)}{d^2 \Delta} q,$$

де $f(d, \zeta)$ - ціла функція аргументу d , причому $f(-d, \zeta) = f(d, \zeta)$.

Для неї справедливий розклад [5]

$$F = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f(\alpha_i, \zeta)}{\cos^2 \alpha_i} q_i + 0,5 f(0, \zeta) q_0,$$

де α_i - корені рівняння $\Delta = 1 + (\sin 2\alpha / 2\alpha) = 0$, причому $\text{Re} \alpha_i > 0$,

функції q_i - розв'язок рівняння $(d^2 - \alpha_i^2) q_i = q$ при $i \geq 1$ та $d^2 q_0 = q$.

Для розглянутої задачі в [5] отримано розв'язок у вигляді:

$$u = -\frac{h^2}{2G} \frac{\partial}{\partial x} [F_1 + 0,5 f_1(0, \zeta) q_0], \quad w = -\frac{h}{2G} d^2 [F_2 + 0,5 f_2(0, \zeta) q_0],$$

$$\sigma_x = -\partial_1^2 [F_1 + 0,5 f_1(0, \zeta) q_0] + 2\nu d^2 [F_0 + 0,5 f_0(0, \zeta) q_0] =$$

$$= -\partial_1^2 F_1 + 2\nu d^2 F_0 + \nu \partial_2^2 q_0,$$

$$\tau_{xy} = -\partial_1 \partial_2 [F_1 + 0,5 f_1(0, \zeta) q_0] = -\partial_1 \partial_2 [F_1 + \nu q_0],$$

де

$$F_j = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_j(\alpha_i, \zeta)}{\cos^2 \alpha_i} q_i.$$

Антисиметрична задача. Розглянемо випадок, коли при $z = \pm h$ задано напруження $\sigma_z = q, \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. (5)

Тоді, на основі [4], маємо вирази для переміщень, які записані у символічному вигляді

$$u = -\frac{h^2}{2G} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi_1(d, \zeta)}{d^2 \delta} p, \quad w = \frac{h}{2G} \frac{\varphi_2(d, \zeta)}{d^2 \delta} p, \quad \theta = -2 \frac{1-2\nu}{2G} \frac{\varphi_0(d, \zeta)}{d^2 \delta} p, \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi_1(d, \zeta) &= (1-2\nu)\varphi_0(d, \zeta) + \psi(d, \zeta), \quad \delta = 1 - \frac{\sin 2d}{2d}, \\ \varphi_2(d, \zeta) &= 2(1-\nu) \cos d \zeta \cos d + d \zeta \sin d \zeta \cos d - d \sin d \cos d \zeta, \\ \varphi_0(d, \zeta) &= \cos d \sin d \zeta / d, \quad \psi(d, \zeta) = \zeta \cos d \zeta \cos d + \sin d \zeta \sin d. \end{aligned}$$

Напруження визначаються за співвідношеннями

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right) = -\partial_1^2 \frac{\varphi_1(d, \zeta)}{d^2 \delta} q - 2\nu \frac{\varphi_0(d, \zeta)}{\delta} q, \\ \tau_{xy} &= -\partial_1 \partial_2 \frac{\varphi_1(d, \zeta)}{d^2 \delta} q. \end{aligned} \quad (7)$$

При $\zeta = 1$ маємо

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (1-2\nu) \frac{\sin 2d}{2d} + 1 = 2(1-\nu) - (1-2\nu)\delta, \quad \varphi_2(d, \zeta) = 2(1-\nu) \cos^2 d, \\ \varphi_0(d, \zeta) &= \frac{\sin 2d}{2d} = 1 - \delta, \\ \sigma_x &= -\partial_1^2 \frac{2(1-\nu) - (1-2\nu)\delta}{d^2 \delta} q - 2\nu \frac{1-\delta}{\delta} q = \\ &= -\partial_1^2 \left[2(1-\nu) \frac{1}{d^2 \delta} - (1-2\nu) \frac{1}{d^2} \right] q - 2\nu \left(-1 + \frac{1}{\delta} \right) q. \end{aligned}$$

Тут виникають функції вигляду

$$\Phi = \frac{\varphi(d, \zeta)}{d^2 \delta} p,$$

де $\varphi(d, \zeta)$ - ціла функція аргументу d , причому $\varphi(-d, \zeta) = \varphi(d, \zeta)$.

Для неї справедливий розклад [5]

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi(\beta_i, \zeta)}{\sin^2 \beta_i} p_i + A p_0 + B d^2 p_0,$$

де β_i - корені рівняння $\Delta = 1 - (\sin 2\beta / 2\beta) = 0$, причому $\operatorname{Re} \beta_i > 0$,

функції p_i - розв'язок рівняння $(d^2 - \beta_i^2) p_i = p$ при $i \geq 1$ та $d^4 p_0 = p$.

Тут A, B - коефіцієнти розкладу в ряд в околі точки $d = 0$

$$\frac{\varphi(d, \zeta)}{d^2 \delta} = \frac{A}{d^4} + \frac{B}{d^2} + \dots$$

Тоді

$$\begin{aligned} u &= -\frac{h}{2G} \partial_1 (\Phi_1 + \omega_1), \quad w = -\frac{h}{2G} d^2 (\Phi_2 + \omega_2), \\ \sigma_x &= -\partial_1^2 (\Phi_1 + \omega_1) + 2\nu d^2 (\Phi_0 + \omega_0), \quad \tau_{xy} = -\partial_1 \partial_2 (\Phi_1 + \omega_1), \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(\beta_i, \zeta)}{\sin^2 \beta_i} p_i.$$

Тут

$$\omega_j = A_j p_0 + B_j d^2 p_0,$$

$$A_0 = -\frac{3}{2}\zeta, \quad B_0 = \frac{3}{2} \left(0,3\zeta + \frac{\zeta^3}{6} \right),$$

$$A_1 = 3(1-\nu)\zeta, \quad B_1 = 0.5(\nu-2)\zeta^3 + 0.3(2+3\nu)\zeta,$$

$$A_2 = 3(1-\nu), \quad B_2 = 1.5\nu\zeta^2 - 0.3(8-3\nu).$$

Дія зосередженої сили. Розглянемо випадок, коли зосереджена сила P_0 прикладена до верхньої межі пластини в т. $(0,0,h)$. Тоді

$$p = q = \frac{P_0}{2} \delta(x)\delta(y).$$

На основі [5] отримаємо вирази для функцій, через які вище записано розв'язок

$$q_i = -cK_0(\alpha_i \rho)/h^2, \quad i > 0, \quad q_0 = c \ln \rho/h^2,$$

$$p_i = -cK_0(\beta_i \rho), \quad i > 0, \quad d^2 p_0 = c \ln \rho/h^2, \quad p_0 = \frac{c}{4} \ln \rho(\rho^2 - 1)/h^2,$$

де $K_0(x)$ – функція Макдональда, $\rho = r/h$, $c = (1/2\pi)(P_0/2)$.

Напруження, що відповідають симетричній й антисиметричній складовим на верхній межі будуть

$$\sigma_x^s = -\partial_1^2 [F_1 + 0,5f_1(0, \zeta)q_0] + 2\nu d^2 [F_0 + 0,5f_0(0, \zeta)q_0] = -\partial_1^2 F_1 + 2\nu d^2 F_0 + \nu \partial_2^2 q_0,$$

$$\tau_{xy}^s = -\partial_1 \partial_2 [F_1 + 0,5f_1(0, \zeta)q_0] = -\partial_1 \partial_2 [F_1 + \nu q_0].$$

$$\sigma_x^a = -\partial_1^2 (\Phi_1 + \omega_1) + 2\nu d^2 (\Phi_0 + \omega_0), \quad \tau_{xy}^a = -\partial_1 \partial_2 (\Phi_1 + \omega_1).$$

Корені α_i, β_i є комплексними числами. Функції Макдональда при великих значеннях аргументу мають вигляд $K_0(z) \sim \exp(-\operatorname{Re} z)$. Тобто,

$$F_j \sim \exp(-\operatorname{Re}(\alpha_1)\rho), \quad \Phi_j \sim \exp(-\operatorname{Re}(\beta_1)\rho),$$

причому [8]

$$\operatorname{Re}(\alpha_1) = 2.165, \quad \operatorname{Re}(\beta_1) = 3.749.$$

Звідси випливає, що при $\rho > 3$ складовими F_j, Φ_j у наведених вище співвідношеннях можна нехтувати. Тобто, для визначення напружень при $\rho > 3$ маємо прості наближені співвідношення

$$\sigma_x^s = \nu \partial_2^2 q_0, \quad \tau_{xy}^s = -\nu \partial_1 \partial_2 q_0,$$

$$\sigma_x^a = -\partial_1^2 [3(1-\nu)p_0 + (-0.4+1.4\nu)d^2 p_0] + 2\nu(-1.5d^2 p_0 + 0.7p),$$

$$\tau_{xy}^a = -\partial_1 \partial_2 [3(1-\nu)p_0 + (-0.4+1.4\nu)d^2 p_0],$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^a - \sigma_x^s &= -\left[3(1-\nu)\partial_1^2 p_0 + 3\nu(\partial_1^2 + \partial_2^2)p_0\right] - \partial_1^2(-0.4 + 1.4\nu)d^2 p_0 + 1.4\nu p = \\ &= -3(\partial_1^2 p_0 + \nu\partial_2^2)p_0 + \partial_1^2(0.4 - 1.4\nu)d^2 p_0 + 1.4\nu p. \end{aligned}$$

Визначення напружень із застосуванням інтегрального перетворення Ханкеля.

Наведений вище розв'язок записано в рядах, які у випадку локалізованих навантажень збігаються повільно. Тому нижче отримано розв'язок з використанням інтегрального перетворення Ханкеля. При використанні даного підходу необхідно розглядати випадок, коли пластина навантажена системою самозрівноважених сил (тільки у цьому випадку далі отримуються збіжні інтеграли)

$$p = \sum_{i=1}^N P_i \delta(x-x_i) \delta(y-y_i), \quad q = \sum_{i=1}^N Q_i \delta(x-x_i) \delta(y-y_i)$$

причому виконуються умови рівноваги

$$\sum_{i=1}^N P_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N x_i P_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N y_i P_i = 0. \tag{9}$$

Зобразимо [5]

$$p = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N P_i \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r_i) d\lambda, \quad q = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N Q_i \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r_i) d\lambda,$$

де $r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$.

Врахуємо, що [4]

$$f(d)p = \sum_{i=1}^N \frac{P_i}{2\pi} \int_0^\infty \lambda f(i\lambda h) J_0(\lambda r_i) d\lambda, \quad f(d)q = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{2\pi} \int_0^\infty \lambda f(i\lambda h) J_0(\lambda r_i) d\lambda.$$

Тоді напруження, які відповідають симетричній складовій будуть

$$\sigma_x^s = -\partial_1^2 F_1 + 2\nu F_0 + 2\nu q + (1-2\nu)\partial_1^2 \frac{q}{d^2}, \quad \tau_{xy}^s = -\partial_1 \partial_2 F_1,$$

де

$$F_1 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N Q_i \int_0^\infty \frac{\lambda f_1(i\lambda h, \zeta)}{(i\lambda h)^2 \Delta(i\lambda h)} J_0(\lambda r_i) d\lambda,$$

$$F_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N Q_i \int_0^\infty \frac{\lambda f_0(i\lambda h, \zeta)}{\Delta(i\lambda h)} J_0(\lambda r_i) d\lambda.$$

Звідси при $\zeta = 1$ маємо

$$\begin{aligned} \sigma_x^s &= \frac{2(1-\nu)}{2\pi h^2} \partial_1^2 \sum_{i=1}^N Q_i \int_0^\infty \frac{J_0(\eta \rho_i) - 1}{\eta \Delta(\eta)} d\eta - \\ &\quad - \frac{2\nu}{2\pi h^2} \sum_{i=1}^N Q_i \int_0^\infty \frac{\eta}{\Delta(\eta)} J_0(\eta \rho_i) d\eta + 2\nu q + (1-2\nu)\partial_1^2 \frac{q}{d^2}, \end{aligned}$$

$$\Delta(\eta) = 1 + \text{sh } 2\eta/2\eta, \quad \rho_i = r_i/h. \tag{10}$$

Тут під інтегралом додані складові, які забезпечують збіжність інтегралів. Аналогічно для антисиметричної складової з використанням умов рівноваги (9) маємо

$$\begin{aligned} \sigma_x^a &= \frac{2(1-\nu)}{2\pi h^2} \sum_{i=1}^N P_i \partial_1^2 \int_0^\infty \frac{J_0(\eta \rho_i) - 1 + 0,25\eta^2 \rho_i^2}{\eta \delta(\eta)} d\eta - \\ &\quad - \frac{2\nu}{2\pi h^2} \sum_{i=1}^N P_i \int_0^\infty \frac{\eta}{\delta(\eta)} [J_0(\eta \rho_i) - 1] d\eta + 2\nu p + (1-2\nu) \partial_1^2 \frac{p}{d^2}, \\ \delta(\eta) &= 1 - \text{sh } 2\eta/2\eta. \end{aligned} \tag{11}$$

Запишемо похідні, через які визначаються напруження:

$$\begin{aligned} \partial_1 J_0(\gamma \rho) &= -J_1(\gamma \rho) \gamma \frac{\xi}{\rho}; \\ \partial_1^2 J_0(\gamma \rho) &= - \left[J_0(\gamma \rho) - \frac{J_1(\gamma \rho)}{\gamma \rho} \right] \left(\gamma \frac{\xi}{\rho} \right)^2 - J_1(\gamma \rho) \frac{\gamma \eta^2}{\rho^3}; \\ \partial_1 \partial_2 J_0(\gamma \rho) &= - \left[J_0(\gamma \rho) - \frac{J_1(\gamma \rho)}{\gamma \rho} \right] \frac{\gamma^2 \xi \eta}{\rho^2} + J_1(\eta \rho) \frac{\gamma \xi \eta}{\rho^3}, \end{aligned}$$

де $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Випадок розподіленого навантаження. Розглянемо випадок, коли пластина перебуває під дією зусиль, які розподілені по окремих областях, причому прикладене навантаження самозрівноважене. Нехай

$$p = \sum_{j=1}^N P_j s(r_j), \quad q = \sum_{j=1}^N Q_j s(r_j),$$

де $s(r)$ – відома функція, яка відмінна від нуля в області $r < R$, R – задана величина.

Зобразимо функцію $s(r)$ у вигляді інтеграла Ханкеля

$$s(r) = \int_0^\infty \lambda \tilde{s}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda,$$

де

$$\tilde{s}(\lambda) = \int_0^\infty r s(r) J_0(\lambda r) dr = \int_0^R r s(r) J_0(\lambda r) dr.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sigma_x^s &= \frac{2(1-\nu)}{2\pi h^2} \sum_{i=1}^N Q_i \int_0^\infty \tilde{s}(\eta/h) \partial_1^2 \frac{J_0(\eta \rho_i) - 1}{\eta \Delta(\eta)} d\eta - \\ &\quad - \frac{2\nu}{2\pi h^2} \sum_{i=1}^N Q_i \int_0^\infty \tilde{s}(\eta/h) \frac{\eta}{\Delta(\eta)} J_0(\eta \rho_i) d\eta + 2\nu q + (1-2\nu) \partial_1^2 \frac{q}{d^2}, \\ \sigma_x^a &= \frac{2(1-\nu)}{2\pi h^2} \sum_{i=1}^N P_i \int_0^\infty \tilde{s}(\eta/h) \partial_1^2 \frac{J_0(\eta \rho_i) - 1 + 0,25\eta^2 \rho_i^2}{\eta \delta(\eta)} d\eta - \end{aligned}$$



$$-\frac{2\nu}{2\pi h^2} \sum_{i=1}^N P_i \int_0^{\infty} \tilde{s}(\eta/h) \frac{\eta}{\delta(\eta)} [J_0(\eta\rho_i) - 1] d\eta + 2\nu p + (1-2\nu)\partial_1^2 \frac{P}{d^2}.$$

Зокрема, розглянемо випадок, коли

$$s = 1 - \frac{r^2}{R^2}, \quad r < R.$$

Тоді

$$\tilde{s}(\lambda) = \int_0^R r(1-r^2/R^2) J_0(\lambda r) dr = (r = Rt) = R^2 \int_0^1 t(1-t^2) J_0(\lambda Rt) dt.$$

Використаємо інтеграл вигляду [2]

$$\int_0^1 \rho(1-\rho^2) J_0(\gamma\rho) d\rho = -2 \frac{J_0(\gamma)}{\gamma^2} + J_1(\gamma) \left[\frac{\gamma^2 + 4}{\gamma^3} - \frac{1}{\gamma} \right] = -2 \frac{J_0(\gamma)}{\gamma^2} + 4 \frac{J_1(\gamma)}{\gamma^3}.$$

Тоді

$$\tilde{s}\left(\frac{\lambda}{h}\right) = R^2 S\left(\lambda \frac{R}{h}\right), \quad \text{де } S(\gamma) = -2 \frac{J_0(\gamma)}{\gamma^2} + 4 \frac{J_1(\gamma)}{\gamma^3}.$$

Для цього випадку функція p_0 визначається з рівняння

$$d^4 p_0 = \begin{cases} (1-r^2/R^2), & r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Розв'язок цього рівняння набуде вигляду

$$p_0 = \left(\frac{R}{h}\right)^4 f_2\left(\frac{r}{R}\right), \quad d^2 p_0 = \left(\frac{R}{h}\right)^2 f_1\left(\frac{r}{R}\right),$$

де

$$f_1(u) = \begin{cases} -\frac{u^4}{16} + \frac{u^2}{4} + \frac{1}{16}, & u \leq 1, \\ \frac{1}{4}(\ln u + 1), & u > 1, \end{cases} \quad f_2(u) = \begin{cases} -\frac{u^6}{576} + \frac{u^4}{64} + \frac{u^2}{64} - \frac{17}{576}, & u \leq 1, \\ \frac{1+3u^2}{48} \ln u, & u > 1. \end{cases}$$

Похідні, через які визначаються напруження, будуть

$$\partial_1^2 p_0 = \left(\frac{R}{h}\right)^4 \partial_1^2 f_2\left(\frac{r}{R}\right) = \left(\frac{R}{h}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_2\left(\frac{r}{R}\right) = \left(\frac{R}{h}\right)^2 \left[f_{22}\left(\frac{r}{R}\right) \xi^2 + f_{21}\left(\frac{r}{R}\right) \right],$$

$$\partial_1^2 d^2 p_0 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f_1\left(\frac{r}{R}\right) = f_{12}\left(\frac{r}{R}\right) \xi^2 + f_{11}\left(\frac{r}{R}\right),$$

де $\xi = x/r$,

$$f_{21}(u) = \frac{f_2'(u)}{u} = \begin{cases} -\frac{u^4}{96} + \frac{u^2}{16} + \frac{1}{32}, & u \leq 1, \\ \frac{1}{8} \ln u + \frac{1}{48u^2} + \frac{1}{16}, & u > 1, \end{cases} \quad f_{22}(u) = \frac{1}{u} \left[\frac{f_2'(u)}{u} \right]' = \begin{cases} -\frac{u^2}{24} + \frac{1}{8}, & u \leq 1, \\ \frac{1}{8u^2} - \frac{1}{24u^4}, & u > 1, \end{cases}$$

$$f_{11}(u) = \frac{f_1'(u)}{u} = \begin{cases} -\frac{u^2}{4} + \frac{1}{2}, & u \leq 1, \\ \frac{1}{4u^2}, & u > 1, \end{cases} \quad f_{12}(u) = \frac{1}{u} \left[\frac{f_1'(u)}{u} \right]' = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & u \leq 1, \\ -\frac{1}{2u^4}, & u > 1. \end{cases}$$

На великих відстанях від прикладеного навантаження напруження можуть бути розраховані на основі наведених вище наближених співвідношень

$$\begin{aligned} \sigma_x^s &= \nu \partial_2^2 q_0, \quad \tau_{xy}^s = -\nu \partial_1 \partial_2 q_0, \\ \sigma_x^a &= -\partial_1^2 (A_1 p_0 + B_1 d^2 p_0) + 2\nu (A_0 d^2 p_0 + B_0 p), \\ \tau_{xy}^a &= -\partial_1 \partial_2 (A_1 p_0 + B_1 d^2 p_0). \end{aligned} \quad (12)$$

Тут при $\zeta = 1$ маємо

$$A_0 = -\frac{3}{2}, \quad B_0 = 0.7, \quad A_1 = 3(1-\nu), \quad B_1 = -0.4 + 1.4\nu.$$

У випадку гладкого навантаження уточнені значення для напружень σ_x^s наведені в праці [5]

$$\sigma_x^s = \nu \partial_2^2 q_0 + \sigma_x^\Delta, \quad (13)$$

де

$$\sigma_x^\Delta = \frac{1}{3} (\partial_1^2 + \nu \partial_2^2) q.$$

Розглянемо також випадок, коли для даної задачі використовується технічна теорія згину плит, яка базується на гіпотезі Кірхгофа-Лява. Тоді напруження визначаються за формулою [11]

$$\sigma_x = -A_1 \partial_1^2 p_0 + 2\nu A_0 d^2 p_0 = -3(1-\nu) \partial_1^2 p_0 - 3\nu d^2 p_0 = -3(\partial_1^2 + \nu \partial_2^2) p_0. \quad (14)$$

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянуто випадок, коли пластина навантажена зусиллями на верхній межі пластини, причому

$$\sigma_z(x, y, h) = -q_0 s(r) + 0.5q_0 s(r_1) + 0.5q_0 s(r_2),$$

де q_0 – максимальний тиск.

Тут функція s відмінною від нуля в трьох областях з центром в точках $(-x_c, 0)$, $(0, 0)$, $(x_c, 0)$.

Розрахунки виконано при $x_c = 6h$ та різних значеннях радіусів областей навантаження. На рис. 1 наведено віднесені до максимального тиску напруження σ_x на

верхній межі пластини при $y = 0, z = h$ (крива 1) та при $y = 0$ (крива 2), коли $R/h = 0.5$.

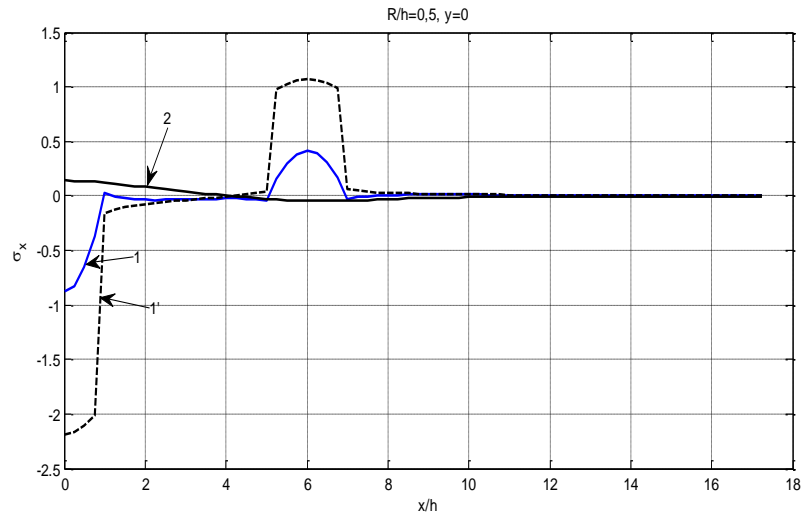


Рис. 1. Відносні напруження при $R/h = 0.5$

Тут для порівняння кривою 1' наведено розраховані напруження при $z = h$ на основі наближених співвідношень, які уточнюють теорію Кірхгофа-Лява.

Аналогічні результати розрахунків при $R/h = 1, 2, 3$ наведено на рис. 2-4.

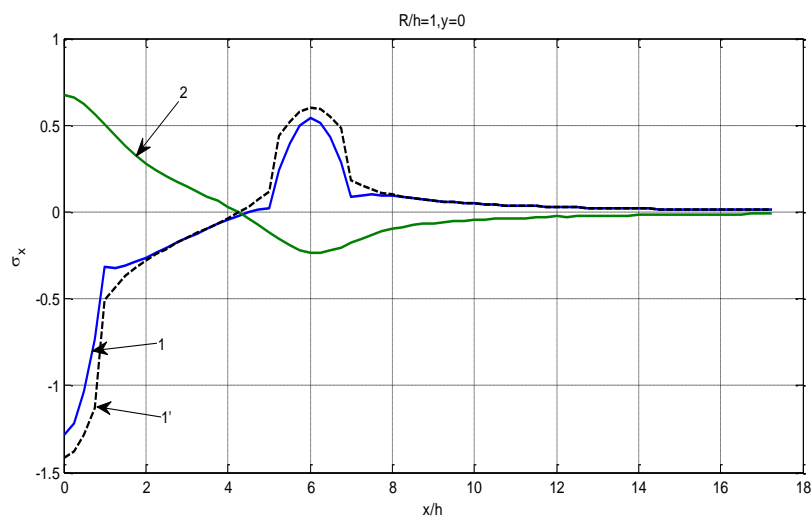


Рис. 2. Відносні напруження при $R/h = 1$

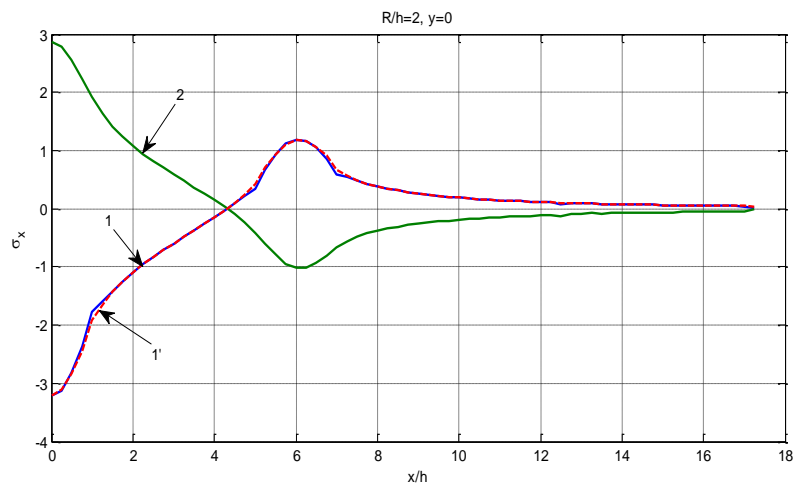


Рис. 3. Відносні напруження при $R/h = 2$

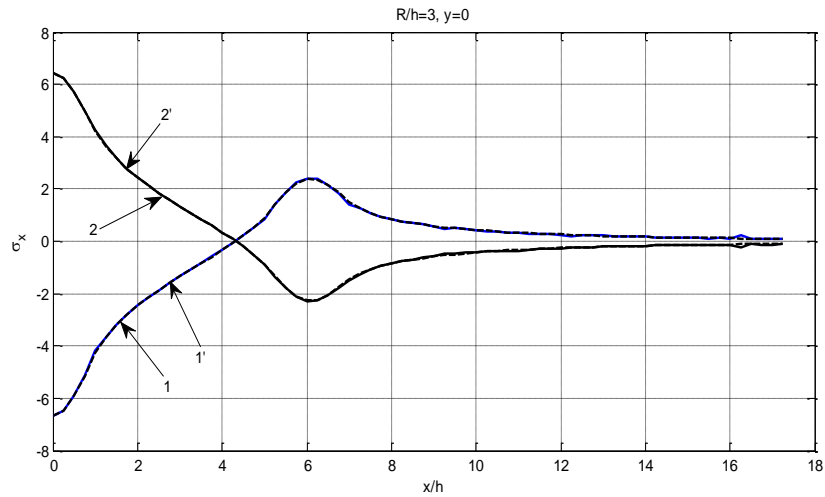


Рис. 4. Відносні напруження при $R/h = 3$

Сумарне навантаження, яке прикладене до пластини буде $Q_0 = 0.5\pi R^2 q_0$. Віднесені до величини Q_0 напруження наведено на рис. 5-9.

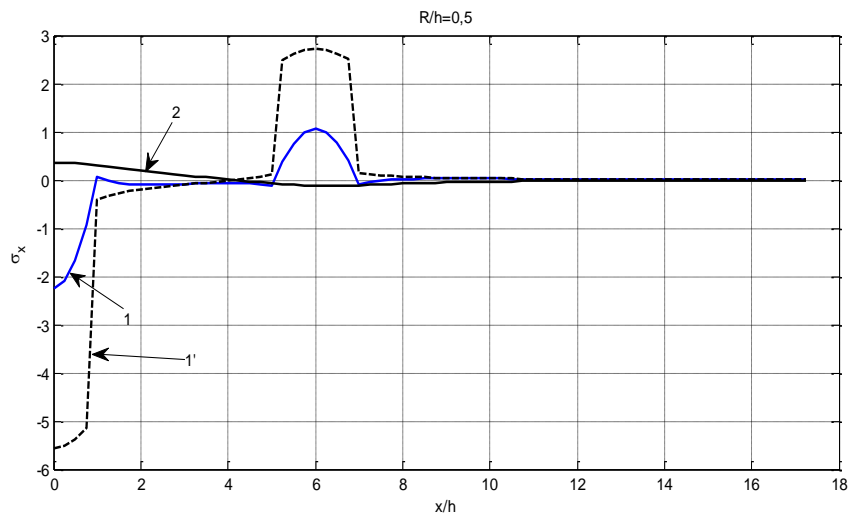


Рис. 5. Відносні напруження при $R/h = 0.5$

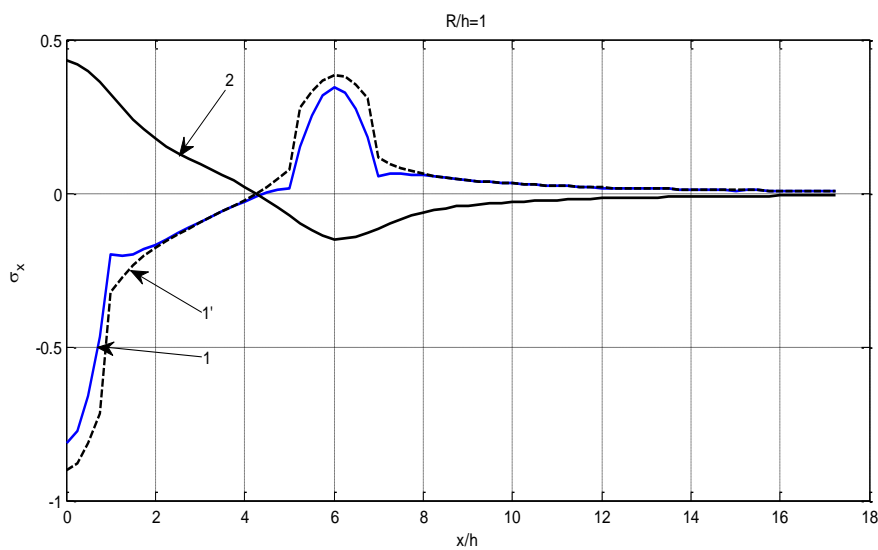


Рис. 6. Відносні напруження при $R/h = 1$

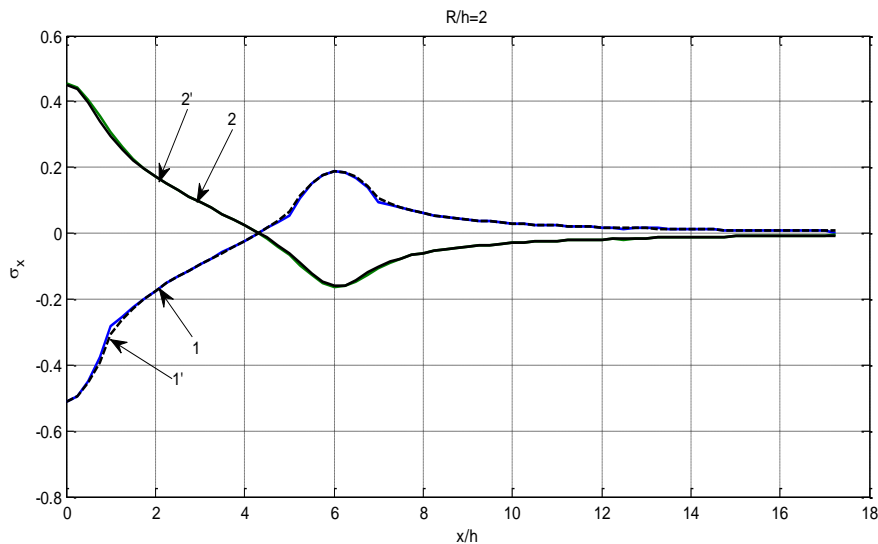


Рис. 7. Відносні напруження при $R/h = 2$

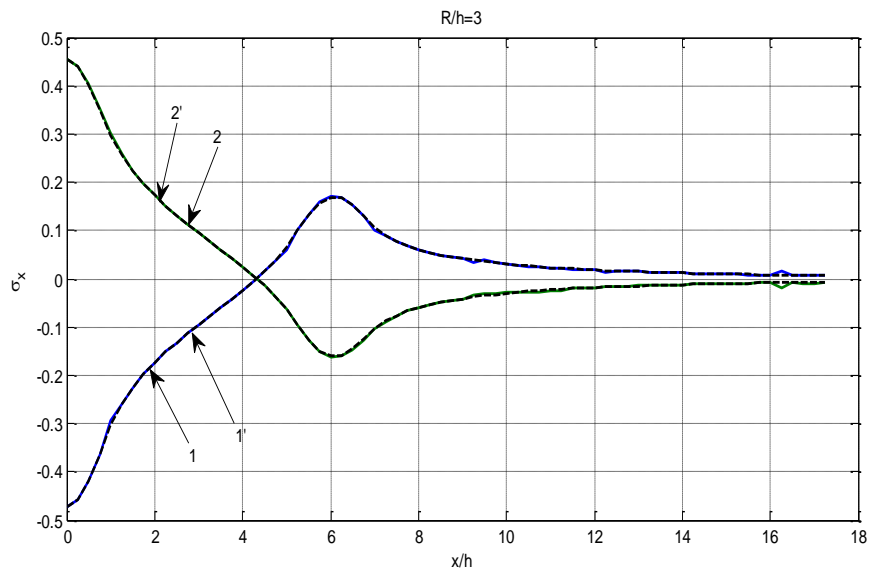


Рис. 8. Відносні напруження при $R/h = 3$

З рис. 5-8 видно, що максимальні напруження, які віднесені до величини повної сили для випадків, коли $R/h > 1$ виявились близькими за величиною.

Виконано розрахунок напружень при різних відстанях між прикладеними областями дії зусиль. На рис. 9 кривим 1, 1', 1'', 1''' відповідають віднесені до Q_0 напруження при $z = h, x_c = 6h, 8.5h, 11h, 3.5h$ наведені результати розрахунків. Аналогічні дані для нижньої межі пластини ($z = -h$) наведено на рис. 9 кривими 2.

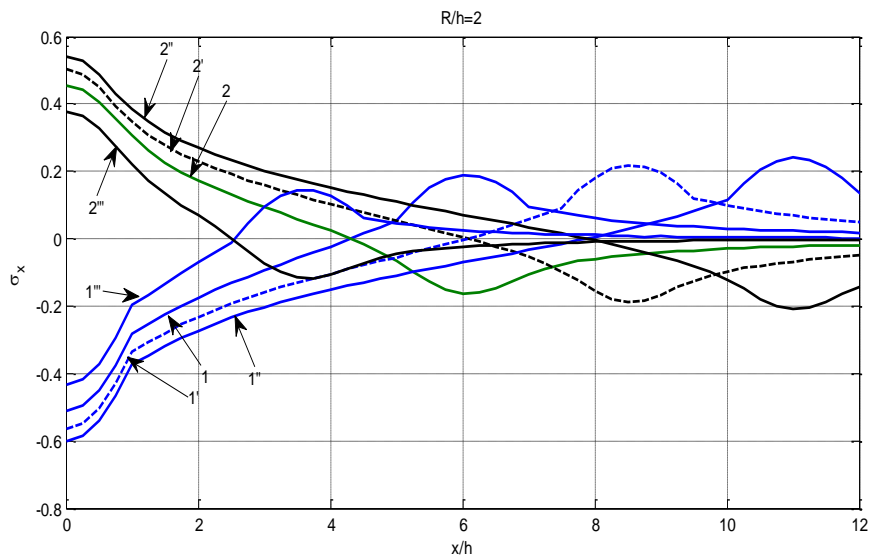


Рис. 9. Розподіл відносних напружень залежно від відстані між прикладеними зусиллями

З рисунка видно, що при збільшенні відстані між прикладеними зусиллями максимальні напруження дещо зростають за величиною.

З наведених вище рисунків видно, що при $R/h > 1$ напруження на обидвох межах можуть розраховуватись на основі спрощених наближених співвідношень. Виконано розрахунки за теорією Кірхгофа-Лява при $R/h = 2$, результати яких наведені на рис. 10 кривими 1', 2'.

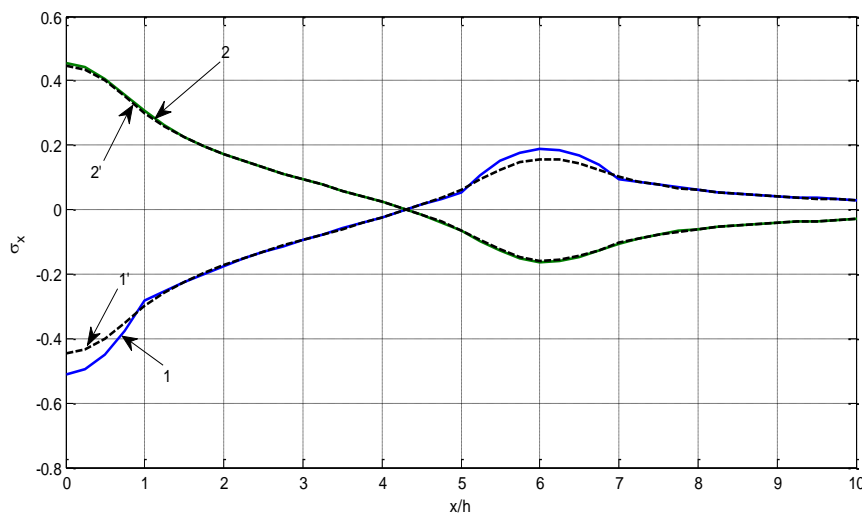


Рис. 10. Порівняння результатів розрахунків за точною теорією та теорією Кірхгофа-Лява при $R/h = 2$

Аналогічні результати розрахунків при $R/h = 1$ зображено на рис. 11.

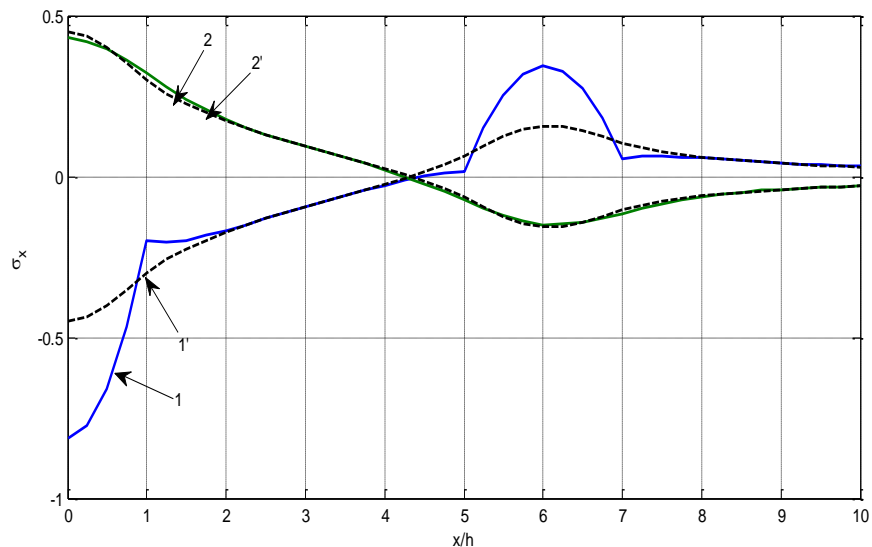


Рис. 11. Порівняння результатів розрахунків за точною теорією та теорією Кірхгофа-Лява при $R/h = 1$

З рис. 10 видно, що напруження під прикладеним навантаженням (криві 1 і 1') дещо відрізняються між собою – максимальне відхилення досягає 14%. Однак ці напруження є стискувальними і для бетонних матеріалів вони не є основними. В той же час напруження на протилежній межі плити (при $z = -h$), обчислені за теорією Кірхгофа-Лява виявились розтягувальними і водночас практично точними.

При $R/h = 1$ розраховані за технічною теорією напруження під прикладеним навантаженням уже істотно відрізняються від точних (див. рис. 11), в той же час, як розраховані наближено розтягувальні напруження на протилежній межі плити виявились також практично точними.

Звідси випливає, що при розрахунках на міцність бетонних плит в околі опор основні для розрахунків розтягувальні напруження можуть бути визначені на основі технічної теорії плит і у випадку, коли навантаження прикладено локалізовано при $R \geq h$. Наведемо ще результати розрахунків при високолокалізованому навантаженні, коли $R/h = 0,5$.

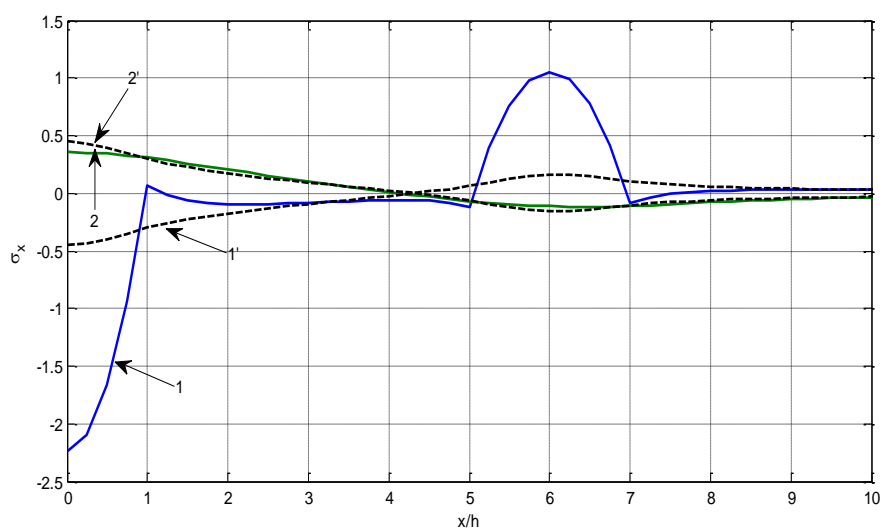


Рис. 12. Порівняння результатів розрахунків за точною теорією та теорією Кірхгофа-Лява при $R/h = 0,5$.

Наведені на рис. 12 дані вказують, що і в цьому випадку для наближеного розрахунку розтягувальних напружень може бути використана технічна теорія згину.

Наведемо результати розрахунків напружень σ_x залежно від коефіцієнта Пуассона. На рис. 12 наведено відносні напруження при $z = -h$ за значень $\nu = 0; 0.2; 0.3; 0.5$, $R/h = 2$. Штриховими кривими наведено напруження, які розраховані за технічною теорією.

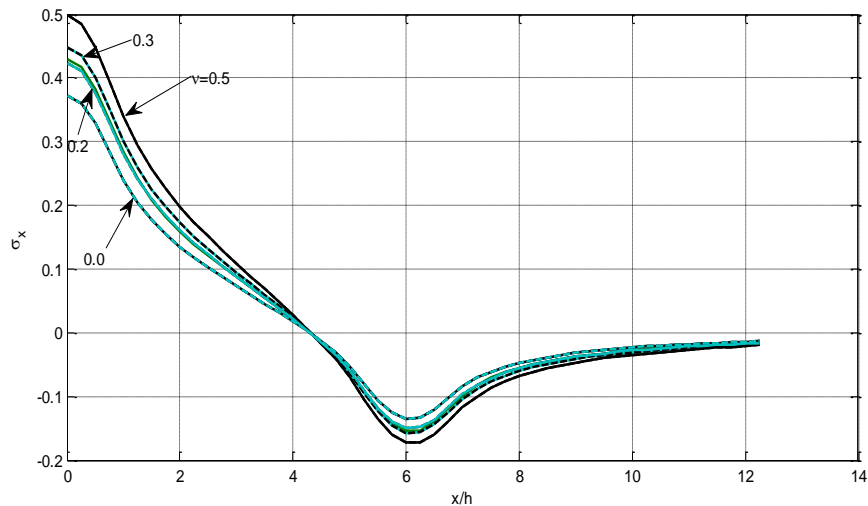


Рис. 13. Залежність напружень від коефіцієнта Пуассона

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Запропоновано два підходи до визначення напружень у плиті, яка перебуває під дією локалізованого навантаження. У першому – розв’язок записано у вигляді рядів, які експоненціально збігаються поза областю дії навантаження. У другому – розв’язок записано через швидкозбіжні інтеграли. Виконано дослідження напружень в шарі при дії зосереджених сил та від дії локалізовано розподіленого навантаження. Проведено порівняння результатів розрахунку напружень за тривимірною теорією пружності та на основі технічних теорій.

Встановлено випадки, коли напруження, які знайдені на основі елементарних формул, що отримані на основі рівнянь Кірхгофа-Лява з достатньою для практики точністю можуть бути застосовані в задачах згину плит. Зокрема встановлено, що визначені напруження на протилежній межі від прикладеного локально навантаження виявились розтягувальними і водночас практично точними, якщо область дії зусиль більша за товщину плити. При цьому знайдені напруження під прикладеним навантаженням обчислюються з більшими похибками. Однак ці напруження є стискувальними і для бетонних матеріалів вони не є основними.

Встановлено, що напруження істотно залежать від коефіцієнта Пуассона. Зокрема, при зростанні цього коефіцієнта максимальні напруження також зростають. Обчислені за технічною теорією розтягувальні напруження виявились також близькими до точних при всіх значеннях коефіцієнта Пуассона.

6 ВИСНОВКИ

Розроблено методику дослідження напружень у плитах, які перебувають під дією прикладених системи зосереджених сил і локально розподіленого навантаження. Для визначення напружень використано співвідношення тривимірної теорії пружності. З використанням символічного методу Лур'є та формул розкладу Ващенко-Захарченко розв'язок побудовано у вигляді рядів, які експоненціально збігаються у віддалених від прикладених сил точках. Побудовано також розв'язок задачі іншим методом з використанням інтегрального перетворення Ханкеля. Запропоновано підхід до знаходження особливих інтегралів, які виникають у задачах теорії пружності для плит. Наведено також співвідношення для визначення напружень у плитах на основі наближених рівнянь, які базуються на гіпотезах Кірхгофа-Лява. На основі отриманих співвідношень виконано розрахунки напружень у плиті, яка перебуває в умовах згину під дією системи само зрівноважених сил або під дією розподіленого навантаження.

Література

1. Баженов В. А., Оробей В. Ф., Дашченко А. Ф., Коломиец Л. В. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов. Одесса: Астропринт, 2001. 285 с.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Наука, 1971. 1108 с.
3. Космодамианский А. С., Ложкин В. Н., Шалдырван В. А. Пространственная задача термоупругости для слоя, ослабленного цилиндрическими полостями. Доп. АН УССР. Сер. А, 1975. № 10. С. 914-918
4. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Москва: ГИТТЛ, 1955. 322 с.
5. Максимович В. Н. Напряженное состояние неравномерно нагретых, нагруженных по граничным поверхностям пластин. Изв. АН СССР, ПММ, 1979. Т. 43. Вып.6. С. 1065-1072.
6. Снеддон И. Преобразование Фурье. Москва: Изд-во иностр. лит, 1955. 668 с.
7. Тимошенко С. П. Пластинки і оболонки. Гостехиздат, 1948.
8. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1967. 402 с.
9. Albuquerque E. L., Sollero P., Venturini W. S., Aliabadi M. H. (2006). Boundary element analysis of anisotropic Kirchhoff plates. *International Journal of Solids and Structures*. 43(14-15). 4029-4046.
10. Cheng Z. Q., Reddy J. N. Octet formalism for Kirchhoff anisotropic plates. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 2022. 458. No. 2022. P. 1499-1517.
11. Hwu C. *Anisotropic elastic plates*. Springer Science. 2010.
12. Szilard R. *Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods*. John Wiley & Sons. 2004.
13. Ventsel E., Krauthammer T. *Thin plates and shells: theory: analysis, and applications* CRC press. 2001.

References

1. Bazhenov, V. A., Orobei, V. F., Dashchenko, A. F., Kolomiets, L. V. *Konstruktsionnaya (2001). Stroytelnaia mekhanyka. Spetsyalnyi kurs. Prymeneniye metoda hranychnykh elementov* [Structural mechanics. Special course. Applying the Boundary Element Method]. Odessa: Astroprint [in Russian].
2. Gradstein, I. S., Ryzhik, I. M. (1971). *Tablitsa integralov, sum, riadov i proizvedenii* [Table of integrals, sums, series and products]. Moskva: Science.[in Russian].
3. Kosmodamiansky, A. S., Lozhkin, V. N., Shaldyrvan, V. A. (1975). *Prostranstvennaia zadacha termouprugosti dlia sloya oslablennogo tsylindricheskimi polostiami* [Spatial problem of thermoelasticity for a layer weakened by cylindrical cavities]. *Reports AS Ukr. SSR.- Ser. A.* (10). 914-918. [in Russian].

4. Lurie, A. I. (1955). *Prostranstvennaya zadacha teorii uprugosti* [Spatial problems of the theory of elasticity]. M.: GITTL. [in Russian].
5. Maksimovich, V. N. (1979). Napriazhonnoie sostoyaniye neravnomerno nagretykh, nagruzhennykh po granichnym poverkhnostiam plastin [The stress state of unevenly heated plates loaded on the boundary surfaces]. *Reports. AS USSR. PMM*. 43(6). 1065-1072. [in Russian].
6. Sneddon, I. (1955). *Prevrashchenie Fyrie* [Fourier transform]. Moskva: Publ. House: Inostr. lit. [in Russian].
7. Tymoshenko, S. P. (1948). *Plastynky and obolonky* [Plates and Shells]. Moskva: Gostekhizdat. [in Ukrainian].
8. Ufland, J. S. (1967). *Integralnoie preobrazovanie v zadachakh teorii uprugosti* [Integral transformations in problems of the theory of elasticity]. Leningrad: Nauka. [in Russian].
9. Albuquerque, E. L., Sollero, P., Venturini, W. S., Aliabadi, M. H. (2006). Boundary element analysis of anisotropic Kirchhoff plates. *International Journal of Solids and Structures*. 43(14-15). 4029–4046.
10. Cheng, Z. Q., Reddy, J. N. (2002, June). Octet formalism for Kirchhoff anisotropic plates. *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 458(2022). 1499–1517.
11. Hwu, C. (2010). *Anisotropic elastic plates*. Springer Science
12. Szilard, R. (2004). *Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods*. John Wiley & Sons.
13. Ventsel, E., Krauthammer, T. (2001). *Thin plates and shells: theory: analysis, and applications*. CRC press.

Соляр Тетяна Ярославівна

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
к.ф.-м.н., старший науковий співробітник
вул. Наукова, 36, Львів, Україна, 79060
t_solyar@ukr.net,
ORCID: 0000-0003-3826-8881

Соляр Ольга Ігорівна

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
інженер
вул. Наукова, 36, Львів, Україна, 79060
solyarolya@gmail.com
ORCID: 0000-0002-7504-3756

Для посилань:

Соляр Т. Я., Соляр О. І. Визначення напружень у товстих плитах при локалізованих навантаженнях. Механіка та математичні методи, 2022. Т. 4. № 1. С. 45–63.

For references:

Solyar T., Solyar O. (2022). Determination of stresses in thick plates under localized loads. *Mechanics and Mathematical Methods*. 4 (1). 45–63