

ISSN 2618-0650 (Print)
ISSN 2664-1364 (Online)

Механіка



та математичні методи

**Mechanics
and Mathematical Methods**

**Науковий журнал
The scientific journal**

IV/2/2022

УДК 531 : 51-7 (05)
M55

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

Науковий журнал



Засновник і видавець:

Одеська державна академія будівництва та архітектури

Том IV
№2
2022

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: Серія КВ №23478–13318 Р від 13.07.2018 р.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
Серія ДК №4515 від 01.04.2013 р.

M55 **Механіка та математичні методи** : науковий журнал. — Одеса : ОДАБА, 2022. — Том IV. — Вип. №2. — 102 с.

В науковому журналі публікуються статті і огляди за спеціальностями:

- 111 Математика;
- 112 Статистика;
- 113 Прикладна математика;
- 121 Інженерія програмного забезпечення;
- 122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології;
- 124 Системний аналіз;
- 131 Прикладна механіка;
- 192 Будівництво та цивільна інженерія.

Рекомендовано до друку Вченою радою Одеської державної академії будівництва та архітектури, протокол №4 від 24.12.2022 р.

Адреса: редакція журналу «Механіка та математичні методи»
Одеська державна академія будівництва та архітектури
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029

Телефони: (048)723-23-10, (048)7323402, (048)7298626

E-mail: mmm@ogasa.org.ua

Web: mmm-journal.com.ua

УДК 531 : 51-7 (05)
M55

ISSN 2618-0650 (Print)
ISSN 2664-1364 (Online)

Одеська державна академія
будівництва та архітектури, 2022

Склад редакційної колегії:

Головний редактор: Ковров А. В., к.т.н., проф., ректор Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Заступники головного редактора:

Крутій Ю. С., д.т.н., проф., проректор з науково-педагогічної роботи Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Сур'янінов М. Г., д.т.н., проф., завідувач кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Відповідальний секретар: Кіосак В. А., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

- Бербюк В. Є. д.ф.-м.н., проф., професор кафедри механіки та морських наук, Технічний університет Чалмерса, Гетеборг, Швеція;
- Ватуля Г. Л., д.т.н., проф., професор кафедри будівельної механіки та гідравліки Українського державного університету залізничного транспорту, Харків, Україна;
- Горик О. В., д.т.н., проф., завідувач кафедри загальнотехнічних дисциплін Полтавської державної аграрної академії, Полтава, Україна;
- Карпюк В. М., д.т.н., проф., професор кафедри залізобетонних конструкцій та транспортних споруд Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Куріазопоулос А., к.т.н., доц., професор кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Кода Е., д.т.н., проф., декан факультету будівництва та інженерії середовища Варшавського природничого університету, Варшава, Польща;
- Кононов Ю. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач відділу теорії керуючих систем інституту прикладної математики та механіки НАН України, Слав'янск, Україна;
- Круглов В. Є., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна;
- Кучер М. К., д.т.н., проф., завідувач відділу конструкційних матеріалів інституту проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна;
- Лесечко О. В., к.ф.-м.н., доц., завідувач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Лещенко Д. Д., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри теоретичної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Ляшенко Т. В., д.т.н., проф., професорка кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Максимович О. В., д.т.н., проф., професорка кафедри зварювального виробництва, діагностики та відновлення металоконструкцій Національного університету "Львівська політехніка", Львів, Україна;
- Отрош Ю. А. д.т.н., проф., начальник кафедри пожежної профілактики в населених пунктах Національного університету цивільного захисту України, Харків, Україна;
- Пастернак Я. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна;
- Пневматікос Н., к.т.н., доц., доцент кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Савченко О. Г., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, Херсон, Україна;
- Трач В. М., д.т.н., проф., завідувач кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування, Рівне, Україна;
- Шваб'юк В. І., д.т.н., проф., професор кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна.

Технічний редактор: Головата Злата Олександрівна

Лінгвістичний радник з англійської мови: Мар'яно Яніна Георгіївна, к.ф.н, доц.

ІТ підтримка: Вандинський Віктор Юрійович

The composition of the editorial board:

Chief Editor: Kovrov A., Ph.D., Professor, Rector of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

Deputy Chief Editor:

Krutii Yu., Doctor of Technical Science, Professor, Pro-rector for Research of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

Suryaninov M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

Assistant Editor: Kiosak V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Higher Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

- Berbyuk V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor in Mechanical Systems, Division of Dynamics, Department of Mechanics and Maritime Sciences Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden;
- Vatulia G., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Structural Mechanics and Hydraulics Department, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine;
- Goryk O., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Basic Technical Disciplines Department, Poltava State Agrarian Academy, Poltava, Ukraine;
- Karpuyk V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Reinforced Concrete Constructions and Transport Constructions, Odessa, Ukraine;
- Kyriazopoulos A., Ph.D., Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Koda E., Doctor of Technical Science, Professor, Dean of Construction and Environmental Engineering Faculty, University of Life Sciences, Warsaw, Poland;
- Kononov Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Control-system Theory Division, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Slavyansk, Ukraine;
- Kruglov V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Chair of Methods of Mathematical Physics Odessa I. I. Mechnikov National University, Odessa, Ukraine;
- Kucher M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Materials Division, G. S. Pisarenko Institute for Problems of Strength, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine;
- Lesechko O., Ph.D., Associate Professor, Head of Higher Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Leshchenko D., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Lyashenko T., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Information Technology and Applied Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Maksymovych O., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Welding Engineering, Diagnostics and Rebuilding of Metal Structures, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine;
- Otrosh Y., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Civil Protection Service, National University of Civil Defence of Ukraine, Kharkiv, Ukraine;
- Pasternak Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Applied Mathematics and Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine;
- Pnevmatikos N., Ph.D., Associate Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Savchenko O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Algebra, Geometry and Mathematical Analysis Department, Kherson State University, Kherson, Ukraine;
- Trach V., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Bridges and Tunnels, Strength of Materials and Structural Mechanics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine;
- Shvabyuk V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Engineering Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine.

Technical Editor: Holovata Zlata

Linguistic Adviser in English language: Maryanko Yanina, Ph.D., Associate Professor

IT SuPort: Vandynskiy Viktor

ЗМІСТ

Кононов Ю. М., Чеїб А. Х.

Вплив динамічної несиметрії на стійкість обертання у середовищі з опором
твердого тіла під дією постійного моменту у інерціальній системі відліку..... 6

D. Leshchenko, T. Kozachenko

Evolution of rotational motions in a resistive medium of a nearly dynamically spherical
gyrostat subjected to constant body-fixed torques..... 19

A. Bespalova, O. Knysh, O. Dashkovska, O. Faizulyna, T. Chumachenko

Parameters affecting the temperature of the diamond cutting disc when cutting
building materials..... 32

M. Surianinov, Y. Krutii, D. Kirichenko, O. Klimenko

Calculation of annular plates on an elastic base with a variable
bedding factor..... 43

V. Fomin, I. Fomina

Study of a concrete column for stability under asymmetric corrosion..... 53

Толмачов С. М., Бєліченко О. А., Дорошенко М. А., Покуса Ю. П.

Порівняльна характеристика застосування поліпропіленової фібри та базальтової
фібри у дорожніх бетонах..... 65

I. Medved, M. Biloshytskiy, R. Maiboroda, E. Shcholokov, V. Tryhub

"Search for solutions" in the problems of calculation of building structures..... 75

S. Bekshaev

Some problems of optimization of rod systems containing compressed elements using
additional constraints..... 83

CONTENT

Yu. Kononov, A. K. Cheib

Influence of dynamic asymmetry on the rotation stability in a resisting medium of a asymmetric rigid body under the action of a constant moment in inertial reference frame... 6

D. Leshchenko, T. Kozachenko

Evolution of rotational motions in a resistive medium of a nearly dynamically spherical gyrostat subjected to constant body-fixed torques..... 19

A. Bespalova, O. Knysh, O. Dashkovska, O. Faizulyna, T. Chumachenko

Parameters affecting the temperature of the diamond cutting disc when cutting building materials..... 32

M. Surianinov, Y. Krutii, D. Kirichenko, O. Klimenko

Calculation of annular plates on an elastic base with a variable bedding factor..... 43

V. Fomin, I. Fomina

Study of a concrete column for stability under asymmetric corrosion..... 53

S. Tolmachov, O. Belichenko, M. Doroschenko, Yu. Pokusa

Comparative characteristics of the application of polypropylene and basalt fiber in road concrete..... 65

I. Medved, M. Biloshytskiy, R. Maiboroda, E. Shcholokov, V. Tryhub

"Search for solutions" in the problems of calculation of building structures..... 75

S. Bekshaev

Some problems of optimization of rod systems containing compressed elements using additional constraints..... 83

УДК 531.36, 531.38

ВПЛИВ ДИНАМІЧНОЇ НЕСИМЕТРІЇ НА СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ТВЕРДОГО ТІЛА ПІД ДІЄЮ ПОСТІЙНОГО МОМЕНТУ У ІНЕРЦІАЛЬНІЙ СИСТЕМІ ВІДЛІКУ

Кононов Ю. М.¹, Чеїб А. Х.²

¹*Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України*

²*Донецький національний університет імені Василя Стуса*

Анотація. У припущенні, що центр мас несиметричного твердого тіла знаходиться на третій головній осі інерції твердого тіла, досліджені раніше отримані умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання у середовищі з опором динамічно несиметричного твердого тіла. Тверде тіло обертається навколо нерухомої точки, знаходиться під дією сил тяжіння, дисипативного моменту і постійного моменту в інерціальній системі відліку. Умови стійкості представлені у вигляді системи трьох нерівностей. Перша і друга нерівності мають першу ступень відносно динамічного дебалансу, а третя нерівність має третью ступень. Перша і третя нерівності мають другий ступінь щодо перекидального або відновлювального моменту, а друга нерівність – перший ступінь. Перша та третя нерівності мають четвертий ступінь відносно постійного моменту, а друга нерівність має другий ступінь. Найбільш складною для дослідження є третя нерівність. Проведені аналітичні дослідження впливу динамічного дебалансу, відновлювального і перекидального моменту на умови асимптотичної стійкості. Отримані умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання у середовищі з опором несиметричного твердого тіла при досить малих значеннях динамічному дебалансу. Виписані достатні умови стійкості с точністю до другого порядку малості відносно постійного моменту і першого порядку малості відносно відновлювального і перекидального моментів. Отримані умови нестійкості при досить великому динамічному дебалансі. Досліджено вплив динамічного дебалансу на умови стійкості обертання твердого тіла навколо центру мас. Показано, що при відсутності дисипативної несиметрії для асимптотичної стійкості достатньо, щоб осьовий момент інерції твердого тіла був більший за подвійний екваторіальний момент і виконувалося відома необхідна умова стійкості для симетричного твердого тіла.

Ключові слова: динамічно несиметричне твердо тіло, рівномірне обертання, середовище з опором, постійний момент в інерціальній системі відліку, асимптотична стійкість.

INFLUENCE OF DYNAMIC ASYMMETRY ON THE ROTATION STABILITY IN A RESISTING MEDIUM OF A ASYMMETRIC RIGID BODY UNDER THE ACTION OF A CONSTANT MOMENT IN INERTIAL REFERENCE FRAME

Yu. Kononov¹, A. K. Cheib²

¹*Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine*

²*Vasyl' Stus Donetsk National University*

Abstract. Under the assumption that the center of mass of an asymmetric rigid body is located on the third principal axis of inertia of a rigid body, the previously obtained conditions for the asymptotic stability of uniform rotation in a medium with resistance of a dynamically asymmetric rigid body are investigated. A rigid body rotates around a fixed point, is under the action of gravity, dissipative moment and constant moment in an inertial frame of reference. The stability conditions are presented as a system of three inequalities. The first and second inequalities have the first degree relative to the

dynamic unbalance, and the third inequality has the third degree. The first and third inequalities are of the second degree with respect to the overturning or restoring moment, and the second inequality is of the first degree. The first and third inequalities are of the fourth degree with respect to the constant moment, and the second inequality is of the second degree. The third inequality is the most difficult to study. Analytical studies of the influence of dynamic unbalance, restoring and overturning moments on the conditions of asymptotic stability are carried out. Conditions for the asymptotic stability of uniform rotation in a medium with resistance to an asymmetric rigid body are obtained for sufficiently small values of dynamic unbalance. Sufficient stability conditions are written out up to the second order of smallness with respect to the constant moment and the first order of smallness with respect to the restoring and overturning moments. Instability conditions are obtained for sufficiently large dynamic unbalance. The effect of dynamic unbalance on the stability conditions for the rotation of a rigid body around the center of mass is studied. It is shown that in the absence of dissipative asymmetry, it is sufficient for asymptotic stability that the axial moment of inertia of a rigid body be greater than the double equatorial moment and that the well-known necessary stability condition for a symmetric rigid body be satisfied.

Keywords: dynamically asymmetric rigid body, uniform rotation, resisting medium, constant moment in inertial frame of reference, asymptotic stability.

1 ВСТУП

В даний час є досить велика кількість робіт, в яких проводяться різні дослідження динаміки твердих тіл, що обертаються у середовищі з опором. Наведемо лише роботи, які найближчі до розглядуваної задачі. У роботах [1, 2] розглянуто кілька прикладів рухів твердих тіл з малою несиметрією і запропоновано алгоритм вивчення таких систем. Показано, що мала динамічна несиметрія твердого тіла призводить до появи додаткового інтервалу нестійкості, довжина якого прямує до нуля при прямуванні до нуля величини дебалансу. В статті [3] проведені дослідження впливу дисипативного моменту і постійного моменту в інерціальній системі відліку на стійкість стаціонарних рухів гіроскопа Лагранжа. У роботі [4] ця задача була узагальнена на випадок рівномірних обертань гіроскопа Лагранжа на струнному підвісі. В статтях [5, 6], на підставі критерію Льенара-Шіпара в іннорному вигляді, отримано умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання у середовищі з опором несиметричного твердого тіла. Рівномірного обертання твердого тіла підтримується постійним моментом у неінерціальній системі відліку. Умови стійкості записано у вигляді системи трьох нерівностей. Проведено аналітичні дослідження цих нерівностей. Отримано умови на величини постійного моменту і моменту інерції третьої головної осі, які при дії відновлювального моменту достатні для асимптотичної стійкості. Показано, що при досить великому постійному моменті буде спостерігатися асимптотична стійкість при дії відновлювального моменту, якщо обертання твердого тіла відбувається навколо осі найбільшого моменту інерції і найменшого з подвоєних. Дано узагальнення отриманих умов стійкості на випадок наявності в твердому тілі порожнини з ідеальної нестисливої рідини, що здійснює потенціальний рух. Показано, що при відсутності дисипації, отримані умови стійкості збігаються з відомими. Стаття [7] узагальнює результати статті [3] на випадок рівномірних обертань динамічно несиметричного важкого твердого тіла. В ній, у припущенні, що центр мас несиметричного твердого тіла знаходиться на третій головній осі інерції твердого тіла, отримані умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання динамічно несиметричного важкого твердого тіла. Ці умови отримані у вигляді системи трьох нерівностей. Тверде тіло знаходиться під дією сил тяжіння, дисипативного моменту і постійного моменту в інерціальній системі відліку. Показано, що положення рівноваги твердого тіла буде стійким тільки при дії відновлювального моменту. Динамічна несиметрія більш суттєво впливає на стійкість обертання несиметричного твердого тіла, ніж дисипативна несиметрія. Проведено дослідження умов стійкості для різних граничних випадків малих або великих значень величин відновлювального, перекидального або постійного моментів. Зазначається, що з досить великих значення модуля відновлювального моменту обертання несиметричного твердого тіла буде асимптотично стійким. Якщо осьовий момент інерції є найбільшим або найменшим моментом інерції, то при досить великих значення кутової швидкості, як при дії перекидального моменту, так і при дії відновлювального моментів, обертання несиметричного твердого тіла буде асимптотично стійким. Проведено аналітичні дослідження впливу дисипативного, постійного, перекидального і відновлювального моментів на стійкість рівномірних обертань несиметричних та симетричних твердих тіл. Показано, що при відсутності динамічної та дисипативної симетрії отримані умови стійкості збігаються з відомими. У роботі [8] узагальнюється задача, яка була розглянута в [7], на випадок постійних моментів в інерціальній і неінерціальній системах відліку. Найбільш вдалий огляд сучасної літератури по розглядуваної задачі наданий в роботах [5–8, 10–12]. У монографії [9] представлений уніфікований і добре розроблений підхід до динаміки кутових рухів твердих тіл, що зазнають моментів збурення різної фізичної природи. Строгий підхід, заснований на процедурі

усереднення, застосовується до тіл з довільними еліпсоїдами інерції. Детально розглядається дія різних моментів збурень, як зовнішніх (гравітаційний, аеродинамічний, сонячний тиск), так і внутрішніх (завдяки в'язкій рідині в резервуарах, пружним і в'язкопружним властивостям тіла). В статті [10] розглянуто рух навколо центру мас сфероїда із порожниною, заповненою в'язкою рідиною. Момент сил, що діють тіло з боку в'язкої рідини в порожнині, визначають за методикою, розробленою в роботах Ф. Л. Черноусько. Асимптотичний підхід дозволяє отримати деякі якісні результати та описати нелінійну еволюцію кутового руху за допомогою спрощених усереднених рівнянь. В статті [11] досліджуються збурені обертальні рухи твердого тіла, схожі на випадок дзиги Лагранжа, піддані повільно змінним у часі моментам сил відновлення та збурення. Відновлюючий момент також залежить від малого кута нутації. Для розв'язування задачі використовується метод усереднення. Встановлено умови можливості усереднення (по фазі кута нутації) рівнянь руху твердого тіла, пов'язаних із випадком Лагранжа. Отримано усереднену систему рівнянь у першому наближенні. Асимптотичний підхід дозволяє отримати деякі якісні результати та описати еволюцію руху за допомогою спрощених усереднених рівнянь. У випадку обертального руху тіла, зануреного в лінійно-дисипативне середовище, проводиться чисельне інтегрування усередненої системи рівнянь. Вивчається новий клас обертальних рухів дзиги Лагранжа для нестационарного моменту збурення, а також для моменту відновлення, який повільно змінюється з часом і залежить від малого кута нутації. У роботі [12] розглянуто рух навколо центру мас майже динамічно сферичного твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною високої в'язкості, на яку діють постійні нерухомі обертальні моменти тіла. Момент сил, що діють на тверде тіло з боку в'язкої рідини в порожнині, визначається за методикою, розробленою в роботах Ф. Л. Черноусько. Отримані асимптотичні та чисельні розв'язки описують еволюцію руху тіла під дією малих внутрішніх і зовнішніх моментів.

У даній статті продовжуються дослідження умов асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором несиметричного твердого тіла, які були раніше отримані у роботі [7]. З урахуванням перекидального і відновлювального моментів, а також при їх відсутності, проведено аналітичні дослідження впливу малого і великого динамічного дібалансу на умови стійкості. Досліджено вплив динамічного дібалансу на стійкості і нестійкості при відсутності дисипативної несиметрії.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

Розглянемо важке динамічно несиметричне тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої точки, в припущенні, що на нього діє дисипативний момент $\mathbf{M}_d = -\mathbf{D}\boldsymbol{\omega}$ ($\mathbf{D} = \text{diag}(D_1, D_2, D_3)$; $D_i > 0$; $i = \overline{1,3}$), що моделює опір середовища та постійний моменти $\mathbf{M}_p = P\boldsymbol{\gamma}$, який підтримує сталу кутову швидкість власного обертання твердого тіла. Будемо вважати, що на третій головній осі інерції твердого тіла знаходиться центр мас твердого тіла і тверде тіло в незбуреному русі рівномірно обертається с кутою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_0$ навколо цієї вісі. Тут $\boldsymbol{\omega}$ – кутова швидкість твердого тіла, $\boldsymbol{\gamma}$ – одиничний вектор висхідної вертикалі, P – довільна стала.

Рівняння руху твердого тіла мають вигляд [3, 5, 7]

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + P\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}; \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad (2)$$

де $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – тензор інерції твердого тіла для нерухої точки; $V = \Gamma(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma})$ – потенційна енергія ($\Gamma = mgs$, m – маса твердого тіла, s – відстань від нерухої точки до центру мас твердого тіла, g – прискорення вільного падіння); \mathbf{k} – одиничний вектор третьої головної осі; $\boldsymbol{\gamma}$ – одиничний вектор висхідної вертикалі.

Рівняння (1) виражає теорему про зміну кінетичного моменту $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$, а рівняння (2) – умова сталості вектора $\boldsymbol{\gamma}$ в інерціальній системі відліку.

Проектуючи рівняння руху твердого тіла (1) – (2) на головній осі інерції твердого тіла для нерухої точки, отримуємо:

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = \Gamma \gamma_2 - D_1 \omega_1; \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 = -\Gamma \gamma_1 - D_2 \omega_2; \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = P \gamma_3 - D_3 \omega_3, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 + \omega_2 \gamma_3 - \omega_3 \gamma_2 = 0; \\ \dot{\gamma}_2 + \omega_3 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_3 = 0; \\ \dot{\gamma}_3 + \omega_1 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_1 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Система (3) – (4) допускає розв'язки:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 1, \omega_1 = \omega_2 = 0, \omega_3 = \omega_0 = \omega = \frac{P}{D_3}, \quad (5)$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = -1, \omega_1 = \omega_2 = 0, \omega_3 = \omega_0 = \omega = \frac{-P}{D_3}, \quad (6)$$

які відповідають рівномірним обертанням твердого тіла з кутовою швидкістю ω навколо вертикально розташованої третьої головної осі. При цьому розв'язку (5) відповідає випадок "сплячої" дзиги, на яку діє перекидальний момент ($\Gamma > 0$, центр мас твердого тіла перебуває вище нерухої точки ($s > 0$), а розв'язку (6) – випадок статично врівноваженої дзиги, на яку діє відновлювальний ($\Gamma < 0$, центр мас знаходиться нижче нерухої точки ($s < 0$)). Таким чином, розв'язку (5) відповідає випадок $\Gamma > 0$, а розв'язку (6) відповідає $\Gamma < 0$.

Вважаючи в обуреного руху $\gamma_3 = \pm 1 + \delta$, $\omega_3 = \omega + \sigma$ (знак плюс відповідає рішенням (5), а знак мінус – (6)) і, зберігаючи для інших змінних їх колишні позначення, запишемо лінеаризовані рівняння збуреного руху:

$$\begin{cases} J_2 \ddot{\gamma}_1 + D_2 \dot{\gamma}_1 + [(J_3 - J_1) \omega^2 - \Gamma] \gamma_1 - J \omega \dot{\gamma}_2 - (D_2 \omega - P) \gamma_2 = 0, \\ J_1 \ddot{\gamma}_2 + D_2 \dot{\gamma}_2 + [(J_3 - J_2) \omega^2 - \Gamma] \gamma_2 + J \omega \dot{\gamma}_1 + (D_1 \omega - P) \gamma_1 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Тут $J = J_1 + J_2 - J_3 > 0$.

Основна відмінність отриманих рівнянь (7) від аналогічних рівнянь робіт [3, 4] полягає в тому, що через динамічну ($J_2 \neq J_1$) та дисипативну ($D_2 \neq D_1$) несиметрію не можна спростити ці рівняння шляхом введенням комплексної функції $\gamma_1 + i\gamma_2$. Слід також зазначити, що система рівнянь (7) описує рух лінійної механічної системи з двома ступенями свободи, що знаходиться під дією сил довільної структури: дисипативних, потенційних, гіроскопічних і циркуляційних [1, 3–5].

3 АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ (5) – (6)

У роботі [7] були отримані наступні умови асимптотичної стійкості розв'язків (5) – (6):

$$\begin{aligned} & (\Gamma D_3^2 - (J_3 - J_1)P^2)(\Gamma D_3^2 - (J_3 - J_2)P^2) + (D_3 - D_1)(D_3 - D_2)D_3^3P^2 = \\ & = D_3^4\Gamma^2 + \tilde{J}D_3^2P^2\Gamma + (D_3 - D_1)(D_3 - D_2)D_3^2P^2 + (J_3 - J_1)(J_3 - J_2)P^4 > 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$(D_1 + D_2)D_3^2\Gamma < (J_{12} - 2JD_3)P^2, \quad (9)$$

$$(J_1 - J_2)^2 D_1D_2D_3^3\Gamma^2 + D_3\Gamma_1\Gamma + \Gamma_0 = p_4P^4 + p_2P^2 + p_0 > 0, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = & \left\{ [(J_3 - 2J_2)D_1 + (J_3 - 2J_1)D_2]J_{12} + 2(J_1 - J_2)\tilde{J}_{12}D_3 \right\} JP^2 - \\ & - J_{12}(D_1 + D_2)D_1D_2D_3^2, \end{aligned}$$

$$\Gamma_0 = 2(J_3J_{12} - 2J_1J_2D_3)J^2P^4 + [2D_1D_2J_3 - J_{12}D_3 - (D_1 - D_2)\tilde{J}_{12}]J_{12}D_3^2P^2, \quad (11)$$

$$p_4 = 2J^2(J_3J_{12} - 2J_1J_2D_3),$$

$$\begin{aligned} p_2 = & \left\{ J_2(J_3 - 2J_2)D_1^2 + ((J_1 + J_2)J_3 - 4J_1J_2)D_1D_2 + 2(J_1 - J_2)\tilde{J}_{12}D_3 + \right. \\ & \left. + J_1(J_3 - 2J_1)D_2^2 \right\} J\Gamma + (J_2D_1^2 - \tilde{J}D_1D_2 - J_{12}D_3 + J_1D_2^2)J_{12}D_3 \Big\} D_3, \end{aligned}$$

$$p_0 = \Gamma[(J_1 - J_2)^2\Gamma - J_{12}(D_1 + D_2)]D_1D_2D_3^3, \quad \tilde{J} = J - J_3, \quad J_{12} = J_1D_2 + J_2D_1 > 0.$$

Так як в нерівності (8) – (10) та в позначення (11) стала P входить в парний ступені, то ці нерівності при дії перекидального моменту ($\Gamma > 0$) визначають умови асимптотичної стійкості рішення (5), а при дії відновлювального моменту ($\Gamma < 0$) – рішення (6).

Проведемо дослідження впливу динамічного дибалансу на умови стійкості. Нехай $J_2 = J_1(1 + \varepsilon)$, де $\varepsilon \geq -1$, тоді система нерівностей (8) – (10) отримують вигляд:

$$\begin{aligned} & (\Gamma D_3^2 - (J_3 - J_1)P^2)^2 + (D_3 - D_1)(D_3 - D_2)D_3^3P^2 + \tilde{a}_0\varepsilon = \\ & = D_3^4\Gamma^2 + 2(J_1 - J_3)D_3^2P^2\Gamma + (D_3 - D_1)(D_3 - D_2)D_3^2P^2 + (J_3 - J_1)^2P^4 + \\ & + [(J_1 - J_3)P^2 - D_3^2\Gamma]J_1P^2\varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$(D_1 + D_2)D_3^2\Gamma < [J_1(D_1 + D_2) + 2(J_3 - 2J_1)D_3]P^2 + J_1(D_1 - 2D_3)P^2\varepsilon, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \Gamma_{10}\Gamma + \Gamma_{00} + (\Gamma_{11}\Gamma + \Gamma_{01})\varepsilon + (\Gamma_{22}\Gamma^2 + \Gamma_{12}\Gamma + \Gamma_{02})\varepsilon^2 + (\Gamma_{13}\Gamma + \Gamma_{03})\varepsilon^3 = \\ & = p_{40}P^4 + p_{20}P^2 + p_{00} + (p_{41}P^4 + p_{21}P^2 + p_{01})\varepsilon + \\ & + (p_{42}P^4 + p_{22}P^2 + p_{02})\varepsilon^2 + (p_{43}P^4 + p_{23})P^2\varepsilon^3 > 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Тут

$$\tilde{a}_0 = [D_3^2\Gamma - (J_3 - J_1)P^2]J_1P^2, \quad \Gamma_{10} = -[(J_3 - 2J_1)^2P^2 + D_1D_2D_3^2](D_1 + D_2)^2D_3,$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{00} = & \left\{ 2(J_3 - 2J_1)^2 [J_3(D_1 + D_2) - 2J_1D_3]P^2 + \right. \\ & \left. + [J_1((D_1 - D_2)^2 - (D_1 + D_2)D_3) + 2J_3D_1D_2] (D_1 + D_2)D_3^2 \right\} P^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11} &= \left\{ (J_3 - 2J_1) \left[J_1 \left(2(D_2 - D_1)D_3 + 5(D_1 + 6D_2)D_1 + D_2^2 \right) - J_3 D_1 (D_1 + D_2) \right] P^2 - \right. \\
 &\quad \left. - (D_1 + D_2) D_1^2 D_2 D_3^2 \right\}, \\
 \Gamma_{01} &= 2 \left\{ (J_3 - 2J_1) \left[(J_3 - 4J_1) (J_3 D_1 - 2J_1 D_3) - 2J_1 J_3 D_2 \right] P^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left[J_1 \left((D_1 - D_2) D_1 - (D_1 + D_2) D_3 \right) + J_3 D_1 D_2 \right] D_1 D_3^2 \right\} P^2, \quad \Gamma_{22} = J_1 D_1 D_2 D_3^3, \\
 \Gamma_{12} &= \left\{ 2 \left[(J_3 - 3J_1) D_1 - J_1 D_2 \right] D_3 + \left[(3J_3 - 8J_1) D_1 + (J_3 - 4J_1) D_2 \right] D_1 \right\} J_1 D_3 P^2, \\
 \Gamma_{02} &= \left\{ 2 \left[J_3 (2J_3 - 5J_1) D_1 - 2J_1 (2J_3 - 5J_1) D_3 + J_1 J_3 D_2 \right] P^2 - \right. \\
 &\quad \left. - (D_3 + D_2 - D_1) D_1^2 D_3^2 \right\} J_1 P^2, \\
 \Gamma_{13} &= 2J_1^2 (D_3 - D_1) D_1 D_3 P^2, \quad \Gamma_{03} = 2J_1^2 (J_3 D_1 - 2J_1 D_3) P^4, \\
 p_{40} &= 2(J_3 - 2J_1)^2 \left[J_3 (D_1 + D_2) - 2J_1 D_3 \right], \\
 p_{20} &= \left\{ \left[J_1 (D_1 - D_2)^2 + 2J_3 D_1 D_2 \right] D_3 - \left[(J_3 - 2J_1)^2 \Gamma + J_1 D_3^2 \right] (D_1 + D_2) \right\} (D_1 + D_2) D_3, \\
 p_{00} &= -(D_1 + D_2)^2 D_1 D_2 D_3^2 \Gamma, \\
 p_{41} &= 2(J_3 - 2J_1) \left\{ J_3 \left[J_3 D_1 - 2J_1 (2D_1 + D_2) \right] - 2J_1 (J_3 - 4J_1) D_3 \right\}, \\
 p_{21} &= \left\{ (J_3 - 2J_1) \left[2J_1 (D_2 - D_1) D_3 + J_1 D_2^2 - (J_3 - 6J_1) D_1 D_2 - (J_3 - 5J_1) D_1^2 \right] \Gamma + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left[J_3 D_1 D_2 + J_1 \left((D_1 - D_2) D_1 - (D_1 + D_2) D_3 \right) \right] D_1 D_3 \right\} D_3, \quad p_{01} = -(D_1 + D_2) D_1^2 D_2 D_3^2 \Gamma, \\
 p_{42} &= -2J_1 \left\{ J_3 \left[(2J_3 - 5J_1) D_1 - J_1 D_2 \right] - 2J_1 (2J_3 - 5J_1) D_3 \right\}, \\
 p_{22} &= - \left\{ 2 \left(J_1 D_2 + (J_3 - 3J_1) D_1 \right) D_3 - (J_3 - 4J_1) D_1 D_2 - (3J_3 - 8J_1) D_1^2 \right\} \Gamma + \\
 &\quad + (D_3 + D_2 - D_1) D_1^2 D_3 \left\{ J_1 D_3 \right\}, \quad p_{02} = J_1 D_1 D_2 D_3^2 \Gamma^2, \quad p_{43} = 2J_1^2 (J_3 D_1 - 2J_1 D_3), \\
 p_{23} &= 2J_1^2 (D_3 - D_1) D_1 D_3 \Gamma.
 \end{aligned} \tag{15}$$

З точністю до першого порядку малості динамічного дебалансу ε нерівність (14) отримує вигляд

$$\Gamma_{10} \Gamma + \Gamma_{00} + (\Gamma_{11} \Gamma + \Gamma_{01}) \varepsilon = p_{40} P^4 + p_{20} P^2 + p_{00} + (p_{41} P^4 + p_{21} P^2 + p_{01}) \varepsilon > 0. \tag{16}$$

Таким чином, з точністю до першого порядку малості динамічного дебалансу система нерівностей (12) – (14) буде представлена у вигляді нерівностей (12), (13) і (16), де значення коефіцієнтів $\Gamma_{10}, \Gamma_{00}, \Gamma_{11}, \Gamma_{01}, p_{40}, p_{20}, p_{00}, p_{41}, p_{21}, p_{01}$ наведено в (15).

Нерівності (12) і (14) з точністю до другого порядку малості відносно P/P_0 ($|P/P_0| \ll 1$), де P_0 – характерне значення постійного моменту, запишуться так:

$$D_3^2 \Gamma^2 + 2(J_1 - J_3) P^2 \Gamma + (D_3 - D_1)(D_3 - D_2) P^2 - \Gamma J_1 P^2 \varepsilon > 0, \tag{17}$$

$$p_{20} P^2 + p_{00} + (p_{21} P^2 + p_{01}) \varepsilon + (p_{22} P^2 + p_{02}) \varepsilon^2 + p_{23} \varepsilon^3 > 0. \tag{18}$$

Таким чином, з точністю до другого порядку малості постійного моменту система нерівностей (12) – (14) буде представлена у вигляді нерівностей (17), (16) і (18), де значення коефіцієнтів $p_{20}, p_{00}, p_{21}, p_{01}, p_{22}, p_{02}, p_{23}$ приведені в (15).

Нерівності (12) і (14) з точністю до першого порядку малості відносно Γ/Γ_0 ($|\Gamma/\Gamma_0| \ll 1$) де Γ_0 – характерне значення постійного моменту, отримують вигляд:

$$2(J_1 - J_3)D_3^2\Gamma + (D_3 - D_1)(D_3 - D_2)D_3^2 + (J_3 - J_1)^2 P^2 + \\ + [(J_1 - J_3)P^2 - D_3^2\Gamma]J_1\varepsilon > 0, \quad (19)$$

$$\Gamma_{10}\Gamma + \Gamma_{00} + (\Gamma_{11}\Gamma + \Gamma_{01})\varepsilon + (\Gamma_{12}\Gamma + \Gamma_{02})\varepsilon^2 + (\Gamma_{13}\Gamma + \Gamma_{03})\varepsilon^3 > 0. \quad (20)$$

Таким чином, з точністю до першого порядку малості відносно Γ/Γ_0 система нерівностей (12) – (14) буде представлена у вигляді нерівностей (19), (13) і (20), де значення коефіцієнтів $\Gamma_{10}, \Gamma_{00}, \Gamma_{11}, \Gamma_{01}, \Gamma_{12}, \Gamma_{02}, \Gamma_{13}, \Gamma_{03}$ наведено в (15).

У випадку відсутності дисипативное несиметрії ($D_2 = D_1$) система нерівностей (12) – (14) спрощується і записується наступним чином:

$$(\Gamma D_3^2 - (J_3 - J_1)P^2)^2 + (D_3 - D_1)^2 D_3^3 P^2 + \tilde{a}_0\varepsilon = D_3^4\Gamma^2 + 2(J_1 - J_3)D_3^2 P^2\Gamma + \\ + (D_3 - D_1)^2 D_3^2 P^2 + (J_3 - J_1)^2 P^4 + [(J_1 - J_3)P^2 - D_3^2\Gamma]J_1 P^2\varepsilon > 0, \quad (21)$$

$$2D_1 D_3^2\Gamma < 2[J_1 D_1 + (J_3 - 2J_1)D_3]P^2 + J_1(D_1 - 2D_3)P^2\varepsilon, \quad (22)$$

$$\Gamma_{10}\Gamma + \Gamma_{00} + (\Gamma_{11}\Gamma + \Gamma_{01})\varepsilon + (\Gamma_{22}\Gamma^2 + \Gamma_{12}\Gamma + \Gamma_{02})\varepsilon^2 + (\Gamma_{13}\Gamma + \Gamma_{03})\varepsilon^3 = \\ = p_{40}P^4 + p_{20}P^2 + p_{00} + (p_{41}P^4 + p_{21}P^2 + p_{01})\varepsilon + (p_{42}P^4 + p_{22}P^2 + p_{02})\varepsilon^2 + \\ + (p_{43}P^2 + p_{23})P^2\varepsilon^3 > 0. \quad (23)$$

Тут

$$\tilde{a}_0 = [D_3^2\Gamma - (J_3 - J_1)P^2]J_1 P^2, \\ \Gamma_{10} = 4\{[2J_1(J_3 - 4J_1)D_3 - J_3(J_3 - 6J_1)D_1](J_3 - 2J_1)P^2 + (2J_1 D_3 - J_3 D_1)D_1^2 D_3^2\}P^2, \\ \Gamma_{00} = 4(J_3 D_1 - J_1 D_3)[(J_3 - 2J_1)^2 P^2 + D_1^2 D_3^2]P^2, \\ \Gamma_{11} = -2[(J_3 - 2J_1)(J_3 - 6J_1)P^2 + D_1^2 D_3^2]D_1^2 D_3, \\ \Gamma_{01} = 4\{[J_3(J_3 - 2J_1)(J_3 - 6J_1)D_1 - 2J_1(J_3 - 2J_1)(J_3 - 4J_1)D_3]P^2 + \\ + (J_3 D_1 - 2J_1 D_3)D_1^2 D_3^2\}P^2, \\ \Gamma_{22} = J_1 D_1^2 D_3^3, \Gamma_{12} = 2[2(J_3 - 3J_1)D_1 - (J_3 - 2J_1)D_3]J_1 D_1 D_3 P^2, \\ \Gamma_{02} = \{4[J_1(2J_3 - 5J_1)D_3 - J_3(J_3 - 3J_1)D_1]P^2 - D_1^2 D_3^2\}J_1 P^2, \\ \Gamma_{13} = 2J_1^2(D_3 - D_1)D_1 D_3 P^2, \Gamma_{03} = 2J_1^2(J_3 D_1 - 2J_1 D_3)P^4, \\ p_{40} = 4(J_3 - 2J_1)^2(J_3 D_1 - J_1 D_3), p_{20} = 4[(J_3 D_1 - J_1 D_3)D_3 - (J_3 - 2J_1)^2\Gamma]D_1^2 D_3, \\ p_{00} = -4D_1^4 D_3^3\Gamma, p_{41} = 2(J_3 - 2J_1)[J_3(J_3 - 6J_1)D_1 - 2J_1(J_3 - 4J_1)D_3], \\ p_{21} = 2[(J_3 D_1 - 2J_1 D_3)D_3 - (J_3 - 2J_1)(J_3 - 6J_1)\Gamma]D_1^2 D_3, p_{01} = p_{00}/2, \\ p_{42} = 4J_1[J_1(2J_3 - 5J_1)D_3 - J_3(J_3 - 3J_1)D_1], \\ p_{22} = J_1\{2[2(J_3 - 3J_1)D_1 - (J_3 - 2J_1)D_3]\Gamma - D_1^2 D_3^2\}D_1 D_3, p_{02} = J_1 D_1^2 D_3^3\Gamma^2, \\ p_{43} = 2J_1^2(J_3 D_1 - 2J_1 D_3), p_{23} = 2J_1^2(D_3 - D_1)D_1 D_3\Gamma.$$

4 ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ СТІЙКОСТІ (12) – (14), (16) – (20) І (21) – (23)

Із нерівностей (13) випливає, що при дії перекидального моменту ($\Gamma > 0$) стійкість буде неможлива, коли $J_1(D_1 + D_2) + 2(J_3 - 2J_1)D_3 < 0$, $D_1 < 2D_3$ при $\varepsilon > 0$ і $D_1 > 2D_3$ при $\varepsilon < 0$.

Із нерівностей (12) – (14) слід, що для досить малих значення динамічному дебалансу ε ($\varepsilon \ll 1$) при

$$\begin{aligned} (D_3 - D_1)(D_3 - D_2) > 0, (D_1 + D_2)D_3^2\Gamma < [J_1(D_1 + D_2) + 2(J_3 - 2J_1)D_3]P^2, \\ \Gamma_{10}\Gamma + \Gamma_{00} > 0 \text{ або } p_{40}P^4 + p_{20}P^2 + p_{00} > 0 \end{aligned} \quad (25)$$

рівномірне обертання твердого тіла буде стійким. С точністю до другого порядку малості постійного моменту P/P_0 будемо мати наступні достатні умови стійкості:

$$\begin{aligned} (D_3 - D_1)(D_3 - D_2) > 0, (D_1 + D_2)D_3^2\Gamma < [J_1(D_1 + D_2) + 2(J_3 - 2J_1)D_3]P^2, \\ p_{20}P^2 + p_{00} > 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Із нерівності (12) слід, що для $(D_3 - D_1)(D_3 - D_2) < 0$ при досить великому динамічному дебалансу ε ($\varepsilon > 0$) і $\Gamma < (J_3 - J_1)P^2/D_3^2$ рівномірне обертання твердого тіла буде нестійким. Дане твердження також буде дійсним і при $(D_3 - D_1)(D_3 - D_2) \geq 0$. У запас стійкості також не йде випадок $-1 < \varepsilon < 0$ і $\Gamma > (J_3 - J_1)P^2/D_3^2$.

Із нерівності (13) також випливає, що для $J_1(D_1 + D_2) + 2(J_3 - 2J_1)D_3 < 0$ при досить великому динамічному дебалансу ε ($\varepsilon > 0$) і $D_1 < 2D_3$ обертання твердого тіла буде нестійким. Дане твердження також буде дійсним і при $J_1(D_1 + D_2) + 2(J_3 - 2J_1)D_3 \geq 0$. У запас стійкості не йде випадок $-1 < \varepsilon < 0$ і $D_1 > 2D_3$.

Нерівність (14) включає в собі більш складний, ніж на нерівності (12) і (13) вплив динамічного дебалансу і має третій порядок малості або більшості відповідно ε . При $\Gamma_{10}\Gamma + \Gamma_{00} < 0$ і досить малому значенні ε ($\varepsilon > 0$) і $\Gamma_{11}\Gamma + \Gamma_{01} < 0$, а також при $\varepsilon < 0$ і $\Gamma_{11}\Gamma + \Gamma_{01} > 0$ рівномірне обертання твердого тіла буде нестійким. Дане твердження також буде дійсним тільки при $\Gamma_{10}\Gamma + \Gamma_{00} < 0$. При досить великому значенні ε ($\varepsilon > 0$) і $\Gamma_{13}\Gamma + \Gamma_{03} < 0$ ($p_{43}P^2 + p_{23} < 0$) також виникає нестійкість. Для $\Gamma > 0$ це може бути при $2J_1D_3/J_3 < D_1 < D_3$, тобто коли $2J_1 < J_3$, а для $\Gamma < 0$ – при $D_1 < D_3$ і $2J_1D_3/J_3 < D_1$. У запас стійкості також не йде випадок $-1 < \varepsilon < 0$ і $\Gamma_{13}\Gamma + \Gamma_{03} > 0$ ($p_{43}P^2 + p_{23} > 0$).

При відсутності несиметрії ($D_2 = D_1$), згідно (21) – (24), умови стійкості (25) і (26) відповідно отримують вигляд:

$$\begin{aligned} D_1D_3^2\Gamma < [J_1D_1 + (J_3 - 2J_1)D_3]P^2 > 0, \\ (J_3 - 2J_1)^2(J_3D_1 - J_1D_3)P^4 + \\ + [(J_3D_1 - J_1D_3)D_3 - (J_3 - 2J_1)^2\Gamma]D_1^2D_3P^2 - D_1^4D_3^3\Gamma > 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} D_1D_3^2\Gamma < [J_1D_1 + (J_3 - 2J_1)D_3]P^2 > 0, \\ [(J_3D_1 - J_1D_3)D_3 - (J_3 - 2J_1)^2\Gamma]P^2 - D_1^2D_3^2\Gamma > 0. \end{aligned} \quad (28)$$

При діє відновлювального моменту ($\Gamma < 0$) достатньою умовою для виконання нерівностей (27) і (28) є відома умова для симетричного твердого тіла [3]

$$J_3 D_1 - J_1 D_3 > 0. \quad (29)$$

5 СТІЙКОСТІ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО ЦЕНТРУ МАСС ($\Gamma = 0$)

В цьому випадку система нерівностей (12) – (14) отримає вигляд:

$$(J_3 - J_1)^2 P^2 + (D_3 - D_1)(D_3 - D_2) D_3^2 + J_1 (J_1 - J_3) P^2 \varepsilon > 0, \quad (30)$$

$$J_1 (D_1 + D_2) + 2(J_3 - 2J_1) D_3 + J_1 (D_1 - 2D_3) \varepsilon > 0, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{00} + \tilde{\Gamma}_{01} \varepsilon + \tilde{\Gamma}_{02} \varepsilon^2 + \tilde{\Gamma}_{03} \varepsilon^3 = p_{40} P^2 + p_{20} + (p_{41} P^2 + p_{21}) \varepsilon + \\ + (p_{42} P^2 + p_{22}) \varepsilon^2 + p_{43} P^2 \varepsilon^3 > 0, \end{aligned} \quad (32)$$

де $\tilde{\Gamma}_{oi} = \Gamma_{oi} / P^2$, а значення коефіцієнтів $\Gamma_{00}, \Gamma_{01}, \Gamma_{02}, \Gamma_{03}$ і $p_{40}, p_{20}, p_{41}, p_{21}, p_{42}, p_{22}, p_{43}$ приведені в (15).

Із нерівностей (30) – (32) слід, що для досить малих значеннях динамічного дебалансу ε ($\varepsilon \ll 1$) при

$$\begin{aligned} (D_3 - D_1)(D_3 - D_2) > 0, \quad J_1 (D_1 + D_2) + 2(J_3 - 2J_1) D_3 > 0, \\ 2(J_3 - 2J_1)^2 [J_3 (D_1 + D_2) - 2J_1 D_3] P^2 + \\ + [J_1 ((D_1 - D_2)^2 - (D_1 + D_2) D_3) + 2J_3 D_1 D_2] (D_1 + D_2) D_3^2 > 0, \end{aligned} \quad (33)$$

рівномірне обертання твердого тіла буде стійким. С точністю до другого порядку малості постійного моменту P/P_0 будемо мати наступні достатні умови стійкості:

$$(D_3 - D_1)(D_3 - D_2) > 0, \quad J_1 (D_1 + D_2) + 2(J_3 - 2J_1) D_3 > 0, \quad p_{20} P^2 + p_{00} > 0. \quad (34)$$

Із нерівності (30) слід, що при досить великому динамічному дебалансу ε ($\varepsilon > 0$) і $J_3 > J_1$ рівномірне обертання твердого тіла буде нестійким. У запас стійкості також не йде випадок $-1 < \varepsilon < 0$ і $J_3 < J_1$.

Із нерівності (31) також впливає, що при досить великому динамічному дебалансу ε ($\varepsilon > 0$) і $D_1 < 2D_3$ обертання твердого тіла буде нестійким. У запас стійкості також не йде випадок $-1 < \varepsilon < 0$ і $D_1 > 2D_3$.

Нерівність (32), як і раніше, має третій порядок малості або більшості відповідно ε . При $\Gamma_{00} < 0$ і досить малому значенні ε ($\varepsilon > 0$) і $\Gamma_{01} < 0$, а також для $\varepsilon < 0$ і $\Gamma_{01} > 0$ виникає нестійкість. При досить великому значенні ε ($\varepsilon > 0$) і $\Gamma_{03} < 0$ рівномірне обертання твердого тіла також буде нестійким. У запас стійкості не йде випадок $-1 < \varepsilon < 0$ і $\Gamma_{03} > 0$.

При відсутності дисипативної несиметрії ($D_2 = D_1$), згідно (23) – (24), умови стійкості (30) – (32) отримають вигляд:

$$\begin{aligned} (J_3 - J_1)^2 P^2 + (D_3 - D_1)^2 D_3^2 + J_1 (J_1 - J_3) P^2 \varepsilon &> 0, \\ 2J_1 D_1 + 2(J_3 - 2J_1) D_3 + J_1 (D_1 - 2D_3) \varepsilon &> 0, \\ \tilde{\Gamma}_{00} + \tilde{\Gamma}_{01} \varepsilon + \tilde{\Gamma}_{02} \varepsilon^2 + \tilde{\Gamma}_{03} \varepsilon^3 = p_{40} P^2 + p_{20} + (p_{41} P^2 + p_{21}) \varepsilon + (p_{42} P^2 + p_{22}) \varepsilon^2 + p_{43} P^2 \varepsilon^3 &> 0, \end{aligned}$$

де значення коефіцієнтів $\Gamma_{00}, \Gamma_{01}, \Gamma_{02}, \Gamma_{03}$ і $p_{40}, p_{20}, p_{41}, p_{21}, p_{42}, p_{22}, p_{43}$ приведені в (19). В цьому випадку умови стійкості (33) і (34) відповідно запишуться наступним чином:

$$J_1 D_1 + (J_3 - 2J_1) D_3 > 0, \quad J_3 D_1 - J_1 D_3 > 0, \quad (35)$$

$$J_3 D_1 - J_1 D_3 > 0. \quad (36)$$

Для виконання нерівностей (35) достатньо, щоб виконувалась нерівність $J_3 > 2J_1$ і відома нерівність (29), а для нерівності (36) тільки нерівність (29).

Як вже було раніше зазначено, що при $\Gamma_{00} < 0$ і досить малому значенні ε ($\varepsilon > 0$) і $\Gamma_{01} < 0$, а також для $\varepsilon < 0$ і $\Gamma_{01} > 0$ виникає нестійкість. Із співвідношень (19) ($D_2 = D_1$) при $\varepsilon > 0$, $4J_1 < J_3 < 6J_1$ і $J_3 D_1 - 2J_1 D_3 < 0$ маємо $\Gamma_{00} < 0$ і $\Gamma_{01} < 0$. Варіант $\Gamma_{00} < 0$, $\varepsilon < 0$ і $\Gamma_{01} > 0$ неможлив. Таким чином, при досить малому значенні динамічного дебалансу рівномірне обертання твердого тіла навколо центру мас буде нестійким при $4J_1 < J_3 < 6J_1$ і $J_3 < J_1 D_3 / D_1$.

6 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

На підставі проведених аналітичних досліджень впливу динамічного дебалансу, відновлювального і перекидального моменту на умови асимптотичої стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором несиметричного твердого тіла можна зробити наступні висновки:

1. Умови асимптотичої стійкості представлені у вигляді системи трьох нерівностей. Перша і друга нерівність мають першу ступень відносно динамічного дебалансу, а третя нерівність – третью ступень. Перша і третя нерівність мають другий ступінь щодо перекидального або відновлювального моментів, а друга нерівність – перший ступінь. Перша та третя нерівність мають четвертий ступінь відносно постійного моменту, а друга нерівність має другий ступінь. Найбільш складною для дослідження є третя нерівність.
2. При дії перекидального моменту стійкість буде неможлива, коли $J_1 (D_1 + D_2) + 2(J_3 - 2J_1) D_3 < 0$, $D_1 < 2D_3$ при $\varepsilon > 0$ і $D_1 > 2D_3$ при $\varepsilon < 0$.
3. Отримані умови асимптотичої стійкості при досить малих значеннях динамічному дебалансу. Виписані достатні умови стійкості с точністю до другого порядку малості постійного моменту.
4. Отримані умови нестійкості при досить великому динамічному дебалансі.
5. Виписані і досліджені умови стійкості і нестійкості при відсутності дисипативної несиметрії. Показано, що при діє відновлювального моменту достатньою умовою стійкості є відома умова для симетричного твердого тіла $J_3 D_1 - J_1 D_3 > 0$.
6. Досліджено вплив динамічного дебалансу на умови стійкості обертання твердого тіла навколо центру мас. Виписані і досліджені умови стійкості і нестійкості при відсутності дисипативної несиметрії. Так, наприклад, було показано, що при досить малому значенні динамічного дебалансу рівномірне обертання твердого тіла буде нестійким при $4J_1 < J_3 < 6J_1$ і $J_3 < J_1 D_3 / D_1$.

Література

1. Савченко А. Я., Болграбская И. А., Кононыхин Г. А. Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел. К.: Наук. Думка, 1991. 166 с.
2. Болграбская И. А., Лесина М. Е., Чебанов Д. А. Динамика систем связанных твёрдых тел. Серия “Задачи и методы: математика, механика, кибернетика”. ИПММ НАН Украины. К.: Наукова Думка, 2012. Т. 9. 395 с.
3. Карапетян А. В., Лагутина И. С. О влиянии диссипативного и постоянного моментов на вид и устойчивость стационарных движений волчка Лагранжа. Изв. РАН. Механика твёрдого тела, 1998. №5. С.29–33.
4. Карапетян А. В., Лагутина И. С. Об устойчивости равномерных вращений волчка, подвешенного на струне, с учетом диссипативного и постоянного моментов. Изв. РАН. Механика твёрдого тела, 2000. №1. С.53–57.
5. Кононов Ю. М. Про стійкість рівномірного обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опором під дією постійного моменту. Прикл. Механіка, 2021. Т. 57. № 4. С. 68–77.
6. Kononov Yu. M. Stability of a Uniform Rotation of an Asymmetric Rigid Body in a Resisting Medium. International applied mechanics. A translation of Prikladnaya Mekhanika, 2021. 57(4). P. 432–439. DOI: 10.1007/s10778-021-01095-1.
7. Кононов Ю. М., Довгоший О. А., Чеїб А. Х. Про стійкість рівномірного обертання у середовищі з опором несиметричного твердого тіла під дією постійного моменту у інерціальній системі відліку. Механіка та математичні методи, 2022. IV. № 1. С. 6–22.
8. Кононов Ю. М., Чеїб А. Х. Про стійкість рівномірних обертань у середовищі з опором несиметричних і симетричних твердих тіл під дією постійних моментів. Праці ІПММ НАН України, 2022. Т. 36. С. 11 –25.
9. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer, 2017. 260 p.
10. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque. J. Appl. Comput. Mech, 2022. P. 1–9.
11. Leshchenko D.D., Ershkov S.V., Kozachenko Evolution of motion of a rigid body similar to Lagrange top under the influence of slowly time varying torques. Proc IMechE Part C: J Mechanical Engineering Scienc, 2022. 236(22). P. 10879–10890.
12. Leshchenko D. Perturbed rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid subject to constant body fixed torques. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2023. 148. 104284.

References

1. Savchenko, A. Ya., Bolgrabskaya, I. A., Kononyhin, G. A. (1991). *Ustojchivost' dvizheniya sistem svyazannyh tvyordyh tel* [Stability of motion of systems of coupled rigid bodies]. K.: Nauk. Dumka. [in Russian].
2. Bolgrabskaya, I. A., Lesina, M. E., Chebanov, D. A. (2012). *Dinamika sistem svyazannyih tvyordyih tel* [Dynamics of systems of bound rigid bodies]. Seriya “Zadachi i metodyi: matematika, mehanika, kibernetika”. K.: Nauk. Dumka. 9. [in Russian].
3. Karapetyan, A. V., Lagutina, I. S. (1998). O vliyaniy dissipativnogo i postoyannogo momentov na vid i ustoychivost statsionarnyih dvizheniy volchka Lagranzha [On the influence of dissipative and constant moments on the appearance and stability of stationary movements of the Lagrange top]. *Izv. RAN. Mehanika tvyordogo tela*. 5. 29–33 [in Russian].
4. Karapetyan, A. V., Lagutina, I. S. (2000). Ob ustoychivosti ravnomernyih vrascheniy volchka, podveshennogo na strune, s uchetom dissipativnogo i postoyannogo momentov [On the stability of uniform rotations of a top suspended on a string, taking into account the dissipative and constant moments]. *Izv. RAN. Mehanika tvYordogo tela*. 1. 53–57. [in Russian].
5. Kononov, Yu. M. (2021). Pro stiikist rivnomirnoho obertannia nesymetrychnoho tverdoho tila u seredovyshchi z oporom pid diieiu postiinoho momentu [On the stability of uniform rotation of an asymmetric solid body in a medium with resistance under the action of a constant torque]. *Prykl. Mekhanika*. 57(4). 68–77. [in Ukrainian].

6. Kononov, Yu. M. (2021). Stability of a Uniform Rotation of an Asymmetric Rigid Body in a Resisting Medium. *International applied mechanics. A translation of Prikladnaya Mekhanika*. 57(4). 432–439. DOI: 10.1007/s10778-021-01095-1.
7. Kononov, Yu. M., Dovgoshey, O. A., Cheib, A. K. (2022). Pro stiiikist rivnomirnoho obertannia u seredovyshchi z oporom nesymetrychnoho tverdoho tila pid diieiu postiinoho momentu u inertsiialnii systemi vidliku [On the stability of uniform rotation in a medium with resistance of an asymmetric solid body under the action of a constant moment in an inertial frame of reference]. *Mekhanika ta matematichni metody*. IV(1). 6–22. [in Ukrainian].
8. Kononov, Yu. M., Cheib, A. K. (2022). Pro stiiikist rivnomirnoho obertannia u seredovyshchi z oporom nesymetrychnykh i symetrychnykh tverdyykh til pid diieiu postiinykh momentiv [On the stability of uniform rotations in a medium with resistance of asymmetric and symmetric solids under the action of constant moments]. *Pratsi IPMM NAN Ukrainy*. 36. 11 –25. [in Ukrainian].
9. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*. Springer.
10. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2022). Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque. *J. Appl. Comput. Mech.* 1–9.
11. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2022). Evolution of motion of a rigid body similar to Lagrange top under the influence of slowly time varying torques. *Proc IMechE Part C: J Mechanical Engineering Scienc.* 236(22). 10879–10890.
12. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2023). Perturbed rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid subject to constant body fixed torques. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 148. 104284.

Кононов Юрій Микитович

Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України
д.ф.-м.н., професор
вул. Добровольського, 1, Слов'янськ, Україна, 84100
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1609-0253

Чеїб Акрам Халіл

Донецький національний університет імені Василя Стуса,
здобувач
вул. 600 - річчя, 21, м.Вінниця, Україна, 21021
akram_cheaib@hotmail.com
ORCID: 0000-0001-8311-7682

Для посилань:

Кононов Ю. М., Чеїб А. Х. Вплив динамічної несиметрії на стійкість обертання у середовищі з опором твердого тіла під дією постійного моменту у інерціальній системі відліку. *Механіка та математичні методи*, 2022. Т. 4. № 2. С. 6–18.

For references:

Kononov Yu. M., Cheib A. K. (2022). Influence of dynamic asymmetry on the rotation stability in a resisting medium of a asymmetric rigid body under the action of a constant moment in inertial reference frame. *Mechanics and Mathematical Methods*. 4 (2). 6–18.

UDC 531.381

EVOLUTION OF ROTATIONAL MOTIONS IN A RESISTIVE MEDIUM OF A NEARLY DYNAMICALLY SPHERICAL GYROSTAT SUBJECTED TO CONSTANT BODY-FIXED TORQUES

D. Leshchenko¹, T. Kozachenko¹

¹*Odesa state academy of civil engineering and architecture*

Abstract. A satellite or a spacecraft in its motion about the center of mass is affected by the torques of forces of various physical nature. It is influenced by the gravitational, aerodynamic torques, the torques due to the light pressure, and the torques due to the motions of masses inside the body. These motions may have various causes, for example, the presence of fluid in the cavities in the body (for example, liquid fuel or oxidizer in the tanks of a rocket). Therefore, there is a necessity to study the problems of the dynamics of bodies with cavities containing a viscous fluid, to calculate the motion of spacecrafts about the center of mass, as well as their orientation and stabilization. The mentioned torques, acting on the body, are often relatively small and can be considered as perturbations. It is natural to use the methods of small parameter to analyze the dynamics of rigid body under the action of applied torques. The method applied in this paper is the Krylov-Bogolubov asymptotic averaging method.

The studies of F. L. Chernousko showed that solving the problems of dynamics of a rigid body with a viscous fluid can be subdivided into two parts – the hydrodynamic and dynamic ones – which can greatly simplify the initial problem.

We investigated the motion about its center of mass in a resistive medium of a nearly dynamically spherical rigid body with a cavity filled with a viscous fluid at small Reynolds numbers, subjected to constant body-fixed torque which is described by the system of differential equations, considering the asymptotic approximation of the moments of the viscous fluid in the cavity. The determination of the motions of forces acting on the body from side of the viscous fluid in the cavity was proposed in the works of F. L. Chernousko. We obtained the system of equations of motion in the standard form which refined in square-approximation by small parameter. The Cauchy problem for a system determined after averaging was analyzed. The evolution of the motion of a rigid body under the action of small internal and external torques of forces is described by the solutions which obtained as a result of asymptotic, analytical and numerical calculations over an infinite time interval.

Keywords: nearly dynamically spherical rigid body, cavity, viscous fluid, constant torque, resistive medium.

ЕВОЛЮЦІЯ ОБЕРТАЛЬНИХ РУХІВ В СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ, БЛИЗЬКОГО ДО ДИНАМІЧНО СФЕРИЧНОГО ГІРОСТАТА ПІД ДІЄЮ ПОСТІЙНИХ МОМЕНТІВ В ЗВ'ЯЗАНИХ З ТІЛОМ ОСЯХ

Лещенко Д. Д.¹, Козаченко Т. О.¹

¹*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація. На супутник або космічний апарат у своєму русі відносно центра мас діють моменти сил різної фізичної природи. Це гравітаційні, аеродинамічні моменти, а також моменти, обумовлені рухом деяких мас в тілі. Такі рухи можуть бути викликані різними причинами: наприклад, наявністю рідини в порожнинах в тілі (наприклад, рідке паливо або

окислювач в резервуарах ракети). Таким чином, є необхідність вивчення задач динаміки твердих тіл з в'язкою рідиною для дослідження руху космічних апаратів навколо центра мас, а також їх орієнтації та стабілізації. Вказані моменти, що діють на тіло відносно малі і можуть розглядатися як збурення. Для аналізу динаміки твердого тіла під дією прикладених моментів використовують методи малого параметра. Метод, який застосовано у цій роботі – метод усереднення Крилова-Боголюбова.

Задачі динаміки твердого тіла з порожнинами, що містять в'язку рідину, представляють значно більші труднощі, ніж у випадку ідеальної рідини. В роботах Ф. Л. Черноуська показано, що розв'язування задач динаміки твердого тіла з однорідною в'язкою рідиною можна розкласти на дві частини – гідродинамічну та динамічну – що дозволяє спростити початкову задачу. Асимптотичний розв'язок був одержаний для опису еволюції твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, на великому проміжку часу.

Розглядається рух відносно центра мас в середовищі з опором близького до динамічно сферичного твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною при малих числах Рейнольдса під дією постійного моменту в зв'язаних з тілом осях, який описується системою диференціальних рівнянь з урахуванням в асимптотичному наближенні моментів сил в'язкої рідини в порожнині тіла. Визначення моментів сил, що діють на тіло зі сторони в'язкої рідини в порожнині, було запропоновано в роботах Ф. Л. Черноуська. Отримано систему рівнянь руху в стандартній формі, уточнену в квадратичному наближенні за малим параметром. Проаналізовано задачу Коші для системи, визначеної після усереднення. Еволюція руху твердого тіла під дією таких внутрішніх і зовнішніх моментів сил описується розв'язками, отриманими в результаті асимптотичних, аналітичних і чисельних розрахунків на нескінченному інтервалі часу.

Ключові слова: близьке до динамічно сферичного тверде тіло, порожнина, в'язка рідина, сталий момент, середовище з опором.

1 INTRODUCTION

The problems of the dynamics of rigid bodies with cavities containing fluid are among the classical problems of mechanics: a fundamental study of the rotational motion of a rigid body having a cavity, filled with a homogeneous ideal fluid, was carried out by N. Ye. Zhukovskii [1]. The interest to the problems of the rotation of rigid bodies with fluid-containing cavity has arisen in connection with the development of the rocket and space technology as well as geophysical and astrophysical applications.

2 ANALYSIS OF LITERATURE DATA AND RESOLVING THE STUDY

The presentation of the results on the dynamics of rigid body motion about the center of mass with fluid-filled cavities is given in books by N. N. Moiseyev and V. V. Rummyantsev [2], and I. A. Lukovsky [3].

The problems of rigid body dynamics with cavities containing a viscous fluid are significantly more difficult than in the case of ideal fluid. An important contribution to the solution of these problems has been made by the works of F. L. Chernousko et al. [4, 5]. These studies showed that solving the problems of the dynamics of the rigid body with viscous fluid in cavity can be separated into two parts: the hydrodynamic and dynamic ones, which represents a considerable simplification of the original problem. An asymptotic solution was obtained describing the evolution of the motion of a body having a cavity with a fluid of high viscosity over a long-time interval.

In the paper [6], the initial period of rotational motion of a body with a cavity containing a fluid of high viscosity was investigated. The article [7] is devoted to studying the stabilizing effect of a viscous fluid in a cavity on the rotation of a top around the given axes. In [8], the oscillations on an elliptic orbit of a satellite with moments of inertia close to one another and a spherical cavity filled with a viscous fluid are studied. In papers [9–11] the fast rotational motions about the center of mass of a dynamically asymmetric satellite with a cavity filled with viscous fluid under the action of gravitational and light pressure torques, and medium resistance were investigated.

In [12], the inertial motion of a rigid body with a spherical or ellipsoidal cavity filled with a viscous fluid was studied by the asymptotic method. A numerical analysis of the change in the vector of the moment of momentum of a rigid body with a cavity filled with a viscous fluid was performed in [13]. The article [14] presents the analytical and numerical results obtained in the study of systems containing a rigid body with a cavity filled with a viscous fluid. In [15], an approach was proposed for modeling the dynamics of a rigid body with cavity filled with a high-viscosity fluid.

The problem of deceleration of rotations of a dynamically symmetric body with a cavity filled with lightly viscous fluid was investigated in [16]. In paper [17], the problem of time-optimal deceleration of a dynamically asymmetric body with cavity filled with viscous fluid in a resistive medium was studied.

The papers [18, 19] study the motion about the center of mass of a nonsymmetric rigid body influenced by two small perturbation torques: a constant one in the body-fixed axes and a linear dissipative one or, alternatively, a constant one and a torque involving the terms quadratically depending on the angular velocity.

In the works [20–22] analytical solutions are obtained for the problem of a rigid body close to symmetrical one, as well as of a body with arbitrary inertia characteristics by a torque which is constant in the body-fixed axes.

In paper [23], the analytic solution has been introduced for the rotation of a rigid body having spherical ellipsoid of inertia subjected to a constant torque.

The motion of a close to dynamically spherical rigid body with a cavity filled with a viscous fluid at low Reynolds number was investigated in [24]. Qualitative and quantitative results of motion in a resistive medium of a nearly dynamically spherical rigid body with a cavity containing fluid of high viscosity was studied in [25]. In paper [26], the motion about the center of mass of a nearly dynamically spherical rigid body with a cavity filled with a fluid of high viscosity and subjected to constant body-fixed torques was considered. In work [27] the case of a rigid body motion investigated in [24] was extended in the presence of the third component of the gyrostatic moment.

Consider the motion in space of a rigid body with a spherical cavity filled with a fluid of high viscosity relative to the center of inertia.

We assume that the torques which is constant in the body-connected axes have the form

$$M_i^c = \varepsilon^2 M_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

where $0 < \varepsilon \ll 1$ is a small parameter.

We assume that the torque of the resistant forces is proportional to the angular momentum of the body with a “frozen” fluid [4, 11, 16, 17, 28]

$$\mathbf{M}^r = -\varepsilon^2 \lambda \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}, \quad (2)$$

where λ is a positive coefficient of proportionality that depends on the properties of the medium and on the shape of the body and $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$ is the tensor of inertia of the body with a fluid in the cavity, $0 < \varepsilon \ll 1$ is a small parameter.

We write the equations of motion for the system under consideration in projections onto the principal central axes of inertia by [4, 5]

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = \varepsilon^2 M_1 - \varepsilon^2 \lambda Ap + \frac{\rho P_0}{\nu ABC} p \left[C(A - C)(A + C - B)r^2 + B(A - B)(A + B - C)q^2 \right]. \quad (3)$$

Here, A , B , and C are the principal central moments of inertia of the system, p , q , r denote the projections of the absolute angular velocity $\boldsymbol{\omega}$ onto the principal central axes of inertia, ρ is the density of the fluid, and ν is the kinematic coefficient of viscosity. The first expression on the right-hand side of (3) defines, in the asymptotic approximation, the torque of forces of a viscous fluid in the cavity of the body [4, 5], $P_0 > 0$ is the scalar coefficient depending on the shape of the cavity. In the case of a spherical cavity of radius b , we have according to [4, 5]

$$P_0 = \frac{8\pi b^7}{525}. \quad (4)$$

The other equations are obtained from (3) by cyclic permutation of symbols A , B , C and p , q , r .

The Reynolds number is assumed small: $\text{Re} = l^2 T_*^{-1} \nu^{-1} \ll 1$ [4, 5]. Here l is a characteristic linear dimension of the cavity, T_* is a characteristic time scale of the relative motion, which inversely proportional to the characteristic angular velocity ω . If l and T_* are taken as the units of measurement of length and time then following [4, 5] the kinematic coefficient of viscosity of the fluid is a large parameter $\nu = 1/\text{Re} \gg 1$ and $\nu^{-1} \ll 1$. We assume that the nondimensional quantity $\nu^{-1} \sim \varepsilon$.

3 PURPOSE AND TASKS THE STUDY

Consider the case of a nearly dynamically spherical rigid body, when the principal central moments of inertia of a "frozen" rigid body are close to one another and represent them in the form

$$A = J_0 + \varepsilon A', \quad B = J_0 + \varepsilon B', \quad C = J_0, \quad (5)$$

where $0 < \varepsilon \ll 1$ is a small parameter of the same order just as in (1) – (3). If $\varepsilon = 0$ equations of motion (3) describe the motion of a spherically symmetric rigid body. Assume also that there are estimates

$$|A - B| = O(\varepsilon^2 J_*), \quad |A' - B'| = O(\varepsilon J_*), \quad J_* \sim J_0. \quad (6)$$

Then, following (2.4), (2.5), the expressions hold

$$A - B = \varepsilon(A' - B') = \varepsilon^2 J_*, \quad A - C = \varepsilon A', \quad B - C = \varepsilon B'. \quad (7)$$

After the transition to slow time $\tau = \varepsilon t$ and transformations of system (3), taking into account relations (5) – (7), we obtain a perturbed Euler system of the form (terms of order ε^2 and higher are discarded):

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= \frac{B'}{J_0} \left(1 - \varepsilon \frac{A'}{J_0} \right) qr + \varepsilon f_{1p}(p, q, r), & p(0) &= p_0, \\ \frac{dq}{d\tau} &= -\frac{A'}{J_0} \left(1 - \varepsilon \frac{B'}{J_0} \right) pr + \varepsilon f_{1q}(p, q, r), & q(0) &= q_0, \\ \frac{dr}{d\tau} &= \frac{A' - B'}{J_0} pq + \varepsilon f_{1r}(p, q, r), & r(0) &= r_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Here, r is the slow variable in slow time τ . The system of differential equations (8) is an essentially nonlinear system in which the frequency depends on the slow variable r . In (8) perturbations were introduced

$$\begin{aligned} \varepsilon f_{1p}(p, q, r) &= mp \left\{ A' [J_0 - \varepsilon(A' + 2B')] r^2 + (A' - B') [J_0 - \varepsilon(A' - B')] q^2 \right\} + \\ &\quad + \varepsilon \frac{M_1}{J_0} \left(1 - \varepsilon \frac{A'}{J_0} \right) - \varepsilon \lambda p, \\ \varepsilon f_{1q}(p, q, r) &= mq \left\{ B' [J_0 - \varepsilon(2A' + B')] r^2 - (A' - B') [J_0 + \varepsilon(A' - B')] p^2 \right\} + \\ &\quad + \varepsilon \frac{M_2}{J_0} \left(1 - \varepsilon \frac{B'}{J_0} \right) - \varepsilon \lambda q, \\ \varepsilon f_{1r}(p, q, r) &= -mr \left\{ B' [J_0 - \varepsilon(2A' - B')] q^2 + A' [J_0 - \varepsilon(2B' - A')] p^2 \right\} + \\ &\quad + \varepsilon \frac{M_3}{J_0} - \varepsilon \lambda r, \end{aligned} \quad (9)$$

where, $m = \rho P_0 / \nu J_0^3$. The torque of the influence of the viscous fluid in the rigid body cavity is small [4, 5].

The solution of the system (8) for $\varepsilon = 0$, $\nu^{-1} = 0$ has a form

$$p = a \cos \varphi, \quad q = -\frac{J_0 a w \sin \varphi}{B' r}, \quad r = r_0. \quad (10)$$

Here, $a = \sqrt{p_0^2 + (\dot{p}_0/w)^2}$ is the amplitude (slow variable), $\varphi = w\tau + \varphi_0$ is the phase, $w = r\sqrt{A'B'}/J_0$, $A'B' > 0$, φ_0 is the initial phase, $\cos \varphi_0 = p_0/a$, $\sin \varphi_0 = -q_0\sqrt{B'/A'}/a$ by assumption.

We pass from the slow variables p, q, r to the new slow variables a, r and the phase φ . We use the change of variables for this:

$$p = a \cos \varphi, \quad q = -\frac{J_0 a w \sin \varphi}{B' r}, \quad r = r. \quad (11)$$

We differentiate expressions (11) by virtue of perturbed system. After series of transformations, we get the system in standard form

$$\begin{aligned} \dot{a} \cos \varphi - a \dot{\varphi} \sin \varphi &= -a w(r) \sin \varphi + \varepsilon f_{2p}, \\ \dot{a} \sin \varphi + a \dot{\varphi} \cos \varphi &= a w(r) \cos \varphi - \sqrt{\frac{B'}{A'}} \varepsilon f_{2q}, \\ \dot{r} &= \frac{B' - A'}{J_0} a^2 \sqrt{\frac{A'}{B'}} \sin \varphi \cos \varphi + \varepsilon f_{2r}, \quad w(r) = \frac{r}{J_0} \sqrt{A'B'}, \\ \varepsilon f_{2p} &= \varepsilon \frac{aA'}{J_0} w(r) \sin \varphi + \varepsilon \frac{M_1}{J_0} \left(1 - \varepsilon \frac{A'}{J_0}\right) - \varepsilon \lambda a \cos \varphi + \\ &+ ma \cos \varphi \left\{ A' [J_0 - \varepsilon(A' + 2B')] r^2 + (A' - B') [J_0 - \varepsilon(A' - B')] a^2 \frac{A'}{B'} \sin^2 \varphi \right\}, \\ \varepsilon f_{2q} &= \varepsilon \frac{a\sqrt{A'B'}}{J_0} w(r) \cos \varphi + \varepsilon \frac{M_2}{J_0} \left(1 - \varepsilon \frac{B'}{J_0}\right) + \varepsilon \lambda a \sqrt{\frac{A'}{B'}} \sin \varphi - \\ &- ma \sqrt{\frac{A'}{B'}} \sin \varphi \left\{ B' [J_0 - \varepsilon(2A' + B')] r^2 - (A' - B') [J_0 + \varepsilon(A' - B')] a^2 \cos^2 \varphi \right\}, \\ \varepsilon f_{2r} &= -ma^2 r A' \left\{ J_0 - \varepsilon \left[(2A' - B') \sin^2 \varphi + (2B' - A') \cos^2 \varphi \right] \right\} + \varepsilon \frac{M_3}{J_0} - \varepsilon \lambda r. \end{aligned} \quad (12)$$

We solve equations (12) with respect to \dot{a} and $\dot{\varphi}$, and get a system

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon f_{2p} \cos \varphi - \varepsilon f_{2q} \sqrt{\frac{B'}{A'}} \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= w(r) - \frac{1}{a} \varepsilon f_{2p} \sin \varphi - \frac{1}{a} \varepsilon f_{2q} \sqrt{\frac{B'}{A'}} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (13)$$

We substitute (11) into the third equation (8) for the variable r . Taking into account the change of variables and standard transformations we obtain the following system of equations:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon \frac{(A' - B')}{J_0} a w(r) \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\varepsilon}{J_0} \left[M_1 \left(1 - \varepsilon \frac{A'}{J_0}\right) \cos \varphi - M_2 \left(1 - \varepsilon \frac{B'}{J_0}\right) \sqrt{\frac{B'}{A'}} \sin \varphi \right] - \\ &- \varepsilon \lambda a + ma \left\{ r^2 \left[A' \cos^2 \varphi (J_0 - \varepsilon A') - 2\varepsilon A'B' + B' \sin^2 \varphi (J_0 - \varepsilon B') \right] + \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + a^2 \frac{(A' - B')^2}{B'} [J_0 - \varepsilon(A' + B')] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \Big\}, \\
 \dot{r} = & \frac{B' - A'}{J_0} a^2 \sqrt{\frac{A'}{B'}} \sin \varphi \cos \varphi + \varepsilon \frac{M_3}{J_0} - \varepsilon \lambda r - \\
 & - m a^2 r A' \Big\{ J_0 - \varepsilon [(2A' - B') \sin^2 \varphi + (2B' - A') \cos^2 \varphi] \Big\}, \\
 \dot{\varphi} = & w(r) - \varepsilon \frac{w(r)}{J_0} (A' \sin^2 \varphi + B' \cos^2 \varphi) - m(A' - B') \sin \varphi \cos \varphi \Big\{ r^2 [J_0 - \varepsilon(A' + B')] + \\
 & + a^2 \Big[(J_0 + \varepsilon(A' - B')) \cos^2 \varphi + (J_0 - \varepsilon(A' - B')) \frac{A'}{B'} \sin^2 \varphi \Big] \Big\} - \\
 & - \frac{\varepsilon}{a J_0} \Big[M_1 \left(1 - \varepsilon \frac{A'}{J_0}\right) \sin \varphi + M_2 \left(1 - \varepsilon \frac{B'}{J_0}\right) \sqrt{\frac{B'}{A'}} \cos \varphi \Big].
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Here, the quantity $w(r) = r\sqrt{A'B'}/J_0$ has the meaning of the perturbed frequency of the transformed system. After the averaging of the system (14) over the phase φ [29] we find:

$$\begin{aligned}
 \dot{a} = & ca + ma(\beta r^2 + \alpha a^2), \\
 \dot{r} = & cr - m\gamma a^2 r + \varepsilon \frac{M_3}{J_0}.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Here we have introduced the notations

$$\begin{aligned}
 c = & -\varepsilon \lambda, \quad \beta = \frac{1}{2}(A' + B') [J_0 - \varepsilon(A' + B')] - \varepsilon A' B', \\
 \alpha = & \frac{(A' - B')^2}{8B'} [J_0 - \varepsilon(A' + B')], \quad \gamma = -A' \left[J_0 - \frac{1}{2} \varepsilon(A' + B') \right].
 \end{aligned}$$

We transform system (15) to the form:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} = & 2x(c + m\beta y + m\alpha x), \\
 \dot{y} = & 2(y c + m\gamma x y + \frac{\varepsilon M_3}{J_0} \sqrt{y}).
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

The variables $x = a^2$, $y = r^2 > 0$ are introduced here, $r = \sqrt{y}$. Note that in system (16) x , y are slow variables.

It can be directly observed that, in the first approximation the equations for x and y in (16) include only constant in the body-connected axis torque M_3 . The terms containing the perturbation torques M_1 , M_2 drop out upon averaging.

4 BASIC RESULTS

System (16) was solved numerically with the initial conditions $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ and task parameters $P_0 = 0.48 \text{ m}^7$, $\nu = 1000 \text{ m}^2/\text{s}$, $\varepsilon = 0.1$, $\rho = 1260 \text{ kg/m}^3$, $\lambda = 1.25 \text{ rad/s}$. We obtain

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 1 + (2c + 1.21(\alpha + \beta))t + (c(2c + 3.63(\alpha + \beta)) + \\
 &+ \beta(0.13\alpha + 0.73\gamma + 0.12M_3) + (1.21\alpha + 0.85\beta)^2)t^2 + O(t^3), \\
 y(t) &= 1 + (2c + 1.21\gamma + 0.2M_3)t + \\
 &+ (0.73\gamma(\alpha + \beta + \gamma + 4.97c) + 0.02M_3(9\gamma + c) + (1.41c + 0.12M_3)^2)t^2 + O(t^3).
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

The plots of the changing values a^2 and r^2 of the squared equatorial and axial component of the angular velocity vector of the rigid body are constructed and represented in two cases.

In the first case (Figs. 1, 2) $J_0 = 1$, $A' = 5.1$, $B' = 5$, in the second case (Figs. 3, 4) $J_0 = 3$, $A' = 1.3$, $B' = 1$.

5 DISCUSSION OF THE RESULTS OF THE STUDY

How we can see from the plots in both cases variable $y = r^2$ decreases on the interval of time $[0;10]$ and $[0;20]$ asymptotically approaching zero (Figs. 2, 4).

The variable $x = a^2$ decreases in case 1, asymptotically approaching zero (Fig. 1). In the second case in the presence of dissipation and a small constant torque $x = a^2$ decreases to zero (Fig. 3), and under the action of only the internal torque in the interval $[0;20]$ increases reaching the value $x = 2$.

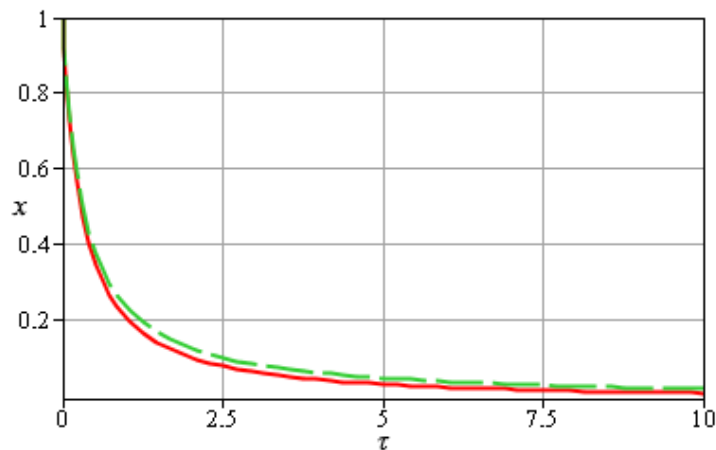


Fig. 1. Comparison of the graphs $x = a^2$ under the action of internal torque (— —) and (—) of both internal and small constant torque $M_3 = -0.135$

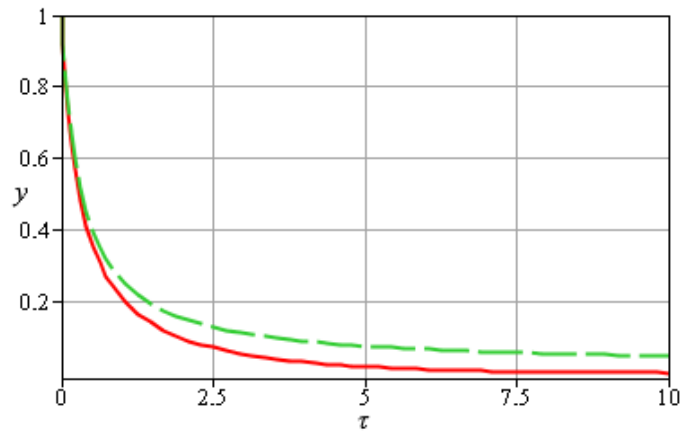


Fig. 2. Comparison of the graphs $y = r^2$ under the action of internal torque (— —) and (—) of both internal and small constant torque $M_3 = -0.135$

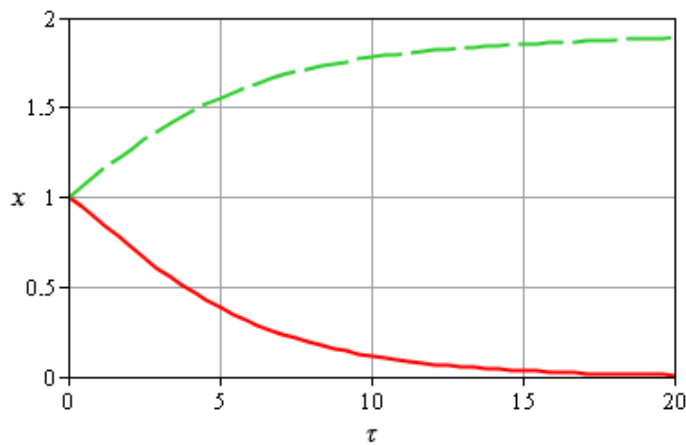


Fig. 3. The plot of variable $x = a^2$ under the action of internal torque (— —) and (—) of both internal and small constant torque $M_3 = -0.135$

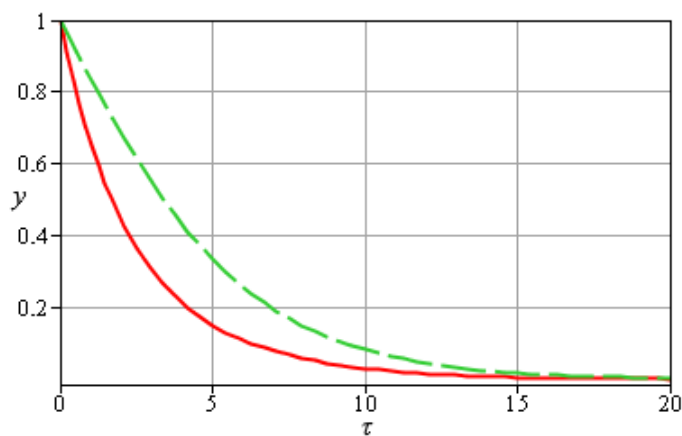


Fig. 4. The plot of variable $y = r^2$ under the action of internal torque (— —) and (—) of both internal and small constant torque $M_3 = -0.135$

6 CONCLUSIONS

The motion of a nearly dynamically spherical rigid body in a resistive medium with a cavity filled with viscous fluid at low Reynolds number under the action of constant body-fixed torques is investigated. A system of equations of motion in standard form which refined in the quadratic approximation by small parameter is obtained. The Cauchy problem for the system determined after averaging is analyzed. The evolution of the rigid body motion is described by solutions obtained asymptotically, and numerically.

Results summed up in this paper make it possible to analyze motions of artificial satellites and celestial bodies under the influence of small internal and external torques

References

1. Zhukovskii, N. Ye. (1948). O dvizhenii tverdogo tela, imeyushchiye polosti, napolnennyye odnorodnoyu kapelnoyu zhidkostyu [On the motion of a rigid body with cavities filled with a homogeneous liquid drop]. *Selected Works*. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat. 1. 31–152. [in Russian].
2. Moiseyev, N. N., Rumyantsev, V. V. (1968). *Dynamic Stability of bodies Containing Fluid*. New York: Springer.
3. Lukovsky, I. A. (2015). *Mathematical Models for Rigid Bodies with a Liquid*. Walter de Gruyter GmbH Co KG.
4. Chernousko, F. L. (1972). *The Movement of a Rigid Body with Cavities Containing a Viscous Fluid*. NASA. Washington.
5. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*. Cham: Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-53928-7>.
6. Kobrin, A. I. (1969). On the motion of a hollow body with viscous liquid about its center of mass in a potential body force field. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 33(3). 418–427.
7. Smirnova, E. P. (1974). Stabilization of free rotation of an asymmetric top with cavities completely filled with a fluid. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 38(6). 931–935.
8. Osipov, E. P., Sulikashvili, R. S. (1978). On oscillations of a rigid body with a cavity completely filled with a viscous liquid in an ellipsoidal orbit. *Tr. Tbilis. Matem. Inst. Akad. Nauk Gruz SSR* 58. 175–186. [in Russian].
9. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L. (2007). Evolution of rotations of a satellite with cavity filled with viscous fluid. *Mekh. Tverd. Tela* 37. 126–139. [in Russian].
10. Akulenko, L. D., Zinkevich, Y. S., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L. (2011). Rapid rotations of a satellite with a cavity filled with viscous fluid under the action of moments of gravity and light pressure forces. *Cosmic Research*. 49(5). 440–451. <https://doi.org/10.1134/S0010952511050017>.
11. Leshchenko, D., Akulenko, L., Rachinskaya, A., Shchetinina, Yu. (2015). Rotational motion of a satellite with viscous fluid under the action of the external resistance torque. *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace*. 6(3). 383–391.
12. Baranova, E. U., Vil'ke, V. G. (2013). Evolution of motion of a rigid body with a fixed point and an ellipsoidal cavity filled with a viscous fluid. *Moscow Univ. Mech. Bull.* 68(1). 15–20.
13. Rachinskaya A. L. (2015). Motion of a solid body with cavity filled with viscous liquid. *Cosmic Research*. 53(6). 476–480.
14. Disser, K., Galdi, G.P., Mazzone, G., Zunino, P. (2016). Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous liquid. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 221(1). 487–526.
15. Ramodanov, S. M., Sidorenko, V. V. (2017). Dynamics of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with viscous fluid. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 95. 42–46. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.05.006>.
16. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L. (2010). Optimal deceleration of rotation of a dynamically symmetric body with a cavity filled with viscous liquid in a resistive medium.

- Journal of Computer and System Sciences International*. 49(2). 222–226.
<https://doi.org/10.1134/S1064230710020073>.
17. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L. (2012). Optimal deceleration of rotation of an asymmetric body with a cavity filled with viscous fluid in a resistive medium. *Journal of Computer and System Sciences International*. 51(1). 38–48.
 18. Neishtadt, A. T. (1980). Evolution of rotation of a solid, acted upon by the sum of a constant and dissipative perturbing moments. *Mechanics of Solids*. 15(6). 21–27.
 19. Pivovarov, M. L. (1985). The motion of a gyroscope with low self-excitation, *Izv. Akad. Nauk SSR. Mekh. Tverd. Tela*. 6. 23–27. [in Russian].
 20. Van der Ha, J. C. (1985). Perturbation solution of attitude motion under body-fixed torques. *Acta Astronautica*. 12(10). 861–869.
 21. Kane, T. R., Levinson, D. A. (1987). Approximate description of attitude motion of a torque-free, nearly axisymmetric rigid body. *Journal of the Astronautical Sciences*. 35(4). 435–446.
 22. Ayobi, M. A., Longuski, J. M. (2008). Analytical solution for translational motion of spinning-up rigid bodies subject to constant body-fixed forces and moments. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 75(1). 011004/1-011004/8.
 23. Romano, M. (2008). Exact analytic solution for a rotation of a rigid body having spherical ellipsoid of inertia and subjected to a constant torque. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 100. 181–189.
 24. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Paly, K. S. (2021). Perturbed rotational motions of a spheroid with cavity filled with a viscous fluid. *Proc. IMechE Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 235(20). 4833–4837. <https://doi.org/10.1177/0954406220941545>.
 25. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2022). Evolution of rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid in a resistive medium *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 142(3). 103980.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.103980>.
 26. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2023). Perturbed rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid subject to constant body fixed torques. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 148(3). 104284.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104284>
 27. Farag, A. M., Amer, T. S., Abady, I. M. (2022). Modeling and analyzing the dynamical motion of a rigid body with a spherical cavity. *Journal of Vibration Engineering and Technologies*. <https://doi.org/10.1007/s42417-022-00470-7>.
 28. Routh, E. J. (2005). *Advanced Dynamics of a System of Rigid Bodies*. New York: Dover.
 29. Bogoliubov, N. N., Mitropolsky, Yu. A. (1961). *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*, Gordon and Breach Science, New York.

Література

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющие полости, наполненные однородною капельною жидкостью. Избранные сочинения. Т. 1. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. С. 31–152.
2. Moiseyev N. N., Romyantsev V. V. *Dynamic Stability of bodies Containing Fluid*. New York: Springer, 1968. 345 p.
3. Lukovsky I. A. *Mathematical Models for Rigid Bodies with a Liquid*. Walter de Gruyter GmbH Co KG, 2015. 393 p.
4. Chernousko F. L. *The Movement of a Rigid Body with Cavities Containing a Viscous Fluid*. Washington: NASA, 1972. 214 p.
5. Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. D. *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*. Cham: Springer International Publishing, 2017.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-53928-7>.
6. Kobrin A. I. On the motion of a hollow body with viscous liquid about its center of mass in a potential body force field. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1969. № 33(3). pp. 418–427.
7. Smirnova E. P. Stabilization of free rotation of an asymmetric top with cavities completely filled with a fluid. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1974. № 38(6). pp. 931–935.

8. Осипов В. З., Суликашвили Р. С. О колебании твердого тела со сферической полостью, цели-ком заполненной вязкой жидкостью, на эллиптической орбите. Тр. ин-та. Тбилис. мат.ин-та АН. Груз. ССР. 1978. Т. 58. С. 175–186.
9. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Эволюция вращений спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью. Механика твердого тела. 2007. Вып. 37. С. 126–139.
10. Akulenko L. D., Zinkevich Y. S., Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L. Rapid rotations of a satellite with a cavity filled with viscous fluid under the action of moments of gravity and light pressure forces. *Cosmic Research*. 2011. 49(5). pp. 440–451.
<https://doi.org/10.1134/S0010952511050017>.
11. Leshchenko D., Akulenko L., Rachinskaya A., Shchetinina Yu. Rotational motion of a satellite with viscous fluid under the action of the external resistance torque. *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace*. 2015. № 6(3). pp. 383–391.
12. Baranova, E. U., Vil'ke, V. G. Evolution of motion of a rigid body with a fixed point and an ellipsoidal cavity filled with a viscous fluid. *Moscow Univ. Mech. Bull.* 2013. № 68(1). pp. 15–20.
13. Rachinskaya A. L. Motion of a solid body with cavity filled with viscous liquid. *Cosmic Research*. 2015. № 53(6). pp. 476–480.
14. Disser K., Galdi G.P., Mazzone G., Zunino P. Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous liquid. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2016. № 221(1). pp. 487–526.
15. Ramodanov S. M., Sidorenko V. V. Dynamics of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with viscous fluid. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017. № 95. pp. 42–46.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.05.006>.
16. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L. Optimal deceleration of rotation of a dynamically symmetric body with a cavity filled with viscous liquid in a resistive medium. *Journal of Computer and System Sciences International*. 2010. № 49(2). pp. 222–226.
<https://doi.org/10.1134/S1064230710020073>.
17. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L. Optimal deceleration of rotation of an asymmetric body with a cavity filled with viscous fluid in a resistive medium. *Journal of Computer and System Sciences International*. 2012. № 51(1). pp. 38–48.
18. Neishtadt A. T. Evolution of rotation of a solid, acted upon by the sum of a constant and dissipative perturbing moments. *Mechanics of Solids*. 1980. № 15(6). pp. 21–27.
19. Пивоваров М. Л. О движении гироскопа с малым самовозбуждением. Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1985. №6. С. 23–27.
20. Van der Ha J. C. Perturbation solution of attitude motion under body-fixed torques. *Acta Astronautica*. 1985. 12(10). pp. 861–869.
21. Kane T. R., Levinson D. A. Approximate description of attitude motion of a torque-free, nearly axisymmetric rigid body. *Journal of the Astronautical Sciences*. 1987. № 35(4). pp. 435–446.
22. Ayobi M. A., Longuski J. M. Analytical solution for translational motion of spinning-up rigid bodies subject to constant body-fixed forces and moments. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 2008. № 75(1). 011004/1-011004/8.
23. Romano M. Exact analytic solution for a rotation of a rigid body having spherical ellipsoid of inertia and subjected to a constant torque. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2008. № 100. pp. 181–189.
24. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Paly K. S. Perturbed rotational motions of a spheroid with cavity filled with a viscous fluid. *Proc. IMechE Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2021. № 235(20). 4833–4837. <https://doi.org/10.1177/0954406220941545>.
25. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. Evolution of rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid in a resistive medium. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2022. № 142(3).
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.103980>.
26. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. Perturbed rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid subject to constant body fixed torques. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2023. № 148(3). 104284.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104284>.

27. Farag A. M., Amer T. S., Abady I. M. Modeling and analyzing the dynamical motion of a rigid body with a spherical cavity. *Journal of Vibration Engineering and Technologies*. 2022. <https://doi.org/10.1007/s42417-022-00470-7>.
28. Routh E. J. *Advanced Dynamics of a System of Rigid Bodies*. New York: Dover, 2005.
29. Bogoliubov N. N., Mitropolsky Yu. A. *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. New York: Gordon and Breach Science, 1961. 537 p.

Leshchenko Dmytro

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
DSc. in Physics and Mathematics, Professor
Didrikhson st. 4, Odessa, Ukraine, 65029
leshchenko_d@ukr.net,
ORCID: 0000-0003-2436-221X

Kozachenko Tetiana

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
Didrikhson st. 4, Odessa, Ukraine, 65029
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor
kushpil.t.a@gmail.com
ORCID: 0000-0001-9034-3776

For references:

Leshchenko D., Kozachenko T. (2022). Evolution of rotational motions in a resistive medium of a nearly dynamically spherical gyrostata subjected to constant body-fixed torques. *Mechanics and Mathematical Methods*. 4 (2). 19–31.

Для посилань:

Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Еволюція обертальних рухів в середовищі з опором, близького до динамічно сферичного гіростата під дією постійних моментів в зв'язаних з тілом осях. *Механіка та математичні методи*, 2022. Т. 4. № 2. С. 19–31.

UDC 621.923.4:621.793.74

PARAMETERS AFFECTING THE TEMPERATURE OF THE DIAMOND CUTTING DISC WHEN CUTTING BUILDING MATERIALS

A. Bespalova¹, O. Knysh¹, O. Dashkovska¹, O. Faizulyna¹, T. Chumachenko²

¹Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

²Odessa Polytechnic National University

Abstract. The cutting of natural and artificial building materials is most often carried out with metal-based diamond cutting discs at cutting speeds of the order of 50-80 m/sec. The cutting process is accompanied by considerable heat release and heating of the diamond disk. At a temperature of about 600°C, the tensile strength of a disc is reduced by a factor of 2 and graphitization of diamond grains occurs. Thus, when cutting stone and building materials with a diamond circle, the disk heating temperature should not exceed 600°C. In the work, mathematical modeling of the heating of a diamond cutting disk on a metal base was performed while cutting ceramic materials to determine the time of continuous operation to a critical temperature of 600°C. The simulation results presented in the graphs showed the dependence of the heating temperature of the disk on the diameter of the latter, the speed of rotation, the minute feed, the grain size and the thickness of the disk.

Almost all elements of the cutting modes affect the disk temperature, although to a different extent. The vertical feed has the greatest influence. With an increase in the diameter of the cutting disk and a decrease in the rotational speed, the total cutting force, power and heating of the disk in 1 min. and increase with one revolution. The operating time to the critical temperature is significantly reduced. With an increase in the thickness of the cutting disk, the total force and cutting power increase. The simulation results showed that the grain size of the cutting disk significantly affects the important parameters of work. Therefore, if there are no special requirements for surface roughness, it is more profitable to work with a coarser-grained disk.

According to the simulation results, it can be said that in order to ensure the maximum thermal resistance of the disk, it is necessary to choose disks with a grain size of at least 25 and work at a vertical feed rate of no more than 0.05 m/min.

It is shown that by selecting appropriate process characteristics the time of continuous operation can be of the order of 10 – 12 min without the use of forced cooling.

Keywords: diamond cutting disk, disk temperature, the speed of rotation, the minute feed, the grain size, the thickness of the disk.

ПАРАМЕТРИ, ЩО ВПЛИВАЮТЬ НА ТЕМПЕРАТУРУ АЛМАЗНОГО ВІТРИЗНОГО ДИСКУ ПРИ РІЗАННІ БУДІВЕЛЬНИХ МАТЕРІАЛІВ

Беспалова А. В.¹, Книш О. І.¹, Дашковська О. П.¹, Файзуліна О. А.¹,
Чумаченко Т. В.²

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

²Національний університет «Одеська політехніка»

Анотація. Розрізання природних та штучних будівельних матеріалів найчастіше здійснюється алмазними різальними дисками на металевій основі при швидкостях різання близько 50-80 м/с. Процес різання супроводжується значним виділенням тепла і нагріванням алмазного диска. При температурі близько 600 °С міцність диска на розрив знижується в 2 рази і відбувається графітизація алмазних зерен. Так, при різанні каменю та інших будівельних матеріалів алмазним кругом температура нагріву диска не повинна перевищувати 600°C. У

роботі проведено математичне моделювання нагріву алмазного відрізного диска на металевій основі під час різання керамічних матеріалів для визначення часу безперервної роботи до критичної температури.

Результати моделювання, представлені на графіках, показали залежність температури нагріву диска від діаметра останнього, швидкості обертання, хвилинної подачі, розміру зерна та товщини диска. Практично всі елементи режимів розрізання впливають на температуру круга, хоч і різною мірою. Найбільший вплив має величина вертикальної подачі. При збільшенні діаметра відрізного круга та зменшенні частоти обертання сумарна сила різання, потужність та нагрівання круга за 1 хв. і один оборот зростають. Час роботи до критичної температури значно знижується. При збільшенні товщини відрізного круга зростає сумарна сила та потужність різання. Результати моделювання показали, що величина зернистості відрізного круга значно впливає на важливі параметри роботи. Тому, якщо немає особливих вимог щодо шорсткості поверхні, вигідніше працювати більш крупнозернистим кругом. За результатами моделювання можна сказати, що для забезпечення максимальної теплової стійкості круга слід вибирати круги зернистості не менше 25 і працювати при швидкості вертикальної подачі не більше 0,05 м/хв.

Показано, що при підборі відповідних характеристик процесу час безперервної роботи може бути в межах 10 – 12 хвилин без застосування примусового охолодження.

Ключові слова: алмазний відрізний диск, температура диска, швидкість обертання, хвилинна подача, зернистість, товщина диска.

1 INTRODUCTION

In the process of repair and restoration of buildings, it is often necessary to cut openings and mortice where reinforcing elements are inserted. Such works are often performed in shell limestone, concrete, granite, basalt, and ceramic materials.

Currently, diamond abrasive discs are widely used for these purposes. The main advantage of diamond tools is, first of all, the possibility of obtaining high machining performance and dimensional stability, exceeding those of traditional carborundum-based tools.

The cutting of solid building materials is carried out by diamond discs with a rotation speed, which, and, consequently, the cutting speed is 35–50 m / s. Due to the high intensity of the cutting process, the cutting process is accompanied by significant heat release.

It should be noted that the disc, on which the diamond abrasive coating is applied, is made of ordinary low-alloy steel of the 9xfm steel type, (0,9% carbon and up to 1% chromium, vanadium and molybdenum). These steels have high enough tensile strength to withstand large centrifugal forces, but low heat resistance. The strength characteristics of these steels when heated to temperatures of 500 – 600°C decrease by almost 2 times, which can cause jamming or even breakage and rupture of the tool during operation.

In addition, the graphitization of diamond cutting grains, i.e. the transformation of tetragonal carbon into hexagonal also occurs at a temperature of about 600°C, which can lead to the loss of the diamond-bearing layer.

Thus, when cutting stone and building materials with a diamond disk, the heating temperature of the wheel should not exceed 600°C. Therefore, the working time of a diamond cutting disk is the time during which it heats up during continuous operation to a temperature of 600°C. The longer this time, the higher the efficiency of the diamond disk.

At present, there is no database on the appointment of cutting modes with synthetic diamond disks, which would determine the patterns of heating and cooling of the diamond cutting wheel during operation.

There is no methodology for determining the operating time up to the critical temperature and the issues of increasing the operating time resource up to the critical temperature have not been considered.

Diamond disk are produced in various sizes and different grain sizes, so the experimental study of this issue is very laborious and lengthy. In addition, there is no reliable technique that would allow these measurements to be made.

2 LITERATURE REVIEW

Despite the large amount of literature on cutting stone and ceramic materials with diamond disks, there is practically no information about the parameters of the cutting process that allow you to control the temperature of the disc during operation. This does not make it possible to develop an optimal cutting technology, determine the time of the disc to the critical heating temperature, and also does not make it possible to develop an effective method for cooling the disc.

A large number of works are devoted to the energy of the cutting process, the wear of cutting discs and ways to maintain the energy characteristics of the process in certain parameters.

In [1], the author considers in detail the process of cutting natural stones with a diamond disk tool. The author very skillfully determines the characteristics of diamond grains, the number of actually cutting grains in the contact spot of the disk with the product. On this basis, the author determines the individual and total cutting forces. However, there are no

thermal calculations either in relation to the workpiece, or in relation to the heating of the diamond disk on a metal base.

In [2], general issues of progress in abrasive processing are considered, but there are no data on the heating temperature of diamond wheels on a metal bond.

In [3], the issues of wear of a diamond cutting disk are considered, depending on the content of boron carbides in the diamond-bearing layer. The issues of heating the disk during processing are not considered.

In [4], the author uses electrical, chemical and optimal energy sources to bind, form and cut materials in the processing of hard-to-cut materials. The author explains in detail how each of these advanced processes works. Thermal issues are not affected.

The work [5] explores issues – energy nature – the dependence of cutting forces and cutting power on specific conditions and processing modes. However, the issue of energy costs for heating the circle is not considered.

In [6], the wear of diamond sectors is considered. Using mathematical methods, the authors predict disk wear depending on the amount of chips removed. Thermal effects are not considered in the work.

In [7, 8] considers the energy characteristics of the process. Cutting forces and power are associated with the amount of chips removed, which can make it possible to reasonably assign cutting modes.

In [9], the influence of the disk periphery speed on wear is considered. These studies also make it possible to prescribe the mode of cutting more reasonably. Thermal issues are not considered.

In [10], the issue of automatic control of the saw speed and feed per tooth is considered, which makes it possible to increase the efficiency of the cutting process. Thermal issues are also not considered and, in addition, the results of the study of the cutting process with a circular saw cannot be fully transferred to the cutting process with a disc.

In [11], the dependences of the specific energy of cutting and the specific energy of drilling. Thermal issues are not affected.

In [12], the issues of wear of a diamond cutter by measuring the cutting force are considered. Despite the thoroughness of the experiment carried out on modern equipment, the results cannot be applied to the topic of this work.

It can be concluded that at present there is no data in the literature on the heating of a diamond disk on a metal base during operation.

3 PURPOSE AND OBJECTIVES OF THE RESEARCH

In the present work, mathematical modeling has been carried out, which makes it possible to determine the safe operation time up to the critical temperature. In addition, some ways of increasing the time resource are modeled. Thus, it is possible to create a database of preferred operating modes and experimentally refine the mathematical model pointwise.

To achieve the goal of the work, it is necessary to solve the following tasks:

1. Determine the cutting forces of a single grain during the cutting process.
2. Determine the thermal power developed by a single grain when cutting a building material.
3. Determine the shape of the contact spot of the wheel with the product, determine the number of grains acting in the contact spot and the value of the total heat flux during cutting.
5. Develop a block diagram and a calculation program (in the MathCad environment), which makes it possible to determine the total cutting forces, the contact temperature of the cut, and the circuit for heating the disk with this temperature.
6. Based on the data obtained, determine the heating temperature of the section of the circle in contact with the product, the temperature along the radius of the circle, the cooling of

the heated circle by the air flow and the increase in the temperature of the disc for each revolution.

4 RESEARCH RESULTS

The studies were carried out using mathematical modeling and direct experiments. The material used is tiles and briquettes made of zirconium oxide.

The amount of grain deepening into the material:

$$P_z = 7,15 \times H_v \times h^2,$$

where H_v is the hardness of the material being cut on the Vickers scale, h – the average depth of the grain in the material. The multiplication $P_z V_d$ (disc speed) gives the value of the thermal power of cutting by a single grain. To determine the last value, the technique described in [13] was used. Thermal pulse from a microthermocouple makes it possible to determine: the number of actual cutting grains in the arc of contact between the disc and the product, the distance between the cutting grains, and the specific number of cutting grains. By measuring the actual cut of the material in each pass and dividing this cut by the number of grains, it is possible to determine the average depth of grain penetration into the material being ground or cut.

If we dwell on the example of cutting a ZrO_2 briquette with vertical feed, as shown in Fig. 1, then the following notation can be introduced.

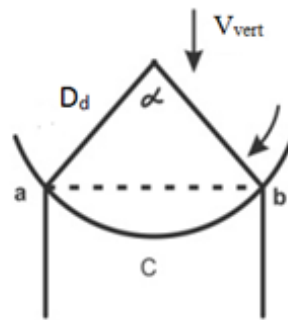


Fig. 1. Scheme of cutting a ZrO_2 ceramic sample with a diamond cutting disc on a metal base.
 D_d - disc diameter, V_d - disc speed, V_{vert} - vertical feed speed, n - rotation frequency

The chord of the sector of the part of the circle currently within the sample, $ab=C$. α – sector angle, L_{cont} – length of the contact arc equal to $L_{cont} = 2arcsin(C/D_d) \cdot R$.

For an approximate calculation, we determine the contact area of the cutting edge of the disc with the product. It will obviously be equal to $F_{cont} = L_{cont} \times S$ and, when projected onto a plane, will be an elongated rectangle. If we take the time interval from point a to point b , then the time of thermal exposure from point a to point b can be considered as a short period of time equal to $\tau = L_{cont}/V_d$. Thus, we reduce the problem to an instantaneous flat source. The errors arising from the use of this model can be determined in the future with experimental measurements.

The atmosphere in which the cutting disc operates consists of a boundary layer of air that exists around the disc, regardless of its structure and porosity. [14]. This, in turn, means that when cutting, the air intensively blows over the disc and a significant decrease in temperature can be expected, especially since heat is released within one revolution of the disc from most of its surface. To determine the amount of heat carried away from the surface of the disc, we determine the heat transfer coefficient for these conditions.

To estimate this amount, it is necessary to find the coefficient of convective heat transfer between the moving medium and the blown surface (wall).

The amount of heat transferred in the process of heat transfer is determined by the Newton-Richmann equation:

$$Q = \alpha(t_w - t_l)F,$$

where α – is the heat transfer coefficient, $W/(m^2 \cdot K)$; t_w, t_l – are the average temperatures of the liquid and the wall, $^{\circ}C$; F – is the wall surface, m^2 ; Q – is the heat flux (amount of heat), $W(J)$; τ – is time, sec.

Heat transfer coefficient α – characterizes the intensity of heat transfer between the surface of the body and the environment. The coefficient α shows how much heat is transferred from a unit of the wall surface to the liquid per unit time with a temperature difference between the wall and the liquid of 1 degree (K),

$$[\alpha] = \left[\frac{Q}{F(t_w - t_l)} \right] = \left[\frac{J}{m^2 \times sec \times K} \right] = \left[\frac{W}{m^2 \times K} \right].$$

Determining α is the main task of calculating heat exchangers. The easiest way to determine the heat transfer coefficient is through the Nusselt criterion using the expressions:

$$\alpha = \frac{Nu \times \lambda}{l} \tag{1}$$

and

$$Nu = 0.008 Re^{0.9} \times Pr^{0.43},$$

where

$$Re = \frac{\omega l}{\nu} = \frac{\omega l \rho}{\mu}$$

the Reynolds criterion, which characterizes the hydrodynamic flow regime during forced motion and is a measure of the ratio of inertia forces and viscous friction;

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{c\mu}{\lambda}$$

the Prandtl criterion, which characterizes the physicochemical properties of the coolant and is a measure of the similarity of temperature and velocity fields in the flow;

where l – is the defining size, m; ρ – is the heat carrier density, kg/m^3 ; $\Delta t = t_w - t_l$ – temperature difference between the wall and the coolant, $^{\circ}C$; λ – is the thermal conductivity coefficient of the coolant, $W/(m \cdot K)$; μ – is the dynamic coefficient of viscosity, $Pa \cdot sec$; c – is the heat capacity of the coolant, $J/(kg \cdot K)$; τ – is the process time, sec, ω – is the speed of the coolant, m/sec.

The calculation of the Nu criterion for an air flow velocity of 30 - 50 m/sec and for an air temperature of $20^{\circ}C = 293^{\circ}K$, according to the above formulas (1), is 51,34. Accordingly, the heat transfer coefficient α will be, according to formula 1, $\alpha = 445 W/m^2 \cdot K$.

In order to determine the amount of heat carried away from the surface of the contact spot of the disc with the product, it is necessary to multiply the length of the arc of the contact of the disc with the product and the value of the transverse feed.

The calculations were carried out by changing the parameters in the MathCad program and are shown in Fig. 2.

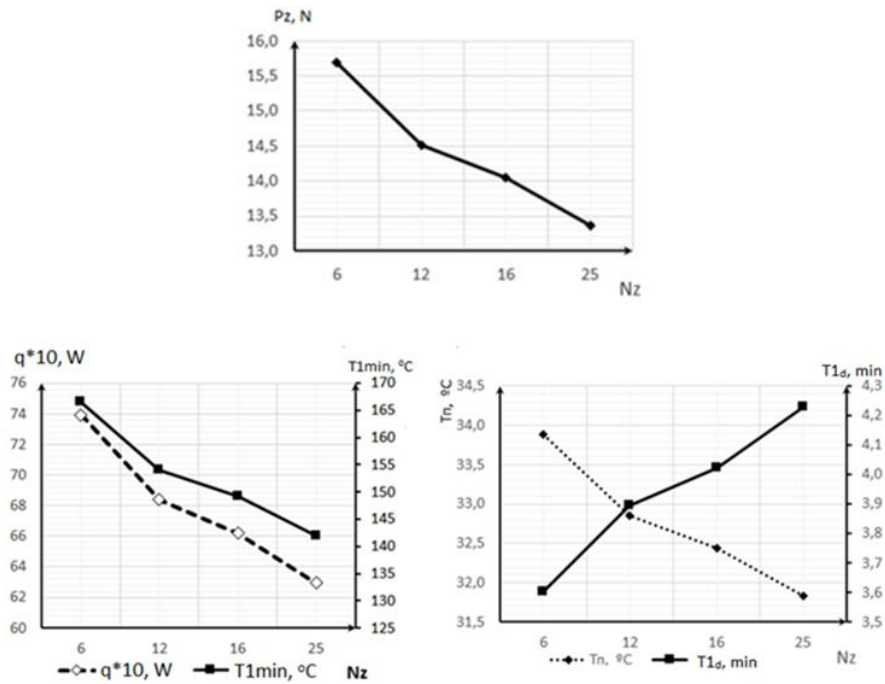


Fig. 2. Dependence of the cutting parameters on the change in the grain size of the disc

The simulation results showed that the grain size of the cutting disc significantly affects the important parameters of work. The total cutting force decreases despite the fact that the unit cutting force increases. This is explained by the fact that with an increase in grain size, the number of simultaneously working grains sharply decreases. Therefore, if there are no special requirements for surface roughness, it is more profitable to work with a coarser-grained disc, despite its higher cost. According to the change in the total cutting force, the laws of change in the cutting power and the heating temperature of the disc for 1 minute of work follow the same pattern. The temperature of the disc for one revolution slowly decreases, but quite naturally, the operating time increases to the critical temperature (Fig. 3).

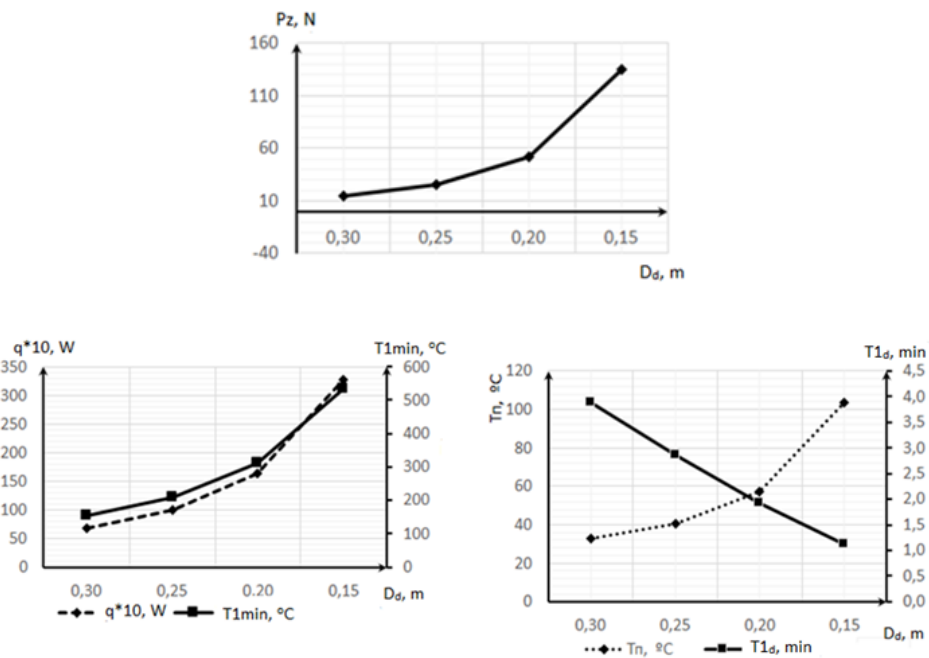


Fig. 3. Dependence of the cutting parameters on the change in the diameter of the cutting disc

The total cutting force, power and heating of the disc for 1 min. increase. The heating temperature of the disc for 1 revolution increases. The operating time to the critical temperature is significantly reduced (Fig. 4).

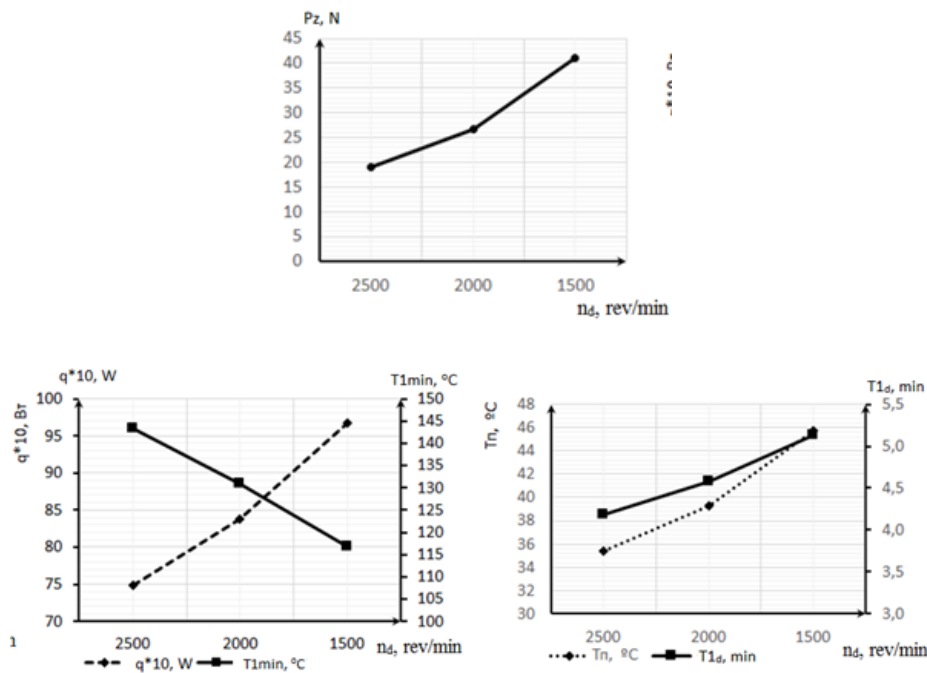


Fig 4. Dependence of the cutting parameters on the change in the rotational speed of the cutting disc

Reducing the rotational speed causes an increase in the total cutting force, cutting power, heating temperature of the disc for 1 revolution. The operating time to the critical temperature increases significantly (Fig. 5).

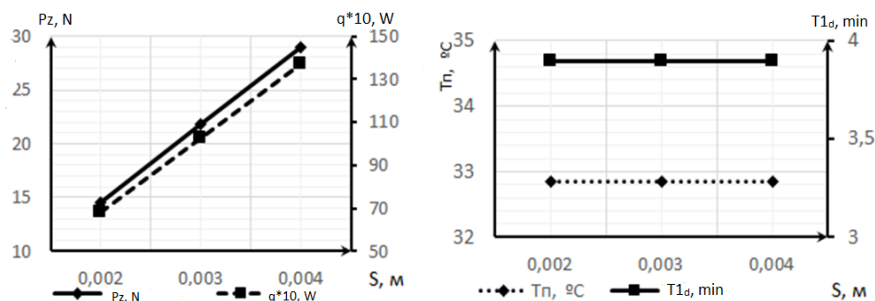


Fig 5. Dependence of the cutting parameters on the change in the rotational speed of the cutting disc

With an increase in the thickness of the cutting disc, as expected, the total force P_z and cutting power increase. All other parameters remain unchanged. The reason for this is that the intensity of the heat flux remains unchanged (Fig. 6).

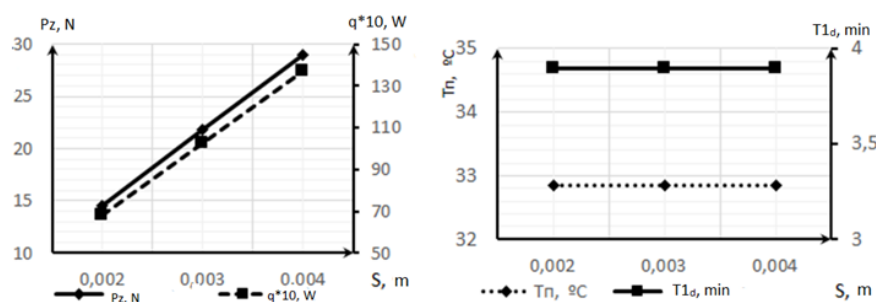


Fig. 6. Dependence of the cutting parameters on the change in the rotational speed of the cutting disc

With an increase in vertical feed, the total cutting force increases. The load on the cutting grain increases by increasing the average value of the penetration of the grain into the material. The cutting power and the heating temperature of the wheel increase in 1 minute. The heating of the disc for 1 revolution also increases. The operating time to the critical temperature is significantly reduced.

5 DISCUSSION OF RESEARCH RESULTS

Mathematical modeling has shown that the metal disk - the basis of the diamond wheel, heats up significantly during operation.

Almost all elements of the cutting modes affect the disc temperature, although to a different extent. The vertical feed has the greatest influence.

The speed of the disc and the change in its diameter have almost the same effect, since the cutting speed depends on both the speed and the diameter of the disc.

Changing the grain size of the cutting disc significantly affects its heating. The dependence here is quite complex, since an increase in the grain size increases the unit cutting force and thermal power from each individual grain. However, this reduces the number of grains simultaneously involved in the work. In our case, a smaller number of more powerful heat sources take part in heat generation. However, an increase in the power of each single source cannot compensate for a decrease in their number. This phenomenon must be checked on other discs, for example on a ceramic bond.

According to the simulation results, it can be said that in order to ensure the maximum thermal resistance of the disc, it is necessary to choose discs with a grain size of at least 25 and work at a vertical feed rate of no more than 0.05 m/min.

6 CONCLUSIONS

As a result of the mathematical modeling, the following issues were resolved:

1. The cutting force of a single grain during the cutting process is determined.
2. The thermal power developed by a single grain when cutting a ceramic material is determined.
3. The shape of the contact spot of the disc with the product is determined, the number of grains acting in the contact patch and the value of the total heat flux during cutting are determined.
5. A calculation program has been developed (in the MathCad environment), which makes it possible to determine the total cutting forces, the contact temperature of the cut, and the scheme for heating the disc with this temperature.
6. Based on the data obtained, the heating temperature of the section of the circle in contact with the product, the temperature along the radius of the circle, the cooling of the heated disc by the air flow and the increase in the temperature of the circle for each revolution were determined.

References

1. Aleksandrov, V. A. (1979). *Obrabotka prirodnogo kamnya almaznym diskovym instrumentom* [Processing natural stone with a diamond disc tool]. Kiyev. [in Russian].
2. Dongming, Guo (2006). *Advances in abrasive technology IX*. Uetikon-Zuerich, Switzerland: Trans Tech Publications.
3. Islak, S. Kastamonu, Çelik, H. (2015). Effect of sintering temperature and boron carbide content on the wear behavior of hot pressed diamond cutting segments. *Science of Sintering*. 47(2). 131–143.

4. Sushil Kumar Choudhary, R. S Jadoun. (2014). Current research issue, trend & applications of powder mixed dielectric electric discharge machining (PM-EDM). *International Journal of Engineering Sciences & Research. Technology*. Choudhary. 3(7). 335–358.
5. Turchetta, S. (2010). Cutting force in stone machining by diamond disk. *Advances in Materials Science and Engineering*. Article ID 63143.
6. Obikawa, T., Takahara, H., Shirakashi, T. (1998). Energy flowing rate into workpiece in surface grinding based on 3-dimensional temperature analysis, effect of measuring method on temperature distribution and energy flowing rate. *International Journal of the Japan Society for Precision Engineering*. 32(1). 19–24.
7. Li, J., Ali, L. R. (2019). A review on machining and optimization of particle-reinforced metal matrix composites. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 100(9–12). 2929–2943.
8. Rajni, B. Kinalkar, M. S. Harne. (2014). A review on various cooling system employed in grinding. *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE)*. 4(1). 2278–3075.
9. Siniša, Dunda. (1989). Influence of the circular saw disc peripheral velocity on diamond tool consumption during dimension stone cutting. *Rudarsko-geološko-naftni zbornik*. Croatia, Zagreb, 44(1). 135–142.
10. Ugur, Simsir. (2014). Torque-controlled adaptive speed control on a CNC marble saw machine. *Advances in Mechanical Engineering*. 228(2). 230–245.
11. Tawakoli, T., Azarhoushang, B. (2008). Influence of ultrasonic vibrations on dry grinding of soft steel. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*. 48(14). 1585–1591.
12. Rabesh Kumar Singh, Anuj Kumar Sharma, Amit Rai Dixit, Arun Kumar Tiwari, Alokesh Pramanik, Amitava Mandal (2017). Performance evaluation of alumina-graphene hybrid nano-cutting fluid in hard turning. *Journal of Cleaner Production*. 162. 830–845.
13. Al-Adzheylat S. A., Lebedev V. G., Usov A. V. (2009). Analiticheskoye opredeleniye sil i temperatur rezaniya edinichnym elborovym zernom [Analytical determination of cutting forces and temperatures with a single elbor grain]. *Visnik KhNTUSG imeni Petra Vasilenka*. Kharkiv. 81. 263–270. [in Russian].
14. Bespalova, A., Lebedev, V., Frolenkova, O., Chumachenko, T. (2019). Cutting stone and ceramic building materials with diamond discs. *Scientific letters of academic society of Michal Baludansky*. 7(2). 9–17.

Література

1. Александров В. А. Обработка природного камня алмазным дисковым инструментом. Киев, 1979. 356 с.
2. Dongming Guo. *Advances in abrasive technology IX*. Trans Tech Publication. Ueticon-Zuerich, 2006.
3. Islak S. Kastamonu, Çelik H. Effect of sintering temperature and boron carbide content on the wear behavior of hot pressed diamond cutting segments. *Science of Sintering*, 2015. № 47(2). pp. 131–143.
4. Sushil Kumar Choudhary, R. S Jadoun. Current research issue, trend & applications of powder mixed dielectric electric discharge machining (PM-EDM). *International Journal of Engineering Sciences & Research. Technology*. Choudhary, 2014. № 3(7). pp. 335–358.
5. Turchetta S. Cutting force in stone machining by diamond disk. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2010. Article ID 63143.
6. Obikawa T., Takahara H., Shirakashi T. Energy flowing rate into workpiece in surface grinding based on 3-dimensional temperature analysis, effect of measuring method on temperature distribution and energy flowing rate. *International Journal of the Japan Society for Precision Engineering*, 1998. № 32(1). pp. 19–24.
7. Li J., Ali L. R. A review on machining and optimization of particle-reinforced metal matrix composites. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2019. № 100(9–12). pp. 2929–2943.

8. Rajni B. Kinalkar, M.S. Harnе. A review on various cooling system employed in grinding. International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE), 2014. № 4(1). pp. 2278–3075.
9. Siniša Dunda. Influence of the circular saw disc peripheral velocity on diamond tool consumption during dimension stone cutting. Rudarsko-geološko-naftni zbornik. Croatia. Zagreb, 1989. № 44(1). pp. 135–142.
10. Ugur Simsir. Torque-controlled adaptive speed control on a CNC marble saw machine. Advances in Mechanical Engineering, 2014. № 228(2). pp. 230–245.
11. Tawakoli T., Azarhoushang B. Influence of ultrasonic vibrations on dry grinding of soft steel. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2008. № 48(14). pp. 1585–1591.
12. Rabesh Kumar Singh, Anuj Kumar Sharma, Amit Rai Dixit, Arun Kumar Tiwari, Alokesh Pramanik, Amitava Mandal. Performance evaluation of alumina-graphene hybrid nano-cutting fluid in hard turning. Journal of Cleaner Production, 2017. № 162. pp. 830-845.
13. Аль-Аджейлат С.А., Лебедев В.Г., Усов А.В. Аналитическое определение сил и температур резания единичным эльборовым зерном. Вісник ХНТУСГ імені Петра Василенка. Харків, 2009 № 81. С. 263–270.
14. Bespalova A., Lebedev V., Frolenkova O., Chumachenko T. Cutting stone and ceramic building materials with diamond discs. Scientific letters of academic society of Michal Baludansky. 2019. № 7(2). pp. 9–17.

Bespalova Alla

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
Doctor of Technical Science., Associate Professor
Didrihsona str., 4 Odessa, Ukraine, 65029
bespalova.a.v.2015@gmail.com
ORCID: 0000-0003-3713-0610

Knysh Oleksij

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
Ph.D., Associate Professor
Didrihsona str., 4 Odessa, Ukraine, 65029
corttas72@outlook.com
ORCID: 0000-0002-3449-4112

Dashkovskaya Olha

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
Ph.D., Associate Professor
Didrihsona str., 4 Odessa, Ukraine, 65029
dop.od@ukr.net
ORCID: 0000-0002-9980-023X

Faizulyna Oksana

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Ph.D., Associate Professor
Didrihsona str., 4 Odessa, Ukraine, 65029
narenko@ukr.net
ORCID: 0000-0002-1151-4467

Chumachenko Tatiana

Odessa Polytechnic National University
Ph.D., Associate Professor
Shevchenko av., 1, Odessa, Ukraine, 65044
chumachenko-1981.28@ukr.net
ORCID: 0000-0001-6149-4786

For references:

Bespalova A., Knysh O., Dashkovska O., Faizulyna O., Chumachenko T. (2022). Parameters affecting the temperature of the diamond cutting disc when cutting building materials. Mechanics and Mathematical Methods. 4 (2). 32–42.

Для посилань:

Беспалова А. В., Книш О. І., Дашковська О. П., Файзуліна О. А., Чумаченко Т. В. Параметри, що впливають на температуру алмазного вітризного диску при різанні будівельних матеріалів. Механіка та математичні методи, 2022. Т. 4. № 2. С. 32–42.

UDC 624.04

CALCULATION OF ANNULAR PLATES ON AN ELASTIC BASE WITH A VARIABLE BEDDING FACTOR

M. Surianinov¹, Y. Krutii¹, D. Kirichenko¹, O. Klimenko¹

¹*Odesa state academy of civil engineering and architecture*

Abstract. The application of the analytical method – the method of direct integration – to calculations of building structures in the form of circular plates and plates on a continuous variable elastic base is considered. It is noted that there are no proposals for a general analytical method for calculation of annular plates on a variable elastic base in the literature. And the need for such a method is obvious, since it makes it possible to estimate the accuracy of finite element analysis.

A detailed description of the algorithm of the direct integration method is not given in the paper, and all the calculation formulas for the circular plate are taken from the authors' already published article. The results of numerical implementation of this algorithm for specific examples are considered. In order to verify the results of calculations by the author's method, computer modeling of the considered circular plates in PC LIRA-SAPR and their calculations by the finite element method have been performed.

The reaction of the foundation is described by the Winkler model with a variable bedding factor. The calculation of a concrete slab that is rigidly pinched on the inner contour and articulated on the outer contour is performed. And calculation of a steel plate with rigid pinching on the outer contour and articulated on the inner contour. In the first case, the bedding factor is assumed constant, and in the second case, it changes according to the linear law. The calculations showed that the discrepancy between deflections calculated by the finite-element method and the author's method does not exceed 1%, and the results of radial and circumferential moments calculation differ more considerably, amounting to 10%. The authors explain this difference by the inaccuracy of the numerical analysis associated with a semi-automatic method of constructing a finite-element mesh, which should be made finer. The densification of the mesh in the manual mode of its partitioning significantly reduces the discrepancy between the results of calculating the deflections, radial and circumferential bending moments by the finite-element method and the author's method.

Keywords: direct integration method, annular slab, elastic foundation, Winkler model, variable bedding factor, finite element method, PC LIRA-SAPR.

РОЗРАХУНОК КІЛЬЦЕВИХ ПЛИТ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ЗІ ЗМІННИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ПОСТЕЛІ

Сур'янінов М. Г.¹, Крутій Ю. С.¹, Кіріченко Д. О.¹, Кліменко О. М.¹

¹*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація. Розглядається застосування аналітичного методу – методу прямого інтегрування – до розрахунків будівельних конструкцій у формі кільцевих пластин та плит на безперервній змінній пружній основі. Зазначається, що пропозиції щодо загального аналітичного методу розрахунку кільцевих пластин на змінній пружній основі у літературі відсутні. А необхідність такого методу очевидна, оскільки дозволяє оцінити точність скінчено-елементного аналізу.

Детальний виклад алгоритму методу прямого інтегрування у роботі не наводиться, проте розрахункові формули для кільцевої пластини взяті з вже опублікованої статті авторів. Розглядаються результати чисельної реалізації цього алгоритму для конкретних прикладів. З метою верифікації результатів розрахунку авторським методом, виконано комп'ютерне моделювання розглянутих кільцевих пластин у ПК ЛІРА-САПР та їх розрахунки методом скінчених елементів.



Реакція основи описується моделлю Вінклера зі змінним коефіцієнтом постелі. Виконано розрахунок бетонної плити, яка жорстко зацементована за внутрішнім контуром і шарнірно – за зовнішнім. І розрахунок сталевих плит з жорстким затиском по зовнішньому контуру і шарнірним по внутрішньому. У першому випадку коефіцієнт постелі прийнято постійним, а у другому випадку він змінюється за лінійним законом. Виконані розрахунки показали, що розбіжність у результатах обчислення прогинів методом скінчених елементів і авторським методом не перевищує 1%, а результати обчислення радіальних і окружних моментів відрізняються значно, досягаючи 10%. Причому цю відмінність автори пояснюють неточністю чисельного аналізу, пов'язаної з напівавтоматичним методом побудови скінчено-елементної сітки, яку слід робити дрібнішою. Згущення сітки в ручному режимі її розбиття суттєво знижує розбіжність між результатами обчислення прогинів, радіальних та окружних моментів, що згинають, методом скінчених елементів і авторським методом.

Ключові слова: метод прямого інтегрування, кільцева плита, пружна основа, модель Вінклера, змінний коефіцієнт постелі, метод скінчених елементів, ПК ЛІРА-САПР.

1 INTRODUCTION

Nowadays, the construction of circular-shaped engineering structures has become widespread. These include television towers, smoke and ventilation stacks, radio relay towers, support towers for wind power plants, and cylindrical tanks. The foundations of such structures, their floor slabs, and the bottoms of cylindrical tanks are often circular plates. And such plates are based on an elastic foundation, the reaction of which can be variable.

From a mathematical point of view, the problem of calculating such structures is very complicated, since its solution is reduced to the solution of differential equations with variable coefficients.

There are different models of elastic foundations. The simplest one is the Winkler model. For beams on a constant elastic base, this model allows us to obtain the exact solution, but there is no such solution for slabs. The problem becomes even more complicated if the elastic foundation is variable. A universal analytic solution has not yet been constructed. That is why approximate calculation methods are used, principally the finite-element method. However, it is well known that results obtained by this method are often far from reality, so the construction of an analytical solution remains relevant.

2 LITERATURE ANALYSIS AND PROBLEM FORMULATION

The main results in the construction of the theory of plate bending belong to Simeon Poisson, Louis Navier and Gustav Kirchhoff. In 1820, a report by L. Navier presented the differential equation for transverse bending of a plate in general form [1]. In 1828, in [2], for the first time was obtained the solution of the bending problem for an elastic thin axisymmetric circular plate under the action of a uniform transverse load and a concentrated transverse force in the center for two cases of boundary conditions – free resting and rigid pinching of the plate outer contour. It was in this work that Poisson's value, now called Poisson's coefficient, was introduced. Further development of the theory of plate bending is displayed in the works of Kirchhoff, who derived the variational equation for the plate, which allows to construct the differential equation and the boundary conditions of the problem.

Much research has been conducted from the theory of calculating circular and annular plates on different models of elastic foundations. Obtaining an exact solution of such problems is associated with mathematical difficulties. In this connection, numerical methods are still the only possible means of obtaining acceptable results in terms of accuracy and time consumption when solving practically important problems.

The main results obtained by scientists from various countries during the previous two centuries in the area of circular and circular plate calculation have been systematized by K. G. Chizhevsky [3]. Here are calculations of loaded circular and circular plates for strength, stiffness, stability and vibrations.

Many interesting works appeared at the end of the last century and the beginning of this century. For example, the solution of the static stability problem for a three-layer circular plate with a symmetrical cross-section structure is presented in [4]. In this paper, the system of differential equations describing the plate in question is obtained, and the finite difference method is used to determine the critical loads and the forms of stability loss. The results obtained are compared with the data of finite element analysis.

In [5], a new algorithm for calculating bending strength for reinforced concrete circular elements without taking into account the axial force is developed and a practical table for determining the areas of longitudinal reinforcement is proposed. The table has a universal character, since it can be applied to any size of section and any concrete strength class below C50.

The plane problem of the theory of elasticity for an annular plate of a constant thickness, the middle surface of which coincides with the coordinate plane of the cylindrical coordinate system, is considered in [6]. To describe its three-dimensional stress state, three harmonic functions are used, which express the general solution of the Lyame equations in the cylindrical coordinate system. A mathematical model describing the flat stress-strain state of the plate in the polar coordinate system has been developed.

The study [7] is based on the full system of 20 equations in curvilinear non-orthogonal coordinates of linear thin shell theory, previously used in the static calculation of the long unfolding helicoid. In this paper, this system is applied to determine the stress-strain state of circular and annular plates under an external axisymmetric surface load acting both in the plate plane and from the plate plane. The results obtained for an annular plate in non-orthogonal coordinates extend the class of problems that can now be solved analytically. They can be used as the first terms of expansion series of unknown displacements in case of application of the method of small parameter to a long unfolding helicoid.

However, there are no proposals in the literature regarding a general method for the calculation of circular plates on a variable elastic base

3 RESEARCH GOAL AND OBJECTIVES

The purpose of this paper is to apply the analytical method to the calculation of building structures in the form of circular plates and slabs lying on a continuous variable elastic base.

The mentioned method is proposed in [8–10], and is called the "direct integration method".

Here the method is used to calculate an annular plate with two variants of boundary conditions: rigid pinch along the inner edge of the plate and hinged fastening of the outer edge, and vice versa – hinged fastening inside the plate with rigid fastening outside.

4 RESEARCH RESULTS

Consider a circular plate (plate) of constant cylindrical stiffness D , lying on a variable elastic base and under the action of a continuously distributed arbitrary transverse load (Fig. 1). The abbreviations adopted here are as follows: a and b are the radii of external and internal circles of the plate, r is radial coordinate ($0 \leq r \leq a$), $q(r)$ is arbitrary transverse load, $R(r)$ is the reaction of elastic base. The internal forces acting in the plate are radial M_r and circumferential M_θ bending moments, radial transverse force Q_r .

For the bedding factor $k(r)$ and $q(r)$ loads are taken representations [12]:

$$k(r) = k_0 \left(A_0 + A_1 \left(\frac{r}{a} \right) + A_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \dots + A_s \left(\frac{r}{a} \right)^s \right); \quad (1)$$

$$q(r) = q_0 \left(B_0 + B_1 \left(\frac{r}{a} \right) + B_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \dots + B_p \left(\frac{r}{a} \right)^p \right), \quad (2)$$

where k_0 , q_0 are the values of bedding factor and load at some characteristic point of the plate.

For the bending of circular and circular plates, the following formulas for the deflection function $w(r)$ were obtained in [12]:

$$w(r) = \frac{q_0 a^4}{D} W(r); \quad (3)$$

$$W(r) = \lambda_1 X_1(r) + \lambda_2 X_2(r) + \lambda_3 Y_1(r) + \lambda_4 Y_2(r) + X_3(r), \quad (4)$$

where $W(r)$ – dimensionless function and λ_n – arbitrary dimensionless constants.

A detailed description of the algorithm of the direct integration method and all the computational formulas for the circular plate are given in our paper [12]. Here we will consider the results of numerical implementation of this algorithm for several specific examples. In order to verify the results of calculations by the author’s method, computer modeling of all considered examples in PC LIRA-SAPR and calculations by the finite element method have been performed.

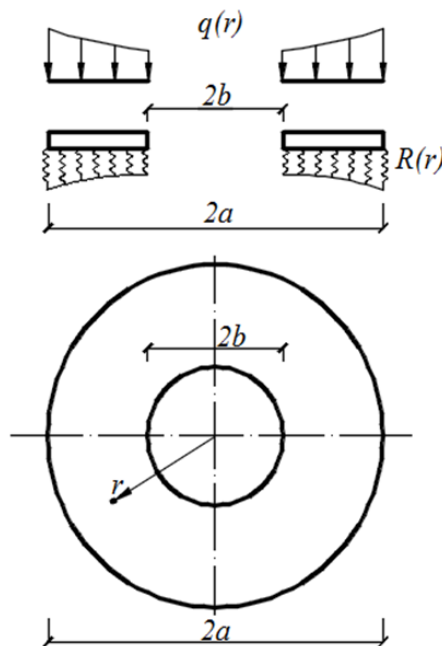


Fig. 1. Circular plate on a variable elastic base under the action of an arbitrary transverse load

Consider a concrete slab ($E = 1,5 \cdot 10^7 \text{ kPa}$, $\mu = 1/6$) of thickness $h = 0,12 \text{ m}$, outer radius $a = 1,8 \text{ m}$, inner radius $b = 0,9 \text{ m}$, which is under the action of a uniformly distributed constant load $q = 80 \text{ kPa}$. The slab is rigidly pinched along the inner contour and hinged along the outer contour.

The bedding factor (Fig. 2) is constant: $k(r) = \text{const} = 5000 \text{ kH} / \text{m}^3$.

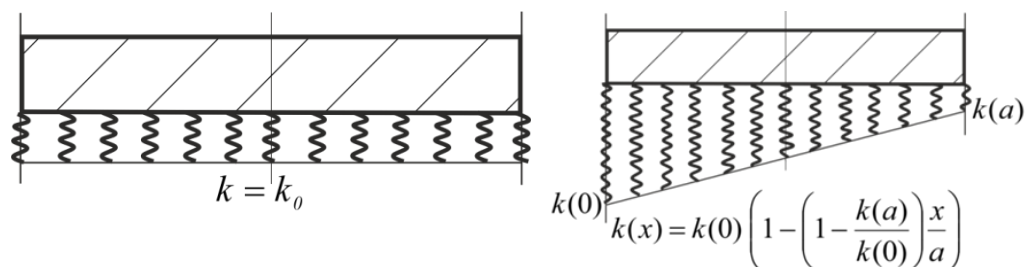


Fig. 2. Laws of change in the bed coefficient

The results of calculations by the author’s method (AM) and by the finite element method (FEM) in PC LIRA-SAPR are shown in Table 1, and their graphical interpretation is shown in Fig. 3.

Table 1

Concrete slab calculation results

r, m	w, m		Discrepancy (%)	M_r		Discrepancy (%)	M_θ		Discrepancy (%)
	FEM	AM		FEM	AM		FEM	AM	
0,9	0,0000	0,0000	0,000	-10,050	-10,168	1,156	-1,6680	-1,6946	1,571
0,9429	0,0051	0,0052	0,400	-7,2124	-7,4469	3,148	-1,5852	-1,6271	2,576
0,9857	0,0186	0,0187	0,390	-4,8106	-5,0962	5,604	-1,4247	-1,4788	3,661
1,0286	0,0377	0,0379	0,380	-2,8568	-3,0756	7,113	-1,2171	-1,2754	4,574
1,0714	0,0603	0,0605	0,369	-1,2351	-1,3486	8,418	-0,9783	-1,0369	5,651
1,1143	0,0842	0,0845	0,358	0,1039	0,1144	9,154	-0,7287	-0,7789	6,450
1,1571	0,1077	0,1081	0,345	1,2051	1,3381	9,936	-0,4787	-0,5138	7,027
1,2	0,1298	0,1302	0,330	2,1082	2,3430	10,02	-0,2321	-0,2514	7,682
1,2429	0,1491	0,1495	0,313	2,8677	3,1468	8,860	0,0005	0,0006	7,911
1,2857	0,1647	0,1652	0,292	3,5693	3,7644	5,182	0,2166	0,2360	8,201
1,3286	0,1761	0,1766	0,270	4,1656	4,2088	1,026	0,4120	0,4499	8,425
1,3714	0,1832	0,1832	0,000	4,3326	4,4908	3,223	0,5833	0,6383	8,614
1,4143	0,1848	0,1847	0,218	4,4142	4,6202	4,458	0,7278	0,7980	8,789
1,4571	0,1811	0,1810	0,264	4,3408	4,6053	5,743	0,8429	0,9264	9,010
1,5	0,1723	0,1722	0,326	4,1408	4,4532	7,014	0,9322	1,0216	8,753
1,5429	0,1585	0,1584	0,345	3,8272	4,1705	8,232	0,9906	1,0819	8,440
1,5857	0,1401	0,1400	0,356	3,4159	3,7626	9,215	1,0157	1,1060	8,163
1,6286	0,1176	0,1175	0,374	2,9127	3,2345	9,995	1,0249	1,0929	6,218
1,6714	0,0915	0,0914	0,396	2,4491	2,5906	5,461	0,9948	1,0417	4,500
1,7143	0,0626	0,0625	0,409	1,8131	1,8346	1,170	0,9222	0,9519	3,125
1,7571	0,0319	0,0318	0,432	0,9174	0,9701	5,430	0,8105	0,8228	1,492
1,8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0,6491	0,6542	0,781

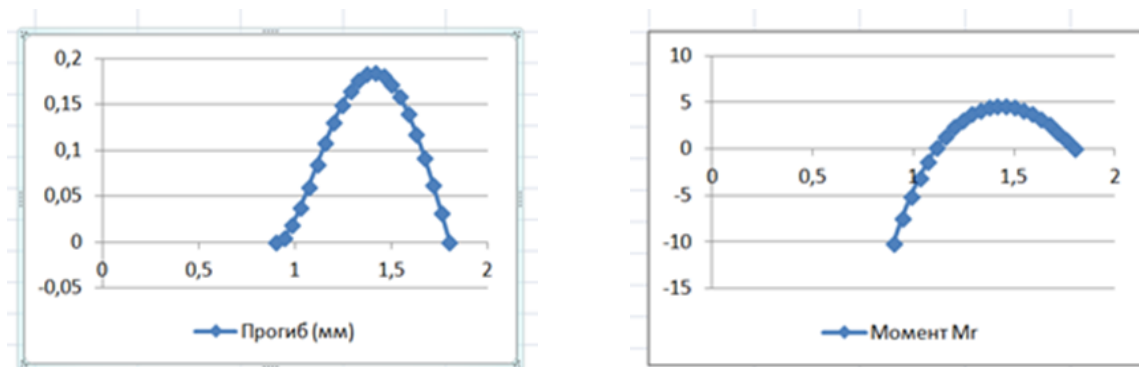


Fig.3. Deflections and radial bending moments

As follows from Table 1, the values of deflections practically coincide when calculating the ring plate under the above conditions by the author's method and with the help of the LIRA-SAPR PC [13-14], and the discrepancy of bending moments is quite significant, and even reaches 10%.

Now consider a steel plate ($E = 2,0 \cdot 10^8 \text{ kPa}$, $\mu = 0,33$) of thickness $h = 0,03 \text{ m}$, outer radius $a = 0,9 \text{ m}$, inner radius $b = 0,45 \text{ m}$, which is under the action of a uniformly distributed constant load $q = 30 \text{ kPa}$. The plate is rigidly pinched along the outer contour and articulated along the inner contour. The bedding coefficient varies according to the linear law: $k(b) = 4000 \text{ kH / m}^3$, $k(a) = 5000 \text{ kH / m}^3$ (Fig. 2).

The results of calculations by the author's method (AM) and by the finite element method (FEM) in PC LIRA-SAPR are shown in Table 2, and their graphical interpretation is shown in Fig. 4.

Table 2

Steel plate calculation results

$r, \text{ m}$	$w, \text{ m}$		Discrepancy (%)	M_r		Discrepancy (%)	M_θ		Discrepancy (%)
	FEM	AM		FEM	AM		FEM	AM	
0,45	0,0000	0,0000	0,000	0,0000	0,0000	0,000	-0,0652	-0,0665	1,904
0,4714	0,0013	0,0013	0,120	0,0650	0,0661	1,737	-0,0384	-0,0391	1,845
0,4929	0,0026	0,0026	0,190	0,1147	0,1167	1,725	-0,0148	-0,0151	1,834
0,5143	0,0036	0,0037	0,311	0,1527	0,1549	1,427	0,0055	0,0056	1,696
0,5357	0,0046	0,0047	0,329	0,1815	0,1832	0,942	0,0232	0,0235	1,258
0,5571	0,0055	0,0056	0,358	0,2004	0,2035	1,504	0,0384	0,0387	0,848
0,5786	0,0061	0,0062	0,324	0,2103	0,2169	3,049	0,0509	0,0515	1,207
0,6	0,0065	0,0066	0,314	0,2120	0,2244	5,505	0,0610	0,0620	1,618
0,6214	0,0068	0,0069	0,303	0,2084	0,2263	7,915	0,0683	0,0701	2,574
0,6429	0,0069	0,0070	0,282	0,2024	0,2224	8,988	0,0711	0,0756	5,975
0,6643	0,0067	0,0068	0,270	0,1914	0,2127	9,993	0,0716	0,0786	8,936
0,6857	0,0065	0,0065	0,000	0,1766	0,1967	10,23	0,0708	0,0786	9,960
0,7071	0,0060	0,0060	0,001	0,1563	0,1737	10,00	0,0696	0,0754	9,861
0,7286	0,0054	0,0054	0,001	0,1298	0,1431	9,285	0,0680	0,0686	8,397
0,75	0,0045	0,0046	0,126	0,0967	0,1043	7,241	0,0543	0,0581	6,496
0,7714	0,0038	0,0038	0,005	0,0536	0,0567	5,462	0,0411	0,0433	5,120
0,7929	0,0029	0,0029	0,006	-0,0002	-0,0002	3,096	0,0237	0,0242	2,144
0,8143	0,0021	0,0021	0,004	-0,0668	-0,0669	0,196	0,0003	0,0003	1,537
0,8357	0,0013	0,0013	0,006	-0,1414	-0,1435	1,447	-0,0282	-0,0284	0,529
0,8571	0,0006	0,0006	0,009	-0,2237	-0,2301	2,768	-0,0610	-0,0620	1,580
0,8786	0,0002	0,0002	0,012	-0,3134	-0,3267	4,067	-0,0973	-0,1007	3,395
0,9	0,0000	0,0000	0,000	-0,4100	-0,4331	5,321	-0,1374	-0,1444	4,872

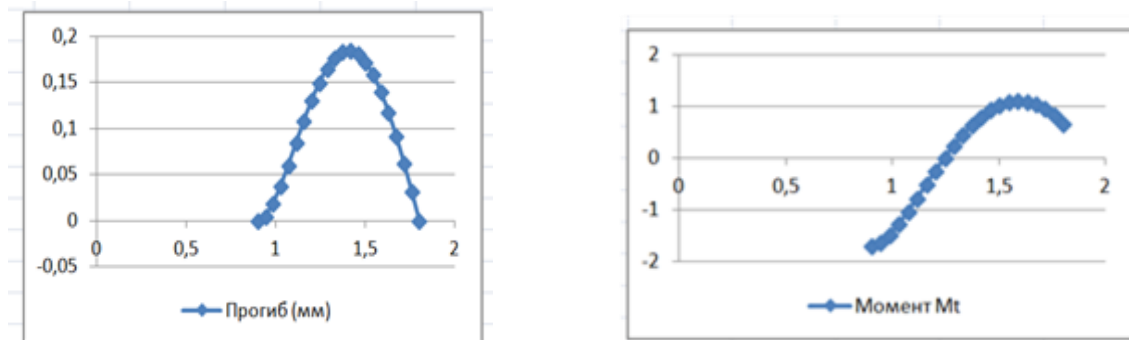


Fig.4. Deflections and circumferential bending moments

And in this case, the differences in the values of deflections calculated by the two methods are practically absent, and the differences in the values of radial and circumferential bending moments reach 10%.

5 DISCUSSION OF RESEARCH RESULTS

The results of calculations by the finite element method in PC LIRA-SAPR, which are given in Tables 1 and 2, were obtained with a semi-automatic breakdown of the finite-element grid. This means that a partitioning step of $0,1r$ was chosen along the radius, and the partitioning along the circumference of each plate was carried out automatically. With this approach, the difference in the results of calculating the deflections of FEM and the author's method was insignificant, while the difference in the results of calculating the radial and circumferential moments reaches 10%. The authors of paper [15] have shown that when the mesh is thickened in the circumferential direction, the results obtained by the two methods in determining the radial and circumferential bending moments converge considerably. Therefore, we should recommend a "manual", finer grid breakdown in finite element calculations of similar structures, regardless of the software used.

6 CONCLUSIONS

Thus, the high accuracy and efficiency of our proposed analytical method – the method of direct integration – for calculations of building structures in the form of circular plates and plates which lie on a continuous variable elastic base have been shown.

The results of calculations show that the discrepancy between the results of deflections calculation by the finite element method and the author's method does not exceed 1 %, and the results of radial and circumferential moment calculation differ more considerably, reaching 10 %. This difference is caused by inaccuracy of numerical analysis associated with the method of constructing a finite-element mesh which should be made finer. This recommendation becomes especially important if the design of a slab and its reinforcement is based on modeling and finite element analysis with the use of an engineering computer program.

References

1. Poisson, S. D. (1829.) Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques. *Mémoires de l'Académie des Sciences*. Paris. VIII. 357–570. 623–627.
2. Kirchhoff, G. (1879). Über die transversal schwingungen eines stabes von veränderlichem querschnitt. *Monatsbericht der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Sitzung der physikalisch – mathematischen Klasse*. 815–828.

3. Chizhevskiy, K. G. (1977). *Raschet kruglykh i koltsevyykh plastin* [Calculation of round and ring inserts]. Spravochnoye posobiye. L. Mashinostroyeniye. [in Russian].
4. Pawlus, D. (2006). Solution to the static stability problem of annular plates with a soft core. *Journal of theoretical and applied mechanics*. Warsaw. 44(2). 299–322.
5. Chen, Xu, Zhou, Dong, Han, Chun, Wang, Yue (2014). Bending Strength Calculation without Axial Force in Case of Annular Section. *Applied Mechanics and Materials*. 578-579. 1580-1583. 10.4028/www.scientific.net/AMM.578-579.1580.
6. Revenko, V. (2018). Calculation of the plate plane stress in polar coordinate system on the basis of Lamé equation general solution. *Scientific Journal of the Ternopil National Technical University*. 3 (91). 56–62.
7. Krivoshapko, S.N. (2020). Raschet koltsevoy plastiny v krivolinyeynykh neortogonalnykh koordinatakh s pomoshchyu uravneniy teorii obolochek [Calculation of an annular plate in curvilinear non-orthogonal coordinates using the equations of shell theory]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy*. 16(6). 472–480. doi: 10.22363/1815-5235-2020-16-6-472-480 [in Russian].
8. Krutii, Yu. S. (2016). *Rozrobka metodu rozv'yazannya zadach stiykosti i kolivan deformivnykh sistem zi zminnimi neperervnymi parametrami* [Development of the method of solving problems of stability and coving of deformable systems with changing non-permanent parameters]. dis. dokt. tekhn. nauk : 01.02.04. Odesa. [in Ukrainian].
9. Krutii, Yu. S., Surianinov, M. G. (2016). Zgin krugovoi tsilindrichnoi obolonki zi zminnoyu tovshchينوyu [Bending of a circular cylindrical shell with variable thickness]. *Visnik Khmel'nitskogo natsionalnogo universitetu. Ser. Tekhnichni nauki*. 2(235). 116–121. [in Ukrainian].
10. Krutiy, Yu. S., Surianinov, M. G. (2016). Analiticheskoye resheniye zadachi o svobodnykh kolebaniyakh plastiny. lezhashchey na peremennom uprugom osnovanii [Analytical solution of the problem of free oscillations of a plate lying on a variable elastic foundation]. *Naukovi notatki*. 53. 84–92. [in Ukrainian].
11. Krutii, Yu. S., Surianinov, N. G. Soroka, N. N., Karnaukhova, A. S. (2020). Analiticheskiye i chislennyye issledovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya kruglykh plastin na uprugom osnovanii c peremennym koeffitsiyentom posteli [Analytical and numerical studies of the stress-strain state of round plates on an elastic base with a variable bed coefficient]. *Science Reviu*. 6 (33). 30–39. [in Russian].
12. Krutii, Yu. S., Surianinov, M. G. Karnaukhova, A. S. (2021). Calculation Method for Axisymmetric Bending of Circular and Annular Plates on a Changeable Elastic Bed. Part 1. Analytical Relations. *Strength of Materials*. 53(2). 247–257.
13. Vodopianov, R. Yu., Titok, V. P., Artamonova, A. E. (2015). *Programmnyy kompleks LIRA-SAPR 2015. Rukovodstvo polzovatelya. Obuchayushchiye primery* [Program complex LIRA-SAPR 2015. Руководство пользователя. Educational examples]. Pod redaktsiyey akademika RAASN Gorodetskogo A. S. Elektronnoye izdaniye. M. [in Russian].
14. Barabash, M. S., Kir'yazev, P. M., Lapenko, O. I., Romashkina, M. A. (2019). *Osnovi komp'yuternogo modelyuvannya. Navchalnyy posibnik* [Basics of computer modeling. Scientific manual]. K.: NAU. [in Ukrainian].
15. Karnaukhova, G. S., Kirichenko, D. O. (2020). Krugli pliti na pruzhniy osnovi zi zminnim koyefitsiyentom posteli. *Mekhanika ta matematichni metodi*. ODABA. Odesa 2(2). 46–61. [in Ukraine].

Література

1. Poisson S. D. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques. Mémoires de l'Académie des Sciences. Paris, 1829. vol. VIII. P. 357–570. pp. 623–627.
2. Kirchhoff G. Über die transversal schwingungen eines stabes von veränderlichem querschnitt. Monatsbericht der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Sitzung der physikalisch – mathematischen Klasse, 1879. pp. 815–828.
3. Чижевский К. Г. Расчет круглых и кольцевых пластин. Справочное пособие. Л., Машиностроение, 1977. 184 с.
4. Dorota Pawlus. Solution to the static stability problem of annular plates with a soft core. *Journal of theoretical and applied mechanics*. Warsaw, 2006. 44. 2. pp. 299–322.

5. Chen Xu, Zhou Dong, Han Chun, Wang Yue. Bending Strength Calculation without Axial Force in Case of Annular Section. Applied Mechanics and Materials, 2014. № 578–579. pp. 1580–1583. 10.4028/www.scientific.net/AMM.578-579.1580.
6. Revenko V. Calculation of the plate plane stress in polar coordinate system on the basis of Lamé equation general solution. Scientific Journal of the Ternopil National Technical University, 2018. № 3 (91). pp. 56–62.
7. Кривошакко С. Н. Расчет кольцевой пластины в криволинейных неортогональных координатах с помощью уравнений теории оболочек. Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2020. Т. 16. №6. С. 472–480. doi: 10.22363/1815-5235-2020-16-6-472-480.
8. Крутий Ю. С. Розробка методу розв'язання задач стійкості і коливань деформівних систем зі змінними неперервними параметрами: дис. докт. техн. наук : 01.02.04. Одеса, 2016. 272 с.
9. Крутий Ю. С., Сур'янінов М. Г. Згин кругової циліндричної оболонки зі змінною товщиною. Вісник Хмельницького національного університету. Сер. Технічні науки, 2016. № 2 (235). С. 116–121.
10. Крутий Ю. С., Сурьянинов Н. Г. Аналитическое решение задачи о свободных колебаниях пластины, лежащей на переменном упругом основании. Наукові нотатки, 2016. № 53. С. 84–92.
11. Крутий Ю. С., Сурьянинов Н. Г., Сорока Н. Н., Карнаухова А. С. Аналитические и численные исследования напряженно-деформированного состояния круглых пластин на упругом основании с переменным коэффициентом постели. Science Review, 2020. №6 (33). С. 30–39.
12. Krutii, Y. S., Surianinov, M. G., Karnaukhova, G. S. Calculation Method for Axisymmetric Bending of Circular and Annular Plates on a Changeable Elastic Bed. Part 1. Analytical Relations. Strength of Materials, 2021. 53(2). pp. 247–257.
13. Водопьянов Р. Ю., Титок В. П., Артамонова А. Е. Программный комплекс ЛИРА-САПР 2015. Руководство пользователя. Обучающие примеры. Под редакцией академика РААСН Городецкого А. С. Электронное издание. М.:, 2015. 460 с.
14. Барабаш М. С., Кір'язев П. М., Лапенко О. І., Ромашкіна М. А. Основи комп'ютерного моделювання. Навчальний посібник. К.: НАУ, 2019. 500 с.
15. Карнаухова Г. С., Кіріченко Д. О. Круглі плити на пружній основі зі змінним коефіцієнтом постелі. Механіка та математичні методи. ОДАБА. Одеса, 2020. №2. С. 46–61.

Surianinov Mykola

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Doctor of Technical Science, Professor
Didrihsona str., 4, Odessa, Ukraine 65029,
sng@ogasa.org.ua, ORCID: 0000-0003-2592-5221

Krutii Yurii

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Doctor of Technical Science, Professor,
Didrikhson st. 4, Odessa, Ukraine, 65029
yurii.krutii@gmail.com, ORCID:0000-0001-7105-3087

Kirichenko Daria

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Postgraduate
Didrihsona str.,4 Odessa, Ukraine 65029,
sunnyderypeople123@gmail.com,ORCID: 0000-0002-8484-0925

Klimenko Oleksiy

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Postgraduate
Didrihsona str.,4 Odessa, Ukraine 65029,
bolshajaakula@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7445-6057

For references:

Surianinov M., Krutii Y. Kirichenko D., Klimenko O. (2022). Calculation of annular plates on an elastic base with a variable bedding factor. Mechanics and Mathematical Methods. 4 (2). 43–52.

Для посилань:

Сур'янінов М. Г., Крутий Ю. С., Кіріченко Д. О., Кліменко О. М. Розрахунок кільцевих плит на пружній основі зі змінним коефіцієнтом постелі. Механіка та математичні методи, 2022. Т. 4. № 2. С. 43–52.

UDC 624.154.3

STUDY OF A CONCRETE COLUMN FOR STABILITY UNDER ASYMMETRIC CORROSION

V. Fomin¹, I. Fomina¹

¹*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract. Reinforced concrete became widespread due to its many positive properties: durability, fire resistance, resistance to corrosive effects, high resistance to static and dynamic loads, low operating costs for maintaining buildings and structures, and relative cheapness of manufacturing. The presence of widespread large and small aggregate used in the production of reinforced concrete makes it applicable in all corners of the globe and even beyond its borders. The emergence and development of building structures, including reinforced concrete, is inextricably linked to the conditions of the material life of society, the development of productive forces. The appearance of reinforced concrete coincides with the period of accelerated development of industry, transport and trade in the second half of the 19th century. The period of emergence of reinforced concrete (1850-1885) is characterized by the appearance of the first structures made of reinforced concrete in France (Lambot, 1850; Quatrecasles, 1854; Gardener Monier, 1867-1880), England (Wilkinson, 1854), the USA (Hiatt, 1855-1877).

Buildings and structures and their structures during operation experience force and non-force effects of the environment. With a symmetrical effect of the medium, centrally compressed rods remain centrally compressed, and with an extracentral one, extracentric eccentricity appears. First, the rod experiences off-center compression. Further deformation will lead the rod to longitudinal bending, and under the action of a transverse load to longitudinal-transverse bending.

In steel structures, the environment causes corrosion, in concrete – corrosion and neutralization. In a physically linear formulation, these problems are solved, but it is necessary to take into account the real diagrams of steel and concrete, and to solve problems according to an unformed deformed scheme. Given the impact of the environment, new challenges arise with constructive and induced heterogeneity. Noncentrally compressed elements are part of statically definable and indeterminate structures: these are beams, threehinge systems, frames and trusses.

This is a new topic, a new formulation of the question, tasks that require the development of new methods.

Keywords: spatial stability, longitudinal force and torque, impact of an aggressive environment, corrosion.

ДОСЛІДЖЕННЯ БЕТОННОЇ КОЛОНИ НА СТІЙКІСТЬ ПРИ НЕСИМЕТРИЧНОМУ ВПЛИВУ КОРОЗІЇ

Фомін В. М.¹, Фоміна І. П.¹

¹*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація. Розповсюдження залізобетон одержав унаслідок багатьох його позитивних властивостей: довговічності, вогнестійкості, опору корозійним впливам, високому опору статичним і динамічним навантаженням, малих експлуатаційних витрат на утримання будинків і споруд, відносної дешевизни виготовлення. Найявністю розповсюдженого великого і дрібного заповнювача, що йде на виготовлення залізобетону, робить його застосовним у всіх куточках земної кулі і навіть за її межами. Виникнення і розвиток будівельних конструкцій, у тому числі залізобетонних, нерозривно пов'язано з умовами матеріального життя суспільства, розвитком продуктивних сил. Поява залізобетону збігається з періодом прискороного розвитку промисловості, транспорту й торгівлі в другій половині ХІХ ст. Період виникнення залізобетону (1850-1885 рр.) характеризується появою перших конструкцій з армованого



бетону у Франції (Ламбо, 1850 р.; Куаньє, 1854; садівник Моньє, 1867-1880 рр.), Англії (Уїлкінсон, 1854 р.), США (Гіатт, 1855-1877 рр.).

Будівлі та споруди та їх конструкції в період експлуатації відчують силові та не силові впливи навколишнього середовища. При симетричному впливі середовища центрально стислі стрижні залишаються центрально стиснутими, а при позацентровому з'являється позацентровий ексцентриситет. Спочатку стрижень відчуває позацентрове стиск. Подальша деформація приведе стрижень до поздовжнього вигину, а при дії поперечного навантаження до поздовжньо-поперечного вигину.

У сталевих конструкціях середовище викликає корозію, у бетонних – корозію та нейтралізацію.

У фізично лінійній постановці ці завдання вирішені, але необхідно врахувати реальні діаграми сталі та бетону, і вирішувати завдання за неформованою деформованою схемою. З урахуванням впливу середовища виникають нові завдання з конструктивною і наведеною неоднорідністю. Нецентренно стислі елементи входять до складу статично визначних і невизначених конструкцій: це балки, тришарнірні системи, рами та ферми. Для них потрібно розробляти методику розрахунку.

Це нова тема, нова постановка питання, завдання, що потребують розробки нових методик.

Ключові слова: просторова стійкість, поздовжня сила, ексцентриситет, вплив агресивного середовища, корозія.

1 INTRODUCTION

In the process of operation, buildings and structures are affected by the external environment for a long time and, as an example, corrosion. This greatly complicates the durability and functionality of objects.

2 ANALYSIS OF LITERARY DATA AND PROBLEM STATEMENT

When studying the spatial stability of frames, it is necessary to take into account not only the effect of compressive longitudinal forces on structural elements, but also torques. The problems of loss of stability of rods under the action of torques, as well as under the joint action of longitudinal forces and torques, were considered earlier, but cases of constant length cross-sections, i.e. constant bending stiffnesses, were considered. A similar problem for a rod of constant cross-section is considered in the [1–13]. Analysis of recent studies or publications. The need to consider the cases of variable cross-sections when taking into account the impact of an aggressive environment on reinforced concrete structures is explained by the fact that the depth of the damaged zone depends on the abscissa x cross-section of the rod [2,3]

$$h(x,t) = h_0 e^{-\beta v_0 [l_0(t) - x]}, \quad (1)$$

In here $l_0(t) = v_0 t$ – corroded length (t – column operating time in years). Parameter values h_0, β and v_0 depend on the type and intensity of the aggressive environment [3].

When calculating non-centrally compressed concrete elements, it is necessary to take into account the random eccentricity of the longitudinal force due to factors not taken into account in the calculation, including the heterogeneity of the properties of concrete in cross-section. For elements of statically indeterminate structures (for example, pinched at the ends of walls or pillars), the value of the eccentricity of the longitudinal force relative to the center of gravity of the reduced section is taken to be equal to the eccentricity value obtained from the static calculation of the structure. In the elements of statically determined structures, eccentricity is found as the sum of eccentricities—determined from a static calculation of a structure and a random one. The main purpose of these restrictions is to prevent the use of elements whose bearing capacity would be provided only by stretched concrete, since with any accidental crack, the balance of forces in the cross-section is disturbed. An exception can be made in some cases for structures working on compression with higher values of eccentricities (as well as for bendable structures), when their destruction does not pose an immediate danger to human life and the safety of equipment (for example, elements lying on a solid base, etc.). The main one for non-centrally compressed concrete elements is the calculation of the strength of the compressed zone without taking into account the resistance of concrete to the stretched zone. The resistance of concrete to compression is represented by stresses equal to Ph , evenly distributed over the part of the actual compressed zone, which is conventionally called "compressed" [4].

3 PURPOSE AND OBJECTIVES OF THE RESEARCH

The purpose of the study is to determine the stability conditions of a reinforced concrete rod (column) of variable cross-section under the action of compressive longitudinal force. To achieve this goal, you need to solve the following tasks: First, it is necessary to divide the corroded part of the column into a series of sections with a cross-section constant in length. Thus, the column appears to be a system of sections with a cross-section constant in length of each section, rigidly connected to each other. Secondly, it is necessary to determine at each

site additional bending moments caused by the action of torque. Next, it is necessary to determine the given moments of inertia of the cross-section with respect to the main central axes of the cross-section and to draw up differential equations of spatial bending for each section of the column. The solution of each of these equations is a linear combination of trigonometric functions.

4 RESEARCH RESULTS

As an example of stability research, consider a concrete column of rectangular cross-section, rigidly pinched in the ground. The column will be exposed to asymmetrical corrosion. The lower section of the side face of the column will be subjected to corrosion (Fig. 1). The cross-section in the lower section is shown in Fig. 2, where C is the center of intact cross-section, C1 is the center of the intact part of the corroded section). The upper edge of the corrosion zone will move upwards at a constant rate v_0 .

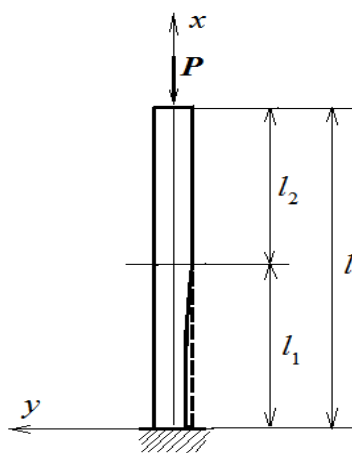


Fig. 1. Column under the influence of corrosion

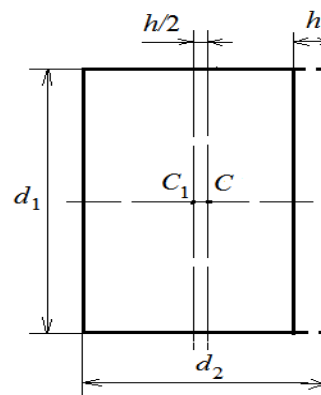


Fig. 2. Column cross-section

The depth of the damaged area is determined by the formula:

$$h(t_1) = h_0 e^{-\beta/t_1} . \tag{1}$$

Here t_1 is the time counted from the moment t_0 of the beginning of the corrosion process in a given cross-section of the rod. Obviously

$$t_0 = \frac{x}{v_0} . \tag{2}$$

Taking into account (2), the formula (1) takes the following form:

$$h(x, t) = h_0 e^{-\beta/(t-x/v_0)} , \tag{3}$$

(x – abscissa cross-section). Here t is the time counted from the beginning of the corrosion process in the column. Since the length l_1 of the first (corroded) section of the column is

$$l_1(t) = v_0 t ,$$

then formula (3) can be written as:

$$h(x, t) = h_0 e^{-\beta v_0/[l_1(t)-x]} . \tag{4}$$

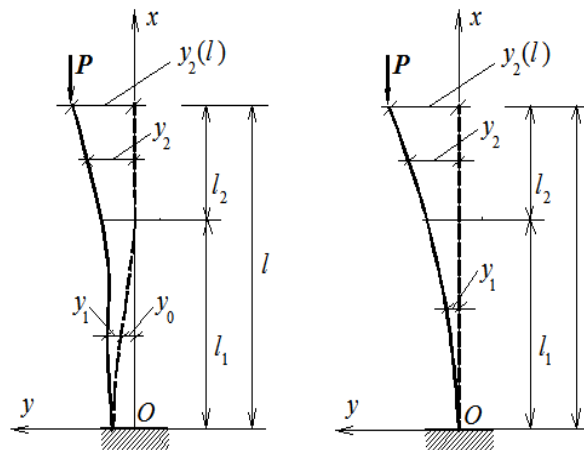


Fig. 3. Location of transverse force centers

In Fig. 3, the dashed line shows the axis on which the centers of the cross-sections of the intact part of the column are located. A solid line shows the deformed position of this axis. Through y_1 are the ordinates of the movements of the axis points in the first (lower) section, and y_0 is equal to the distance of CC_1 in each section, i.e.

$$y_0 = \frac{h(x,t)}{2}. \quad (5)$$

The resulting stress-strain state of the column can be considered as a longitudinal bend of the rod with the initial curvature of the axis. Following [2] we make a differential equation for the first section:

$$EJ_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = P[y_2(l,t) - y_1 - y_0] \quad (0 \leq x \leq l_1). \quad (6)$$

The moment of inertia of the cross-section J is determined by the formula:

$$J_1(x,t) = \frac{d_1[d_2 - h(x,t)]^3}{12}, \quad (7)$$

(d_1 and d_2 are the width and height of the cross-section at $t = 0$). Note that time t plays the role of a parameter in equation (6). For the second (upper) section of the column, we have the following differential equation:

$$EJ_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} = P[y_2(l,t) - y_2] \quad (l_1 \leq x \leq l), \quad (8)$$

where is $J_2 = d_1 d_2^3 / 12$.

Note that the values of the critical forces are determined from the condition for the existence of a non-zero solution in a system consisting of the equation:

$$EJ_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = P[y_2(l,t) - y_1] \quad (0 \leq x \leq l_1) \quad (9)$$

and equations (8) under the following conditions:

$$y_1(0,t) = 0, \quad \frac{dy_1}{dx}(0,t) = 0, \quad y_2(l_1,t) = y_1(l_1,t), \quad \frac{dy_2}{dx}(l_1,t) = \frac{dy_1}{dx}(l_1,t). \quad (10)$$



Let's replace the independent variable in equation (9) $\xi = x/l$ (l – column height). As a result, we get the following equation:

$$\frac{d^2 y_1}{d\xi^2} + \varepsilon f(\xi, t) y_1 = \varepsilon f(\xi, t) D, \quad (11)$$

where is

$$\varepsilon = \frac{Pl^2}{E_0}, \quad f(\xi, t) = \frac{12}{d_1[d_2 - h(\xi, t)]^3}, \quad D = y_2(1, t), \quad (12)$$

$$h(\xi, t) = h_0 e^{-\beta v_0 / l [\lambda_1(t) - \xi]}, \quad \lambda_1(t) = \frac{l_1(t)}{l}.$$

Let's approximate the function $f(\xi, t)$ per segment $0 \leq \xi \leq \lambda_1(t)$ polynomial using The Lagrange interpolation formula [3]:

$$f(\xi, t) = \sum_{i=0}^n f(\xi_i, t) \frac{\omega_i(\xi)}{\omega_i(\xi_i)}, \quad (13)$$

$$\omega_i(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_n),$$

$$\left(\xi_i = \frac{\lambda_1}{n} i, \quad i = 0, 1, \dots, n \right).$$

Imagine $\omega_i(\xi)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) as follows:

$$\omega_i(\xi) = \sum_{j=0}^n b_{i,j} \xi^j, \quad (14)$$

where is $b_{i,j}$ ($i, j = 0, 1, \dots, n$) – constant coefficients, unambiguously expressed through ξ_i ($i = 0, 1, \dots, n$).

Substituting the representation (14) into formula (13), we get:

$$f(\xi, t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(t) \xi^j, \quad (15)$$

where is :

$$f_j(t) = \sum_{i=0}^n f(\xi_i, t) \frac{b_{i,j}}{\omega_i(\xi_i)} \quad (j = 0, 1, \dots, n), \quad f_j(t) = 0 \quad (j > n).$$

We will look for a solution $y_1(\xi, t)$ Cauchy's problems for equation (11) under initial conditions:

$$y_1(0, t) = 0, \quad \frac{dy_1(0, t)}{d\xi} = 0 \quad (16)$$

in the form of decomposition by degrees of a small parameter ε :

$$y_1(\xi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_{1,k}(\xi, t) \quad (17)$$

and assume that the conditions (16) are met for each of the functions $y_{1,k}(\xi, t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Substituting this decomposition into equation (11), we obtain:



$$\frac{d^2 y_{1,0}}{d\xi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left[\frac{d^2 y_{1,k}}{d\xi^2} + f(\xi, t) y_{1,k-1} \right] = \varepsilon f(\xi, t) D. \quad (18)$$

Equating the coefficients at degrees ε zero, we get a system of differential equations:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_{1,0}}{d\xi^2} &= 0, \quad \frac{d^2 y_{1,1}}{d\xi^2} = Df(\xi, t) - f(\xi, t) y_{1,0}, \\ \frac{d^2 y_{1,k}}{d\xi^2} &= -f(\xi, t) y_{1,k-1} \quad (k > 1). \end{aligned} \quad (19)$$

From the first equation (19), taking into account the conditions (16), we get:

$$y_{1,0}(\xi, t) = 0. \quad (20)$$

With $k = 1$, equation (19) given (20) looks like this:

$$\frac{d^2 y_{1,1}}{d\xi^2} = Df(\xi, t). \quad (21)$$

Substituting here (15) and integrating ξ twice, we find:

$$y_{1,1}(\xi, t) = D \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(1)} \xi^j, \quad (22)$$

where is

$$f_0^{(1)} = f_1^{(1)} = 0, \quad f_j^{(1)} = \frac{f_{j-2}}{(j-1)j} \quad (2 \leq j \leq n+2), \quad f_j^{(1)} = 0 \quad (j > n+2).$$

At $k = 2$, using the decompositions (15) and (22), we get:

$$\frac{d^2 y_{1,2}}{d\xi^2} = -D \sum_{j=0}^{\infty} f_j(t) \xi^j \sum_{i=0}^{\infty} f_i^{(1)} \xi^i. \quad (23)$$

Multiplying the power series standing in the right part (23) and integrating ξ twice taking into account the conditions (16), we come to the following expression:

$$y_{1,2}(\xi, t) = D \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(2)} \xi^j, \quad (24)$$

where is

$$f_0^{(2)} = f_1^{(2)} = 0, \quad f_j^{(2)} = \frac{1}{(j-1)j} \sum_{m=0}^{j-2} f_m f_{j-m-2}^{(1)} \quad (j \geq 2).$$

Note that a fairly rapid decrease in coefficients $f_j^{(2)}$ with an increase in j and the need to calculate the sum of the series when $\xi < 1$ in the first section, it is possible to limit the calculation of a small number of coefficients of the series (24). We do exactly the same thing when $k > 2$. As a result, we obtain recurrence ratios:

$$f_0^{(k)} = f_1^{(k)} = 0, \quad f_j^{(k)} = \frac{1}{(j-1)j} \sum_{m=0}^{j-2} f_m f_{j-m-2}^{(k-1)} \quad (k \geq 2, j \geq 2)$$

for decomposition coefficients:



$$y_{1,k}(\xi, t) = D \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(k)} \xi^j \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (25)$$

In view of the considerable smallness of the ε for practical tasks, it is possible to limit oneself to a small number of members in the decomposition (17). Thus, it can be considered that the private solution $y_1(\xi, \varepsilon, t)$ Cauchy's problem for equation (11) given conditions (16) is constructed. It follows from (22), (24) and (25) that it can be presented in the following form:

$$y_1(\xi, t) = DZ_1(\xi, t), \quad (26)$$

where is:

$$Z_1(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_{1,k}(\xi, t) \varepsilon^k, \quad Z_{1,k}(\xi, t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(k)} \xi^j.$$

Let's move on to the second (not subject to corrosion) section. Differential equation (9) after substitution $\xi = x/l$ will look like this:

$$\frac{d^2 y_2}{d\xi^2} + k_2^2 y_2 = k_2^2 D, \quad (27)$$

where is:

$$k_2 = l \sqrt{\frac{P}{EJ_2}}, \quad J_2 = \frac{d_1 d_2^3}{12}, \quad D = y_2(1).$$

General solution of this equation:

$$y_2(\xi, t) = C_1 \cos k_2 \xi + C_2 \sin k_2 \xi + D, \quad (28)$$

(C_1 and C_2 are arbitrary constants that depend on the parameters t and P . To find these constants, we use the third and fourth conditions (10):

$$y_2(\lambda_1(t), t) = y_1(\lambda_1(t), \varepsilon, t), \quad y_2'(\lambda_1(t), t) = y_1'(\lambda_1(t), \varepsilon, t), \quad (29)$$

(the stroke denotes the derivative of ξ , $\lambda_1(t) = l_1(t)/l$).

From (29) we get a system of equations:

$$\begin{aligned} C_1 \cos k_2 \lambda_1(t) + C_2 \sin k_2 \lambda_1(t) &= D[Z_1(\lambda_1(t), t) - 1], \\ k_2 [-C_1 \sin_2 \lambda_1(t) + C_2 \cos k_2 \lambda_1(t)] &= DZ_1'(\lambda_1(t), t), \end{aligned} \quad (30)$$

solving which we find:

$$C_1 = \frac{D}{k_2} F_1(P, t), \quad C_2 = \frac{D}{k_2} F_2(P, t),$$

where is:

$$\begin{aligned} F_1(P, t) &= [Z_1(\lambda_1(t), t) - 1] k_2 \cos k_2 \lambda_1(t) - Z_1'(\lambda_1(t), t) \sin k_2 \lambda_1(t), \\ F_2(P, t) &= [Z_1(\lambda_1(t), t) - 1] k_2 \sin k_2 \lambda_1(t) + Z_1'(\lambda_1(t), t) \cos k_2 \lambda_1(t). \end{aligned} \quad (31)$$

Substituting the resulting expressions in (28), we will have:

$$y_2(\xi, t) = \frac{D}{k_2} [F_1(P, t) \cos k_2 \xi + F_2(P, t) \sin k_2 \xi]. \quad (32)$$



Recall that:

$$D = y_2(1, t). \tag{33}$$

Substituting here (32), we will have:

$$D[F_1(P, t) \cos k_2 + F_2(P, t) \sin k_2 - 1] = 0$$

and since $D \neq 0$, that:

$$F_1(P, t) \cos k_2 + F_2(P, t) \sin k_2 - 1 = 0. \tag{34}$$

This is the equation of critical forces.

Proceed to the determination of the deflections of the column under the action of the longitudinal force P . Let's make a substitution in equation (6) $\xi = x/l$. As a result, we get the following equation:

$$\frac{d^2 y_1}{d\xi^2} + \varepsilon f(\xi, t) y_1 = \varepsilon Df(\xi, t) - \varepsilon g(\xi, t). \tag{35}$$

In here $g(\xi, t) = 6h(\xi, t)/d_1[d_2 - h(\xi, t)]^3$. Like the function $f(\xi, t)$, approximate the function $g(\xi, t)$ per segment $0 \leq \xi \leq \lambda_1(t)$ an interpolated Legendre polynomial. As a result, we get:

$$g(\xi, t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(t) \xi^j, \tag{36}$$

where is:

$$g_j(t) = \sum_{i=0}^n g(\xi_i, t) \frac{b_{i,j}}{\omega_i(\xi_i)} \quad (j=0, 1, \dots, n), \quad g_j(t) = 0 \quad (j > n).$$

As above, we will look for a solution to $y_1, h(\xi, t)$ of the Cauchy problem for equation (35) under initial conditions (16) in the form of a decomposition by degrees of a small parameter ε :

$$y_{1,p}(\xi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_{1,p,k}(\xi, t). \tag{37}$$

Acting similarly to the above, we obtain:

$$y_{1,p,0}(\xi, t) = 0, \quad y_{1,p,k}(\xi, t) = DZ_1^{(k)}(\xi, t) + Z_2^{(k)}(\xi, t),$$

$$Z_2^{(2)}(\xi, t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j^{(k)}(t) \xi^j, \tag{38}$$

where is:

$$g_0^{(1)} = g_1^{(1)} = 0, \quad g_j^{(1)} = \frac{g_{j-2}}{(j-1)j} \quad (2 \leq j \leq n+2), \quad g_j^{(1)} = 0 \quad (j > n+2),$$

$$g_0^{(k)} = g_1^{(k)} = 0, \quad g_j^{(k)} = -\frac{1}{(j-1)j} \sum_{m=0}^{j-2} f_m f_{j-m-2}^{(k-1)} \quad (k \geq 2, j \geq 2).$$

The desired decision can be written in the following form:

$$y_{1,p}(\xi, t) = DZ_1(\xi, t) + Z_2(\xi, t), \tag{39}$$

where is:

$$Z_2(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k Z_2^{(k)}(\xi, t).$$

Let's move on to the second section. As above, to find the constants C_1 and C_2 in (28), we use the conditions (29). As a result, we get a system of equations:

$$\begin{aligned} C_1 \cos k_2 \lambda_1(t) + C_2 \sin k_2 \lambda_1(t) &= y_{1,p}(\lambda_1(t), t) - D, \\ k_2 [-C_3 \sin_2 \lambda_1(t) + C_4 \cos k_2 \lambda_1(t)] &= y_{1,p}'(\lambda_1(t), t), \end{aligned} \quad (40)$$

stroke means derivative on ξ , solving which we find:

$$C_1 = \frac{1}{k_2} F_3(P, t), \quad C_2 = \frac{1}{k_2} F_4(P, t),$$

where is:

$$\begin{aligned} F_3(P, t) &= [y_{1,p}(\lambda_1(t), t) - D] k_2 \cos k_2 \lambda_1(t) - y_{1,p}'(\lambda_1(t), t) \sin k_2 \lambda_1(t), \\ F_4(P, t) &= [y_{1,p}(\lambda_1(t), t) - D] k_2 \sin k_2 \lambda_1(t) + y_{1,p}'(\lambda_1(t), t) \cos k_2 \lambda_1(t). \end{aligned} \quad (41)$$

Substituting the resulting expressions in (28), we will have:

$$y_2(\xi, t) = \frac{1}{k_2} [F_3(P, t) \cos k_2 \xi + F_4(P, t) \sin k_2 \xi] + D.$$

We now use equality (33), from which we obtain using (39) and (41):

$$D = - \frac{Z_2(\lambda_1(t), t) k_2 \cos k_2 \lambda_2(t) + Z_2'(\lambda_1(t), t) \sin k_2 \lambda_2(t)}{[Z_1(\lambda_1(t), t) - 1] k_2 \cos k_2 \lambda_2(t) + Z_1'(\lambda_1(t), t) \sin k_2 \lambda_2(t)}. \quad (42)$$

5 DISCUSSION OF RESEARCH RESULTS

When designing and operating buildings and structures, it is necessary to take into account the emerging eccentricity and the non-central action of the force, which increases with prolonged corrosion exposure [14].

6 CONCLUSIONS

A method is proposed that allows to study the stability of concrete rigidly pinched columns at the base with asymmetrical aggressive corrosion effects, which is necessary for their timely strengthening to ensure the reliability of the structure.

References

1. Volmir, A. S. (1967). Ustoychivost deformiruemih system [Stability of deformable systems]. M.: Nauka. [in Russian].
2. Fomina, I. P. (2013). Utochneny metod isledovaniya ustoychivosti betonoy koloni s uchetom vozdeystviya agressivnoy sredi [Refined method for studying the stability of a concrete column, taking into account the impact of an aggressive environment]. *Visnik ODABA*. 51. 265–273. [in Russian].
3. Setkov, V. U., Shibanova, I. S., Riseva, O. P. (1984). Deystvie uglekislogo gaza na gelezobetonie balki I pliti promishlenih zdaniy i sooruzheniy [The effect of carbon dioxide on reinforced concrete beams and slabs of industrial buildings and structures]. *Stroitelstvo i arhitektura*. 12. 1–4. [in Russian].

4. Golihev, A. B., Bachinskiy, V. A., Polischuk, V. P. (2001). *Zelezobetonie konstrukcii* [Reinforced concrete structures]. Kiev. [in Russian].
5. Gots, V. I. (2003). *Betoni i budivelni rozchini* [Concretes and mortars]. KNUBA. [in Ukraine].
6. Blihariskiy, Z. Y. (2011). *Zalizobetonni konstrukcii v agresivnomu seredovischi za dii navantazhenya tai h pidsilenya* [Reinforced concrete structures in an aggressive environment under the action of loads and their reinforcement]. Lviv. [in Ukraine].
7. Blihariskiy, Z. Y. (2005). Naprujeno-deformovany stan zalizobetonnyh konstruktsiy v agresivnomu seredovischi pri dii navantazhenya [The stressed-deformed state of reinforced concrete structures in an aggressive environment under load]. *Lvivska politehnikaark.: ris., tabl. Bibliogr.:* ark. 298–338. [in Ukrainian].
8. Nikiforova, T. D. (2013). Doslidjenya naprujeno-deformovanogo stanu zalizobetonnyh konstruktsiy zagliblenyh budivel z urahuvanyam ih vzaemodii z gruntovim masivov [Study of the stress-strain state of reinforced concrete structures of buried buildings taking into account their interaction with the soil massif]. *Visnik PDABA.* 1–2. 19–25 [in Ukraine].
9. Prokopovich, I. E. (1963). *Vliyanie dlitelnih procesov na napryajenoe i deformirovane sostoyanie sooruzheniy* [The influence of long-term processes on the stressed and deformed state of structures]. Gosudarstvenoe izdatelstvo literaturi po stroitelstvu, arhitekture i stroitelnim materialam. M. [in Russian].
10. Kostochka, V. A. (2019). Vliyanie okruzhayushey sredy na sostoyanie zalizobetonnyh konstruktsiy [The influence of the environment on the condition of reinforced concrete structures]. *Akademiya stroitelstva i arhitekturi SamGTU.* 12. 56–59. [in Russian].
11. Gribniak, V., Bacinskas, D., Kacianauskas, R., Kaklauskas, G., Torres, L. (2013). Long-term deflections of reinforced concrete elements: accuracy analysis of predictions by different methods. *Mech Time-Depend Mater.* 17. 297–313.
12. DSTU B V.-145:2010 (2010). *Zahist betonih i zalizobetonih konstrukciy vid korozii* [Protection of concrete and reinforced concrete structures from corrosion]. K. Minregionbud. [in Ukraine].
13. Zarakovskaya, K. I., Zaharov, V. F. Oпитnie diagrami sostoyaniya betona sostavnyh gelezobetonih sterjney s visokoprochnoy armaturoy posle dlitelnih ispitaniy [Experimental diagrams of the state of concrete of composite reinforced concrete rods with high-strength reinforcement after lengthy tests]. *Vesnik Evraziyskoy nauki.* 3. [in Russian].
14. Krainskiy, P. I. (2016). *Mitsnist ta deformativnist zalizobetonnikh stisnuto - zignutikh elementiv, pidsilenikh zalizobetonnoyu oboymoyu pri dii navantazhenya* [Mind and deformability of cast-in-place concrete squeezed-curved elements, strengthened by cast-in-place concrete clip with diversification]. Spetsialnist 05.23.01 – Budivelni konstruktsii budivli ta sporudi. Disertatsiya na zdobuttya naukovogo stupenya kandidata tekhnichnikh nauk. [in Ukraine].

Література

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М. Наука. 1967. 984 с.
2. Фомина И. П. Уточненный метод исследования устойчивости бетонной колонны с учетом воздействия агрессивной среды. *Вісник ОДАБА.* Одесса, 2013. №51. С. 265–273.
3. Сетков В. Ю., Шибанова И. С., Рысева О. П. Действие углекислого газа на железобетонные балки и плиты промышленных зданий и сооружений. *Строительство и архитектура,* 1984. №12. С. 1–4.
4. Гольшев А. Б., Бачинский В. А., Полищук В. П. Железобетонные конструкции. Киев, 2001.
5. Гоц В.І. Бетони і будівельні розчини. КНУБА. 2003. 419 с.
6. Бліхарський З. Я. Залізобетонні конструкції в агресивному середовищі за дії навантаження та їх підсилення. Львів, 2011. 296 с.
7. Бліхарський З. Я. Напружено-деформований стан залізобетонних конструкцій в агресивному середовищі при дії навантаження: дис. д-ра техн. наук: 05.23.01. Національний ун-т "Львівська політехніка". Л., 2005. 348 арк.: рис., табл. Бібліогр.: арк. 298–338.
8. Нікіфорова Т. Д. Дослідження напружено-деформованого стану залізобетонних конструкцій заглиблених будівель з урахуванням їх взаємодії з ґрунтовим масивом, 2013. *Вісник ПДАБА.* №1–2. С. 19–25.

9. Прокопович И. Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояния сооружений. Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1963. М. 260 с.
10. Косточка В. А. Влияние окружающей среды на состояние железобетонных конструкций. Академия строительства и архитектуры СамГТУ, 2019. №12. С. 56–59.
11. Gribniak V., Vacinskas D., Kacianauskas R., Kaklauskas G., Torres L. Long-term deflections of reinforced concrete elements: accuracy analysis of predictions by different methods. Mech Time-Depend Mater. №17. pp. 297–313.
12. ДСТУ Б В.2.6-145:2010. Захист бетонних і залізобетонних конструкцій від корозії. К. Мінрегіонбуд, 2010. 52 с.
13. Зараконская К. И., Захаров В. Ф. Опытные диаграммы состояния бетона составных железобетонных стержней с высокопрочной арматурой после длительных испытаний. Вестник Евразийской науки, 2018. 3.
14. Країнський П. І. Міцність та деформативність залізобетонних стиснуто – зігнутих елементів, підсилених залізобетонною обоймою при дії навантаження. Спеціальність 05.23.01 – Будівельні конструкції, будівлі та споруди. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. 2016. 158 с.

Fomin Volodymyr

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
Doctor of Technical Science, Professor
Didrihsona str., 4, Odessa, Ukraine 65029
Fomin@ogasa.org.ua
ORCID: 0000-0003-4814-6415

Fomina Inna

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
Senior Lecturer
Didrihsona str., 4, Odessa, Ukraine 65029
Fomina@ogasa.org.ua
ORCID: 0000-0001-7366-1537

For references:

Fomin V., Fomina I. (2022). Study of a concrete column for stability under asymmetric corrosion. Mechanics and Mathematical Methods. 43 (2). 53 – 64.

Для посилань:

Фомін В. М., Фоміна І. П. Дослідження бетонної колони на стійкість при несиметричному впливу корозії. Механіка та математичні методи, 2022. Т. 4. №. 2. С. 53–64.

УДК 666.972

ПОРІВНЯЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАСТОСУВАННЯ ПОЛІПРОПІЛЕНОВОЇ ФІБРИ ТА БАЗАЛЬТОВОЇ ФІБРИ У ДОРОЖНІХ БЕТОНАХ

Толмачов С. М.¹, Бєліченко О. А.¹, Дорошенко М. А.¹, Покуса Ю. П.¹

¹Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Анотація. Широке застосування фібробетонів у будівництві обумовлено низкою їх переваг. Однак, незважаючи на багаторічні дослідження в цьому напрямі, вчені різних країн описують дані, одержані експериментально, результати яких відрізняються. У деяких випадках отримані результати відрізняються як чисельно, так і принципово. В основному це фібри штучного походження, які застосовують для виготовлення фібробетонів. Найчастіше застосовують металеву, полімерну, базальтову, скляну фібру. У меншій мірі використовують вуглецеву та поліамідну фібру. Слід зазначити, що ефективність поліамідної фібри дуже сумнівна, насамперед через схильність цього виду фібри до набухання. В даний час вартість вуглецевої фібри досить висока, що є основною перешкодою її широкого застосування в бетонах. Металева та скляна фібра піддаються корозії, а це негативно впливає на властивості бетонів. Оскільки дорожні та аеродромні бетони експлуатують в агресивних умовах, то зазначені недоліки не дозволяють застосовувати в них металеву, скляну, вуглецеву та поліамідну фібру. Проте, з аналізу літератури випливає, що найбільші протиріччя стосуються використання базальтової та поліпропіленової фібри. Немає єдиної думки, яка з цих видів фібри більш ефективна для застосування в бетонах. Яку кількість фібри слід вводити у бетонну суміш для досягнення максимального результату також невідомо. Це призвело до того, що в дорожніх та аеродромних бетонах базальтову та поліпропіленову фібру застосовують дуже рідко. У статті наведено аналіз результатів застосування поліпропіленової та базальтової фібри у бетонах, отриманих дослідниками у різних країнах. Показано експериментальні дані, отримані авторами. Основну увагу приділено порівняльній ефективності застосування цих видів фібри. Як критерії оцінки ефективності прийняті міцність, морозостійкість і стираність дорожніх бетонів. Встановлено кількісні інтервали застосування кожного виду фібри. Проведені дослідження показали, що за міцністю та морозостійкістю, а також за економічними показниками, застосування поліпропіленової фібри в дорожніх бетонах є більш ефективним, ніж базальтової.

Ключові слова: фібробетон, базальтова фібра, поліпропіленова фібра, міцність, морозостійкість, стираність.

COMPARATIVE CHARACTERISTICS OF THE APPLICATION OF POLYPROPYLENE AND BASALT FIBER IN ROAD CONCRETE

S. Tolmachov¹, O. Belichenko¹, M. Doroschenko¹, Yu. Pokusa¹

¹Kharkov national automobile und highway university

Abstract. The widespread use of fiber-reinforced concrete in construction is due to a number of their advantages. However, despite many years of research in this direction, scientists from different countries describe data obtained experimentally, the results of which differ. In some cases, the results obtained differ not only numerically, but also fundamentally. Basically, these are fibers of artificial origin, which are used for the manufacture of fiber-reinforced concrete. The most commonly used metal, polymer, basalt, glass fibers. To a lesser extent, carbon and polyamide fibers are used. It should be noted that the effectiveness of polyamide fiber is very doubtful, primarily because of the tendency



of this type of fiber to swell. At present, the cost of carbon fiber is quite high, which is the main obstacle to its widespread use in concrete. Metal and glass fibers are subject to corrosion, and this adversely affects the properties of concrete. Since road and airfield concretes are used in aggressive conditions, these shortcomings do not allow the use of metal, glass, carbon and polyamide fibers in them. However, it follows from the analysis of the literature that the greatest controversy concerns the use of basalt and polypropylene fibers. The greatest controversy concerns the use of basalt and polypropylene fibers. There is no consensus which of these types of fiber is more effective for use in concrete. What amount of fiber should be introduced into the concrete mixture to achieve the maximum result is also unknown. This has led to the fact that basalt and polypropylene fibers are used very rarely in road and airfield concrete. The article presents an analysis of the results of the use of polypropylene and basalt fibers in concrete, obtained by researchers in different countries. The experimental data obtained by the authors are shown. The main attention is paid to the comparative efficiency of the use of these types of fibers. Strength, frost resistance and abrasion of road concrete are taken as criteria for evaluating the effectiveness. Quantitative intervals for the use of each type of fiber are established.

Keywords: fiber-reinforced concrete, basalt fiber, polypropylene fiber, strength, frost resistance, abrasion.

1 ВСТУП

Знання властивостей бетону, таких як міцність, модуль пружності, теплове розширення, тепловиділення, усадка та повзучість є важливими при проектуванні дорожнього покриття. Високоєфективний фібробетон в даний час періодично використовують за кордоном для будівництва покриттів автомобільних доріг, майданчиків, злітно-посадкових смуг, тротуарів. Але, в основному, фібробетон широко застосовують при будівництві будівель і споруд, а також у конструкціях, які схильні до дії стираючих, згинаючих, циклічних, ударних і термічних впливів. Також його використовують для ремонтів і там, де потрібний ранній початок експлуатації укладеного фібробетону. В Україні фібробетон практично не застосовують у дорожньому та аеродромному будівництві. Причинами цього є його висока вартість порівняно зі звичайним бетоном. У фібробетоні рекомендується використовувати цемент високих марок, що також може призвести до подорожчання бетонної суміші. Застосування високомарочного цементу призводить до проблем у масивних конструкціях із тепловиділенням. Ще однією причиною є відмінність показників міцності, морозостійкості та стираних бетонів з базальтовою та поліпропіленою фіброю, одержуваних різними дослідниками. Ці види фібри рекомендовані до застосування у дорожніх та аеродромних бетонах деякими нормативними документами України. Однак, оскільки відсутня єдина думка про ефективність застосування цих видів фібри в дорожніх бетонах, метою даного дослідження є: порівняльна оцінка ефективності застосування поліпропіленої і базальтової фібри та дослідження їх впливу на властивості дорожніх бетонів.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

На початковому етапі досліджень було проведено аналіз літератури, в якій описано результати застосування базальтової та поліпропіленої фібри у важких бетонах. Основна увага в аналізі була приділена впливу фібри на міцнісні властивості бетонів, їх морозостійкість і стираних, оскільки ці показники визначають довговічність дорожніх і аеродромних покриттів.

Наприклад, у роботі [1] показано, що введення в бетон 2% за об'ємом базальтових волокон дозволяє підвищити його міцність. Збільшення цієї кількості призводить до зниження міцності бетону. Значного впливу на інші фізико-механічні властивості бетону (крім зносостійкості та тріщиностійкості) застосування базальтової фібри не мало.

Дослідження міцності, проведені під керівництвом Л. Й. Дворкіна на піщаних бетонах складу Ц: П=1:3 показують, що при введенні 1,0 кг/м³ базальтової фібри міцність бетону за згином зростає на 55%, а за стиском – на 16% (табл. 1) [2].

Таблиця 1

Міцність піщаного бетону з базальтовою фіброю довжиною 12 мм (за даними Л. Й. Дворкіна [2])

№ з/п	Вид та кількість фібри	Міцність за згином, МПа, у віці 28 діб	Міцність за стиском, МПа, у віці 28 діб
1	без фібри	22,6	4,9
2	базальтова – 1,0 кг/м ³	26,2	7,6
3	базальтова – 5,0 кг/м ³	22,6	5,8
4	базальтова – 10,0 кг/м ³	14,7	5,6

У той же час додавання базальтової фібри в кількості, що перевищує 1 кг/м^3 , призводить до різкого зниження показників міцності. Так, наприклад, збільшення витрати базальтової фібри до 5 кг/м^3 (приблизно 1% від маси цементу), призводить до того, що міцність за стиском фібробетонів не зростає, а приріст міцності за згином знижується до 18%. Збільшення кількості базальтової фібри до 10 кг/м^3 (приблизно 2% від маси цементу) призводить до різкого (на 35%) падіння міцності за стиском та подальшого зниження міцності за згином.

У цьому дослідженні також було показано, що збільшення довжини базальтової фібри з 12 до 24 мм не призводить до зміни властивостей міцності піщаних і дрібнозернистих бетонів.

Дослідження, проведені в ДерждорНДІ у рамках виконання науково-дослідної роботи (спільно з ХНАДУ) щодо оцінки впливу різних видів фібри, показали, що максимальна ефективність застосування базальтової фібри в піщаних бетонах досягається при витраті фібри на рівні 2% від маси цементу (приблизно 10 кг/м^3) [3].

При цьому міцність бетонів за згином у віці 28 діб зростає на 43%, а за стиском – на 37%. Але вже при збільшенні витрати базальтової фібри понад 2% від маси цементу (до 4% від $m_{\text{ц}}$) відбувається різке зниження міцності піщаних бетонів за стиском до рівня міцності бетонів без фібри. Приріст міцності за згином фібробетонів також знижується до 19%. Однак, у цьому ж дослідженні було встановлено, що при подальшому збільшенні витрати базальтової фібри до 6% від $m_{\text{ц}}$ знову спостерігається збільшення міцності фібробетонів до 24% за стиском і до 40% за згином (у порівнянні з бетонами без фібри).

Дослідження впливу фібри на властивості сумішей та бетонів показали, що матеріал, розміри та характер розподілу волокон відіграють важливу роль [4].

Для отримання міцних композитів необхідно, щоб:

- волокна були рівномірно розподілені в об'ємі суміші і не повинні торкатися один до одного;

- матеріал бетону був хімічно інертним щодо відношення до матеріалу волокон;

- волокна мали вищий у порівнянні з бетоном та розчином модуль пружності.

Там же зазначено, що зі зменшенням довжини фібри її кількість, яка може бути введена в бетонну суміш без погіршення однорідності, зростає і навпаки. Звертає увагу те, що при збільшенні кількості фібри, довжини волокон і зменшенні їх діаметра зручнукладальність бетонної суміші знижується. Однак цей вплив можна зменшити за рахунок збільшення водоцементного відношення або об'єму розчинної частини бетону, а також застосуванням пластифікаторів.

Загалом, як вважають автори, фібробетон повинен відрізнятися від звичайного вищим вмістом цементу, витрата якого має бути $350 \dots 550 \text{ кг/м}^3$. Однак, у цьому дослідженні не сказано, які характеристики повинні бути критеріями одержання якісного фібробетону.

Аналогічна думка висловлена у дослідженнях, проведених під керівництвом В. М. Дерев'янка [5].

Наприклад, висловлено думку про те, що бетон з базальтовою фіброю дозволяє на 30...40% зменшити товщину покриття підлог без втрати міцності, збільшити термін його служби в 2...4 рази. Застосування цього виду фібри в кількості 0,1...0,4%, крім міцності, дозволяє підвищити зносостійкість. Також зазначено, що при збільшенні довжини волокон або зменшенні їх діаметра підвищується В/Ц суміші. Оптимізація показників базальтової фібри щодо цих параметрів дозволила авторам вважати оптимальними для застосування в бетонах класу В25 з високорухомих сумішей (Р4), базальтові волокна довжиною 12 мм діаметром 20 мкм при їх вмісті 0,4%. На жаль, автори не вказують її точної кількості.

У роботі [6] щодо оцінки впливу поліпропіленової фібри на властивості бетонів було показано, що міцність фібробетонів за стиском порівняно з бетонами без фібри незначно підвищується. Але міцність за згином при введенні 1 кг/м^3 поліпропіленової фібри зростає на 40%. Крім того, було встановлено, що запровадження поліпропіленових волокон сприяє значному підвищенню енергії руйнування бетонів.

Позитивний вплив поліпропіленової фібри було показано у дослідженнях, проведених під керівництвом С. Й. Солодкого [7]. У цій роботі було розглянуто два види фібри: звичайна, гладка та фігурна. Було встановлено оптимальну кількість двох видів фібри: $0,7...1,35 \text{ кг/м}^3$ для звичайної фібри та $3,5...7,0 \text{ кг/м}^3$ для фігурної фібри. Відмічено, що міцність на приведенні поліпропіленової фібри до складу дрібнозернистого бетону ($D_{\text{max}}=20\text{мм}$) міцність за стиском може зростати на $6...22\%$, а за згином – на $17...23\%$. Підвищенню міцності за стиском сприяє фігурна фібра, що створює структурний каркас усередині бетону. А підвищення міцності за згином обумовлено впливом звичайної фібри. При цьому зазначено, що модуль пружності фібробетонів із звичайною фіброю зростає в 1,5 рази, а в комбінації обох видів фібр – у 2 рази. На $20...40\%$ збільшується тріщиностійкість і збільшується енергія руйнування фібробетонів.

Підвищення тріщиностійкості та зниження величини внутрішнього напруження в бетонах з поліпропіленовою фіброю показано в роботі [8]. Така фібра запобігає седиментації великого заповнювача, розшарування суміші, знижує пластичну усадку на початковому етапі та вологе усадку при твердінні бетону. Кількість фібри варіювалася $0,9...2,7 \text{ кг/м}^3$. Однак при цьому відзначено значне зниження міцності бетону за стиском – до $20...30\%$, а міцність за згином зростала лише на 8% .

У дослідженнях, присвячених впливу базальтової фібри, було показано, що при введенні її в кількості $2...6\%$ від маси цементу міцність бетонів за стиском не змінюється, але значно підвищується міцність за згином – на $15...33\%$ [9]. Дещо знижується стиранисть бетонів (на 13%).

Протилежні результати отримані у роботі [10], автори якої показали, що при введенні 1% від маси цементу базальтової фібри міцність бетону за стиском збільшується на 16% .

Отримано різні результати впливу фібри на морозостійкість. В роботі [11] відмічено зниження морозостійкості бетону при введенні поліпропіленової фібри. Зниження міцності бетонів при введенні поліпропіленової фібри відзначено також у роботі [12].

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даного дослідження є: порівняльна оцінка ефективності застосування поліпропіленової і базальтової фібри та дослідження їх впливу на властивості дорожніх бетонів.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

У дослідженнях використовували цемент ПЦ П/А-Ш-400 виробництва ПАТ «ЮГцемент». В якості заповнювачів для бетонів застосовували пісок кварцовий $M_{\text{кр}}=2.2$, а також щебінь гранітний фр. 5-10 мм виробництва ТОВ «Корпорація Бугські кар'єри», Миколаївської області. У дослідженнях застосовували добавку Fk 59 полікарбоксилатного типу виробництва Німецької фірми MC-Bauchemie.

Для виготовлення зразків бетонів використовували поліпропіленову фібру товщиною 50 мкм і довжиною 12 мм виробництва ТОВ МТС «Спецснаб», м. Дніпро, а також базальтову фібру товщиною 0,2 мм і довжиною 12 мм виробництва фірми Баутех-Україна.

Зовнішній вигляд фібри представлено на рис. 1.



Рис. 1. Зовнішній вигляд поліпропіленової і базальтової фібри
(а – поліпропіленова; б – базальтова)

Розплив конуса розчинних сумішей з фіброю визначали на струшувальному столику відповідно до ДСТУ Б В.2.7-187.

Міцність піщаного і дрібнозернистого бетонів за стиском та за згином визначали на зразках-призмах (балках) розміром 4x4x16 см згідно з ДСТУ Б В.2.7-224, та ДСТУ Б В.2.7-214. Склади бетонів: піщаного – ц: п=1 : 3, дрібнозернистого вказано нижче.

Морозостійкість бетону визначали за третім прискореним методом для бетонів дорожніх і аеродромних покриттів відповідно до ДСТУ Б В.2.7-47 і ДСТУ Б В.2.7-49.

Стиранність бетону визначали згідно ДСТУ Б В.2.7-212 на установці типу «Коло стирання» ЛКІ-3 на зразках-кубах з ребром 70 мм. Морозостійкість та стиранність оцінювали на зразках з дрібнозернистих бетонів складу: ц – 350 кг/м³, п – 590 кг/м³, щ – 1290 кг/м³.

В дослідженнях оцінювали міцність бетонів за стиском і за згином. Для оцінки впливу фібри на міцність проводили дослідження на бетонах, в яких вміст базальтової фібри варіювали від 1 до 2% від маси цементу (від 6 до 12 кг/м³ для піщаного, і від 3,5 до 7 кг/м³ для дрібнозернистого бетонів), а поліпропіленової – від 0,6 до 1,2 кг/м³.

Дослідження впливу фібри на властивості піщаних бетонів показали, що збільшення витрати базальтової фібри в межах 1...2% веде до підвищення їх міцності (табл. 2). Так, при витраті базальтової фібри 1% від маси цементу міцність піщаних бетонів на згин і на стиск практично не збільшується. Значне збільшення міцності відзначається при витраті базальтової фібри 2% від маси цементу. Міцність за згином при цьому зростає на 16% і 18 у віці 7 та 28 діб відповідно, порівняно з бетонами без фібри. При цьому міцність за стиском також зростає, але значно менше, чим за згином: на 8% у віці 7 та 28 діб.

У той же час, в бетонах, що містять поліпропіленову фібру міцність на згин зростає на 12 і 15% у віці 7 і 28 діб вже при витраті цього виду фібри 0,6 кг/м³ (табл. 2). Міцність на стиск також зростає на 12%.

При витраті поліпропіленової фібри 1,2 кг/м³ приріст міцності за згином збільшується до 36%. Міцність за стиском також збільшується на 25%.

Підвищення міцності за стиском піщаних бетонів із поліпропіленовою фіброю є важливим позитивним моментом. У той же час, такого значного збільшення міцності за стиском в бетонах з базальтовою фіброю не відбувається.

Таблиця 2

Властивості піщаного фібробетону з різною фіброю

№ з/п	Вид та кількість фібри	Міцність за згином, МПа, у віці, діб.		Міцність за стиском, МПа, у віці, діб	
		7	28	7	28
1	без фібри	4,22	5,03	19,4	23,4
2	базальтова – 1,0 % від $m_{ц}$	4,30	5,21	19,6	22,8
3	базальтова – 1,5 % від $m_{ц}$	4,50	5,54	21,2	24,6
4	базальтова – 2,0 % від $m_{ц}$	4,88	5,92	21,0	25,4
5	поліпропіленова – 0,6 кг/м ³	4,71	5,78	21,6	26,2
6	поліпропіленова – 0,9 кг/м ³	5,03	6,25	23,0	27,8
7	поліпропіленова – 1,2 кг/м ³	5,74	6,86	23,0	29,2

- в усі склади вводили суперпластифікатор полікарбоксилатного типу Fk59 в кількості 0,5% від маси цементу,
- розплів конусу розчинних сумішей з різною фіброю був однаковий ($R_K = 125 \dots 130$ мм)

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Результати наших досліджень показують, що вплив поліпропіленової фібри на міцність піщаних бетонів є більш ефективним, ніж вплив базальтової.

Одним із питань застосування фібробетонів є питання про співвідношення довжини фібри та максимальної крупності заповнювача. Наші дослідження показали, що для піщаних бетонів з максимальною крупністю зерен заповнювача 5 мм оптимальною є фібра довжиною 12 мм. Але фібра такої довжини також добре працює у дрібнозернистих бетонах, про що свідчать експериментальні дані різних авторів. Тому на наступному етапі досліджень (дрібнозернисті бетони з $D_{max} = 5$ мм) була прийнята фібра довжиною 12 мм. Дослідження, проведені на дрібнозернистих фібробетонах показали, що введення 2% базальтової фібри призводить до збільшення міцності за згином на 7%, але міцність за стиском при цьому дещо знижується (на 4%) (табл. 3).

Таблиця 3

Міцність дрібнозернистих фібробетонів

№ з/п	Склад	Кількість фібри	Міцність, МПа, у віці 28 діб
1	без фібри	-	$R_{зг} = 5,7 / R_{ст} = 35,8$
2	з базальтовою фіброю	2,0 % від $m_{ц}$	$R_{зг} = 6,1 / R_{ст} = 34,4$
3	з базальтовою фіброю	4,0 % від $m_{ц}$	$R_{зг} = 6,3 / R_{ст} = 33,2$
4	з поліпропіленовою фіброю	0,9 кг/м ³	$R_{зг} = 7,0 / R_{ст} = 36,4$
5	з поліпропіленовою фіброю	1,2 кг/м ³	$R_{зг} = 7,3 / R_{ст} = 37,2$

- в усі склади вводили суперпластифікатор Fk59 в кількості 0,5 % від маси цементу

Збільшення кількості базальтової фібри до 4% призводить до зростання міцності за згином на 10%, але міцність за стиском при цьому продовжує знижуватися (на 7% порівняно з бетоном без фібри).

Застосування поліпропіленової фібри у кількості 0,9 кг/м³ призводить до підвищення міцності бетонів за згином на 23%. Але міцність за стиском дрібнозернистих бетонів при цьому не знижується. Збільшення витрати поліпропіленової фібри до 1,2 кг/м³ дозволяє підвищити міцність бетонів за згином до 28%, а міцність за стиском – на 4%.

Одним з важливих показників бетонів транспортного призначення є їх зношувальність під дією транспортних засобів. Проведені експериментальні дослідження показали, що введення фібри до складу дрібнозернистих бетонів дозволяє суттєво знизити стиральність (табл. 4). При цьому очевидно, що введення до складу дрібнозернистого бетону фібри обох видів призводить приблизно до однакових результатів - стиральність фібробетонів знижується на 52...58 % в порівнянні з бетонами без фібри. Це стосується як водонасичених, так і сухих бетонів.

Таблиця 4

Стиральність бетонів з різними видами фібри

№ з/п	Склад бетону	Стиральність, г/см ²	
		Водонасичених	Сухих
1	Без фібри	0,192	0,160
2	З поліпропіленою фіброю	0,121	0,105
3	З базальтовою фіброю	0,132	0,112

Головним показником довговічності дорожніх бетонів є їх морозостійкість, яку визначають при заморожуванні і відтаванні в хлористих солях. Дослідження показали, що фібробетони з різними видами фібри мають високу морозостійкість, яка перевищує марку F200 (табл. 5).

Таблиця 5

Морозостійкість дрібнозернистих бетонів з фіброю

№ з/п	Вид фібри	Кількість фібри, кг/м ³	Коефіцієнт морозостійкості бетону після кількості циклів заморожування-відтавання (за прискореною методикою за температури – 50 °С)				
			5	10	20	30	35
1	Базальтова	2	1,03	0,99	0,97	0,95	0,91
2	Поліпропіленова	0,9	1,01	1,03	1,00	0,97	0,96

- Випробуванню піддавали бетони класу за міцністю В25, в складі яких вводили суперпластифікатор Fk59 в кількості 0,5 % від маси цементу

Однак, коефіцієнт морозостійкості бетонів з базальтовою фіброю після 35 циклів прискореного випробування менше, ніж мінімально допустимий ($K_{мрз}$ повинен бути вище ніж 0,95). У той же час, бетони з поліпропіленою фіброю мають коефіцієнт морозостійкості що перевищує мінімальний, навіть після 35 циклів випробування. Очевидно, що бетони з поліпропіленою фіброю мають більш високу морозостійкість, ніж бетони з базальтовою фіброю. Вона відповідає марці F300.

6 ВИСНОВКИ

1. Аналіз літературних джерел показав, що експериментальні дані, застосування поліпропіленою та базальтовою фібри у важких бетонах, у тому числі й дорожніх, одержані різними авторами, суттєво відрізняються. Це відноситься, насамперед, до кількості базальтової фібри, яку необхідно вводити в бетонну суміш.

2. Отримані нами результати показують, що застосування базальтовою фібри в бетонах є ефективним при її витраті не менше 2% від маси цементу (7...10 кг/м³ бетону). При цьому міцність бетонів з цим видом фібри зростає на 7...18% за згином та на 4...8% за стиском. Міцність за згином бетонів з поліпропіленою фіброю зростає на 28...36%, а за стиском – на 4...25%, залежно від максимальної крупності заповнювача та витрати цементу. При цьому витрата поліпропіленою фібри майже на порядок менша, ніж базальтовою.

3. Стираність бетонів з обома видами фібри менше, ніж у бетонів без фібри на 52...58%, а морозостійкість бетонів не менше марки F200, що відповідає вимогам нормативних документів для дорожніх бетонів.

4. Проведені дослідження показали, що за міцністю та морозостійкістю, а також за економічними показниками, застосування поліпропіленової фібри в дорожніх бетонах є більш ефективним, ніж базальтової.

Література

1. Tehmina Ayub, Nasir Shafiq, M. Fadhil Nuruddin Mechanical Properties of High-Performance Concrete Reinforced with Basalt Fibers. *Procedia Engineering*, 2014. №77. pp. 131–139.
2. Дворкін Л. Й. та ін. Високоміцні швидкотвердуючі бетони та фібро бетони. Рівне: НУВГП, 2017. 331 с.
3. Толмачов С. М., Харченко С. З., Гревцев А. К., Кондратьєва І. Г. Звіт про науково-дослідну роботу «Розробити технологію використання поліпропіленової фібри при виготовленні монолітних і збірних цементобетонних конструкцій». Х/Т № 140 /38-47-08. Укравтодор, 2008. 38 с.
4. Возный С. П., Дорошенко Ю. М. Анализ влияния различных факторов на цементобетонное покрытие автомобильных дорог. *Автомобільні дороги і дорожнє будівництво*, 2016. Вип. 96. С. 50–60.
5. Деревянко В. Н., Саламаха Л. В. Дисперсно-армированные бетоны для устройства полов. Будівельні конструкції «Сучасні технології бетону», 2009. №72. С. 488–492.
6. Bosnjak J., Sharma A., Grauf K. Temperature-dependent behavior of fiber reinforced concrete. 19 Internationale Baustofftagung, 16-18 September 2015. Bundesrepublik Deutschland: Tagungsbericht. Weimar, 2015. pp. 1236–1243.
7. Markiv T., Turba Yu., Solodkyu S. The influence of polypropylene fibres on fracture parameters of concrete. 20 Internationale Baustofftagung, 20-22 September 2018. Bundesrepublik Deutschland: Tagungsbericht. Weimar, 2018. pp. 2263–2269.
8. Зайченко Н. М., Лахтарина С. В. Самоуплотняющиеся бетоны, дисперсно-армированные полимерными волокнами. Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди, 2011. №22. С. 63–70.
9. Коваль П. М., Бабяк І. П., Гримак О. Я. Дослідження впливу базальтової фібри на властивості бетону для транспортного будівництва. Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди, 2011. №22. С. 93–100.
10. Ксеншкевич Л. Н., Барабаш И. В., Даниленко А. В. Влияние базальтовой фибры на прочность цементного камня. Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди, 2011. №31. С. 163–167.
11. Piotr Berkowskia, Marta Kosior-Kazberuk Effect of fiber on the concrete resistance to surface scaling due to cyclic freezing and thawing. *Procedia Engineering*, 2015. №111. pp. 121–127.
12. Malgorzata Pajak Investigation On Flexural Properties of Hybrid Fibre Reinforced Self-Compacting Concrete. *Procedia Engineering*, 2016. №161. pp. 121–126.

References

1. Ayub, T., Shafiq, N., Nuruddin, M. Fadhil (2014). Mechanical Properties of High-Performance Concrete Reinforced with Basalt Fibers. *Procedia Engineering*. 2014. 77. 131–139.
2. Dvorkin, L. J. ta in. (2017). *Visokomicni shvidkotverdnuyuchi betoni ta fibrobetoni* [High-strength fast-hardening concretes and fiber concretes]. Rivne: NUVGP. 2017. [in Ukraine].
3. Tolmachov, S. M., Harchenko, S. Z., Grevcev, A. K., Kondrat'jeva, I. G. (2008). *Zvit pro naukovo-doslidnu robotu «Rozrobiti tekhnologiyu vikoristannya polipropilenovoi fibri pri vigotovlenni monolitnih i zbirnih cementobetonnih konstrukcij»* [Report on the research work «Develop the technology of using polypropylene fiber in the manufacture of monolithic and prefabricated cement concrete structures»]. h/t № 140 /38-47-08. Ukravtodor. 2008. [in Ukraine].
4. Voznyj, S. P., Doroshenko, Yu. M. (2016) *Analiz vliyaniya razlichnyh faktorov na cementobetonnoe pokrytie avtomobil'nyh dorog* [Analysis of the influence of various factors on the cement-concrete pavement of roads]. *Avtomobil'ni dorogi i dorozhne budivnictvo*. 96. 50–60. [in Russian].

5. Derevyanko, V. N., Salamaha, L. V. (2009) Dispersno-armirovannyye betony dlya ustrojstva polov [Dispersion-reinforced concrete for flooring]. *Budivel'ni konstrukcii «Suchasni tekhnologii betonu»*. 72. 488–492. [in Russian].
6. Bosnjak, J., Sharma, A., Grauf, K. (2015). Temperature-dependent behavior of fiber reinforced concrete. 19 Internationale Baustofftagung, 16-18 September 2015. *Bundesrepublik Deutschland: Tagungsbericht. Weimar*. 2015. 1236–1243.
7. Markiv, T., Turba, Yu., Solodkyy, S. The influence of polypropylene fibres on fracture parameters of concrete. 20 Internationale Baustofftagung, 20-22 September 2018. *Bundesrepublik Deutschland: Tagungsbericht. Weimar*. 2018. 2263–2269.
8. Zajchenko, N. M., Lahtarina, S. V. (2011). Samouplotnyayushchiesya betony, dispersno-armirovannyye polimernymi voloknami [Self-compacting concrete, dispersion-reinforced with polymer fibers]. *Resursoekonomni materialy, konstrukcii, budivli ta sporudi*. 22. 63–70. [in Russian].
9. Koval', P. M., Babyak, I. P., Grimak, O. Ya. (2011). Doslidzhennya vplivu bazal'tovoї fibri na vlastivosti betonu dlya transportnogo budivnictva [Study of the effect of basalt fiber on the properties of concrete for transport construction]. *Resursoekonomni materialy, konstrukcii, budivli ta sporudi*. 22. 93–100. [in Ukraine].
10. Ksenschkevich, L. N., Varabash, I. V., Danilenko, A. V. (2011). Vliyanie bazal'tovoj fibry na prochnost' cementnogo kamnya [Effect of basalt fiber on the strength of cement stone]. *Resursoekonomni materialy, konstrukcii, budivli ta sporudi*. 31. 163–167. [in Russian].
11. Berkowskia, P., Kosior-Kazberuk, M. (2015). Effect of fiber on the concrete resistance to surface scaling due to cyclic freezing and thawing. *Procedia Engineering*. 111. 121–127.
12. Pajak, M. (2016). Investigation On Flexural Properties of Hybrid Fibre Reinforced Self-Compacting Concrete. *Procedia Engineering*. 161. 121–126.

Толмачов Сергій Миколайович

Харківський національний автомобільно-дорожній університет
д.т.н., професор
вул. Ярослава Мудрого, 25, м. Харків 61002, Україна
Tolmachov.serg@gmail.com
ORCID: 0000-0003-1011-3861

Беліченко Олена Анатоліївна

Харківський національний автомобільно-дорожній університет
к.т.н., старший науковий співробітник
вул. Ярослава Мудрого, 25, м. Харків 61002, Україна
Olena.belichenko@gmail.com
ORCID: 0000-0002-7444-8188

Дорошенко Микита Андрійович

Харківський національний автомобільно-дорожній університет
магістрант
вул. Ярослава Мудрого, 25, м. Харків 61002, Україна
Tolmachov.serg@gmail.com

Покуса Юрій Петрович

Харківський національний автомобільно-дорожній університет
магістрант
вул. Ярослава Мудрого, 25, м. Харків 61002, Україна
Tolmachov.serg@gmail.com

Для посилань:

Толмачов С. М., Беліченко О. А., Дорошенко М. А., Покуса Ю. П. Порівняльна характеристика застосування поліпропіленової фібри та базальтової фібри у дорожніх бетонах. *Механіка та математичні методи*, 2022. Т. 4. №. 2. С. 65–74.

For references:

Tolmachov S., Belichenko O., Doroschenko M., Pokusa Yu. (2022). Comparative characteristics of the application of polypropylene and basalt fiber in road concrete. *Mechanics and Mathematical Methods*. 4 (2). 65 – 74.

UDC 539.3

"SEARCH FOR SOLUTIONS" IN THE PROBLEMS OF CALCULATION OF BUILDING STRUCTURES

I. Medved¹, M. Biloshytskiy¹, R. Maiboroda², E. Shcholokov², V. Tryhub²

¹Volodymyr Dahl East Ukrainian National University

²National University of Civil Defence of Ukraine

Abstract. Building structures are very diverse in their purpose and application. The reliability and safety of their operation depends on many factors: geometric dimensions, materials used, acting external loads and their combinations, etc. All these parameters determine the internal forces, stresses and strains that arise in structures, which determine their strength, rigidity and stability. In order to ensure the strength, rigidity and stability of buildings and their structural elements, appropriate calculations are performed. In the field of the theory of calculation of building structures, there is a constant refinement of the actual work of these structures, i.e. such design schemes are created that most accurately correspond to the actual operating conditions. The more optimally the design scheme is drawn up, the less time-consuming will be the stages of calculation and design of the corresponding structure. Therefore, the solution of the problem of optimization of design schemes is of great scientific and practical importance. One of the existing approaches to finding optimal solutions is discussed in the course "Operations Research". Operations Research deals with the development and application of methods for finding optimal solutions based on mathematical modeling. The operation model is an analytical dependence of the objective function on dependent (controlled) variables, which, within certain limits, we can choose at our discretion and set the range of their change. Solver is a Microsoft Excel add-in that can be used in Structural Analysis problems. With its help, you can find the optimal value (maximum or minimum) of the formula contained in one cell, called the target, taking into account restrictions on variable values in other cells. Simply put, with the Solver add-in, you can determine the maximum or minimum value of one cell by changing other cells. Most often, the add-on "Search for a solution" is used in solving optimization problems of the economy (simplex method, transport problem, etc. There are practically no results of using this approach in the calculations of building structures.

Keywords: calculation scheme, line of influence, search for solutions.

"ПОШУК РІШЕННЯ" В ЗАДАЧАХ РОЗРАХУНКУ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Медвідь І. І.¹, Білошицький М. В.¹, Майборода Р. І.², Щолоков Е. Е.²,
Тригуб В. В.²

¹Східноукраїнський національний університет імені Володимира Даля

²Національний університет цивільного захисту України

Анотація. Будівельні конструкції дуже різноманітні за своїм призначенням та застосуванням. Надійність та безпека їхньої роботи залежить від багатьох факторів: геометричних розмірів, використовуваних матеріалів, діючих зовнішніх навантажень та їх поєднань тощо. Всі ці параметри визначають внутрішні зусилля, напруги і деформації, що виникають в конструкціях, що визначають їх міцність, жорсткість і стійкість. Для того щоб забезпечити міцність, жорсткість та стійкість будівель та їх конструктивних елементів, виконуються відповідні розрахунки. У теорії теорії розрахунку будівельних конструкцій йде постійне уточнення дійсної роботи цих конструкцій, тобто. створюються такі розрахункові схеми, які найточніше відповідають реальним умовам експлуатації. Чим оптимальніше складено розрахункову схему, тим менш трудомісткими будуть етапи розрахунку та конструювання відповідної конструкції. Тому, вирішення завдання оптимізації розрахункових

схем має величезне наукове та практичне значення. Один із існуючих підходів пошуку оптимальних рішень розглядається в курсі "Дослідження операцій". "Дослідження операцій" займається розробкою та застосуванням методів пошуку оптимальних рішень на основі математичного моделювання. Модель операції є аналітичною залежністю цільової функції від залежних (керованих) змінних, які у певних межах ми можемо вибирати на власний розсуд і встановлювати діапазон їх зміни. "Пошук рішення" – це надбудова для Microsoft Excel, яку можна використовувати в розрахунках будівельних конструкцій. З її допомогою можна знайти оптимальне значення (максимум або мінімум) формули, що міститься в одному осередку, що називається цільовим, з урахуванням обмежень на змінні значення в інших осередках. Простіше кажучи, за допомогою надбудови "Пошук рішення" можна визначити максимальне або мінімальне значення однієї комірки, змінюючи інші комірки. Найчастіше надбудова "Пошук рішення" використовується під час вирішення оптимізаційних завдань економіки (симплексний метод, транспортне завдання тощо). Практично відсутні результати використання такого підходу при розрахунках будівельних конструкцій.

Ключові слова: розрахункова схема, лінія впливу, пошук рішень.

1 INTRODUCTION

Building structures are very diverse in their purpose and application. The reliability and safety of their operation depends on many factors: geometric dimensions, materials used, acting external loads and their combinations, etc. All these parameters determine the internal forces, stresses and strains that arise in structures, which determine their strength, rigidity and stability. In order to ensure the strength, rigidity and stability of buildings and their structural elements, appropriate calculations are performed.

In the field of the theory of calculation of building structures, there is a constant refinement of the actual work of these structures, i.e. such design schemes are created that most accurately correspond to the actual operating conditions. In solving these problems, a huge role belongs to the introduction of an electronic computer.

The discipline "Operations Research" deals with the development and application of methods for finding optimal solutions based on mathematical modeling.

The operation model is an analytical dependence of the objective function on dependent (controlled) variables, which, within certain limits, we can choose at our discretion and set the range of their change. Drawing up an operation model requires a deep understanding of the essence of the described phenomenon and knowledge of the mathematical apparatus.

The goal is to quantitatively substantiate the decisions made [1], and the effectiveness of the operation is quantified by the numerical value of the objective function.

Among the models used in the "Operations Research" it should be noted first of all a large class of optimization models. In general terms, the optimization problem can be formulated as follows: to find such values of controlled variables that satisfy the system of inequalities (restrictions) and turn the objective function into a maximum (or minimum).

If the objective function is linear, and the variables in the constraint system are also linear, then such a problem is a linear programming problem. Of all the known methods of mathematical programming, the most common and developed is linear programming [1–3].

"Search for a solution" is a Microsoft Excel add-in that can be used to solve optimization problems. Simply put, using the Solver add-in, you can determine the maximum or minimum value of one cell by changing other cells.

2 ANALYSIS OF LITERATURE DATA AND STATEMENT OF THE PROBLEM

Most often, the add-in "Search for a solution" is used in solving optimization problems of the economy (simplex method, transport problem, etc.). There are practically no results of using this approach in the calculations of building structures [4, 5].

3 PURPOSE AND OBJECTIVES OF THE RESEARCH

In this article, an attempt is made to show the feasibility of using the "Search for Solutions" at the stage of choosing the optimal parameters of the design design scheme.

4 RESULTS OF RESEARCH

Consider the simplest building structure.

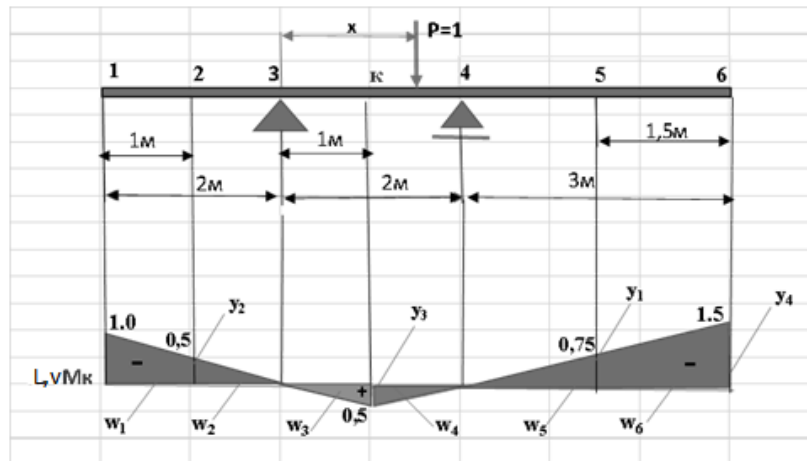


Fig.1. Calculation scheme and the line of influence of the bending moment

To illustrate the idea of the proposed approach, a simple statically determinate beam was deliberately chosen (Fig. 1). This is done so that the idea of the proposed approach is not lost due to the complexity and cumbersomeness of the calculations.

Let us be interested in the section "k" of the structure under consideration. The line of influence of the bending moment in this section was constructed using traditional methods of structural mechanics (Fig. 1) [6–10].

Possible options for loading the structure are shown in Fig. 2 (selected arbitrarily).

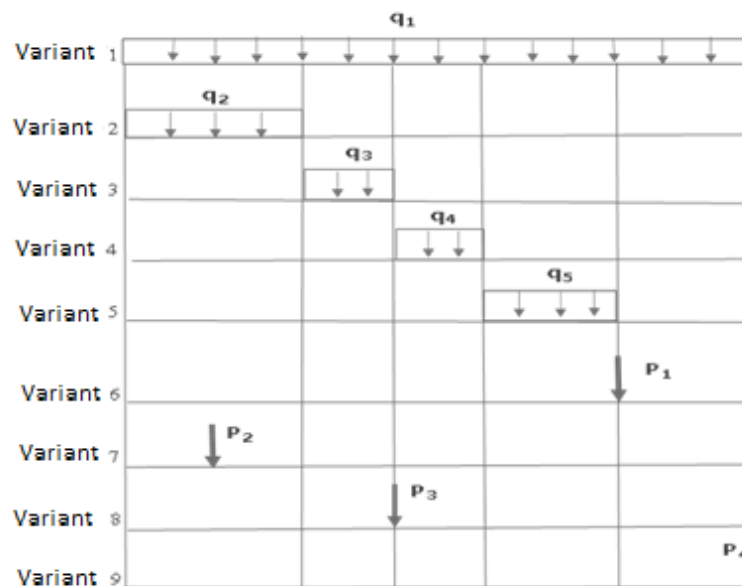


Fig. 2. Loading options for the structure

As an optimality criterion, we choose the value of the bending moment in the section "k".

In the course of structural mechanics, a formula is known for determining the numerical value of the generalized internal force factor F along the corresponding line of influence:

$$F = \sum q_i w_i + \sum P_i y_i + \sum M_i \tan \alpha_i . \quad (1)$$

In our case, formula (1) will look like:

$$M_k = q_1(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6) + q_2(w_1 + w_2) + q_3 w_3 + q_4 w_4 + q_5 w_5 + P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4 . \quad (2)$$

Let us determine the areas of the corresponding sections and the ordinates of the line of influence:

$$w_1 = -\frac{(1+0.5)}{2} \cdot 1 = -0.75; \quad w_2 = -\frac{0.5 \cdot 1}{2} = -0.25; \quad w_3 = \frac{0.5 \cdot 1}{2} = 0.25;$$

$$w_4 = \frac{0.5 \cdot 1}{2} = 0.25; \quad w_5 = -\frac{1.5 \cdot 0.75}{2} = -0.5625; \quad w_6 = -\frac{(0.75+1.5)}{2} \cdot 1.5 = -1.6875;$$

$$y_1 = -0.75; \quad y_2 = -0.5; \quad y_3 = 0.5; \quad y_4 = 1.5.$$

In further calculations, we will consider the bending moment positive if it stretches the lower fibers.

Then the objective function will look like:

$$M_k = -2.75q_1 - q_2 + 0.25q_3 + 0.25q_4 - 0.5625q_5 - 0.75P_1 - 0.5P_2 + 0.5P_3 + 1.5P_4.$$

Conventionally, we will consider q_1 and P_3 as a constant load, and the rest of the load as a temporary one.

Table 1

Range of change of the distributed load

q_1 , kH/m		q_2 , kH/m		q_3 , kH/m		q_4 , kH/m		q_5 , kH/m	
max	min	max	min	max	min	max	min	max	min
30	30	20	0	40	0	40	0	30	0

Table 2

Concentrated Force Range

P_1 , kH		P_2 , kH		P_3 , kH		P_4 , kH	
max	min	max	min	max	min	max	min
100	0	50	0	150	150	80	0

Table 3

Restriction system

q_1	0	0	0	0	0	0	0	0	=	30
0	q_2	0	0	0	0	0	0	0	≤	20
0	0	q_3	0	0	0	0	0	0	≤	40
0	0	0	q_4	0	0	0	0	0	≤	40
0	0	0	0	q_5	0	0	0	0	≤	30
0	0	0	0	0	P_1	0	0	0	≤	100
0	0	0	0	0	0	P_2	0	0	≤	50
0	0	0	0	0	0	0	P_3	0	=	150
0	0	0	0	0	0	0	0	P_4	≤	80

The ranges of changes in the external load and the selected system of restrictions are entered in the table of parameters for the search for solutions (Fig. 3).

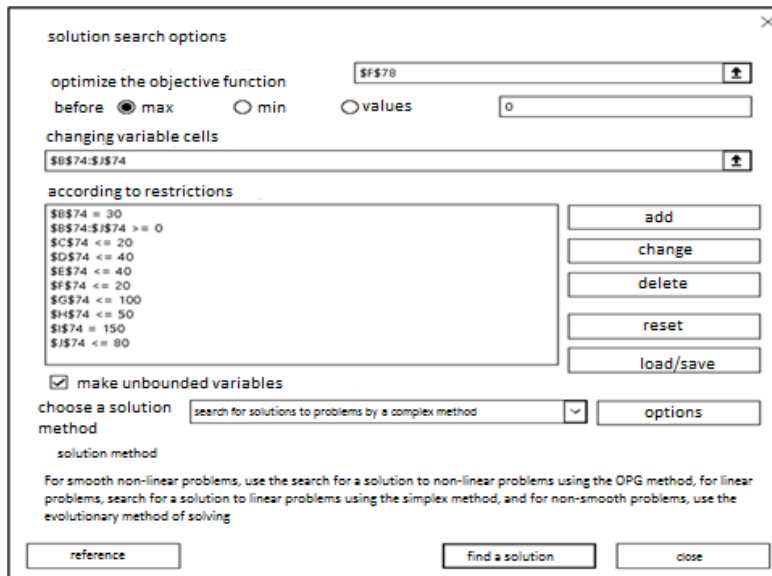


Fig. 3. Solution search parameters for finding M_k , max

5 DISCUSSION OF RESEARCH RESULTS

The calculation results are shown in Fig. 4.

q1	q2	q3	q4	q5	P1	P2	P3	P4
30	0	40	40	0	0	0	150	80
-2.75	-1	0.25	0.25	-0.5625	-0.75	-0.5	0.5	1.5

132.5 objective function

Fig. 4. Numerical values of controlled variables and objective function

The value of the objective function corresponds to the value of the maximum bending moment in the section "k" ($M_k=132.5$ kNm). Since the value is positive, the lower fibers of the cross section will be stretched. If the results of the calculation are presented graphically, then we obtain the calculation scheme shown in Fig. 5.

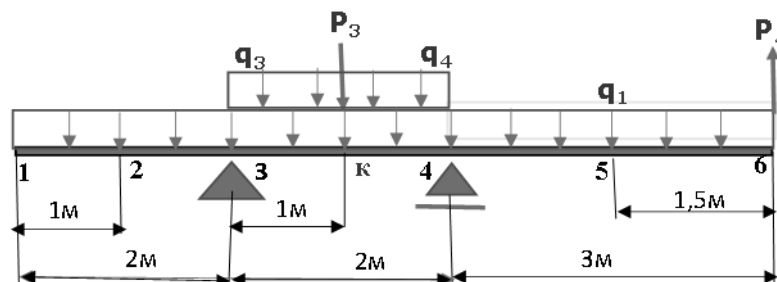


Fig. 5. External load combinations corresponding to M_k , max

Similarly, the combination of external load is determined, at which the bending moment in the section "k" will be minimal (Fig. 6).

q1	q2	q3	q4	q5	P1	P2	P3	P4
30	20	0	0	30	100	50	150	0
-2.75	-1	0.25	0.25	-0.5625	-0.75	-0.5	0.5	1.5

-144.375 objective function

Fig. 6. Numerical values of controlled variables and objective function

The value of the objective function corresponds to the value of the minimum bending moment in the section "k" ($M_k = -144.375$ kNm). Since the value is now negative, the top fibers of the cross section will be stretched. If the results of the calculation are presented graphically, then we obtain the calculation scheme shown in Fig. 7.

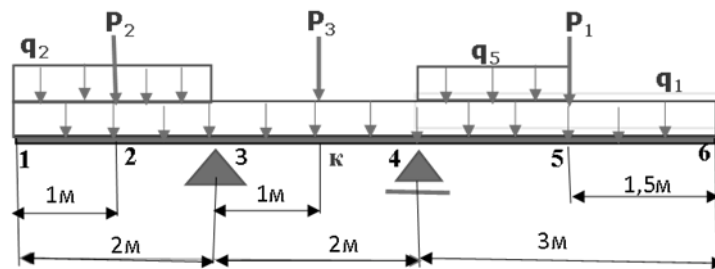


Fig. 7. External load combinations corresponding to M_k , min

6 CONCLUSIONS

Thus, this article shows the possibility and expediency of using the "Search for Solutions" add-on at the stage of choosing the optimal parameters of the design design scheme. After the calculation scheme is determined, more powerful conventional means of calculating building structures can be involved for its complete calculation.

References

1. Kremer, M. Sh. (1999). *Operations research in economics. Textbook*. M.: Marketing.
2. Karmanov, V. G. (1986). *Matematicheskoye programmirovaniye* [Mathematical programming]. M.: Nauka. [in Russian].
3. Romanyuk, T. P. Tereshchenko, T. O. Prisenko, G. V. Gorodkova, I. M. (1996). *Matematichne programuvannya: Navch. posibnik* [Mathematical programming: Educational manual]. K.: IZMN. [in Ukrainian].
4. Medved, I. I. (2021). Optimizatsiya raschetnykh skhem [Optimization of design schemes]. *Modern building structures made of metal and wood*. 25. 2021. 85–91. [in Russian].
5. Medved, I., Surianinov, M., Otrosh, Y., Pirohov O. (2021). Optimization of the calculated scheme. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 1164. 012051.
6. Butenko, Yu. I. (1989). *Stroitel'naya mekhanika* [Structural mechanics]. Vishcha school. [in Russian].
7. Smirnov, A. F., Aleksandrov, A. V., Laschennikov, B. Ya., Shaposhnikov, N. N. (1981). *Stroitel'naya mekhanika. Sterzhnevyye sistemy* [Structural mechanics. Rod systems]. M.: Stroyizdat. [in Russian].
8. Smirnov, A. F., Aleksandrov, A. V., Laschennikov, B. Ya., Shaposhnikov, N. N. (1984). *Stroitel'naya mekhanika* [Structural mechanics]. M.: Stroyizdat. [in Russian].
9. Darkov, A. V., Shaposhnikov, N. N. (1986). *Stroitel'naya mekhanika* [Structural mechanics]. M.: Higher. shk. [in Russian].

10. Butenko, Yu. I. (1984). *Stroitel'naya mekhanika. Rukovodstvo k prakticheskim zanyatiyam* [Structural mechanics. Practice Guide]. K.: Vishcha shkola. [in Russian].

Література

1. Kremer M. Sh. *Operations research in economics. Textbook*. M.: Marketing, 1999. 270 p.
2. Карманов В.Г. *Математическое программирование*. М.: Наука, 1986. 285 с.
3. Романюк Т. П., Терещенко Т. О., Присенко Г. В., Городкова І. М. *Математичне програмування: Навч. посібник*. К.: ІЗМН, 1996. 312 с.
4. Медведь И. И. *Оптимизация расчетных схем. Сучасні будівельні конструкції з металу та деревини*, 2021. №25. С. 85–91.
5. Medved, I., Surianinov, M., Otrosh, Y., Pirohov O. (2021). *Optimization of the calculated scheme*. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 1164. 012051.
6. Бутенко Ю. И. *Строительная механика*. Высшая школа, 1989. 479 с.
7. Смирнов А. Ф., Александров А. В., Лашенников Б. Я., Шапошников Н. Н. *Строительная механика. Стержневые системы*. М.: Стройиздат, 1981. 512 с.
8. Смирнов А. Ф., Александров А. В., Лашенников Б. Я., Шапошников Н. Н. *Строительная механика*. М.: Стройиздат, 1984. 415 с.
9. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. *Строительная механика*. М.: Высшая школа, 1986. 607 с.
10. Бутенко Ю. И. *Строительная механика. Руководство к практическим занятиям*. К.: Вища школа, 1984. 328 с.

Medved Ivan

Volodymyr Dahl East Ukrainian National University
Candidate of technical sciences, assistant professor
Central Avenue, 59-a, Severodonetsk, Ukraine 93400
iw.medwed@yandex.ua, ORCID: 0000-0001-9988-9900

Biloshytskiy Mykola

Volodymyr Dahl East Ukrainian National University
Candidate of technical sciences, assistant professor,
Central Avenue, 59-a, Severodonetsk, Ukraine 93400
beloshytskiy@ukr.net, ORCID: 0000-0002-9935-4161

Maiboroda Roman

National University of Civil Defence of Ukraine
Lecturer of Department
Chernishevskaya str., 94, Kharkov, Ukraine, 61023
maiboroda.roman@ukr.net
0000-0002-3461-2959

Eduard Shcholokov

National University of Civil Defence of Ukraine
Lecturer of Department
Chernishevskaya str., 94, Kharkov, Ukraine, 61023
eduard.shcholokov2020@gmail.com
0000-0002-9923-1487

Volodymyr Tryhub

National University of Civil Defence of Ukraine
Senior Lecturer of Department, Ph.D. (Technical Sciences), Associate Professor
Chernishevskaya str., 94, Kharkov, Ukraine, 61023
vlad.trigub.1978@gmail.com
0000-0002-5370-1340

For references:

Medved I., Biloshytskiy M., Maiboroda R., Shcholokov E., Tryhub V. (2022). "Search for solutions" in the problems of calculation of building structures. *Mechanics and Mathematical Methods*. 4 (2). 75–82.

Для посилань:

Медвідь І. І., Білошицький М. В., Майборода Р. І., Щолоков Е. Е., Тригуб В. В. "Пошук рішення" в задачах розрахунку будівельних конструкцій. *Механіка та математичні методи*, 2022. Т. 4. №. 2. С. 75–82.

UDC 539.3:624.046.3

SOME PROBLEMS OF OPTIMIZATION OF ROD SYSTEMS CONTAINING COMPRESSED ELEMENTS USING ADDITIONAL CONSTRAINTS

S. Bekshaev¹

¹*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract: The article is devoted to the problem of increasing the stability of rod systems containing longitudinally compressed elements. The influence of the imposition of constraints on the behavior of such systems is investigated in order to determine such places for imposing constraints that provide the maximum stability of the system reinforced by the constraint. To get generality, the consideration includes such rod systems that allow various equilibrium configurations, for example, having internal ideal hinges, as well as an arbitrary distribution of longitudinal compressive forces, including leaving some areas free from compression. For the same purpose, the constraints are considered as generalized, producing a reaction with an arbitrary spatial distribution. The paper formulates some general results related to the influence of the introduction of generalized constraints on the critical forces of a rod system with some generalizations related to the extension of the class of rod systems under consideration. Particular attention is paid to the buckling modes in view of their important role as a basis for describing various configurations of the structure. It has been established that the shape of these modes, in particular, the position of their nodes, is essential for finding the optimal position of the constraint. For the case of constraint in the form of a concentrated hinged support, analytical expressions are obtained that represent the derivatives of the critical forces of the system with respect to the coordinate of the support. The case of a multiple critical force, when this derivative, generally speaking, does not exist, is especially considered. These expressions make it possible to qualitatively characterize the optimal position of the support. The application of some of the obtained results is demonstrated by the example of the problem of finding the optimal position of an intermediate hinged support of a two-span rod supported at the ends by elastic hinged supports. These positions are qualitatively described for various values of the stiffness coefficients of the end supports. It has been established that under certain conditions, the optimal positions of the intermediate support correspond to a special semi-curved mode of buckling, in which one of the spans does not bend, but retains its rectilinear equilibrium shape.

Keywords: rod system, critical force, effect of constraint, optimization, semi-curved buckling mode, qualitative sign.

ДЕЯКІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ, ЩО МІСТЯТЬ СТИСНУТІ ЕЛЕМЕНТИ, ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ДОДАТКОВИХ В'ЯЗЕЙ

Бекшаєв С. Я.¹

¹*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація: Статтю присвячено актуальній проблемі підвищення стійкості стрижневих систем, що містять поздовжньо стиснуті елементи. Досліджується вплив накладання в'язей на поведінку таких систем з метою визначення таких місць встановлення в'язей, які забезпечують максимальну критичну силу, яка характеризує стійкість системи, підсиленої в'яззю. Для досягнення загальності опису до розгляду залучені такі стрижневі системи, які допускають різні рівноважні конфігурації, наприклад, такі що мають внутрішні ідеальні шарніри, а також довільний розподіл поздовжніх стискаючих сил, у тому числі такий, що залишає деякі ділянки вільними від стиснення. З тією ж метою в'язі розглядаються як узагальнені, які генерують



реакцію з довільним просторовим розподілом. У роботі сформульовані деякі загальні результати, що стосуються впливу введення узагальнених в'язей на критичні сили стрижневої системи, з деякими узагальненнями, пов'язаними з розширенням класу стрижневих систем, що розглядаються. Особливу увагу приділено формам втрати стійкості розглядуваних систем через їх важливу роль як базису для опису різних конфігурацій конструкції. Встановлено, що вид цих форм, зокрема, положення їх вузлів, є суттєвим для відшукування оптимального розміщення в'язі. Для випадку в'язі у вигляді зосередженої шарнірної опори отримано аналітичні вирази, що представляють похідні критичних сил системи по координаті опори. Особливо розглянуто випадок кратної критичної сили, коли ця похідна, взагалі кажучи, не існує. Ці вирази дають можливість якісно характеризувати оптимальне положення опори. Застосування деяких з отриманих результатів продемонстровано на прикладі завдання пошуку оптимального положення проміжної шарнірної опори двопроганового стрижня, опертого по кінцях на пружні шарнірні опори. Якісно описані такі положення для різних значень коефіцієнтів жорсткості кінцевих опор. Встановлено, що за певних умов оптимальним положенням проміжної опори відповідає особлива напіввігнута форма втрати стійкості, в якій один з прольотів не згинається, а зберігає прямолінійну рівноважну форму.

Ключові слова: стрижнева система, критична сила, вплив в'язі, оптимізація, напіввігнута форма втрати стійкості, якісна ознака..

1 INTRODUCTION

When designing and operating various engineering structures, designers often face the problem of ensuring the stability of their elements operating under conditions of longitudinal compression. This raises various optimization problems associated with providing maximum stability at minimum cost. One of these problems is the search for the most advantageous distribution of constraints available to the designer, which provides the maximum possible value of the critical force of the structure. The proposed article is devoted to solving this problem for a linearly elastic rod system reinforced with one constraint. At the same time, the considered rod systems include systems for which, in the absence of external loads, various configurations are possible, in particular, those having internal perfect hinges, as well as systems in which some sections remain free from longitudinal compression.

2 LITERATURE ANALYSIS AND PROBLEM STATEMENT

Many studies have been devoted to the optimization of elastic structures, in which the variables are the properties and distribution of the material, outlines, and other design parameters [1–3]. Among them, there are relatively few works where the optimum is achieved due to the distribution of singularities and, in particular, the distribution of supports [4–6]. Most of the proposed methods for finding optimal structures use universal schemes developed in mathematics and numerical procedures based on them. At the same time, interesting and important qualitative features of the obtained optimal solutions often remain unnoticed. In a range of works [7–12] devoted to the search for the optimal arrangement of supports for compressed rods, a simple and demonstrative approach was proposed and successfully used, which makes it possible to determine this arrangement and reveal interesting and somewhat unexpected qualitative features of the obtained optimal rods. In this paper, this approach is developed taking into account the inclusion in the consideration of such systems, the study of which leads to equations with degenerate operators. The study of the stability of such systems is connected with the well-known problem in algebra of simultaneous diagonalization of two positive semidefinite matrices [13], however, in this paper, special attention is paid to the spectrum of the corresponding eigenvalues and eigenvectors and its changes in accordance with the objectives of the work.

3 THE PURPOSE AND OBJECTIVES OF THE STUDY

The purpose of the proposed work is to determine such a position of a concentrated elastic or rigid hinge support, in which the main critical force of the rod system reaches its maximum value. To do this, taking into account the expansion of the class of linearly elastic systems under consideration, the features of the spectrum of their critical forces and the buckling modes corresponding to them, as well as their change due to the setting of a constraint, are studied. On this basis, results are derived that make it possible to establish some qualitative features of the desired optimal position. Using these signs, in many cases it is possible to determine these positions practically without calculations and a priori qualitatively describe the corresponding buckling mode and estimate the maximum critical force.

4 RESEARCH RESULTS

4.1. Preliminary results. First, we formulate some general results related to the effect of introducing elastic constraints on the critical forces of the rod system, which are necessary for further conclusions.

1.1. Notations and assumptions

S – elastic rod system, including predetermined elastic and rigid constraints, connecting the points of the system to the ground or fixed bodies.

$S^{(1)}$ – system formed from S by the imposition of one additional constraint.

$\mathbf{y} = \mathbf{y}(M)$ – displacement (configuration, form) of the system – function of the point M , which determines the position of the point M of the system (in the undeformed state $\mathbf{y} \equiv 0$).

$\mathbf{q} = \mathbf{q}(M)$ – load – a function of the point M , which determines the external force applied to the point M ; it is assumed that the forces \mathbf{q} applied to the rod of the system are perpendicular to the axis of the rod.

(\mathbf{q}, \mathbf{y}) – work of load $\mathbf{q} = \mathbf{q}(M)$ on displacement $\mathbf{y} = \mathbf{y}(M)$. If $(\mathbf{q}, \mathbf{y}) = 0$, it is said that the load \mathbf{q} is orthogonal to the displacement \mathbf{y} , or that the load \mathbf{q} is applied in a generalized node of the configuration (form) \mathbf{y} .

The functions \mathbf{y} and \mathbf{q} are considered as elements of the linear spaces Y and Q , respectively, having arbitrarily large but identical finite dimensions. This allows us to assume that $\mathbf{q} \equiv 0$, if for any \mathbf{y} we have the equality $(\mathbf{q}, \mathbf{y}) = 0$.

– $C\mathbf{y}$ – linear operator that defines the internal forces acting on the points of the system in position $\mathbf{y}(M)$ (including the reactions of the elastic and rigid constraints belonging to the system, connecting it to the ground). The “–” sign is assigned to reflect the usual property of elastic structures – to generate reactions that counteract the deformation that caused them. All considered elastic systems are assumed to be conservative. Therefore, the operator C , like all other occurring operators, is assumed to be self-adjoint, i.e. satisfying the condition for any \mathbf{y} and \mathbf{v}

$$(C\mathbf{y}, \mathbf{v}) = (C\mathbf{v}, \mathbf{y}) \quad (1)$$

expressing the well-known reciprocity theorem.

It is assumed that in the absence of external forces, the system S can have equilibrium configurations different from $\mathbf{y} \equiv 0$, for which $C\mathbf{y} = 0 \Rightarrow (C\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$, but always $(C\mathbf{y}, \mathbf{y}) \geq 0$, i.e. operator C is non-negative.

If the elements of system S are subjected to compression by a constant load proportional to parameter P , which does not cause deformation of the system at $\mathbf{y}(M) \equiv 0$, then operator C changes to $(C - PN)$, where N is some linear operator, which, like C , we will assume non-negative, i.e. $(N\mathbf{y}, \mathbf{y}) \geq 0$ with $\mathbf{y} \neq 0$. The non-negativity also reflects the usual feature of the behavior of a compressed rod, the rotation of which generates a couple acting in the direction of rotation. Non-strict inequality implies the existence of special configurations for which $(N\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$ at $\mathbf{y} \neq 0$. In this case, $N\mathbf{y} = 0$ is necessary, because for a non-negative operator N the Schwartz inequality $|(N\mathbf{y}, \mathbf{u})| \leq \sqrt{(N\mathbf{y}, \mathbf{y})} \sqrt{(N\mathbf{u}, \mathbf{u})}$ is preserved, which implies for any \mathbf{u} $(N\mathbf{y}, \mathbf{u}) = 0$, if $(N\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$. A similar conclusion is also valid for the operator C . For the systems considered in this paper, $N\mathbf{y}$ is a system of couples arising as a result of the rotation of compressed elements. Therefore, in these special configurations, all compressed segments must not rotate, i.e. on each of them $\mathbf{y} \equiv \mathbf{const}$. The parameter P will be called the compressive force. Let us introduce the notation



W – $\ker N$ – kernel of operator N , i.e. the set of all \mathbf{y} , for which $N\mathbf{y} = 0$.

V – $\ker C$ – kernel of operator C , i.e. the set of all \mathbf{y} , for which $C\mathbf{y} = 0$.

$U = V \cap W$ – the set of all \mathbf{y} , for which at the same time $C\mathbf{y} = N\mathbf{y} = 0$.

W , V and U – subspaces of Y . In what follows, all forms belonging to W are called special.

At this stage of consideration, there is no need for any particular differential or integral representation of the introduced operators. For simplicity, we can assume that we are dealing with matrix representations associated with the choice of some bases in the function spaces \mathbf{y} and \mathbf{q} .

1.2. Critical forces and buckling modes. The equilibrium position of a compressed system subjected to load \mathbf{q} is determined by the equation

$$-(C - PN)\mathbf{y} + \mathbf{q} = 0, \tag{2}$$

expressing the equality to zero of the sum of forces applied to each point of the system. The corresponding homogeneous equation

$$(C - PN)\mathbf{y} = 0 \tag{3}$$

determines the equilibrium positions of a system S subjected only to longitudinal compression in the absence of an external load \mathbf{q} . The existence of such positions different from the trivial one $\mathbf{y}(M) \equiv 0$ means that this trivial equilibrium ceases to be stable. It is known [14] that if at least one of the operators C and N is nondegenerate, nontrivial solutions of the homogeneous equation allow us to construct a basis in Y , which can serve as a convenient tool for studying the behavior of the systems under consideration. Assuming the degeneration of both operators C and N , the question of constructing the corresponding basis should be studied in more detail.

Let $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ be a basis in U , $\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_d$ be functions that complement $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ to a basis in W , and $\mathbf{u}_{d+1}, \mathbf{u}_{d+2}, \dots$ be functions that complement $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ to a basis in Y . Substitute $\mathbf{y} = \sum x_j \mathbf{u}_j$ in (3)

$$\sum_{k+1}^d x_j C\mathbf{u}_j + \sum_{d+1}^{\dim Y} x_j (C - PN)\mathbf{u}_j = 0. \tag{4}$$

Calculating the sum of the works of the forces applied to the system on each of the basis displacements \mathbf{u}_i , we obtain the system of equations

$$\left. \begin{aligned} c_{k+1,k+1}x_{k+1} + \dots + c_{k+1,d}x_d &+ c_{k+1,d+1}x_{d+1} &+ c_{k+1,d+2}x_{d+2} &+ \dots = 0 \\ c_{k+2,k+1}x_{k+1} + \dots + c_{k+2,d}x_d &+ c_{k+2,d+1}x_{d+1} &+ c_{k+1,d+2}x_{d+2} &+ \dots = 0 \\ \dots &\dots &\dots &\dots \\ c_{d,k+1}x_{k+1} + \dots + c_{dd}x_d &+ c_{d,d+1}x_{d+1} &+ c_{d,d+2}x_{d+2} &+ \dots = 0 \\ c_{d+1,k+1}x_{k+1} + \dots + c_{d+1,d}x_d &+ (c_{d+1,d+1} - Pn_{d+1,d+1})x_{d+1} &+ (c_{d+1,d+2} - Pn_{d+1,d+2})x_{d+2} &+ \dots = 0 \\ c_{d+2,k+1}x_{k+1} + \dots + c_{d+2,d}x_d &+ (c_{d+2,d+1} - Pn_{d+2,d+1})x_{d+1} &+ (c_{d+2,d+2} - Pn_{d+2,d+2})x_{d+2} &+ \dots = 0 \\ \dots &\dots &\dots &\dots \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

where $c_{ij} = (C\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i)$ is the generalized stiffness coefficient equal to the work of the total elastic reaction $C\mathbf{u}_j$, taken with the opposite sign, caused by the j -th basis displacement \mathbf{u}_j ,



on the i -th basis displacement \mathbf{u}_i ; $n_{ij} = (N\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i)$. Here it is taken into account that if at least one of the indices i, j does not exceed $k = \dim U$, $c_{ij} = (C\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i) = (C\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = 0$, and if at least one of the indices i, j does not exceed $d = \dim W$, $n_{ij} = (N\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i) = (N\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = 0$.

According to the definition of the sets U and W for any nontrivial linear combination $\mathbf{y} = x_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \dots + x_d\mathbf{u}_d$ $C\mathbf{y} \neq 0$ and the strict inequality $(C\mathbf{y}, \mathbf{y}) > 0$ holds for $\mathbf{y} \neq 0$, which implies the strict positivity of all principal minors of the matrix of system (5) up to the order $d - k$ inclusive [14]

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} c_{k+1,k+1} & c_{k+1,k+2} & \dots & c_{k+1,j} \\ c_{k+2,k+1} & c_{k+2,k+2} & \dots & c_{k+2,j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{j,k+1} & c_{j,k+2} & \dots & c_{jj} \end{vmatrix} > 0, \quad j = k+1, \dots, d. \quad (6)$$

Let us perform the elimination of unknowns x_{k+1}, \dots, x_d in system (5) using the Gauss method. As a result, the matrices corresponding to (6) take a triangular form, where on the main diagonal in the row with the number h there is a positive value $c_{11}^* = \Delta_{k+1} = c_{k+1,k+1}$, $c_{11}^* = \Delta_{k+1} = c_{k+1,k+1}$, $h = 1, \dots, d - k$ [14].

$$\left. \begin{aligned} c_{11}^*x_{k+1} + c_{k+1,k+2}x_{k+2} + \dots + c_{k+1,d}x_d &+ c_{k+1,d+1}x_{d+1} &+ c_{k+1,d+2}x_{d+2} &+ \dots = 0 \\ c_{22}^*x_{k+2} + \dots + c_{k+2,d}x_d &+ c_{k+2,d+1}x_{d+1} &+ c_{k+2,d+2}x_{d+2} &+ \dots = 0 \\ \dots &\dots &\dots &\dots \\ c_{d-k,d-k}^*x_d &+ c_{d-k,d-k+1}^*x_{d+1} &+ c_{d-k,d-k+2}^*x_{d+2} &+ \dots = 0 \\ (c_{d+1,d+1}^* - Pn_{d+1,d+1})x_{d+1} &+ (c_{d+1,d+2}^* - Pn_{d+1,d+2})x_{d+2} &+ \dots &= 0 \\ (c_{d+2,d+1}^* - Pn_{d+2,d+1})x_{d+1} &+ (c_{d+2,d+2}^* - Pn_{d+2,d+2})x_{d+2} &+ \dots &= 0 \\ \dots &\dots &\dots &\dots \end{aligned} \right\} (7)$$

Here, the asterisk denotes the matrix elements obtained as a result of the Gaussian elimination procedure. With the exception of the diagonal of the triangular block, the indices in them have a traditional meaning (row number and column number, taking into account k "zero" rows and columns). Moreover, it follows from equality $c_{ji} = c_{ij}$ that for $i, j > d$ $c_{ji}^* = c_{ij}^*$ [14]. In system (7), the equations, from which x_{k+1}, \dots, x_d are excluded, represent a standard algebraic eigenvalues problem with symmetric matrices $\|c_{ij}^*\|$ and $\|n_{ij}\|$, $i, j > d$, and the $\|n_{ij}\|$ is positive-definite. It is known [14] that there is a discrete set $P_1 \leq P_2 \leq \dots$ of non-negative values P , which correspond to $\dim Y - d$ linearly independent non-trivial sets $\{x_{d+1}, x_{d+2}, \dots\}$, which are solutions to system (7). After they are determined, from the first $d - k$ equations (7) x_{k+1}, \dots, x_d are uniquely determined. Thus, system (5) allows one to determine $\dim Y - d$ linearly independent configurations $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ corresponding to its non-trivial solutions, of the form $\mathbf{v} = x_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} + \dots + x_d\mathbf{u}_d + x_{d+1}\mathbf{u}_{d+1} + \dots$. It is convenient to take them as basis ones in Y instead of $\mathbf{u}_{d+1}, \mathbf{u}_{d+2}, \dots$. They satisfy the equation

$$(C - P_j N)\mathbf{v}_j = 0, \quad (8)$$

and also the orthogonality relation $(N\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$, if $P_i \neq P_j$, and can be chosen normalized according to the condition $(N\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = 1$. In difference to the case of non-degeneracy of N , they cannot be a basis of Y , since their number is d less than the dimension of Y . Another difference from the standard problem is that the functions \mathbf{v}_j are not defined uniquely, because substitution in (3) shows that if \mathbf{v}_j is its solution corresponding to $P = P_j$, then $\mathbf{v}_j^* = g_1 \mathbf{u}_1 + \dots + g_k \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_j$ for any g_1, \dots, g_k will also be its solution corresponding to the same $P = P_j$. The quantities P_j are called critical forces (hereinafter – CRF), and \mathbf{v}_j – the corresponding buckling modes (hereinafter – BM) of system S .

1.3. Expansion of forms by buckling modes. Expansion of an arbitrary system configuration by its BM is an effective tool for solving various problems of stability theory. For the degenerate N , one can construct a similar generalized expansion by supplementing the set of BM $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ with functions $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$. In this case, it is convenient to replace the set $\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_d$ with their linearly independent combinations $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{d-k}$ for which $(C\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) = 0$, and $(C\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j) = c_j > 0$. And besides $(C\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j) = P_j(N\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j) = P_j(N\mathbf{w}_j, \mathbf{v}_i) = 0$. Any configuration of system S can be represented as

$$\mathbf{y} = \sum_1^k g_j \mathbf{u}_j + \sum_1^{d-k} b_j \mathbf{w}_j + \sum a_j \mathbf{v}_j, \quad (9)$$

where a_j, b_j and g_j are scalars, and

$$a_j = (N\mathbf{y}, \mathbf{v}_j), \quad b_j = \frac{1}{c_j} (C\mathbf{y}, \mathbf{w}_j).$$

We use expansion (9) to solve the inhomogeneous problem (2) (longitudinal-transverse bending). Substituting (9) into (2), taking into account $C\mathbf{u}_j = 0, N\mathbf{u}_j = N\mathbf{w}_j = 0$, we obtain

$$-\sum_1^{d-k} b_j C\mathbf{w}_j - \sum a_j (C\mathbf{v}_j - P N\mathbf{v}_j) + \mathbf{q} = 0 \Rightarrow -\sum_1^{d-k} b_j C\mathbf{w}_j - \sum a_j (P_j - P) N\mathbf{v}_j + \mathbf{q} = 0. \quad (10)$$

Considering the left side of (10) as the total load applied to the points of the system, and calculating the work of this load on displacements $\mathbf{v}_j, \mathbf{w}_j$ and \mathbf{u}_j , we find

$$a_j = \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{v}_j)}{P_j - P}, \quad b_j = \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{w}_j)}{c_j}. \quad (11)$$

In addition, for the $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ the relations $(\mathbf{q}, \mathbf{u}_j) = 0$ are satisfied as necessary conditions for the existence of a solution to Eq. (2). These conditions are also sufficient, since together with conditions (11) they mean the equality to zero of the generalized forces corresponding to all generalized coordinates of the system S . This fact is an expression of the elementary result that a matrix equation $A\mathbf{y} = \mathbf{q}$ has a solution if and only if its right-hand side is orthogonal in the Euclidean sense to any solution of the equation $A^* \mathbf{y} = 0$, where A^* is the matrix transposed with respect to A .

If P coincides with one of the CRF P_j of the system S , its equilibrium, as can be seen from (11), is possible only if the load \mathbf{q} is orthogonal, $(\mathbf{q}, \mathbf{v}_j) = 0$, to all BMs corresponding to P_j . In this case, the system can have infinitely many equilibrium configurations, because,



as Eq. (2) shows, along with \mathbf{y} , the superposition of \mathbf{y} and any linear combination of all BMs corresponding to P_j satisfy (2).

1.4. Generalized constraint and generalized flexibility. We will say that one constraint is imposed on the system S if at some points of the system another elastic system is attached to it, which, for any joint displacements $\mathbf{y} = \mathbf{y}(M)$, acts on the system S with a load $\mathbf{R} = \mathbf{R}(M)$ proportional to some function $\mathbf{r} = \mathbf{r}(M)$ taken as a unit (basis); thus, in any position of the system $\mathbf{R} = -R\mathbf{r}$, where $\mathbf{r} = \mathbf{r}(M)$ does not depend on this position and is a characteristic of a particular constraint. In the case of a point support, the load $\mathbf{r} = \mathbf{r}(M)$ is one concentrated force applied at that point and equal in magnitude to the accepted unit of force.

Along with the spatial distribution $\mathbf{r} = \mathbf{r}(M)$ of the basis load, the constraint is characterized by the value of flexibility, which is determined from the following considerations.

Consider the constraint as a separate elastic structure with its own stiffness operator C' and load it with the force $\mathbf{R} = C'\mathbf{u}$, where $\mathbf{u} = \mathbf{u}(M)$ is the corresponding configuration of the constraint, which is not defined uniquely. If \mathbf{u} and \mathbf{v} are different configurations corresponding to the same loading $\mathbf{R} = C'\mathbf{u} = C'\mathbf{v}$, then due to self-adjointness (1) $(\mathbf{R}, \mathbf{u}) = (C'\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (C'\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (C'\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{R}, \mathbf{v})$, i.e. the work of the load \mathbf{R} on all the displacements it causes is the same. Since $(C'\mathbf{u}, \mathbf{u})$ represents twice the potential energy of the constraint at the position \mathbf{u} , this means that in all positions of the constraint caused by its loading \mathbf{r} (and generating a reactive load $-\mathbf{r}$), it has the same potential energy. Then in an arbitrary position \mathbf{u} $(\mathbf{R}, \mathbf{u}) = R(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = R^2(\mathbf{r}, R^{-1}\mathbf{u}) = \delta R^2$, where δ does not depend on this position and is equal to twice the potential energy of the constraint developing the basis reaction $-\mathbf{r}$. In this case, as we see, the numerical value of the reaction is equal to $R = (\mathbf{r}, \mathbf{u})/\delta$. In the case of a point elastic support, δ is equal to the work of a unit force on the displacement of the support caused by it, i.e. this displacement itself, which is called the flexibility of the support. Therefore, for a generalized constraint, we will call the value δ generalized flexibility and consider it as a characteristic of the stiffness of the constraint.

1.5. Influence of constraint on critical forces. The configuration \mathbf{y} of the system $S^{(1)}$ formed from S by the imposition of one constraint, at buckling, can be defined as the result of the action of a reactive load $\mathbf{R} = -R\mathbf{r}$, considered as external one, on the system S released from the constraint. According to (2)

$$-(C - PN)\mathbf{y} + \mathbf{R} = 0 \Rightarrow (C - PN)\mathbf{y} + R\mathbf{r} = 0, \quad R = (\mathbf{r}, \mathbf{y})/\delta. \quad (12)$$

The solution of this equation is sought in the form of a generalized expansion (9) by the eigenforms of the system S , whose substitution into (12) gives

$$a_j = -\frac{R(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j)}{P_j - P}, \quad b_j = -\frac{R(\mathbf{r}, \mathbf{w}_j)}{c_j}. \quad (13)$$

The presence of forms $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ in the expansion leads to the need to fulfill the relations $R(\mathbf{r}, \mathbf{u}_j) = 0$.

If for at least one j $(\mathbf{r}, \mathbf{u}_j) \neq 0$, there must be $R = (\mathbf{r}, \mathbf{y})/\delta = 0$ whence, on the basis of (12), follows $(C - PN)\mathbf{y} = 0$, i.e. \mathbf{y} coincides with one of the BMs of system S , and $P = P_j$ is the corresponding CRF. In this case, in expansion (9), the coefficients g_j must satisfy the condition $\sum_1^k g_j (\mathbf{r}, \mathbf{u}_j) = 0$. This implies that the spectra of $S^{(1)}$ and S coincide and the

multiplicity of P_j in the spectrum of $S^{(1)}$ is one less than its multiplicity in S (due to the reduction in the dimension of the set of special forms \mathbf{u}_j).

Thus, the appearance in the spectrum of the system $S^{(1)}$ of a CRF P that does not coincide with any of the CRFs of the system S is possible only at $R = (\mathbf{r}, \mathbf{y})/\delta \neq 0$, which requires that for all $j, j=1, \dots, k, (\mathbf{r}, \mathbf{u}_j) = 0$. In this case, each of the functions $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ satisfies equation (12) for any P and in expansion (9) the coefficients g_j can be arbitrary, and P is not less than $(k+1)$ -multiple CRF of the system $S^{(1)}$, which, together with \mathbf{y} , also corresponds to the forms $\mathbf{y} + \sum_1^k g_j \mathbf{u}_j$ for arbitrary g_j . If, in addition to the conditions $(\mathbf{r}, \mathbf{u}_j) = 0$, the equality $(\mathbf{r}, \mathbf{y}) = 0$ is satisfied, P coincides with one of the CRFs of S , and \mathbf{y} is one of the forms of the system S corresponding to it.

The value P is determined by the following equation of critical forces, which is obtained from the equality $R = (\mathbf{r}, \mathbf{y})/\delta$ if expansion (9) is substituted into it, taking into account relations (13), orthogonality $(C\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j) = (N\mathbf{w}_j, \mathbf{v}_i) = 0$, and the accepted normalization of \mathbf{v}_j

$$(-\mathbf{r}, R^{-1}\mathbf{y}) + \delta = 0 \Rightarrow \sum \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{v}_j)^2}{P_j - P} + \sum_1^{d-k} \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{w}_j)^2}{c_j} + \delta = 0, \quad (14)$$

where $(-\mathbf{r}, R^{-1}\mathbf{y})$ is the work of the basis reaction $-\mathbf{r}$ on the displacement (9) of the system S caused by it.

This equality defines the CRFs of $S^{(1)}$ that were not in the spectrum of S . As we see, for the existence of such CRFs, it is necessary that at least for one of the BMs $\mathbf{v}_j (\mathbf{r}, \mathbf{v}_j)$ be different from zero. We repeat that (14) is valid only at $(\mathbf{r}, \mathbf{u}_j) = 0$ for all $j, j=1, \dots, k$. If $U = V \cap W = 0$, this requirement is omitted.

If P , determined from (14), does not coincide with any of the CRFs P_j of the system S , then exactly one non-special form \mathbf{y} , determined from (9) and (13), corresponds to it up to a term of the form $\sum_1^k g_j \mathbf{u}_j$. Otherwise, from two linearly independent non-special BMs satisfying equation (12), one could compose a linear combination satisfying homogeneous equation (3). Therefore, if the multiplicity of P in the spectrum of $S^{(1)}$ is greater than $(k+1)$, P must be one of the CRFs P_i of the system S , which corresponds to a non-special BM, different from $\sum_1^k g_j \mathbf{u}_j$. In this case, the equality $(\mathbf{r}, \mathbf{v}_i) = 0$ must hold, because only in this case P_i can be the root of equation (14).

If the positions of the points in the undeformed configuration of the system under consideration are determined by the coordinate x , we can assume that $\mathbf{y} = \mathbf{y}(M) = \mathbf{y}(x)$. We assume that the displacements of the points of all rod elements are perpendicular to the undeformed rectilinear axis of each element, parallel to each other, as well as to the forces of all considered loadings \mathbf{q}, \mathbf{r} . If \mathbf{r} represents a concentrated force equal to one, applied at a point with coordinate s , then the work (\mathbf{r}, \mathbf{y}) is numerically equal to the displacement $y(s)$ of this point, provided that the direction of this unit force coincides with the accepted direction of positive displacements. In this case, (14) can be rewritten as

$$\Gamma(s, s, P) + \delta = 0 \Rightarrow \sum \frac{v_j^2(s)}{P_j - P} + \sum_1^{d-k} \frac{w_j^2(s)}{c_j} + \delta = 0, \quad (15)$$

where $\Gamma(s, s, P)$ is the deflection at a point s of the system S , compressed by the force P , caused by a unit concentrated transverse force applied at that point.

Moreover, the equalities $(r, u_j) = 0$ mean that $u_j(s) = 0$ for all j , i.e., s is the generalized node of all special forms u_1, \dots, u_k . This will be the case, for example, if the system S contains a continuous rod, longitudinally compressed along the entire length or part of it and supported in one or more of its cross sections on an elastic or rigid point support. In this case, in any of the forms u_1, \dots, u_k , if they exist, $u_j(x) \equiv 0$ on this rod. If $U = V \cap W = 0$, no restrictions are imposed on the position s of the support in (15).

Equation (15) allows us to get a number of general conclusions regarding the effect of the introduction of constraint on the spectrum of CRS. To this purpose, we represent the solution of equation (15) graphically.

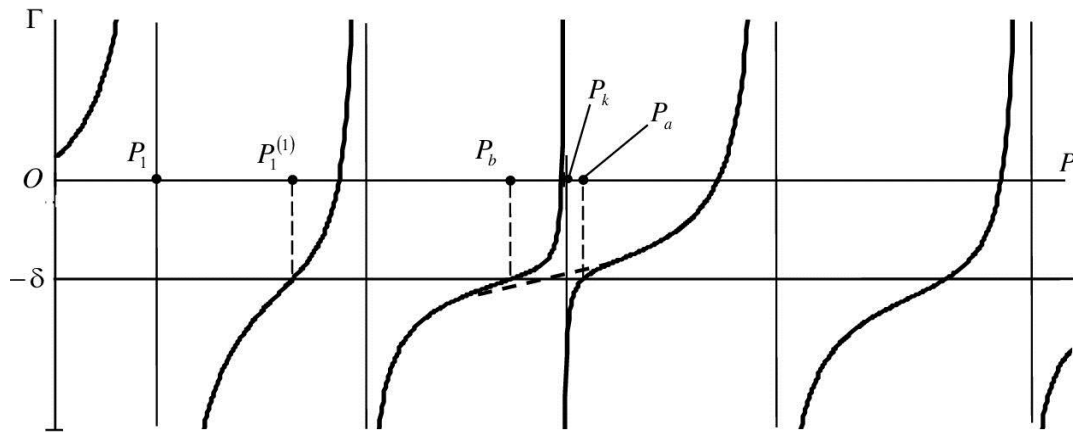


Fig. 1. Graphical representation of the solution of equation (15). $\Gamma = \Gamma(s, s, P)$

Let us focus only on the CRFs, which correspond to non-special BMs v_j . We divide the spectrum of the system S into two parts. In one we will include changeable CRFs (CCRFs) P_j , each of which corresponds to at least one BM, not orthogonal to the constraint, for which $(r, v_j) \neq 0$. The second includes unchangeable CRFs (UCRFs), which, together with the corresponding BMs, do not change after the introduction of constraint and are present in full in the spectrum of the system $S^{(1)}$. For them $(r, v_j) = 0$. The condition $(r, v_j) \neq 0$ means that CCRFs are poles of $\Gamma(s, s, P)$ as a function of P and on the graph (Fig. 1) they correspond to infinite discontinuities. If the CCRFs in the spectrum of the system S had multiplicity r , then in the spectrum of $S^{(1)}$ its multiplicity is equal to $r - 1$, since r linearly independent BMs v_j can be combined into $r - 1$ linearly independent combinations orthogonal to r .

The spectrum of the system $S^{(1)}$ contains all multiple CCRFs of the system S with a multiplicity one less than their multiplicity in S , all UCRFs of the system S with the same multiplicity as in S and, finally, all the roots of equation (15) (among which there cannot be CCRFs, but there may be UCRFs). Thus, the spectrum of the system $S^{(1)}$ is formed from the spectrum of S by decreasing the multiplicity of each CCRF by one and joining all the roots of equation (15). The number of CRFs of the system $S^{(1)}$ (calculated by their multiplicity) falling on a certain segment of the numerical axis is equal to the number of CRFs of the

system S on this segment minus the number of poles and plus the number of roots of the function $\Gamma(s, s, P) + \delta$. Let us denote $n(< P)$ the number of CRFs in the spectrum of the system S strictly less than P ; $n^{(1)}(< P)$ is the number of CRFs in the spectrum of the system $S^{(1)}$ strictly less than P .

The entire numerical axis P can be divided into three subsets. The first contains segments from zero to the first pole of $\Gamma(s, s, P)$ and from the roots of equation (15) to the nearest pole on the right, but does not include the ends of these segments. On them $\Gamma(s, s, P) + \delta > 0$. The second consists of poles of $\Gamma(s, s, P)$. The third contains segments from the poles to the nearest right root of equation (15) and includes these roots. On them $\Gamma(s, s, P) + \delta \leq 0$. It can be seen from the graph that for any P of the first and second subsets, the equality $n^{(1)}(< P) = n(< P)$ holds. On the third subset $n^{(1)}(< P) = n(< P) - 1$. The first subset can contain only UCRFs belonging to the spectra of systems S and $S^{(1)}$ with the same multiplicity, for which the equalities $P_j = P_j^{(1)} \Rightarrow P_j = P_j^{(1)} \leq P_{j+1}$ hold. The second contains all the CCRFs of the system S , taking into account their multiplicity, and the CRFs of the system $S^{(1)}$ equal to them with a multiplicity one less. They satisfy the relations $P_j = P_j^{(1)} = P_{j+1}$, if $P_j = P_{j+1}$ is a multiple CCRF, and $\Rightarrow P_j \leq P_j^{(1)} < P_{j+1}$, if P_{j+1} is a simple CCRF. The third one contains the CRFs belonging to both systems with the same multiplicity, but with a changed numbering, so $P_j^{(1)} = P_{j+1} \Rightarrow P_j \leq P_j^{(1)} = P_{j+1}$. In addition to them, the third subset includes all the roots of equation (15). These roots $P_j^{(1)}$ satisfy the relation $P_j < P_j^{(1)} \leq P_{j+1}$.

Thus, in all cases CRFs of system $S^{(1)}$ satisfy the well-known estimates [15]

$$P_j \leq P_j^{(1)} \leq P_{j+1}, \tag{16}$$

that establish the boundaries of their change due to the imposition of the constraint. From them, in particular, it follows that the CRF of the system $S^{(1)}$ cannot exceed the next by number CRF of the system S . When studying the conditions for the maximum increase of the CRF, the following statements, which follow from the previous considerations, are useful.

A. If at least one of the BMs of the system S corresponding to CRF P_{j+1} is not orthogonal to the constraint, strict inequality $P_j^{(1)} < P_{j+1}$ is satisfied.

B. For the maximum increase of the j -th CRF, $P_j^{(1)} = P_{j+1}$, it is necessary that the constraint be orthogonal to each BM corresponding to the $(j+1)$ -th CRF of the system S .

The above arguments and conclusions are of a general nature and remain valid if we substitute $(-r, R^{-1}y)$ instead of $\Gamma(s, s, P)$ in them and consider equation (14) instead of (15).

1.6. Changing of the CRF when moving the constraint. Relation (15) makes it possible to trace the change of the critical force P of the system $S^{(1)}$ when the position s of the introduced support changes. Let us differentiate (15) with respect to s

$$2 \sum \frac{v_j(s)v_j'(s)}{P_j - P} + \left[\sum \frac{v_j^2(s)}{(P_j - P)^2} \right] \frac{\partial P}{\partial s} + 2 \sum_1^{d-k} \frac{w_j(s)w_j'(s)}{c_j} = 0. \tag{17}$$

At buckling of the system $S^{(1)}$ in form y , its point, which has the coordinate x , according to (9) receives displacement

$$y(x) = \sum_1^k g_j u_j(x) + \sum_1^{d-k} b_j w_j(x) + \sum a_j v_j(x).$$

In those areas where $u_j(x) \equiv 0$, this displacement and the slope $y'(x)$ of the section x , taking into account (13), are equal, respectively

$$y(x) = \sum_1^{d-k} b_j w_j(x) + \sum a_j v_j(x) = -R \left[\sum_1^{d-k} \frac{w_j(s)}{c_j} w_j(x) + \sum \frac{v_j(s)}{P_j - P} v_j(x) \right],$$

$$y'(x) = -R \left[\sum_1^{d-k} \frac{w_j(s)}{c_j} w'_j(x) + \sum \frac{v_j(s)}{P_j - P} v'_j(x) \right],$$

and on a support in s

$$y(s) = -R \left[\sum \frac{v_j^2(s)}{P_j - P} + \sum_1^{d-k} \frac{w_j^2(s)}{c_j} \right], \quad y'(s) = -R \left[\sum_1^{d-k} \frac{w_j(s)}{c_j} w'_j(s) + \sum \frac{v_j(s)}{P_j - P} v'_j(s) \right]. \quad (18)$$

As well

$$(Ny, y) = \left(N \sum a_j v_j, \sum a_j v_j \right) = \sum a_j^2 = \sum \frac{R^2 (r, v_j)^2}{(P_j - P)^2} = R^2 \sum \frac{v_j^2(s)}{(P_j - P)^2}. \quad (19)$$

This allows us to rewrite (17) as

$$\frac{(Ny, y)}{R^2} \frac{\partial P}{\partial s} - 2 \frac{y'(s)}{R} = 0,$$

whence

$$\frac{\partial P}{\partial s} = 2 \frac{Ry'(s)}{(Ny, y)}. \quad (20)$$

The form y is determined up to a constant factor, which can be chosen so that the equality $(Ny, y) = 2$ holds. Then (20) takes the form

$$\frac{\partial P}{\partial s} = Ry'(s) \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial s} = cy(s)y'(s), \quad (21)$$

where $c = 1/\delta$ is the stiffness coefficient of the introduced support.

Result (21) was known and used earlier for a more bounded class of rod systems [7–12].

Generally speaking, it is not valid if the critical force P is a multiple, since in this case the corresponding BM $y(x)$ and its derivative $y'(x)$ are not uniquely defined.

Relation (21) represents the derivative of that CRF, which is the root of equation (15). As noted, the system $S^{(1)}$ can also have CRFs equal to some critical forces of the system S , provided that the movable support falls in the node s_0 of the corresponding BM of rod S , i.e. P_k at $v_k(s_0) = 0$ (don't confuse k and $\dim U$). For them, relation (21) is also valid if P_k is not a root of equation (15). In this case, relation (17) is not valid, because when the coordinate s changes, not only the root changes, but also the form of the equation of CRFs (see (15))

$$\sum_{j \neq k} \frac{v_j^2(s)}{P_j - P} + \frac{v_k^2(s)}{P_k - P} + \sum_1^{d-k} \frac{w_j^2(s)}{c_j} + \delta = 0. \quad (22)$$

It follows from it

$$\frac{v_k^2(s)}{P - P_k} = \left[\frac{v_k^2(s) - v_k^2(s_0)}{s - s_0} \right] / \left[\frac{P - P_k}{s - s_0} \right] = \sum_{j \neq k} \frac{v_j^2(s)}{P_j - P} + \sum_1^{d-k} \frac{w_j^2(s)}{c_j} + \delta.$$

Passing to the limit at $s \rightarrow s_0$, we get the equality

$$\frac{2v_k(s_0)v_k'(s_0)}{P'(s_0)} = \sum_{j \neq k} \frac{v_j^2(s_0)}{P_j - P_k} + \sum_1^{d-k} \frac{w_j^2(s_0)}{c_j} + \delta = \Gamma(s, s, P) + \delta \neq 0,$$

where the prime denotes the derivative with respect to s . It follows from it that $P'(s_0) = 0$, in accordance with equality (21), which thus shows that the optimal positions of the movable support should be sought among those points of the system at which the displacement $y(x)$ or slope $y'(x)$ vanishes.

The multiplicity of the CRF in the system $S^{(1)}$ arises, in particular, when equation (15) has a root equal to one of the CRFs P_k of the system S . As stated above, in this case the support must be in the node s_0 of BM v_k . Subtracting (15) from (22) and dividing by $(P_k - P)$, we get

$$\begin{aligned} \frac{v_k^2(s)}{(P_k - P)^2} &= -\frac{1}{P_k - P} \left[\sum_{j \neq k} \frac{v_j^2(s)}{P_j - P} - \sum_{j \neq k} \frac{v_j^2(s_0)}{P_j - P_k} \right] - \frac{1}{P_k - P} \left[\sum_1^{d-k} \frac{w_j^2(s) - w_j^2(s_0)}{c_j} \right] = \\ &= -\frac{1}{P_k - P} \left[\sum_{j \neq k} \frac{v_j^2(s_0)}{P_j - P} - \frac{v_j^2(s_0)}{P_j - P_k} \right] - \frac{1}{P_k - P} \left[\sum_{j \neq k} \frac{v_j^2(s) - v_j^2(s_0)}{P_j - P} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{P_k - P} \left[\sum_1^{d-k} \frac{w_j^2(s) - w_j^2(s_0)}{c_j} \right] \Rightarrow \\ \frac{v_k^2(s)}{(P_k - P)^2} &= \sum_{j \neq k} \frac{v_j^2(s_0)}{(P_j - P)(P_j - P_k)} - \frac{1}{P_k - P} \left\{ \left[\sum_{j \neq k} \frac{v_j^2(s) - v_j^2(s_0)}{P_j - P} \right] + \left[\sum_1^{d-k} \frac{w_j^2(s) - w_j^2(s_0)}{c_j} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

When the support is moved from s_0 to s , instead of a multiple CRF P_k , two different CRFs $P_k^{(1)} = P_b$ and $P_{k+1}^{(1)} = P_a$, $P_a > P_k > P_b$, appear (see Fig. 2), which correspond to BM y_k and y_{k+1} , satisfying the orthogonality condition taking into account (13)

$$(Ny_k, y_{k+1}) = \sum \frac{v_j^2(s)}{(P_j - P_b)(P_j - P_a)} = \sum_{j \neq k} \frac{v_j^2(s)}{(P_j - P_b)(P_j - P_a)} + \frac{v_k^2(s)}{(P_k - P_b)(P_k - P_a)} = 0,$$

whence

$$\frac{v_k^2(s)}{(P_k - P_b)(P_k - P_a)} = -\sum_{j \neq k} \frac{v_j^2(s)}{(P_j - P_b)(P_j - P_a)}. \quad (24)$$

When $s \rightarrow s_0$, P_b and P_a tend to P_k , $v_k^2(s)/(s - s_0)^2 \rightarrow v_k'^2(s_0)$, the first term on the right side of (23), taking into account (24), has a limit equal to $-v_k'^2(s_0)/P_b'P_a'$, where P_b' and P_a' are the one-sided derivatives with respect to s of P_b and P_a , respectively, equal to



$$P'_a = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{P_a - P_k}{s - s_0}, \quad P'_b = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{P_b - P_k}{s - s_0}.$$

From (24), taking into account (19), the relation follows

$$\frac{v_k'^2(s_0)}{P'_b P'_a} = - \sum_{j \neq k} \frac{v_j^2(s_0)}{(P_j - P_k)^2} = - \frac{(Ny, y)}{R^2}, \quad (25)$$

where y is that of the BMs of the system $S^{(1)}$ at the location of the support at the node of the BM v_k corresponding to the CRS P_k , in the expansion of which (9) due to (13) there is no term $a_k v_k$. It means that $(Ny, v_k) = 0$.

The sum in (25) is equal to the derivative with respect to P of the deflection of the system $S^{(1)}$ on the support placed at the node of the BM v_k , at $P = P_k$ and $R = 1$. It is equal to the tangent of the slope of the graph in Fig. 1 at $P = P_k$ and without discontinuity (see dashed line), i.e. at $s = s_0$.

Substituting $P = P_a$ into (23) and passing to the limit at $s \rightarrow s_0$, we obtain, taking into account (25) and (18),

$$\frac{v_k'^2(s_0)}{P_a'^2} = - \frac{v_k'^2(s_0)}{P'_b P'_a} - \frac{2y'(s_0)}{R P'_a}. \quad (26)$$

From (25) and (26) we obtain the equalities

$$P'_b + P'_a = \frac{2Ry'(s_0)}{(Ny, y)}, \quad P'_b P'_a = - \frac{R^2 v_k'^2(s_0)}{(Ny, y)}, \quad (27)$$

which make it possible to determine P'_b and P'_a . They replace relation (20) in the case of a multiple CRF P when it loses its meaning due to the non-uniqueness of y . We repeat that in relations (27) one should use the form y orthogonal to all BMs v_k of the system S corresponding to P_k , $(Ny, v_k) = 0$. They take the simplest form if we accept the normalization condition $(Ny, y) = 1$. In this case, P'_b and P'_a are defined by the expressions $R \left[y'(s_0) \pm \sqrt{y'^2(s_0) + v_k'^2(s_0)} \right]$.

Remark. The reasoning and conclusions made above regarding the CRFs of the system S equal to or different from the roots of equation (15) remain valid even in the case of their multiplicity in the system S . In this case, in all relations, starting from (22), one should write $\sum v_k^2(s)$ instead of $v_k^2(s)$ and $\sum v_k'^2(s)$ instead of $v_k'^2(s)$, where the sums apply to all BMs corresponding to a multiple CRF.

The next section demonstrates applications of some of the results obtained.

2. Maximum increase of the stability of an elastically supported two-span rod.

Further, as a system S , we consider an elastic rectilinear rod with a length equal to ℓ , of an arbitrary variable cross-section, freely supported at the ends on elastic supports with stiffness coefficients c_1 and c_2 accordingly, compressed by a longitudinal force constant along the length (Fig. 2 a).

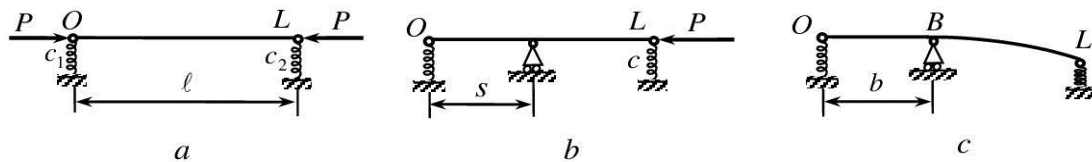


Fig. 2. Rods $OL(c_1, c_2)$ (a), $OL^{(1)}(s, c_1, c_2)$ (b) and semi-curved BM (c)

We are looking for such an optimal position of the intermediate rigid hinged support, at which the CRF of the rod reinforced with the intermediate support (Fig. 2 b) reaches its maximum value P_{MAX} .

The following notations are used:

$OL(c_1, c_2)$ – rectilinear elastic rod, the ends O and L of which are hinged on elastic supports with stiffness coefficients c_1 and c_2 respectively (Fig. 2 a);

$GH(c_1, c_2)$ – a rod formed from $OL(c_1, c_2)$ by removing segments OG and HL respectively from the left and right, and supported as $OL(c_1, c_2)$;

$GH^{(1)}(s, c_1, c_2)$ – a rod formed from $GH(c_1, c_2)$ by introducing an additional absolutely rigid hinged support at a distance s from the left end;

$GH_0^{(1)}(s, c_1, c_2)$ – a rod formed from $GH^{(1)}(s, c_1, c_2)$ by introducing a cut on an intermediate support.

$P_j[*]$ – j -th CRF of rod *.

In [8], the problem posed was solved for the particular case $c_1 = \infty$. In this case, the desired optimal position and the corresponding BM depend on the value c_2 of the rigidity of the elastic support, and for some of its values, the maximum of CRF is realized at a special semi-curved BM, in which part of the rod remains straight and horizontal (Fig. 2 c). The conjugation point B of the horizontal and curved sections is determined by the equalities

$$c_2 \cdot BL = c_2(\ell - b) = P_1[BL(\infty, \infty)], \quad P_{MAX} = c_2(\ell - b). \quad (28)$$

Since an undeformed section remains to the left of the conjugation point when buckling along a semi-curved shape, it is possible to install or remove an arbitrary number of constraints on it that do not change this shape. The decrease of the rigidity of the left support from to is just such a removal, retaining the semi-curved BM and corresponding to it CRF, but possibly changing (increasing by 1) its number in the spectrum.

We designate A – the node of the 2nd BM of the rod $OL(\infty, \infty)$, supported at the ends on absolutely rigid supports, located at a distance $a = OA$ from the left support.

The spectrum of CRFs and the corresponding BMs of the rod $OL(c_1, c_2)$ contains all CRFs P_1, P_2, \dots and BMs of the rod $OL(\infty, \infty)$ supported at the ends on absolutely rigid supports, and, in addition to them, one special CRF P^* , which corresponds to a rectilinear BM with a node A^* located at a distance a^* from the left support, at that

$$P^* = \frac{\ell}{1/c_1 + 1/c_2}, \quad a^* = \frac{c_2 \ell}{c_1 + c_2}. \quad (29)$$

These relations, as well as their inversion

$$c_1 = P^*/a^*, \quad c_2 = P^*/\ell - a^*, \quad (30)$$

allow us to consider P^* and a^* as parameters that characterize the elastic fixing of the rod as fully as the coefficients c_1 and c_2 , and in the mathematical sense are a change of variables.

Let's agree to be located so that the node A^* of a special (rectilinear) BM is located not to the right of A , i.e., so that $a^* \leq a$ is always satisfied.

We introduce the notation

$$P_M = P_2 \frac{\ell - a^*}{\ell - a}, \quad P_M \geq P_2. \quad (31)$$

When looking for P_{MAX} , we consider the following cases.

Case 1. $P^* > P_M$. Let's place an intermediate support in the node A and consider the rod $OL_0^{(1)}(a, c_1, c_2)$. Its spectrum consists of the spectra of its two parts $OA(c_1, \infty)$ and $AL(\infty, c_2)$, each of which contains a force P_2 and one special CRF $c_1 a$ and $c_2(\ell - a)$, in addition

$$c_1 a \geq c_1 a^* = P^* > P_M \geq P_2, \quad (32)$$

$$c_2(\ell - a) = P^* \frac{\ell - a}{\ell - a^*} = P^* \frac{P_2}{P_M} > P_2, \quad (33)$$

i.e. both special CRFs are greater than P_2 , whence it follows that after the imposition of a constraint that eliminates the cut, the force P_2 (which was 2-multiple and main in the spectrum of the rod $OL_0^{(1)}(a, c_1, c_2)$) will remain CRF of the rod $OL^{(1)}(a, c_1, c_2)$, i.e. $P_1^{(1)} = P_2 = P_{MAX}$ (by virtue of (16)) when placing the support in the node A of the second BM of the rod $OL(\infty, \infty)$. Other positions of the support (other than A) are not nodes of the second BM of the rod $OL(c_1, c_2)$ and, by virtue of statement A (Sec. 1.5), cannot provide the maximum critical force P_2 .

Case 2. $P^* = P_M$. Inequality (32) remains valid, i.e. $c_1 a \geq P^* \geq P_2$, and in (33) the sign “>” changes to “=”. P_2 remains the main CRF of the cut rod $OL_0^{(1)}(a, c_1, c_2)$, and at least 3-multiple. After the cut is eliminated, it will be at least 2-multiple the main CRF in the spectrum of the rod $OL^{(1)}(a, c_1, c_2)$, i.e. the optimal location of the intermediate support is the same as in case 1, and $P_{MAX} = P_2$.

Case 3. $P_1 < P^* < P_M$. The left inequality means that $c_2 \ell \geq c_2(\ell - a^*) = P^* > P_1$. The right one leads to $c_2(\ell - a^*) < P_2(\ell - a^*/\ell - a) \Rightarrow c_2 < P_2/(\ell - a)$. Both inequalities lead to the conclusion that there is a unique solution to the equation

$$c_2(\ell - x) = P_1[XL(\infty, \infty)], \quad (34)$$

where X is the cross-section of the rod at a distance $x = OX$ from its left end. This can be seen from the fact that in (34) the left side increases, and the right side decreases at x decreasing, i.e. when moving the cross-section X to the left. This solution $x = b$ satisfies the inequality $0 < b < a$. It was established in [8] that when an intermediate support is installed in a position B at a distance b from the left support, there is a semi-curved BM (Fig. 2 c), which corresponds to CRF P_B equal to

$$P_B = c_2 \cdot BL = c_2(\ell - b) = P_1[BL(\infty, \infty)] < P_1[AL(\infty, \infty)] = P_2. \quad (35)$$

This BM has a zero slope on the support B , which is a necessary condition for the extremum of the corresponding CRF (see (21)). It was proved in [8] that for other positions of the intermediate support, the slope of the main BM on the support cannot be zero. Since $P_B = P_1[BL(\infty, \infty)]$ is the CRF of the rod, shorter than $OL(\infty, \infty)$, the inequality $P_B > P_1 = P_1[OL(\infty, \infty)]$ is fulfilled, from which the estimates $P_B > P_1[OL(c_1, \infty)]$ and $P_B > P_1[OL(\infty, c_2)]$ follow, whence it follows that P_B cannot be the minimum of the main CRF of the rod $OL^{(1)}(s, c_1, c_2)$ as a function of the position s of the intermediate support. In addition to B , the node A^* of the rectilinear BM of the rod $OL(c_1, c_2)$ also satisfies the extremum condition for $P_1[OL^{(1)}(s, c_1, c_2)]$, since when the support is placed in A^* , its reaction at buckling in this BM is zero. Depending on the relative position of the sections A^* and B , the following relations hold:

$$b > a^* \Rightarrow P_B = c_2(\ell - b) < c_2(\ell - a^*) \Rightarrow P_B < P^* \Rightarrow P_B \text{ is the main CRF of } OL^{(1)}(b, c_1, c_2), \quad (36)$$

$$b = a^* \Rightarrow P_B = c_2(\ell - b) = c_2(\ell - a^*) \Rightarrow P_B = P^* \text{ is the main multiple CRF of } OL^{(1)}(b, c_1, c_2), \quad (37)$$

$$b < a^* \Rightarrow P_B = c_2(\ell - b) > c_2(\ell - a^*) \Rightarrow P_B > P^* \Rightarrow P_B \text{ is not the main CRF of } OL^{(1)}(b, c_1, c_2). \quad (38)$$

In combination with conditions $P_1 < P_B < P_2$, relations (36) show that when the point B of conjugation of the semi-curved BM is located between A and A^* this point provides the maximum CRF equal to $P_{MAX} = P_B$.

If B and A^* coincide, according to (37) and (35) $P^* = P_B < P_2$ and there are two linearly independent BMs – semi-curved and rectilinear, corresponding to CRF equal to $P_{MAX} = P_B = P^*$.

If B is to the left of A^* , then, as can be seen from (38), P_B will be greater than P^* , which is the second in the spectrum of $OL(c_1, c_2)$. Therefore, P_B cannot be the main CRF in $OL^{(1)}(s, c_1, c_2)$. Let's place a support in A^* and consider a cut rod $OL_0^{(1)}(a^*, c_1, c_2)$. Its left segment OA^* is shorter than OA . Therefore, $P_1[OA^*(\infty, \infty)] > P_1[OA(\infty, \infty)] = P_2 > P_B > P^*$. The right segment A^*L is shorter than BL , whence $P_1[A^*L(\infty, \infty)] > P_1[BL(\infty, \infty)] = P_B$. Thus, the cut rod $OL_0^{(1)}(a^*, c_1, c_2)$ has a 2-multiple main CRF equal to P^* , which corresponds to two BMs, with inclined straight sections OA^* and A^*L . After eliminating the cut in A^* , a rod $OL^{(1)}(a^*, c_1, c_2)$ is formed with the main CRF equal to P^* . Since it was second in the spectrum of $OL(c_1, c_2)$, $P_{MAX} = P^*$. There can be no other optimal positions of the intermediate support, since the necessary condition (21) of the extremum of CRF is not satisfied anywhere else.

Case 4. $P^* = P_1$. CRF $P^* = P_1$ is 2-multiple in the spectrum of rod $OL(c_1, c_2)$ and, by virtue of (16), after the introduction of a support at any point s of the rod, CRF of rod $OL^{(1)}(s, c_1, c_2)$ is equal to $P_{MAX} = P_1^{(1)} = P_1 = P^*$. The corresponding BM is a linear combination of the BM $v_1(x)$ of rod $OL(\infty, \infty)$ and the rectilinear BM of rod $OL(c_1, c_2)$ and can be expressed explicitly up to a constant factor

$$y(x) = (s - a^*)v_1(x) - v_1(s)(x - a^*). \quad (39)$$

Case 5. $(P_1/2) \leq P^* < P_1$. Due to (16), the desired maximum $P_{MAX} \leq P_1$. The condition



$P^* \geq (P_1/2)$ implies the inequality

$$\frac{1}{P^*} = \frac{1}{c_1 \ell} + \frac{1}{c_2 \ell} \leq \frac{2}{P_1}, \quad (40)$$

from which it follows that at least one of the numbers $c_1 \ell$, $c_2 \ell$ is greater than or equal to P_1 . These numbers are the special CRFs of rods $OL(c_1, \infty)$ and $OL(\infty, c_2)$ formed from $OL(c_1, c_2)$ by setting a rigid support in L and O , respectively. The spectrum of each of them consists of the spectrum of the rod $OL(\infty, \infty)$ and one of the special CRFs, which corresponds to a rectilinear BM. The optimal position of the movable support is that of the two points L and O , which provides the value of the special CRF greater than or equal to P_1 , or both of these points, if each of the numbers $c_1 \ell$, $c_2 \ell$ is not less than P_1 . In this case, $P_{MAX} = P_1$ is reached, which corresponds to the main BM of the rod $OL(\infty, \infty)$ (and, possibly, a special one, if one of the numbers $c_1 \ell$, $c_2 \ell$ is equal to P_1). There are no other optimal positions, because other positions are not nodes of this BM.

Case 6. $P^* < (P_1/2)$. If one of the numbers $c_1 \ell, c_2 \ell$ exceeds or equals P_1 , all the conclusions of case 5 remain valid, in particular, $P_{MAX} = P_1$ when installing a support at one of the ends of the rod. Otherwise, consider a cut rod $OL_0^{(1)}(s, c_1, c_2)$ with an arbitrary location of the intermediate support at a distance s from the support O . It has two CRFs $c_1 s$ and $c_2(\ell - s)$, which correspond to special BMs, in which one of the segments to the right or left of the support rotates, remaining straight. Each of these CRFs, due to the inequalities $c_1 s < c_1 \ell$, $c_2(\ell - s) < c_2 \ell$ is less than the largest of the numbers $c_1 \ell$, $c_2 \ell$, less than P_1 . The remaining CRFs are CRFs of rods that are shorter than $OL(\infty, \infty)$, and therefore they exceed P_1 . Thus, $c_1 s$ and $c_2(\ell - s)$ are the lowest CRFs in the spectrum of the rod $OL_0^{(1)}(s, c_1, c_2)$. After the cut is eliminated, a rod $OL^{(1)}(s, c_1, c_2)$ is formed whose main CRF does not exceed the value of the highest of the numbers $c_1 s < c_1 \ell$, $c_2(\ell - s) < c_2 \ell$. At the same time, the values $c_1 \ell$ and $c_2 \ell$ realise when the support is installed at the right and left ends of the rod, respectively. Thus, in the considered case $P_{MAX} = \max\{c_1 \ell, c_2 \ell\}$, and the optimal position of the support is the right end L of the rod, if $c_1 > c_2$, the left end O , if $c_1 < c_2$, and any of them, if $c_1 = c_2$.

5 RESEARCH RESULTS DISCUSSION

The presented results make it possible to study the stability of a wide class of rod systems, including mechanisms. They show that even with such an extended approach, against the background of a multiplicity of equilibrium positions, one can speak of a discrete spectrum of critical forces and buckling modes in the traditional sense, which makes it possible to apply the expansion of system configurations by these modes. Note that the introduction of a constraint significantly changes the critical forces and buckling modes only if the constraint is orthogonal to all special forms. In the case of a constraint in the form of a concentrated hinge support, this orthogonality can only be ensured when it is installed in some parts of the system. In most cases, in practice, there are systems that do not have special forms. For them, the results of the work can be applied without limitations.

6 CONCLUSIONS

In the work, the influence of the introduction of a constraint on the stability of rod systems is studied. The study made it possible to draw a number of qualitative conclusions regarding the results of such reinforcement. Based on them, simple qualitative features of optimal locations for imposed constraint are formulated that provide the maximum critical force of the enhanced system. This makes it possible in many cases to determine these positions practically without calculations, which is demonstrated by the example of a rod hinged at the ends on elastic supports and reinforced with an intermediate hinged support. Note that for certain values of the stiffness coefficients of the end supports, the optimal rod buckles at loss of stability in a special semi-curved mode, in which one of the spans remains straight. Although special attention is paid to the constraint in the form of a concentrated hinge support, the results obtained allow us to consider generalized constraints with an arbitrary spatial distribution of reactive forces. Corresponding generalizations will be the subject of further research.

References

- 1 Rozvany, G. I. N., Lewiński, T. (eds) (2014). *Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics*. CISM International Centre for Mechanical Sciences – Springer.
- 2 Bazhenov, V. A., Vorona, Yu. V., Perel'muter, A. V. (2016). *Budivel'na mekhanika I teoriya sporud. Narysy zi storii* [Structural mechanics and theory of structures. Essays on history]. K.: Karavela. [in Ukrainian].
- 3 Perel'muter, A.V. (2016). Zadachi sinteza v teorii sooruzheniy (Kratkiy istoricheskiy obzor) [Problems of synthesis in the theory of structures (Brief historical review)]. *Vestnik TSABU*. 2(55), 70–106. [in Russian].
- 4 Prager, W., Rozvany, G. I. N. (1975). Plastic Design of Beams: Optimal Location of Supports and Steps in the Yield Moment. *Int. J. Mech. Sci.* 17(12). 627–631.
- 5 Mróz, Z., Rozvany, G. I. N. (1975). Optimal Design of Structures with Variable Support Conditions. *J. Optim. Theory and Appl.* 15(1). 85–101.
- 6 Olhoff, N., Niordson, F. I. (1979). Some Problems Concerning Singularities of Optimal Beams and Columns. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. 59(3). T16–T26.
- 7 Nudelman, Ya. L., Giterman, D. M., Bekshaev, S. Y. (1976). Vliyanie raspolozheniya uprugih opor na prodol'ny izgib mnogoproliotnogo sterzhnya [Influence of location of elastic supports on buckling of multispan bar]. Abstract information on the completed scientific research in the universities of the Ukrainian SSR. *Structural mechanics and design of structures*. 7. 18. [in Russian].
- 8 Bekshaev, S. Ya. (2015). Ob optimal'nom raspolozhenii promezhutochnoy opory prodol'no szhatogo sterzhnya [On the optimal location of the intermediate support of longitudinally compressed bar]. *Visnyk Odes'koj derzhavnoji akademiji budivnytva ta arkhitektury*. 60. 400 – 406. [in Russian].
- 9 Bekshaev, S. Ya. (2016). Poluizognutye formy poteri ustojchivosti I ih ekstremal'nye svoystva [Semi-curved forms of buckling and its extremal properties]. Contemporary problems of natural sciences. Abstr. of 5-th international scientific conference “Tarapov readings – 2016”. Kharkov. 81 –82. [in Russian].
- 10 Bekshaev, S. Ya. (2016). Poluizognutye formy poteri ustojchivosti v zadache optimizacii szhatogo trjohproliotnogo sterzhnya [Semi-curved forms of buckling in the problem of optimization of compressed three-span rod]. *Visnyk NTUU “KPI”. Ser. Mashinobuduvannya*. 2 (77). 132 – 139. [in Russian].
- 11 Bekshaev, S. Ya. (2019). Ob optimal'nom polozhenii promezhutochnoj opory trehproliotnogo sterzhnya [On the optimal position of the intermediate support of a three-span rod]. *Materialy XX mizhnarodnoinukovo-technichnoikonferencii “Progresivnatehnika, tehnologiya ta inzhenernaosvita”*, 23 – 25. [in Russian].
- 12 Bekshaev, S. (2022). On the optimal position of the intermediate support of the compressed three-span rod and its qualitative features. *Mechanics and Mathematical Methods*. 4(1). 96–106.

- 13 Bernstein, Dennis S. (2009). *Matrix mathematics: theory, facts, and formulas*. Princeton University Press. 2nd ed.
- 14 Gantmacher, F. R. (1967). *Theory of matrices*. М.: Nauka. [in Russian].
- 15 Nudelman, Ya. L. (1949). *Metody opredelenia sobstvennykh chastot i kriticheskikh sil dlya sterzhnevyyh system* [Methods of determination of natural frequencies and critical forces of bar systems]. М. - Л.: GTTI. [in Russian].

Література

1. Rozvany G. I. N., Lewiński T. (Eds). *Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics – CISM International Centre for Mechanical Sciences – Springer*, 2014. 471 p.
2. Баженов В. А., Ворона Ю. В., Перельмутер А. В. Будівельна механіка і теорія споруд. Нариси з історії. К.: Каравела, 2016. 428 с.
3. Перельмутер А. В. Задачи синтеза в теории сооружений (Краткий исторический обзор). Вестник ТГАСУ 2(55), 2016. С. 70–106.
4. Prager W., Rozvany G. I. N. Plastic Design of Beams: Optimal Location of Supports and Steps in the Yield Moment. *Int. J. Mech. Sci.*, 1975. Vol. 17. No. 12. pp. 627–631.
5. Mróz Z., Rozvany G. I. N. Optimal Design of Structures with Variable Support Conditions. *J. Optim. Theory and Appl.*, 1975. Vol. 15, No. 1. pp. 85–101.
6. Olhoff N., Niordson F. I. Some Problems Concerning Singularities of Optimal Beams and Columns. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1979. В. 59. Н. 3. S. T16–T26.
7. Нудельман Я. Л., Гитерман Д. М., Бекшаев С. Я. Влияние расположения упругих опор на продольный изгиб многопролетного стержня. «Реферативная информация о законченных научно-исследовательских работах в вузах Украинской ССР. Строительная механика и расчет сооружений». Киев: «Вища школа», 1976. Вып. 7. С. 18.
8. Бекшаев С. Я. Об оптимальном расположении промежуточной опоры продольно сжатого стержня. Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Одеса, 2015. Вип. №60. С. 400 – 406.
9. Бекшаев С. Я. Полуизогнутые формы потери устойчивости и их экстремальные свойства. Тезисы докладов 5-й международной научной конференции «Современные проблемы естественных наук «Тараповские чтения – 2016», Харьков, 1 – 15 марта 2016 г. С. 80 – 81.
10. Бекшаев С. Я. Полуизогнутые формы потери устойчивости в задаче оптимизации сжатого трехпролетного стержня. Вісник НТУУ «КПІ». Серія машинобудування, 2016. №2 (77). С. 132 – 139.
11. Бекшаев С. Я. Об оптимальном положении промежуточной опоры трехпролетного стержня. Матеріали ХХ міжнародної науково-технічної конференції «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта». 10 – 13 вересня 2019 р. м. Київ – м. Херсон, 2019. С. 23 – 25.
12. Bekshaev S. On the optimal position of the intermediate support of the compressed three-span rod and its qualitative features. *Mechanics and Mathematical Methods*, 2022. 4 (1). p. 96–106.
13. Bernstein, Dennis S. *Matrix mathematics: theory, facts, and formulas*. Princeton University Press, 2009. 2nd ed. XXXIX+1059 pp.
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.
15. Нудельман Я. Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем. М.-Л.: ГТТИ, 1949. 176 с.

Sergey Bekshaev

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Senior Lecturer
Didrihsona str., 4, Odessa, Ukraine, 65029, s.bekshayev@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5752-5321

For references:

Bekshaev S. (2022). Some problems of optimization of rod systems containing compressed elements using additional constraints. *Mechanics and Mathematical Methods*. 4 (2). 83–102.

Для посилань:

Бекшаев С. Я. Деякі задачі оптимізації стрижневих систем, що містять стиснуті елементи, із застосуванням додаткових в'язей. Механіка та математичні методи, 2022. Том 4. Вип. 2. С. 83–102.

Наукове видання

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ
MECHANICS AND MATHEMATICAL METHODS

Науковий журнал

(українською та англійською мовами)

Відповідальний за випуск: Ковров А. В.

Підписано до друку 09.01.2023 р.
Формат 60×84/8 Папір офісний Гарнітура Times
Цифровий друк. Ум.-друк. арк. 11,97.
Наклад 50 прим. Зам. №23-1Е

Видавець і виготовлювач:
Одеська державна академія будівництва та архітектури
Свідоцтво ДК № 4515 від 01.04.2013 р.
Україна, 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 4.
тел.: (048) 729-85-34, e-mail: rio@ogasa.org.ua

Надруковано в авторській редакції з готового оригінал-макету
в редакційно-видавничому відділі ОДАБА