

ISSN 2618-0650 (Print)  
ISSN 2664-1364 (Online)

---

**Механіка**



**та математичні методи**

---

**Mechanics  
and Mathematical Methods**

**Науковий журнал  
The scientific journal**

**V/1/2023**

УДК 531 : 51-7 (05)  
M55

# МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

Науковий журнал



Засновник і видавець:

**Одеська державна академія будівництва та архітектури**

**Том V**  
**№1**  
**2023**

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: Серія КВ №23478–13318 Р від 13.07.2018 р.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
Серія ДК №4515 від 01.04.2013 р.

**M55**      **Механіка та математичні методи** : науковий журнал. — Одеса : ОДАБА, 2023. — Том V. — Вип. №1. — 120 с.

В науковому журналі публікуються статті і огляди за спеціальностями:

- 111 Математика;
- 112 Статистика;
- 113 Прикладна математика;
- 121 Інженерія програмного забезпечення;
- 122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології;
- 124 Системний аналіз;
- 131 Прикладна механіка;
- 192 Будівництво та цивільна інженерія.

---

**Рекомендовано до друку Вченою радою Одеської державної академії будівництва та архітектури, протокол №9 від 08.06.2023 р.**

---

**Адреса:**      редакція журналу «Механіка та математичні методи»  
Одеська державна академія будівництва та архітектури  
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029

**Телефони:** (048)723-23-10, (048)7323402, (048)7298626

**E-mail:** mmm@ogasa.org.ua

**Web:** mmm-journal.com.ua

---

УДК 531 : 51-7 (05)  
M55

ISSN 2618-0650 (Print)  
ISSN 2664-1364 (Online)

Одеська державна академія  
будівництва та архітектури, 2023

---

## Склад редакційної колегії:

**Головний редактор:** Ковров А. В., к.т.н., проф., ректор Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

**Заступники головного редактора:**

Крутії Ю. С., д.т.н., проф., проректор з науково-педагогічної роботи Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Сур'янінов М. Г., д.т.н., проф., завідувач кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

**Відповідальний секретар:** Кіосак В. А., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

- Бербюк В. Є. д.ф.-м.н., проф., професор кафедри механіки та морських наук, Технічний університет Чалмерса, Гетеборг, Швеція;
- Ватуля Г. Л., д.т.н., проф., професор кафедри будівельної механіки та гідравліки Українського державного університету залізничного транспорту, Харків, Україна;
- Горик О. В., д.т.н., проф., завідувач кафедри загальнотехнічних дисциплін Полтавської державної аграрної академії, Полтава, Україна;
- Карпюк В. М., д.т.н., проф., професор кафедри залізобетонних конструкцій та транспортних споруд Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Куріазопоулос А., к.т.н., доц., професор кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Кода Е., д.т.н., проф., декан факультету будівництва та інженерії середовища Варшавського природничого університету, Варшава, Польща;
- Кононов Ю. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач відділу теорії керуючих систем інституту прикладної математики та механіки НАН України, Слав'янск, Україна;
- Круглов В. Є., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри методів математичної фізики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна;
- Кучер М. К., д.т.н., проф., завідувач відділу конструкційних матеріалів інституту проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна;
- Лесечко О. В., к.ф.-м.н., доц., завідувач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Лещенко Д. Д., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри теоретичної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Ляшенко Т. В., д.т.н., проф., професорка кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Максимович О. В., д.т.н., проф., професорка кафедри зварювального виробництва, діагностики та відновлення металоконструкцій Національного університету "Львівська політехніка", Львів, Україна;
- Отрош Ю. А. д.т.н., проф., начальник кафедри пожежної профілактики в населених пунктах Національного університету цивільного захисту України, Харків, Україна;
- Пастернак Я. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна;
- Пневматікос Н., к.т.н., доц., доцент кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Савченко О. Г., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, Херсон, Україна;
- Трач В. М., д.т.н., проф., завідувач кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування, Рівне, Україна;
- Шваб'юк В. І., д.т.н., проф., професор кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна.

Технічний редактор: Головата Злата Олександрівна

Лінгвістичний радник з англійської мови: Мар'яно Яніна Георгіївна, к.ф.н, доц.

ІТ підтримка: Вандинський Віктор Юрійович

---

## The composition of the editorial board:

**Chief Editor:** Kovrov A., Ph.D., Professor, Rector of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

**Deputy Chief Editor:**

Krutii Yu., Doctor of Technical Science, Professor, Pro-rector for Research of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

Suryaninov M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

**Assistant Editor:** Kiosak V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Higher Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;

- Berbyuk V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor in Mechanical Systems, Division of Dynamics, Department of Mechanics and Maritime Sciences Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden;
- Vatulia G., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Structural Mechanics and Hydraulics Department, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine;
- Goryk O., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Basic Technical Disciplines Department, Poltava State Agrarian Academy, Poltava, Ukraine;
- Karpuyk V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Reinforced Concrete Constructions and Transport Constructions, Odessa, Ukraine;
- Kyriazopoulos A., Ph.D., Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Koda E., Doctor of Technical Science, Professor, Dean of Construction and Environmental Engineering Faculty, University of Life Sciences, Warsaw, Poland;
- Kononov Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Control-system Theory Division, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Slavyansk, Ukraine;
- Kruglov V., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Chair of Methods of Mathematical Physics Odessa I. I. Mechnikov National University, Odessa, Ukraine;
- Kucher M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Materials Division, G. S. Pisarenko Institute for Problems of Strength, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine;
- Lesechko O., Ph.D., Associate Professor, Head of Higher Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Leshchenko D., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Mechanics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Lyashenko T., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Information Technology and Applied Mathematics Department, Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine;
- Maksymovych O., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Welding Engineering, Diagnostics and Rebuilding of Metal Structures, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine;
- Otrosh Y., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Civil Protection Service, National University of Civil Defence of Ukraine, Kharkiv, Ukraine;
- Pasternak Y., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Applied Mathematics and Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine;
- Pnevmatikos N., Ph.D., Associate Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- Savchenko O., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Algebra, Geometry and Mathematical Analysis Department, Kherson State University, Kherson, Ukraine;
- Trach V., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Bridges and Tunnels, Strength of Materials and Structural Mechanics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine;
- Shvabyuk V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Engineering Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine.

Technical Editor: Holovata Zlata

Linguistic Adviser in English language: Maryanko Yanina, Ph.D., Associate Professor

IT Support: Vandynskyi Viktor

---

## ЗМІСТ

<b>I. Medved, Yu. Otrosh, N. Rashkevich, A. Kondratiev</b> Optimization of calculations of building structures.....	6
<b>D. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, V. Pivovarchik</b> Recovering the shape of a quantum caterpillar tree by two spectra.....	14
<b>Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О.</b> Еволюція руху динамічно симетричного гіростата під дією постійного моменту.....	25
<b>Самородов О. В., Митинський В. М., Кротов О. В., Храпатова І. В</b> Стрічковий фундамент з повздовжнім вирізом по підшві масивної підпірної стіни.....	33
<b>Сурганова Ю. Е., Міхлін Ю. В.</b> Регулярна та складна поведінка маятникової системи у магнітному полі.....	44
<b>V. Fomin, I. Fomina</b> Calculation of reinforced -concrete frame for stability under the action of aggressive environment.....	61
<b>Сорока М. М.</b> Граничний стан двутаврового армованого перерізу з використанням пружнопластичних діаграм деформування матеріалів.....	72
<b>Гуртовий О. Г., Тинчук С. О.</b> Використання симетрії для розв'язування задач деформування плит на жорсткій основі.....	84
<b>Вашпанова Н. В., Лесечко О. В., Подоусова Т. Ю.</b> Інфінітезимальні деформації поверхонь із заданою зміною тензора Річчі.....	97
<b>M. Bekirova</b> Stability of rods with initial imperfections in the form of eccentricity of load application under linear and non-linear creep conditions.....	110

---

## CONTENT

<b>I. Medved, Yu. Otrosh, N. Rashkevich, A. Kondratiev</b> Optimization of calculations of building structures.....	6
<b>D. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi, V. Pivovarchik</b> Recovering the shape of a quantum caterpillar tree by two spectra.....	14
<b>D. Leshchenko, T. Kozachenko</b> Evolution of dynamically symmetric gyrostat motion under the action of constant torque.....	25
<b>O. Samorodov, V. Mitinskiy, O. Krotov, I. Khrapatova</b> A strip foundation with a longitudinal cut-out in the bottom of a massive retaining wall....	33
<b>Y. Surhanova, Y. Mikhlin</b> Regular and complex behavior of a pendulum system in a magnetic field.....	44
<b>V. Fomin, I. Fomina</b> Calculation of reinforced -concrete frame for stability under the action of aggressive environment.....	61
<b>M. Soroka</b> Limit state of a i-reinforced section using elastoplastic diagrams of deformation of materials .....	72
<b>O. Gurtovyi, S. Tynchuk</b> Using symmetry to solve problems of deformation of plates on a rigid foundation.....	84
<b>N. Vashpanova, O. Lesechko, T. Podousova</b> Infinitesimal deformations of surfaces with a given change of the Ricci tensor.....	97
<b>M. Bekirova</b> Stability of rods with initial imperfections in the form of eccentricity of load application under linear and non-linear creep conditions.....	110

UDC 624.04

## OPTIMIZATION OF CALCULATIONS OF BUILDING STRUCTURES

I. Medved<sup>1</sup>, Yu. Otrosh<sup>2</sup>, N. Rashkevich<sup>2</sup>, A. Kondratiev<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Volodymyr Dahl East Ukrainian National University

<sup>2</sup>National University of Civil Defence of Ukraine

<sup>3</sup>O.M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv

**Abstract.** Building structures are very diverse in their shapes, sizes, loading conditions, etc. Their durability depends on many factors, including how accurately the design scheme reflects the actual conditions of its operation. Because no matter how precise and complex calculation methods are used, if an incorrect calculation scheme is calculated, then the results of such calculations will not reflect the true picture. Therefore, the problem of optimization of design schemes is of great scientific and practical importance. Optimization parameters depend on specific conditions. One of the existing approaches for finding optimal solutions is based on mathematical modeling, when the model is an analytical dependence of the objective function on dependent (controlled) variables, the numerical values and range of which are set based on the actual operating conditions of this structure. The compilation of such models and the performance of appropriate calculations require a deep understanding of the essence of the phenomenon and knowledge of the mathematical apparatus. Of the existing methods, the most common and developed is linear programming, when the model is a linear function and the variables in the constraint system are also linear. The idea of the method is technically implemented in the add-in "Search for a solution" for Microsoft Excel. With its help, you can find the optimal (maximum or minimum) numerical value of the objective function contained in one cell, taking into account restrictions on the values of dependent variables in other cells. Most often, this superstructure is used in solving optimization problems of the economy (simplex method, transport problem, etc.). In the public domain, there are very few results of using this approach in the calculations of building structures at the initial design stage. In the proposed work, an attempt was made to use this add-on in the problem of optimizing the geometric dimensions of a structure, when the numerical value of the bending moment in a particular section was chosen as the optimization criterion. It is appropriate to solve such a problem at the stage of drawing up the design scheme of the structure.

**Keywords:** calculation scheme, line of influence, search for solutions.

## ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗРАХУНКІВ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

Медвідь І. І.<sup>1</sup>, Отрош Ю. А.<sup>2</sup>, Рашкевич Н. В.<sup>2</sup>, Кондратьєв А. В.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Східноукраїнський національний університет імені Володимира Даля

<sup>2</sup>Національний університет цивільного захисту України

<sup>3</sup>Харківський національний університет міського господарства імені О.М. Бекетова

**Анотація.** Будівельні конструкції різноманітні за формою, розмірами, умовами навантаження тощо. Їх довговічність залежить від багатьох факторів, у тому числі від того, наскільки точно проектна схема відображає реальні умови її експлуатації. Якими б точними і складними методами розрахунку не користувалися, якщо буде невірна схема розрахунку, то результати таких розрахунків не відобразатимуть справжньої картини. Тому проблема оптимізації проектних схем має велике наукове та практичне значення. Параметри оптимізації залежать від конкретних умов. Один із існуючих підходів до пошуку оптимальних рішень базується на математичному моделюванні, коли модель являє собою аналітичну залежність цільової функції від залежних (керованих) змінних, числові значення та діапазон яких



задаються виходячи з реальних умов роботи даної структури. Складання таких моделей та виконання відповідних розрахунків вимагають глибокого розуміння сутності явища й знання математичного апарату. Серед існуючих методів найбільш поширеним та розробленим є лінійне програмування, коли модель є лінійною функцією, змінні в системі обмежень теж лінійні. Ідея методу технічно реалізована в надбудові «Пошук рішення» для Microsoft Excel. За його допомогою можна знайти оптимальне (максимальне або мінімальне) числове значення цільової функції, що міститься в одній клітинці, з урахуванням обмежень значень залежних змінних в інших клітинках. Найчастіше ця надбудова використовується під час вирішення задач оптимізації економіки (симплексний метод, транспортна задача тощо). У відкритому доступі недостатньо результатів використання цього підходу для розрахунків будівельних конструкцій на початковому етапі проектування. У запропонованій роботі була зроблена спроба використати цю надбудову для задачі оптимізації геометричних розмірів конструкції, коли критерієм оптимізації було обрано числове значення згинального моменту в конкретному перерізі. Вирішувати таку задачу доцільно на етапі складання розрахункової схеми споруди.

**Ключові слова:** розрахункова схема, лінія впливу, пошук рішень.



## 1 INTRODUCTION

The reliability and durability of building structures depends on many factors: geometric dimensions, materials used, acting external loads and their combinations, etc. In this regard, appropriate calculations are performed at the design stage.

In the field of the theory of calculation of building structures, there is a constant refinement of their actual work, i.e. such design schemes are created that most accurately correspond to the actual operating conditions. Therefore, the solution of the problem of optimization of design schemes is of great scientific and practical importance.

One of the existing approaches to finding optimal solutions is considered in the course "Operations Research" [1]. The goal is a quantitative substantiation of the decisions made, and the effectiveness of the operation is estimated by the numerical value of the objective function.

Among the models used, first of all, a large class of optimization models should be noted. In general terms, the optimization problem can be formulated as follows: to find such values of controlled variables that satisfy the system of inequalities (restrictions) and turn the objective function into a maximum (or minimum).

Of all the known methods of mathematical programming, the most common and developed is linear programming [2, 3]. In addition, non-linear objective functions can be successfully used.

## 2 ANALYSIS OF PUBLICATIONS

Mathematical programming methods and the add-in "Search for a solution" are usually used to solve problems in economics, management, and logistics. In the public domain, there are very few results of using this approach in the calculations of building structures at the initial design stage. [4, 5, 6].

## 3 MATERIALS AND METHODS

This article attempts to show the possibility and expediency of using the methods of mathematical programming and the "Search for Solutions" add-on at the stage of choosing the optimal geometric parameters of design schemes for building structures.

## 4 RESEARCH RESULTS

Based on the results obtained in [6], we will show how to optimize the main geometric parameters of the design scheme.

Let us take, for example, the linear dimensions of the structure  $a$ ,  $b$ ,  $c$  as controlled variables.

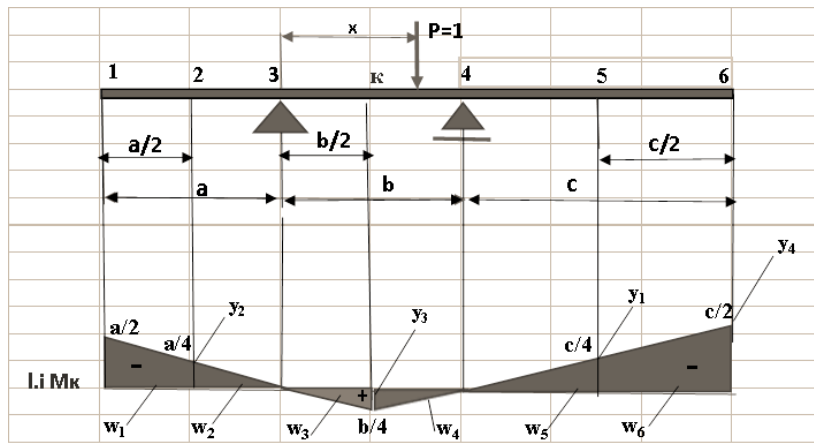


Fig. 1. Calculation scheme and line of influence of the bending moment

Of the proposed loading options (Fig. 2):

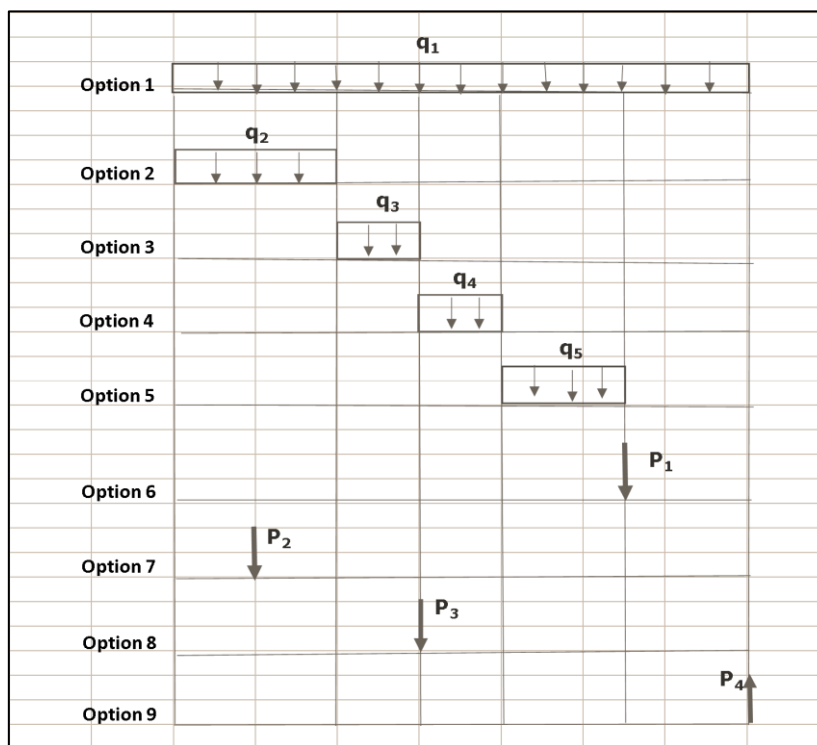


Fig. 2. Structure loading options

choose the one that corresponds to the smallest bending moment in the section "k" [6].

q1	q2	q3	q4	q5	P1	P2	P3	P4
30	20	0	0	30	100	50	150	0

Fig. 3. Numerical values of external load

The loading scheme for this case is shown in Fig.4.

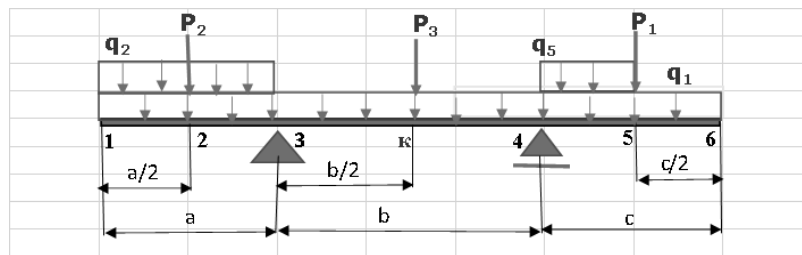


Fig. 4. Calculation scheme of the beam

Now, using the "Search for Solutions", we will determine the numerical values of the parameters  $a, b, c$  of the design scheme (Fig. 4), at which the bending moment in the section "k" takes on extreme values.

In the course of structural mechanics, a formula is known for determining the numerical value of the generalized internal force factor  $F$  along the corresponding line of influence [7–10]:

$$F = \sum q_i w_i + \sum P_i y_i + \sum M_i \tan \alpha_i \quad (1)$$

Then the target function will look like:

$$M_k = q_1(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6) + q_2(w_1 + w_2) + q_5 w_5 + P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3. \quad (2)$$

Let us determine the areas of the corresponding sections and the ordinates of the line of influence:

$$w_1 = \frac{\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{4}\right)}{2} \cdot \frac{a}{2} = -\frac{3 \cdot a^2}{16}, \quad w_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = -\frac{a^2}{16}, \quad w_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{4} = \frac{b^2}{16},$$

$$w_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{4} = \frac{b^2}{16}, \quad w_5 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{4} = -\frac{c^2}{16}, \quad w_6 = \frac{\left(\frac{c}{2} + \frac{c}{4}\right)}{2} \cdot \frac{c}{2} = -\frac{3 \cdot c^2}{16},$$

$$y_1 = -\frac{c}{4}, \quad y_2 = -\frac{a}{4}, \quad y_3 = \frac{b}{4}.$$

In further calculations, we will assume that the bending moment is positive if it stretches the lower fibers.

Now we introduce restrictions on the controlled variables  $a, b, c$ . Constraints define the conditions that these variables must satisfy. The type of restrictions is determined by the conditions of a particular task and the goal to be achieved. It should be noted that Search for Solutions is very sensitive to restrictions. Let us introduce, for example, the following restrictions:

$$\begin{cases} a + b + c = 7 \\ 2 \leq b \leq 3 \\ a \geq 1 \\ c \leq a. \end{cases}$$

In this case, the table of parameters for finding solutions to find the maximum bending moment will look like (Fig. 5).

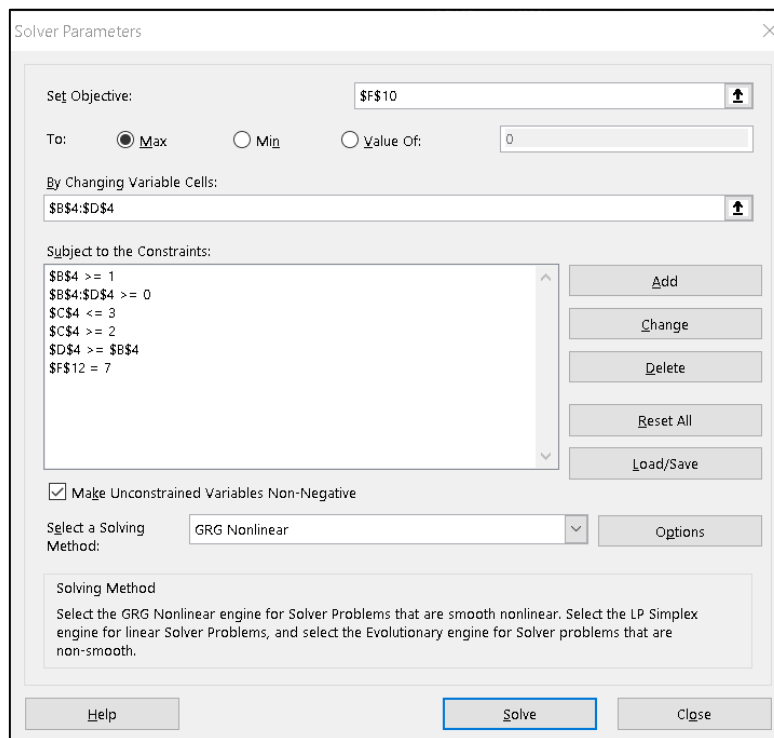


Fig. 4. Solution search options

The calculation results are shown in Fig. 5:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2											
3		a	b	c							
4		2	3	2							
5	q,p	30	20	0	0	30	100	50	150	0	
6	w,y	-0.875	-1	0.5625	0.5625	-0.25	-0.5	-0.5	0.75	1	
7											
8											
9											
10						-16.25					Target function
11											
12						7					a+b+c

Fig. 5. Numerical values of controlled variables and target function

The value of the objective function corresponds to the value of the maximum bending moment in the section "k" ( $M_k = -16.25$  kNm). Since the value is negative, the top fibers of the cross section will be stretched. If the results of the calculation are presented graphically, then we obtain the calculation scheme shown in Fig.6.

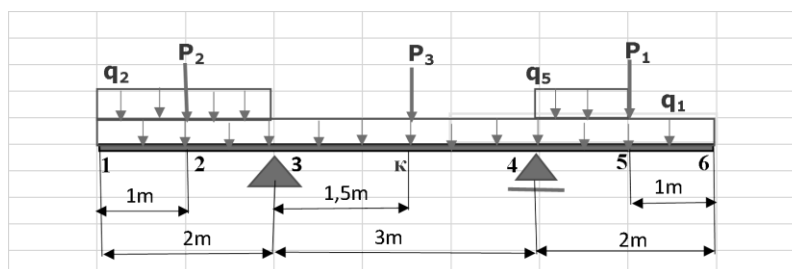


Fig. 6. Calculation scheme corresponding to  $M_{k,max}$



9. Darkov, A. V., Shaposhnikov, N. N. (1986). *Stroitel'naya mekhanika* [Structural mechanics]. М.: Higher. shk. [in Russian]
10. Butenko, Yu. I. (1984). *Stroitel'naya mekhanika* [Structural mechanics]. Vishcha school. [in Russian].

## Література

1. Kremer, M. Sh. Operations research in economics. Textbook. М.: Marketing, 1999. 270 p.
2. Карманов В. Г.. Математическое программирование. М: Наука, 1986. 288 с.
3. Романюк Т. П., Терещенко Т. О., Присенко Г. В., Городкова І. М. Математичне програмування: Навч. посібник. К.: ІЗМН, 1996. 312 с.
4. Медведь И. И. Оптимизация расчетных схем. Сучасні будівельні конструкції з металу та деревини, 2021. №25. С. 85–91.
5. Medved, I., Surianinov, M., Otrosh, Y., Pirohov O. (2021). Optimization of the calculated scheme. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 1164. 012051.
6. Medved, I., Biloshytskiy, M., Maiboroda, R., Shcholokov, E., Tryhub V. (2022). "Search for solutions" in the problems of calculation of building structures. Mechanics and mathematical methods. 4. 2. 75–82.
7. Смирнов А. Ф., Александров А. В., Лашенников Б. Я., Шапошников Н. Н. Строительная механика. Стержневые системы. М.: Стройиздат, 1981. 512 с.
8. Смирнов А. Ф., Александров А. В., Лашенников Б. Я., Шапошников Н. Н. Строительная механика. М.: Стройиздат, 1984. 415 с.
9. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1986. 607 с.
10. Бутенко Ю. И. Строительная механика. Руководство к практическим занятиям. К.: Вища школа, 1984. 328 с.

### **Medved Ivan**

Volodymyr Dahl East Ukrainian National University  
PhD, Associate Professor  
Central Avenue, 59-a, Severodonetsk, Ukraine, 93400  
iw.medwed@yandex.ua  
ORCID: 0000-0001-9988-9900

### **Yurii Otrosh**

National University of Civil Defence of Ukraine  
DScTech, Professor  
Chernyshevskaya str., 94, Kharkiv, Ukraine, 61023  
yuriyotrosh@gmail.com  
ORCID 0000-0003-0698-2888

### **Nina Rashkevich**

National University of Civil Defence of Ukraine  
PhD, Lecturer of the Department  
Chernyshevskaya str., 94, Kharkiv, Ukraine, 61023  
nine291085@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-5124-6068

### **Andrii Kondratiev**

O.M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv  
DScTech, Associate Professor  
Marshal Bazhanov str., 17, Kharkiv, Ukraine, 61002  
andrii.kondratiev@kname.edu.ua  
ORCID: 0000-0002-8101-1961

### *For references:*

Medved I., Otrosh Yu., Rashkevich N., Kondratiev A. (2023). Optimization of calculations of building structures. Mechanics and Mathematical Methods. 5 (1). 6–13.

### *Для посилань:*

Медвідь І. І., Отрош Ю. А., Рашкевич Н. В., Кондратьєв А. В. Оптимізація розрахунків будівельних конструкцій. Механіка та математичні методи, 2023. Т. 5. № 1. С. 6–13.

UDC 517.9

## RECOVERING THE SHAPE OF A QUANTUM CATERPILLAR TREE BY TWO SPECTRA

D. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi<sup>1</sup>, V. Pivovarchik<sup>1</sup>

<sup>1</sup>South ukrainian national pedagogical university named after K. D. Ushynsky

**Abstract:** existence of co-spectral (iso-spectral) graphs is a well-known problem of the classical graph theory. However, co-spectral graphs exist in the theory of quantum graphs also. In other words, the spectrum of the Sturm-Liouville problem on a metric graph does not determine alone the shape of the graph. Co-spectral trees also exist if the number of vertices exceeds eight.

We consider two Sturm-Liouville spectral problems on an equilateral metric caterpillar tree with real  $L^2(0,1)$  potentials on the edges. In the first (Neumann) problem we impose standard conditions at all vertices: Neumann boundary conditions at the pendant vertices and continuity and Kirchhoff's conditions at the interior vertices. The second (Dirichlet) problem differs from the first in that in the second problem we set the Dirichlet condition at the root (one of the pendant vertices of the stalk of the caterpillar tree, i.e. the central path of it). Using the asymptotics of the eigenvalues of these two spectra we find the determinant of the normalized Laplacian of the tree and the determinant of the prime submatrix of the normalized laplacian obtained by deleting the row and the column corresponding to the root. Expanding the fraction of these determinants into continued fraction we receive full information on the shape of the tree. In general case this continued fraction is branched. We prove that in the case of a caterpillar tree the continued fraction does not branch and the spectra of the Neumann and Dirichlet problems uniquely determine the shape of the tree. A concrete example is shown. The known pair of co-spectral trees with minimal number (eight) of vertices belongs to the class of caterpillar trees.

**Keywords:** metric graph, tree, pendant vertex, interior vertex, edge, caterpillar tree, Sturm-Liouville equation, potential, eigenvalues, spectrum, Dirichlet boundary condition, Neumann boundary condition, root, continued fraction, adjacency matrix, prime submatrix, normalized Laplacian.

## ВІДНОВЛЕННЯ ФОРМИ КВАНТОВОГО ГУСЕНИЧНОГО ДЕРЕВА ЗА ДВОМА СПЕКТРАМИ

Калюжний-Вербовецький Д. С.<sup>1</sup>, Пивоварчик В. М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Південноукраїнський національний педагогічний університет ім. К. Д. Ушинського

**Анотація:** існування коспектральних (ізоспектральних) графів є відомим у класичній теорії графів. Але коспектральні графи існують і у теорії квантових графів. Інакше кажучи, один спектр задачі Штурма-Ліувілля на метричному графі не визначає однозначно форму графу. Коспектральні дерева також існують, якщо кількість вершин перевищує вісім.

Ми розглядаємо дві спектральні задачі Штурма-Ліувілля на рівнобічному метричному дереві-гусениці з дійсними  $L^2(0,1)$  потенціалами на ребрах. У першій задачі (задачі Неймана) ми задаємо стандартні умови у вершинах: умови неймана на висячих вершинах та умови неперервності і Кірхгофа у внутрішніх вершинах. Друга задача (задача Діріхле) відрізняється від першої тим, що у корені (одній з висячих вершин стебла дерева-гусениці, тобто йогоцентрального маршруту) накладено умову Діріхле. Використовуючи асимптотики власних значень цих задач, ми знаходимо визначник нормованого лапласіану дерева і визначник головної підматриці нормованого лапласіану, отриманої видаленням рядка та стовпця, які відповідають кореню. Розвиваючи відношення цих визначників у ланцюговий дріб, ми отримуємо інформацію про форму дерева. У загальному випадку цей ланцюговий



розгалужується. Ми доводимо, що у випадку дерева-гусениці цей ланцюговий дріб не розгалужується і спектри задач Діріхле і Неймана однозначно визначають форму дерева. Розглянуто конкретний приклад. Відома коспектральна пара дерев з найменшою (дев'ять) кількістю вершин належить саме до дерев-гусениць.

**Ключові слова:** метричний граф, дерево, висяча вершина, внутрішня вершина, ребро, дерево-гусениця, рівняння Штурма-Ліувілля, потенціал, власні значення, спектр, крайова умова Неймана, крайова умова Діріхле, корінь, ланцюговий дріб, матриця суміжності, головна підматриця, нормований лапласіан.



## 1 INTRODUCTION

The problem of recovering the shape of a combinatorial graph using the eigenvalues of its adjacency matrix is described in [1] (Chapter 6) where several examples of co-spectral graphs are shown.

In quantum graph theory, i. e. in the theory of quantum mechanical equations considered on metric graph domains, the problem of recovering the shape of a graph was stated in [2] and [3]. It was shown in [3] that if the lengths of the edges are non-commensurate then the spectrum of the spectral Sturm-Liouville problem on a graph with standard (continuity + Kirchhoff's at the interior vertices and the Neumann at the pendant vertices) conditions uniquely determines the shape of this graph.

In [2], it was shown that in case of commensurate lengths of the edges there exist co-spectral quantum graphs. But even earlier it was shown in [4] that in quantum graphs theory an important role is played not by adjacency matrix but by the so-called normalized Laplacian.

A 'geometric' Ambarzumian's theorem was proved in [5]: it was shown that the spectrum of the Neumann problem with zero potential on the graph  $P_2$ , i. e. on a finite interval, uniquely determines the shape of the graph. In [6] it was shown that if the graph is simple connected equilateral with the number of vertices less or equal 5 and the potentials on the edges are real  $L_2$  functions then the spectrum of the Sturm-Liouville problem with standard conditions at the vertices uniquely determines the shape of the graph. For trees the minimal number of vertices in a co-spectral pair is 9 (see [7] and [8]). If the number of vertices doesn't exceed 8 then to find the shape of a tree we need just to find in [6] the characteristic polynomial corresponding to the given spectrum.

In [9] it was shown how to find the shape of a tree using the two spectra: the spectrum of the Neumann problem and the spectrum of the Dirichlet problem, i. e. the problem in which the Dirichlet condition is imposed at the root. This method works even in case of large number of vertices. If the solution is not unique, we can find all the solutions. In [10] it was shown how to find the shape of a tree using the S-function of the scattering problem on a tree which consists of an equilateral compact subtree with a lead attached to it. The potential on the lead was assumed to be zero identically and therefore the Jost-function can be expressed via the characteristic functions of the Dirichlet and Neumann problems. Thus, this scattering inverse problem and the spectral inverse problem by two spectra are closely related.

In present paper we show that in case of a caterpillar tree rooted at a pendant vertex of the stalk (central path) the spectra of the Dirichlet and Neumann problems uniquely determine the shape of the tree.

In Section 2 we describe the Neumann spectral problem, i.e. the Sturm-Liouville problem with standard conditions (continuity + Kirchhoff's at the interior vertices and Neumann at the pendant vertices). We describe the Dirichlet problem where we impose the Dirichlet condition at the root (an arbitrary chosen vertex) keeping standard conditions at all the other vertices. We also we expose known results which we use in the sequel.

In Section 3 we prove a theorem where the fraction of the characteristic polynomial of the normalized Laplacian of a caterpillar combinatorial tree and the modified characteristic polynomial of its certain subgraph obtained by deleting the root and the incident edge is presented as a branched continuous fraction. We prove that in case of a caterpillar tree this presentation is unique.

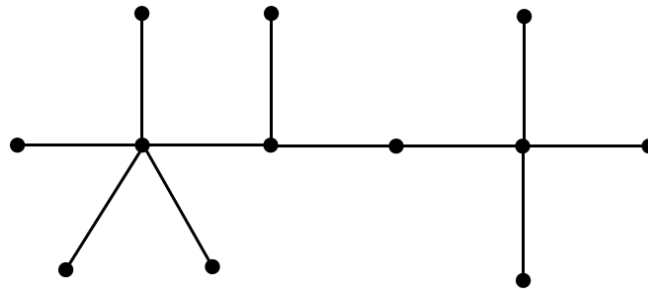
In Section 4 using the result of Section 3 we show the procedure of recovering the shape of a tree using asymptotics of the spectra of the Neumann and Dirichlet problems.

## 2 STATEMENT OF THE PROBLEM AND AUXILIARY RESULTS

**Definition 2.1**, [11] A combinatorial caterpillar tree is a tree in which all the vertices are within distance 1 of a central path (stalk).

An example of a caterpillar tree is presented on Fig. 1.

Let  $T$  be a metric equilateral caterpillar graph with  $p$  vertices and  $g = p - 1$  edges each of the length  $l$ . Let  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_r$  be the stalk of the graph (the longest path). It means that the degree  $d(v_0) = d(v_r) = 1$ .



**Fig. 1.** An example of caterpillar tree

We choose the vertex  $v_0$  as the root and direct all the edges away from the root.

Let us describe the Neumann spectral problem on this tree. We consider the Sturm-Liouville equations on the edges

$$-y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda y_j, \quad j = 1, 2, \dots, g, \quad (1)$$

where  $q_j \in L_2(0, l)$  are real.

If an edge  $e_j$  is incident with a pendant vertex which is not the root then we impose the Neumann condition

$$y_j'(l) = 0. \quad (2)$$

at the pendant vertex. At each interior vertex we impose the continuity conditions

$$y_j(l) = y_k(0), \quad (3)$$

for the incoming into  $v_i$  edge  $e_j$  and for all  $e_k$  outgoing from  $v_i$ , and the Kirchhoff's conditions

$$y_j'(l) = \sum_k y_k'(0), \quad (4)$$

where the sum is taken over all edges  $e_k$  outgoing from  $v_i$ . At the root we impose the Neumann condition:

$$y_1'(0) = 0. \quad (5)$$

The above conditions (continuity + Kirchhoff's or Neumann) we call standard.

In the sequel, if the potentials are the same on all the edges, we omit the index in  $q_j$  and  $y_j$ . The following theorem adopted for trees can be found as Theorem 5.2 in [6] but it originates from [4].

**Theorem 2.1** Let  $T$  be a tree with  $p \geq 2$ . Assume that all edges have the same length  $l$  and the same potentials symmetric with respect to the midpoints of the edges ( $q(l-x) = q(x)$ ). Then the spectrum of problem (1)–(5) coincides with the set of zeros of the function

$$\varphi_N(\lambda) = s(\sqrt{\lambda}, l)\psi(c(\sqrt{\lambda}, l)),$$

where  $\psi(z) = (1-z^2)^{-1}\psi(z)$ ,

$$\psi(z) = \det(-zD + A).$$

Here  $A$  is the adjacency matrix of  $T$  in which the first row and the first column correspond to  $v_0$ ,

$$D := \text{diag}(d(v_0), d(v_1), \dots, d(v_{p-1})),$$

$d(v_i)$  is the degree of the vertex  $v_i$ ,  $s(\sqrt{\lambda}, x)$  and  $c(\sqrt{\lambda}, l)$  are the solutions of the Sturm-Liouville equation on the edges satisfying conditions  $s(\sqrt{\lambda}, 0) = s'(\sqrt{\lambda}, 0) - 1 = 0$  and  $c(\sqrt{\lambda}, 0) - 1 = c'(\sqrt{\lambda}, 0)$ .

Now we consider the Dirichlet problem on the same caterpillar tree. We impose the Dirichlet condition at  $v_0$ :

$$y_1(0) = 0 \tag{6}$$

for the edge incident with  $v_0$ .

By the Dirichlet problem we mean the problem which consists of equations (1)–(4) and (6).

Denote by  $T$  the tree obtained by removing the root in the tree  $T$  together with the incident edge. Let  $A$  be the adjacency matrix of  $T$ , i. e. the principal submatrix of  $A$  obtained by deleting the first row and the first column of  $A$ , let  $D$  be the principal submatrix of  $D$  obtained by deleting the first row and the first column of  $D$ .

We consider the polynomial defined by

$$\psi(z) := \det(-zD + A).$$

Theorem 6.4.2 of [12] adapted to the case a tree with the Dirichlet condition at one of the vertices is as follows

**Theorem 2.2** Let  $T$  be a tree with at least two edges rooted at a pendant vertex  $v_0$ . Let the Dirichlet condition be imposed at the root and the standard conditions at all other vertices. Assume that all edges have the same length  $l$  and the same potentials symmetric with respect to the midpoints of the edges ( $q(l-x) = q(x)$ ). Then the spectrum of problem (1)–(4), (6) coincides with the set of zeros of the characteristic function

$$\varphi_D(\lambda) = \psi(c(\sqrt{\lambda}, l)).$$

It is clear that

$$\varphi_D(\lambda) = \det(-c(\sqrt{\lambda}, l)D + A)$$

is the characteristic function of the Dirichlet problem (1) - (4), (6) on the initial tree  $T$ .



### 3 MAIN RESULTS

The following theorem was proved in [9].

**Theorem 3.1.** Let  $T$  be an equilateral tree. Then the function  $\psi(z)/\psi(z)$  can be presented as a branched continued fraction. The coefficients before  $+z$  and  $-z$  correspond to the degrees of the vertices. The beginning fragment

$$-m_0z + \sum_{k=1}^{m_0} \frac{1}{m_k z - \dots}$$

of the expansion means that the vertex  $v_0$  is connected by edges with  $m_0$  vertices  $v_1, v_2, \dots, v_{m_0}$ .  
 A fragment

$$\dots \pm \sum_{i=1}^r \frac{1}{-m_i z + \sum_{k=1}^{m_i-1} \frac{1}{m_{i,k} z - \dots}}$$

means that there are there are  $r$  vertices of degrees  $m_1, m_2, \dots, m_r$ , each having one incoming edge and  $m_1 - 1, m_2 - 1, \dots, m_r - 1$  outgoing edges.

A fragment

$$\dots \pm \frac{m}{z}$$

at the end of a branch of the continued fraction means  $m$  edges ending at pendant vertices. This theorem applied to a caterpillar tree rooted and one of its pendant vertices gives.

**Corollary 3.2.** Let  $T$  be a caterpillar tree rooted at  $v_0$ , one of the ends of the stalk. Then the fraction  $\psi(z)/\psi(z)$  can be presented as

$$\frac{\psi(z)}{\psi(z)} = -z + \frac{1}{m_1 z - \frac{m_1 - 2}{z} - \frac{1}{m_2 z - \frac{m_2 - 2}{z} - \dots - \frac{1}{m_{r-1} z - \frac{m_{r-1} - 1}{z}}}}, \quad (7)$$

where  $\{1, m_1, m_2, \dots, m_{r-1}, 1\}$  are the degrees of stalk vertices.

**Theorem 3.3.** If the fraction  $\psi(z)/\psi(z)$  can be expanded into continued fraction of the form (7) with integers  $m_i \geq 2$  for  $i=1, 2, \dots, r-1$  then there exists a unique tree which is a caterpillar tree rooted at  $v_0$  with the degrees of the vertices on the stalk  $d(v_0) = d(v_r) = 1$  and  $d(v_i) = m_i$  for  $i = 1, 2, \dots, r-1$ .

**Proof.** The coefficient  $m_1$  is uniquely determined as

$$m_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \frac{z\psi(z)}{\psi(z)} + z^2 \right)^{-1}.$$

Then the coefficient  $m_2$  is uniquely determined as



$$m_2 = \lim_{z \rightarrow \infty} \left( - \left( \left( \frac{z\psi(z)}{\psi(z)} + z^2 \right)^{-1} - m_1 \right) z^2 - m_1 + 2 \right)^{-1},$$

we continue this procedure and obtain all  $m_i$ . On each stage of this procedure we face the Diophantine equation

$$\sum_{k=1}^{m_i-1} \frac{1}{n_k} = m_i - 2 + \frac{1}{m_{i+1}}$$

with respect to integer unknowns  $n_k \geq 1$ . Since

$$m_i - 2 < m_i - 2 + \frac{1}{m_{i+1}} \leq m_i - 1,$$

we conclude that equation possesses a unique up to permutations solution  $n_1 = n_2 = \dots = n_{m_i-2} = 1, n_{m_i-1} = m_{i+1}$ . QED.

**Example.** Let  $\psi(z) = -120z^7 + 269z^5 - 189z^3 + 40z$  and  $\psi(z) = 120z^6 - 245z^4 + 156z^2 - 30$ . Then

$$\frac{\psi(z)}{\psi(z)} = -z + \frac{24z^5 - 33z^3 + 10z}{120z^6 - 245z^4 + 156z^2 - 30} = -z + \frac{1}{5z + \frac{-80z^4 + 106z^2 - 30}{24z^5 - 33z^3 + 10z}}.$$

Since

$$3 < \frac{80}{24} < 4,$$

we present the fraction as

$$\frac{\psi(z)}{\psi(z)} = -z + \frac{1}{5z - \frac{3}{z} - \frac{8z^3 - 7z}{23z^4 - 33z^2 + 10}} = -z + \frac{1}{5z - \frac{3}{z} - \frac{1}{3z - \frac{12z^2 - 10}{8z^3 - 7z}}}.$$

Since

$$1 < \frac{12}{8} < 2$$

we arrive at

$$\frac{\psi(z)}{\psi(z)} = -z + \frac{1}{5z - \frac{3}{z} - \frac{1}{3z - \frac{1}{z} - \frac{4z^2 - 3}{8z^3 - 7z}}} = -z + \frac{1}{5z - \frac{3}{z} - \frac{1}{3z - \frac{1}{z} - \frac{1}{2z - \frac{z}{4z^2 - 3}}}}.$$

and finally



$$\frac{\psi(z)}{\psi(z)} = -z + \frac{1}{5z - \frac{3}{z} - \frac{1}{3z - \frac{1}{z} - \frac{1}{2z - \frac{1}{4z - \frac{3}{z}}}}}$$

Judging by this continued fraction we conclude that if  $\psi(z) = -120z^7 + 269z^5 - 189z^3 + 40z$  and  $\psi(z) = 120z^6 - 245z^4 + 156z^2 - 30$  then the corresponding tree is the that of Fig.1.

#### 4 RECOVERING THE SHAPE OF A QUANTUM TREE BY TWO SPECTRA

Now we are ready to recover the shape of a caterpillar tree. Using the asymptotics of the spectrum of the Neumann problem we can find the function  $\psi(z)$  (up to a constant factor). Let us show it.

By Theorem 2.1 in case of  $q_j(x) \equiv 0$  for all  $j$ , the spectrum of problem (1)-(5) can be presented as the union of subsequences  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{2g-1} \{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$  with the following asymptotics

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_k^{(i)}} &= \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos \alpha_i \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, p-1, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{\lambda_k^{(i)}} &= \frac{2\pi k}{l} - \frac{1}{l} \arccos \alpha_{-p+2+i} \quad \text{for } i = p, p+1, \dots, 2p-3, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{\lambda_k^{(1)}} &= \frac{\pi(k-1)}{l} \quad \text{for } k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

where  $\alpha_1 = 1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{p-1} \leq \alpha_p = 1$  are the zeros of  $\psi(z)$ .

By Theorem 5.4 in [13] we obtain that there exists a positive constant  $C$  such that  $|\lambda_k - \lambda_k| < C$  where  $\lambda_k$  are eigenvalues of problem (1)-(5) with  $L_2(0, l)$  potentials on the edges.

**Theorem 4.1.** Let  $T$  be an equilateral caterpillar tree with  $p$  vertices and with real potentials  $q_j(x) \in L_2(0, l)$  on the edges. Then the spectrum of problem (1)-(5) can be

presented as the union of subsequences  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{2g-1} \{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$  with the following asymptotics

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_k^{(i)}} &= \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos \alpha_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, p-1, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{\lambda_k^{(i)}} &= \frac{2\pi k}{l} - \frac{1}{l} \arccos \alpha_{-p+2+i} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{for } i = p, p+1, \dots, 2p-3, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{\lambda_k^{(1)}} &= \frac{\pi(k-1)}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{for } k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

where  $\alpha_1 = 1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{p-1} \leq \alpha_p = 1$  are the zeros of  $\psi(z)$ .

By Theorem 2.2 in case of  $q_j(x) \equiv 0$  for all  $j$ , the eigenvalues of problem (1)-(4), (6) can



be presented as the union of subsequences  $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{2g} \{\nu_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$  with the following asymptotics

$$\sqrt{\nu_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos \beta_i \quad i=1,2,\dots,p-1, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\sqrt{\nu_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \frac{1}{l} \arccos \beta_{-p+1+i} \quad i=p,p+1,\dots,2p-2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Again using Theorem 5.4 in [3] we obtain that there exists a positive constant  $C$  such that  $|\nu_k - \nu_k^{(i)}| < C$  where  $\lambda_k$  are eigenvalues of problem (1)-(4), (6) with  $L_2(0,l)$  potentials on the edges.

**Theorem 4.2.** Let  $T$  be an equilateral caterpillar tree with  $p$  vertices and with real potentials  $q_j(x) \in L_2(0,l)$  on the edges. Then the spectrum of problem (1)-(4), (6) can be

presented as the union of subsequences  $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{2g-1} \{\nu_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$  with the following asymptotics

$$\sqrt{\nu_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos \beta_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad i=1,2,\dots,p-1, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\sqrt{\nu_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \frac{1}{l} \arccos \beta_{-p+1+i} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad i=p,p+1,\dots,2p-2, \quad k \in \mathbb{N},$$

where  $\{\beta_i\}_{i=1}^{p-1}$  are the zeros of  $\psi(z)$ .

According to Theorems 4.1 and 4.2 using the two spectra  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty, \{\nu_k\}_{k=1}^\infty$  we can find the sets of zeros of the numerator and denominator of the rational function  $\psi(z)/\psi(z)$ . Thus, this function is uniquely determined if we take into account that (7) implies

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\psi(z)}{z\psi(z)} = -1.$$

Expanding  $\psi(z)/\psi(z)$  into continued fraction (7) we find the shape of our caterpillar tree.

The plots of the changing values  $a^2$  and  $r^2$  of the squared equatorial and axial component of the angular velocity vector of the rigid body are constructed and represented in two cases.

In the first case (Figs. 1, 2)  $J_0 = 1, A' = 5.1, B' = 5$ , in the second case (Figs. 3, 4)  $J_0 = 3, A' = 1.3, B' = 1$ .

## 5 CONCLUSIONS

As it was mentioned in the introduction that in general the spectrum of a Sturm-Liouville spectral problem on a simple connected equilateral graph does not determine uniquely the shape of the graph. We don't know whether two spectra of such problems with different conditions on the same graph uniquely determine the shape of the graph. However, we describe a class of trees (caterpillar trees) for which the two spectra uniquely determine the shape of a graph. We also give an algorithm of recovering the shape of a caterpillar tree.

### Acknowledgements



The second author is grateful to the Ministry of Education and Science of Ukraine for the support in completing the work ‘Artificial porous materials as a basis for creating the novel biosensors’.

## References

1. Cvetkovic, D.M., Doob, M., Sachs, H. (1979). *Spectra of Graphs: Theory and Applications*. Pure Appl. Math. Academic Press, New York.
2. von Below, J. (2001). Can one hear the shape of a network? In F. Ali Mehmeti, J. von Below, and S. Nicaise, editors, *Partial Differential Equations on Multistructures (Proc. Luminy 1999)*. *Lect. Notes Pure Appl. Math.* 219. 19–36. New York. Marcel Dekker.
3. Gutkin, B., Smilansky, U. (2001). Can one hear the shape of a graph? *J. Phys. A Math. Gen.* 34. 6061–6068.
4. von Below, J. (1985). A characteristic equation associated with an eigenvalue problem on c2-networks. *Lin. Algebra Appl.* 71. 309–325.
5. Kurasov, P., Naboko, S. (2014). Rayleigh estimates for differential operators on graphs. *J. Spectr. Theory.* 4(2). 211–219. DOI 10.4171/JST
6. Chernyshenko, A., Pivovarchik, V. (2020). Recovering the shape of a quantum graph. *Integr. Equ. Oper. Theory.* 92: 23.
7. Pistol, M.-E. *Generating isospectral but not isomorphic quantum graphs*. arXiv: 2104.12885.
8. Chernyshenko, A., Pivovarchik, V. (2022). Cospectral quantum graphs. arXiv:2112.14235. To appear as ‘Cospectral quantum graphs with the Dirichlet conditions at pendant vertices’ in *Ukrainian Math. J.* (2023). 75. 368–382. DOI: 10.37863/umzh.v75i3.7351.
9. Pivovarchik, V. Recovering the shape of a quantum tree by two spectra. *Submitted to Inverse problems and Imaging*. arXiv:2301.05939.
10. Mugnolo, D., Pivovarchik, V. (2023) Distinguishing co-spectral quantum graphs by scattering. *J. Phys. A: Math. Theor.* 56 (9). DOI: 10.1088/1751-8121/acbb44. arXiv: 2211.05465.
11. Harary, F., Schwenk, A. (1973). The number of caterpillars. *Discrete mathematics.* 6 (4). 359–365.
12. Möller, M., Pivovarchik, V. (2020). Direct and inverse finite-dimensional spectral problems on graphs. *Oper. Theory: Adv., Appl.* 283. Birkhäuser/Springer. ISBN: 978-3-030-60483-7; 978-3-030-60484-4
13. Carlson, R., Pivovarchik, V. (2008). Spectral asymptotics for quantum graphs with equal edge lengths. *J. Phys. A: Math. Theor.* 41. 145202. 16 pp.

## Література

1. Cvetkovic D. M., Doob M., Sachs H. Spectra of Graphs – Theory and Applications. Pure Appl. Math. Academic Press. New York, 1979. 368p.
2. von Below J. Can one hear the shape of a network? In F. Ali Mehmeti, J. von Below, and S. Nicaise, editors, *Partial Differential Equations on Multistructures (Proc. Luminy 1999)*, 2001. № 219. 19-36 pp. of *Lect. Notes Pure Appl. Math.* New York. Marcel Dekker.
3. Gutkin B., Smilansky U. Can one hear the shape of a graph? *J. Phys. A Math. Gen.*, 2001. № 34. 6061–6068 pp.
4. von Below J. A characteristic equation associated with an eigenvalue problem on c2-networks. *Lin. Algebra Appl.*, 1985. № 71. 309–325 pp.
5. Kurasov P., Naboko S. Rayleigh estimates for differential operators on graphs. *J. Spectr. Theory*, 2014. № 4(2). 211–219 pp. DOI 10.4171/JST
6. Chernyshenko A., Pivovarchik V. Recovering the shape of a quantum graph. *Integr. Equ. Oper. Theory*, 2020. 92: 23 p.
7. Pistol M.-E. *Generating isospectral but not isomorphic quantum graphs*. arXiv: 2104.12885.
8. Chernyshenko A., Pivovarchik V. (2022). Cospectral quantum graphs. arXiv:2112.14235. Буде опубліковано як «Коспектральні квантові графи з умовами Діріхле на висячих вершинах». *Укр. мат. журн.* (2023), 2022. 75. 368-382 pp. DOI: 10.37863/umzh.v75i3.7351.
9. Pivovarchik V. Recovering the shape of a quantum tree by two spectra. arXiv:2301.05939. Submitted to *Inverse problems and Imaging*.



10. Mugnolo D., Pivovarchik V. Distinguishing co-spectral quantum graphs by scattering, J. Phys. A: Math. Theor., 2023. № 56 (9). DOI: 10.1088/1751-8121/acbb44, arXiv: 2211.05465.
11. Harary F., Schwenk A. The number of caterpillars. Discrete mathematics, 1973. № 6 (4). 359–365 pp.
12. Möller M., Pivovarchik V. Direct and inverse finite-dimensional spectral problems on graphs. Oper. Theory: Adv., Appl., 2020. 283. Birkhäuser/Springer, ISBN: 978-3-030-60483-7; 978-3-030-60484-4 <https://www.springer.com/gp/book/9783030604837>
13. Carlson R., Pivovarchik V. (2008). Spectral asymptotics for quantum graphs with equal edge lengths. J. Phys. A: Math. Theor. 2008. № 41. 145202, 16 pp.

**Kaliuzhnyi-Verbovetskyi Dmytro**

South Ukrainian National Pedagogical University named after K.D. Ushynsky  
DSc in Physics and Mathematics, Associate Professor  
Staroportofrankovskaya str., 26, Odesa, Ukraine, 65020  
dmitry2k@yahoo.com  
ORCID: 0000-0002-7411-3740

**Pivovarchik Vyacheslav**

South Ukrainian National Pedagogical University named after K.D. Ushynsky  
DSc in Physics and Mathematics, Professor  
Staroportofrankovskaya str., 26, Odesa, Ukraine, 65020  
vpivovarchik@gmail.com,  
ORCID: 0000-0002-4649-2333

*For references:*

Kaliuzhnyi-Verbovetskyi D., Pivovarchik V. (2023). Recovering the shape of a quantum caterpillar tree by two spectra. Mechanics and Mathematical Methods. 5 (1). 14–24.

*Для посилань:*

Калюжний-Вербовецький Д. С., Пивоварчик В. М. Відновлення форми квантового гусеничного дерева за двома спектрами. Механіка та математичні методи, 2023. Т. 5. № 1. С. 14–24

УДК 531.381

## ЕВОЛЮЦІЯ РУХУ ДИНАМІЧНО СИМЕТРИЧНОГО ГІРОСТАТА ПІД ДІЄЮ ПОСТІЙНОГО МОМЕНТУ

Лещенко Д.Д.<sup>1</sup>, Козаченко Т.О.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Анотація.** Задачі динаміки твердих тіл, які мають порожнини з рідиною, привертають велику увагу. Інтерес до цих задач зріс у зв'язку з розвитком космічної техніки. Аналогічні задачі мають місце також в теорії руху літака і корабля, а також в інших технічних питаннях. Ці задачі мають і принципове теоретичне значення. Необхідність дослідження задач динаміки твердого тіла з порожниною, яка містить в'язку рідину, пов'язана з дослідженнями руху космічного апарата навколо центра мас та в задачах їх орієнтації та стабілізації. Задачі динаміки твердого тіла з порожнинами, що містять в'язку рідину, є більш складними, ніж у випадку з ідеальною рідиною. В роботах Ф. Л. Черноуська показано, що розв'язування задач динаміки твердого тіла з в'язкою рідиною в порожнині можна розділити на дві частини: гідродинамічну та динамічну, що дозволяє спростити початкову задачу. Моменти сил в'язкої рідини в порожнині, які діють на тверде тіло, часто є відносно малими та можуть розглядатися як збурення. Природно застосовувати методи малого параметра для аналізу динаміки твердого тіла під дією прикладених моментів. У цій статті застосовується метод асимптотичного усереднення Крилова-Боголюбова.

При визначенні фактичної орієнтації штучного супутника Землі була відмічена мала зміна модуля вектора кінетичного моменту супутника на ділянці польоту з вимкненою системою орієнтації. Ця зміна була пояснена присутністю малого моменту збурення, який є постійним в зв'язаній з супутником системі координат. У випадку малих моментів сил можна застосовувати методи збурень для визначення аналітичних або чисельних описів руху.

В цій роботі розглядається рух відносно центра мас динамічно симетричного твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, під дією постійного моменту в зв'язаних з тілом осях. Визначення моментів сил, які діють на тіло зі сторони в'язкої рідини в порожнині, було запропоновано в роботах Ф. Л. Черноуська. Отримано систему рівнянь в стандартній формі. Одержані чисельні розв'язки задачі описують еволюцію руху твердого тіла під дією малих внутрішніх та зовнішніх моментів сил.

**Ключові слова:** тверде тіло, порожнина, в'язка рідина, постійний момент.

## EVOLUTION OF DYNAMICALLY SYMMETRIC GYROSTAT MOTION UNDER THE ACTION OF CONSTANT TORQUE

D. Leshchenko<sup>1</sup>, T. Kozachenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract.** Problems of the dynamics of rigid bodies containing a fluid have attracted a great deal of attention. Interest in these problems has grown in connection with the development of space technology. Similar problems also arise in the theory of aircraft and ship and in other technical questions. These problems are also of major theoretical interest. There is a necessity to study the problems of the rigid body dynamics with cavities containing a viscous fluid to calculate the motion of spacecraft about its center of mass as well as their orientation and stabilization. The problems of rigid body dynamics with cavities containing a viscous fluid are more difficult than in the case of ideal fluid. The studies of F. L. Chernousko showed that solving the problems of the rigid body dynamics with viscous fluid in cavity can be separated into two parts: the hydrodynamic and dynamic ones, which represent a simplification of the original problem. The torques of viscous fluid in cavity forces, acting on the body, are often relatively small and can be considered as perturbations. It is natural to use the



methods of small parameter to analyze the dynamics of rigid body under the action of applied torques. The method applied in this paper is the Krylov-Bogolubov asymptotic averaging method.

Reference was made to the angular momentum vector of a satellite, noted during the determination of the actual orientation of the artificial earth satellite. This change was explained as a result of the presence of a the small perturbation torque, which is constant in fixed axes relative to the satellite. In the case of small torques, it is possible to use perturbation methods to obtain analytical or numerical descriptions of motion.

In this paper, the motion about the center of mass of a dynamically symmetric rigid body with a cavity filled with a fluid of high viscosity and subjected to constant body-fixed torque is considered. The torque of forces acting on the rigid body by the viscous fluid in the cavity is determined by the technique developed in the works of F. L. Chernousko. We obtain the system of motion equations in the standard form. Obtained numerical solutions describe the evolution of rigid body motion under the action of small internal and external torques.

**Keywords:** rigid body, cavity, viscous fluid, constant torque.

## 1 ВСТУП

Під час руху космічного апарата відносно центра мас, на нього діють моменти сил різної природи, ці рухи можуть бути зумовленими наявністю рідкого палива в порожнинах тіл. Велика кількість рідини в космічних апаратах може в певних випадках суттєво вплинути на рух цих тіл.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Проблема динаміки твердого тіла з порожниною, яка містить в'язку рідину, значно складніша, ніж з ідеальною рідиною. Найбільш загальні результати розв'язання цих задач були одержані Ф. Л. Черноусько [1, 2]. У цих роботах розглядалася модель, в якій вплив рідини на параметри руху зводився до наявності додаткових збурюючих моментів в рівняннях руху Ейлера для твердого тіла.

В ряді робіт [3–6] досліджено рух твердого тіла з порожниною. В статті [3] асимптотичним методом досліджується рух твердого тіла зі сферичною порожниною, заповненою в'язкою рідиною. В [4–6] розглядаються швидкі обертальні рухи відносно центра мас динамічно несиметричного супутника з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, під дією гравітаційного та світлового моментів сил. В статті [7] проведено чисельний аналіз зміни вектора кінетичного моменту твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною. В [8] представлені аналітичні та чисельні результати, одержані під час дослідження руху твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною. В роботі [9] запропоновано підхід для моделювання динаміки твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості. В [10] досліджені рівняння руху системи твердих тіл з порожнинами, заповненими в'язкою рідиною. В статті [11] вивчається оптимальне гальмування обертань симетричного тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною, в середовищі з опором.

Задача квазіоптимального за швидкодією гальмування обертань динамічно симетричного тіла із сферичною порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, досліджувалась у [12]. Також в цій роботі на тверде тіло діє невеликий дисипативний момент сил лінійного опору середовища та рухома маса, з'єднана з тілом сильним демпфером. У статті [14] випадок руху твердого тіла, вивчений у [13], був розширений за наявності третьої складової гіростатичного моменту. У [15] досліджено рух близького до динамічно сферичного твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості.

В роботах [16–19] були знайдені аналітичні розв'язки задачі про рух симетричного твердого тіла, близького до динамічного симетричного, а також несиметричного тіла під дією моменту, який є постійним в зв'язаних з тілом осях. В [20] вивчається рух відносно центра мас несиметричного твердого тіла під дією двох малих збурюючих моментів: постійного в зв'язаних з тілом осях та дисипативного квадратично залежного від кутової швидкості тіла. В статті [21] досліджується рух навколо центра мас близького до динамічно сферичного твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, під дією постійного моменту.

Розглянемо тривимірний рух динамічно симетричного твердого тіла з в'язкою рідиною відносно центра мас. Тензор  $\mathbf{P} = (P_{ij})$  має вигляд  $P_{ij} = P_0 \delta_{ij}$ , де  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $P_0 > 0$  скалярний коефіцієнт, у випадку сферичної порожнини радіуса  $b$  значення  $P_0 = 8\pi b^7 / 525$  [1, 2]. Позначимо, через  $A$  і  $C$  головні центральні моменти інерції системи та  $p$ ,  $q$ ,  $r$  – проекції абсолютної кутової швидкості  $\boldsymbol{\omega}$  на відповідні головні центральні осі інерції.

Вважаємо, що постійний момент в зв'язаних з тілом осях має вигляд

$$M_i^c = \varepsilon^2 M_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де  $0 < \varepsilon \ll 1$  малий параметр.

Запишемо рівняння руху тіла з рідиною в проекціях на головні осі інерції у вигляді [1, 2]:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - A)qr &= \frac{\rho P_0}{\nu A^2} C(A - C)pr^2 + \varepsilon M_1; \\ A \frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= \frac{\rho P_0}{\nu A^2} C(A - C)qr^2 + \varepsilon M_2; \\ C \frac{dr}{dt} &= \frac{\rho P_0 r}{\nu A} (C - A)(p^2 + q^2) + \varepsilon M_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут  $p, q, r$  – проекції кутової швидкості  $\omega$  на головні центральні осі інерції,  $\rho$  – густина рідини,  $\nu$  – кінематичний коефіцієнт в'язкості рідини. Перші вирази в правих частинах рівностей (1) визначають в асимптотичному наближенні момент сил в'язкої рідини в порожнині твердого тіла [1, 2].

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Число Рейнольдса припускається малим:  $\text{Re} = l^2 T_*^{-1} \nu^{-1} \ll 1$  [1, 2]. Тут  $l$  – характерний лінійний розмір порожнини,  $T_*$  – характерний масштаб часу відносного руху, обернено пропорційний характерній кутовій швидкості  $\omega$ . Якщо  $l$  і  $T_*$  приймаються за одиниці виміру довжини і часу, то кінематичний коефіцієнт в'язкості – великий параметр [1, 2],  $\nu = 1/\text{Re} \gg 1$  і  $\nu^{-1} \ll 1$ . Будемо вважати, що безрозмірний параметр  $\nu^{-1} \sim \varepsilon$ .

Коли  $\varepsilon = 0$ ,  $\nu^{-1} = 0$  система (2) інтегрується в явному вигляді, при цьому  $r = r_0$ . Припустимо, що  $r_0 \neq 0$ . Тоді змінні  $p, q$  здійснюють гармонічні коливання з частотою  $|(C - A)r_0|$ , яка залежить від  $r_0$ . Тому система рівнянь (3) відноситься до суттєво нелінійних.

Застосуємо загальний породжувальний розв'язок системи (2) [22]

$$p = a \cos \varphi, \quad q = a \sin \varphi, \quad r = r_0, \quad (4)$$

в якості перетворювання до змінних  $a, r$ , де  $a > 0$ ,  $a = \text{const}$ ,  $\varphi = r(C - A)A^{-1}t$ .

Підставимо (4) в третє рівняння (2), враховуючи, що  $a^2 = p^2 + q^2$  і  $\dot{a} = \dot{p} \cos \varphi + \dot{q} \sin \varphi$ . Проводимо усереднення одержаного рівняння для  $a$  за фазою  $\varphi$  [23] і представимо рівняння для  $r$  у вигляді (крапка – похідна за часом  $t$ ):

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\rho P_0}{\nu A^3} C(C - A)r^2 a; \\ \dot{r} &= \frac{\rho P_0}{\nu AC} (C - A)a^2 r - \varepsilon \frac{M_3}{C}. \end{aligned} \quad (5)$$

Вирази  $M_1, M_2$  зникають при усередненні. За допомогою заміни змінних  $x = a^2, y = r^2 > 0, r = \sqrt{y}$  приведемо (5) до наступної системи:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{2\rho P_0}{\nu A^3} C(C-A)xy; \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{2\rho P_0}{\nu AC} (C-A)xy + 2\varepsilon \frac{M_3}{C} \sqrt{y}. \end{aligned} \quad (6)$$

Відмітимо, що в системі (6)  $x$ ,  $y$  – повільні змінні.

#### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Систему (6) було розв'язано чисельно за початкових умов  $x(0)=1$ ,  $y(0)=1$  та параметрів  $P_0=0.48\text{м}^7$ ,  $\nu=1000\text{м}^2/\text{с}$ ,  $\rho=1260\text{кг}/\text{м}^3$ ,  $\varepsilon=0.1$ .

Графіки зміни величин  $x=a^2$  і  $y=r^2$  квадратів екваторіальної та осьової компонент кутової швидкості твердого тіла визначені та представлені в двох випадках. В першому випадку (рис. 1, 2)  $A=8$ ,  $C=4$ ,  $M_3=-0.1$  або  $M_3=-0.3$ . В другому випадку (рис. 3, 4)  $A=1.3$ ,  $C=1$ ,  $M_3=-0.1$  або  $M_3=-0.3$ .

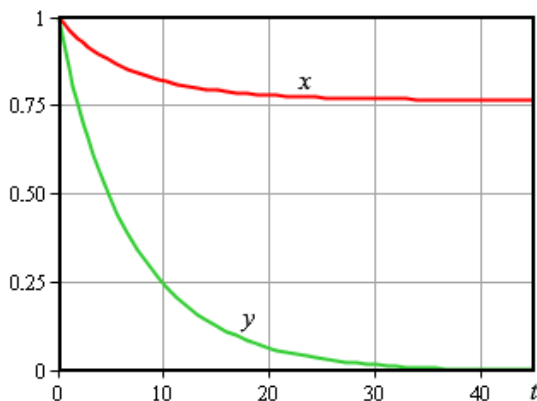


Рис. 1. Графіки змінних  $x$  і  $y$  в випадку  $A=8$ ,  $C=4$ ,  $M_3=-0.1$

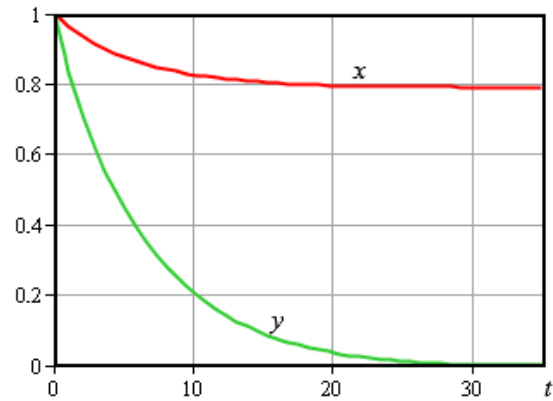


Рис. 2. Графіки змінних  $x$  і  $y$  в випадку  $A=8$ ,  $C=4$ ,  $M_3=-0.3$

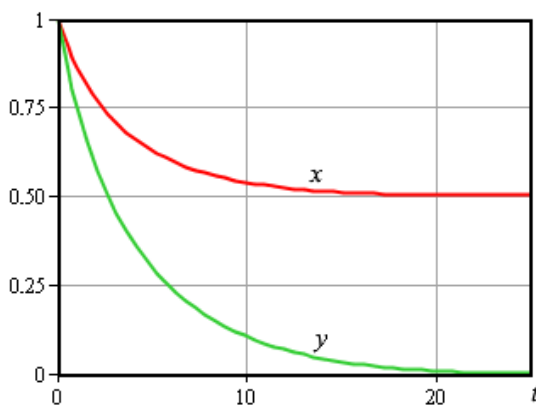


Рис. 3. Графіки змінних  $x$  і  $y$  в випадку  $A=1.3$ ,  $C=1$ ,  $M_3=-0.1$

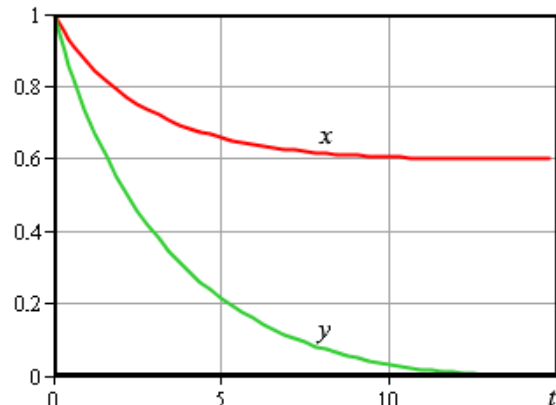


Рис. 4. Графіки змінних  $x$  і  $y$  в випадку  $A=1.3$ ,  $C=1$ ,  $M_3=-0.3$

#### 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Згідно до графіків  $x=a^2$  і  $y=r^2$ , зображених на рис. 1–4: змінна  $y$  спадає та асимптотично наближається до нуля у всіх розглянутих випадках; змінна  $x$  також

спадає, але значення до якого вона прямує залежить від величини постійного моменту та співвідношення між моментами інерції.

Якщо модуль проекції постійного моменту сил  $|M_3|$  зростає ( $M_3 = -0.1; -0.3$ ), то граничне значення змінної  $x$  зростає:  $x \rightarrow 0.76; 0.8$  (рис. 1, 2),  $x \rightarrow 0.5; 0.6$  (рис. 3, 4), а змінна  $y$  швидше прямує до нуля.

В випадках, коли співвідношення між моментами інерції  $A/C = 2$  та зменшується до  $+1$  (при однакових інших параметрах), граничне значення змінної  $x$  зменшується:  $x \rightarrow 0.76; 0.5$  (рис. 1, 3),  $x \rightarrow 0.8; 0.6$  (рис. 2, 4), змінна  $y$  прямує до нуля.

## 6 ВИСНОВКИ

Досліджено рух динамічно симетричного твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною при малих числах Рейнольдса, під дією постійного моменту в зв'язаних з тілом осях.

Припущення про мализну збурюючих моментів сил дозволяє за допомогою методу усереднення досліджувати еволюцію обертань твердого тіла. Випадок постійного в зв'язаних осях збурюючого моменту відповідає, наприклад, обліку травлення в газореактивній системі орієнтації космічних апаратів. Запас рідини в порожнині на борту космічних апаратів або корабля може чинити суттєвий вплив на рух цих тіл.

Одержані результати можуть бути корисними для аналізу рухів супутників під дією малих внутрішніх і зовнішніх моментів сил.

### Література

1. Chernousko F. L. The Movement of a Rigid Body with Cavities Containing a Viscous Fluid. Washington: NASA. 1972. 214 p.
2. Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Cham: Springer International Publishing. 2017. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-53928-7>.
3. Baranova E. U., Vil'ke V. G. Evolution of motion of a rigid body with a fixed point and an ellipsoidal cavity filled with a viscous fluid. Moscow Univ. Mech. Bull. 2013. № 68(1). pp. 15–20.
4. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л. Эволюция вращений спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью. Механика твердого тела, 2007. Вып. 37. С. 126–139.
5. Akulenko L. D., Zinkevich Y. S., Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L. Rapid rotations of a satellite with a cavity filled with viscous fluid under the action of moments of gravity and light pressure forces. Cosmic Research. 2011. № 49(5). pp. 440–451. <https://doi.org/10.1134/S0010952511050017>.
6. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л., Зинкевич Я. С. Возмущенные и управляемые вращения твердого тела. Одесса: ОНУ им. И.И. Мечникова, 2013. 287 с.
7. Rachinskaya A. L. Motion of a solid body with cavity filled with viscous liquid. Cosmic Research. 2015. № 53(6). P. 476–480.
8. Dissler K., Galdi G.P., Mazzone G., Zunino P. Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous liquid. Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2016. № 221(1). pp. 487–526.
9. Ramodanov S.M., Sidorenko V.V. Dynamics of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with viscous fluid. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2017. № 95. pp. 42–46. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.05.006>.
10. Кононов Ю. Н. О движении системы связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость. Механика твердого тела, 2000. № 30. С. 207–216.
11. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L. Optimal deceleration of rotation of a dynamically symmetric body with a cavity filled with viscous liquid in a resistive medium. Journal of Computer and Systems Sciences International. 2010. № 49(2). pp. 222–226.



12. Akulenko L. D., Kozachenko T. A., Leshchenko D. D. Time quasi-optimal deceleration of rotations of a gyrostat with moving mass in a resistive medium. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2019. № 58(5). pp. 667–673.
13. Leshchenko D. D., Sallam S. N. Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*. 1992. № 28(8). pp. 524–528.
14. Amer W. S., Farag A. M., Abady I. M. Asymptotic analysis and numerical solutions for the rigid body containing a viscous liquid in cavity in the presence of gyrostatic moment. *Archive of Applied Mechanics*. 2021. № 91(9). pp. 3889–3902.
15. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Paliy K. S. Perturbed rotational motions of a spheroid with cavity filled with a viscous fluid. *Proc. IMechE. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2021. № 235(20). pp. 4833–4837.
16. Romano M. Exact analytic solution for a rotation of a rigid body having spherical ellipsoid of inertia and subjected to a constant torque. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2008. № 100. pp. 181–189.
17. Van der Ha J. C. Perturbation solution of attitude motion under body-fixed torques. *Acta Astronautica*. 1985. № 12(10). pp. 861–869.
18. Kane T. R., Levinson D. A. Approximate description of attitude motion of a torque-free, nearly axisymmetric rigid body. *Journal of the Astronautical Sciences*. 1987. № 35(4). pp. 435–446.
19. Ayobi M. A., Longuski J. M. Analytical solution for translational motion of spinning-up rigid bodies subject to constant body-fixed forces and moments. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 2008. № 75(1). 011004/1-011004/8.
20. Пивоваров М. Л. О движении гироскопа с малым самовозбуждением. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*, 1985. № 6. С. 23–27.
21. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. Perturbed rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid subject to constant body fixed torques. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2023. № 148(3). 104284. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104284>.
22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.1. Механика. М.: Наука, 1973. 208с.
23. Bogoliubov N. N., Mitropolsky Yu. A. *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. New York: Gordon and Breach Science, 1961. 537 p.

## References

1. Chernousko, F. L (1972). *The Movement of a Rigid Body with Cavities Containing a Viscous Fluid*. NASA. Washington.
2. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*. Cham: Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-53928-7>.
3. Baranova, E. U., Vil'ke, V. G. (2013). Evolution of motion of a rigid body with a fixed point and an ellipsoidal cavity filled with a viscous fluid. *Moscow Univ. Mech. Bull.* 68(1). 15–20.
4. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L. (2007). Evolyuciya vrashenij sputnika s polostyu, zapolnennoj vyazkoj zhidkostyu [Evolution of rotations of a satellite with cavity filled with viscous fluid]. *Mekh. Tverd. Tela*. 37. 126–139. [in Russian].
5. Akulenko, L. D., Zinkevich, Y. S., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L. (2011). Rapid rotations of a satellite with a cavity filled with viscous fluid under the action of moments of gravity and light pressure forces. *Cosmic Research*. 49(5). 440–451. <https://doi.org/10.1134/S0010952511050017>.
6. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L., Zinkevich, Ya. S. (2013). *Vozmushennye i upravlyaemye vrasheniya tverdogo tela* [Perturbed and controlled rotations of a rigid body]. Odesa: ONU im. I. I. Mechnikova. [in Russian].
7. Rachinskaya, A. L. (2015). Motion of a solid body with cavity filled with viscous liquid. *Cosmic Research*. 53(6). 476–480.
8. Dissler, K., Galdi, G. P., Mazzone, G., Zunino, P. (2016). Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous liquid. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 221(1). 487–526.
9. Ramodanov, S. M., Sidorenko, V. V. (2017). Dynamics of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with viscous fluid. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 95. 42–46.



- <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.05.006>.
10. Kononov, Yu. N. (2000). O dvizhenii sistemy svyazannyh tverdyh tel s polostyami, sodержashimi zhidkost [On the motion of a system of connected rigid bodies with cavities containing liquid]. *Mehanika tverdogo tela*. 30. 207–216. [in Russian].
  11. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L. (2010). Optimal deceleration of rotation of a dynamically symmetric body with a cavity filled with viscous liquid in a resistive medium. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 49(2). 222–226.
  12. Akulenko, L. D., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2019). Time quasi-optimal deceleration of rotations of a gyrostat with moving mass in a resistive medium. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 58(5). 667–673.
  13. Leshchenko, D. D., Sallam, S. N. (1992). Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*. 28(8). 524–528.
  14. Amer, W. S., Farag, A. M., Abady, I. M. (2021). Asymptotic analysis and numerical solutions for the rigid body containing a viscous liquid in cavity in the presence of gyrostatic moment. *Archive of Applied Mechanics*. 91(9). 3889–3902.
  15. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Paliy, K. S. (2021). Perturbed rotational motions of a spheroid with cavity filled with a viscous fluid. *Proc. IMechE. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 235(20). 4833–4837.
  16. Romano, M. (2008). Exact analytic solution for a rotation of a rigid body having spherical ellipsoid of inertia and subjected to a constant torque. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 100. 181–189.
  17. Van der Ha, J.C. (1985). Perturbation solution of attitude motion under body-fixed torques. *Acta Astronautica*. 12(10). 861–869.
  18. Kane, T. R., Levinson, D. A. (1987). Approximate description of attitude motion of a torque-free, nearly axisymmetric rigid body. *Journal of the Astronautical Sciences*. 35(4). 435–446.
  19. Ayobi, M. A., Longuski, J. M. (2008). Analytical solution for translational motion of spinning-up rigid bodies subject to constant body-fixed forces and moments. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 75(1). 011004/1-011004/8.
  20. Pivovarov, M. L. (1985). O dvizhenii giroskopa s malym samovozbuzhdeniem [The motion of a gyroscope with low self-excitation]. *Izv. Akad. Nauk SSR. Mekh. Tverd. Tela*. 6. 23–27. [in Russian].
  21. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2023). Perturbed rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid subject to constant body fixed torques. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 148(3). 104284. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104284>.
  22. Landau, L. D., Lifshic, E. M. (1973). *Teoreticheskaya fizika. T.1. Mehanika* [Theoretical physics. T.1. Mechanics]. M.: Nauka. [in Russian].
  23. Bogoliubov, N. N., Mitropolsky, Yu. A. (1961). *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. Gordon and Breach Science, New York.

**Лещенко Дмитро Давидович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури  
д.ф.-м.н., професор  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029, leshchenko\_d@ukr.net  
ORCID: 0000-0003-2436-221X

**Козаченко Тетяна Олександрівна**

Одеська державна академія будівництва та архітектури  
к.ф.-м.н., доцент  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029, kushpil.t.a@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-9034-3776

*Для посилань:*

Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Еволюція руху динамічно симетричного гіростата під дією постійного моменту. *Механіка та математичні методи*, 2023. Т. 5. № 1. С. 25–32.

*For references:*

Leshchenko D., Kozachenko T. (2023). Evolution of dynamically symmetric gyrostat motion under the action of constant torque. *Mechanics and Mathematical Methods*. 5 (1). 25–32.

УДК 624.131:624.15

## СТРІЧКОВИЙ ФУНДАМЕНТ З ПОВЗДОВЖНІМ ВИРІЗОМ ПО ПІДОШВІ МАСИВНОЇ ПІДПІРНОЇ СТІНИ

Самородов О. В.<sup>1</sup>, Митинський В. М.<sup>2</sup>, Кротов О. В.<sup>1</sup>, Храпатова І. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Харківський національний університет міського господарства ім. О. М. Бекетова

<sup>2</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Анотація.** У статті проаналізовано конструкції традиційних стрічкових фундаментів споруд з плоскою підшоною, навантаження від яких викликає плоско-деформований напружений стан ґрунтової основи, а також інші варіанти умовно стрічкових (протяжних) фундаментів, за рахунок своєї форми (конфігурації) контакту з основою змінюють її напружений стан, що дозволяє проектувати більш раціональні фундаменти протяжних будівель та споруд. Виходячи з рішень змішаної задачі теорії пружності та пластичності з використанням критерію міцності Кулона-Мора, проведено аналітичні дослідження розвитку пластичних зон в основі стрічкового фундаменту з повздовжнім вирізом, які показують, що граничний стан завжди виникає раніше у крайових зонах фундаменту, тобто під зовнішніми краями фундаменту. Водночас відмічено, що у разі відсутності привантаження у зоні вирізу розрахунковий опір ґрунту знижується, тому запропоновано запатентовану конструкцію стрічкового фундаменту з повздовжнім вирізом по підшві, у якій виріз заввишки  $\Delta$  заповнюється низькомодульним матеріалом для підвищення розрахункового опору ґрунту. На підставі експериментально-теоретичних досліджень запропоновано методики розрахунку ґрунтової основи (розрахункового опору  $R$ , осідання  $s$  та крену  $i$ ) стрічкового фундаменту масивної підпірної стіни з повздовжнім вирізом по підшві. На реальному прикладі показано, що загальна ширина стрічкового фундаменту з вирізом менше на 1,5 м у порівнянні з суцільною формою підшви фундаменту, що дає суттєвий економічний ефект на кожному погонному метрі фундаменту стіни. Загалом, запропоновані методики дозволяють обґрунтовано проектувати ефективні позацентрово навантажені фундаменти з вирізами по підшві, а також підвищувати допустимий вертикальний тиск на основу в порівнянні з суцільною підшоною за інших рівних умов.

**Ключові слова:** стрічковий фундамент, масивна підпирна стіна, ексцентриситет, підшоша, виріз, ґрунтова основа, методика розрахунку.

## A STRIP FOUNDATION WITH A LONGITUDINAL CUT-OUT IN THE BOTTOM OF A MASSIVE RETAINING WALL

O. Samorodov<sup>1</sup>, V. Mitinskiy<sup>2</sup>, O. Krotov<sup>1</sup>, I. Khrapatova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>O. M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv

<sup>2</sup>Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract.** The paper analyzes the designs of traditional strip foundations with a flat bottom, the load from which causes the plane strain stress state of the soil base, and other variations of conventionally strip (continuous) foundations, which due to their shape (configuration) of the contact area with the base change its stress state, which enables designing more sustainable foundations for continuous buildings and structures. Proceeding from the solutions to the mixed problem of the theory of elasticity and plasticity using the Mohr-Coulomb criterion strength criterion, analytical studies of the development of plastic zones in the base of a strip foundation with a longitudinal cut-out have been conducted, which show that the limit state always occurs first in the foundation's edge zones, that is, underneath the outer edges of the foundation. It is also noted, however, that the design resistance of soil decreases when there is no additional load in the area of the cut-out; therefore, a patented design has been proposed of a strip foundation with a longitudinal cut-out in the bottom, where the cut-out



with the height  $\Delta$  is filled with low-modulus material to improve the design resistance of soil. Based on experimental and theoretical studies, methods have been proposed for calculating the soil base (design resistance  $R$ , settlement  $s$  and inclination  $i$ ) for a strip foundation of a massive retaining wall with a longitudinal cut-out in the bottom. A real example shows that the total width of the strip foundation with a cut-out is shorter by 1.5 m in comparison with the continuous shape of the bottom of the foundation, which has a significant economic effect on every linear meter of the wall foundation. Overall, the proposed methods make it possible to reasonably design effective eccentrically loaded foundations with cut-outs in the bottom and to improve the permissible vertical pressure on the base in comparison with a continuous bottom, all other things being equal.

**Keywords:** strip foundation, massive retaining wall, eccentricity, bottom, cut-out, soil base, calculation procedure.

## 1 ВСТУП

Підвищення економічної ефективності фундаментобудування, витрати на яке можуть досягати в окремих випадках до 40% від загальної вартості будівництва споруд, дотепер залишається пріоритетним напрямком. Монолітні та збірні стрічкові фундаменти під несучі стіни будівель та фундаментних частин масивних підпірних стін є найбільш поширеною конструкцією фундаментів мілкого закладення, що застосовується у будівництві.

Відомо, що навантаження на ґрунтову основу від традиційних стрічкових фундаментів споруд з плоскою подошвою викликає плоско-деформований напружений стан основи. Однак, у сфері фундаментобудування пропонуються інші варіанти умовно стрічкових (протяжних) фундаментів, які за рахунок своєї форми (конфігурації) контакту з основою змінюють її напружений стан, що дозволяє проектувати більш раціональні фундаменти протяжних будівель та споруд.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

У Радянському Союзі було зроблено першу спробу змінити традиційний спосіб передачі навантаження таким чином, щоб умови роботи фундаменту і самої основи суттєво покращилися. Цей принцип було реалізовано в 1954 р. під керівництвом Є. О. Сорочана при розробці переривчастих збірних стрічкових фундаментів. Сьогодні, застосування конструкцій переривчастих стрічкових фундаментів дозволяє за інших рівних умов підвищити допустимий вертикальний тиск на ґрунтову основу в 1,3 рази за рахунок зміни напружено-деформованого стану з плоского в просторовий, що було введено ще до радянського нормативного документа «СНиП 2.02.01-83\*. Основания зданий и сооружений». Удосконалення та дослідження роботи конструкцій умовно стрічкових фундаментів активно продовжується до теперішнього часу. Існують експериментально-теоретичні дослідження взаємодії протяжних (стрічкових, переривчастих, поруч розташованих тощо) фундаментів із ґрунтовими основами, якими займалися ряд відомих учених: Архіпов Д. Н., Богомолів А. М., Вінокуров Є. Ф., Євтушенко С. І., Корольов К. В., Крахмальний Т. А., Лучковський І. Я., Мурзенко Ю. М., Пойта П. С., Пілягін О. В., Сорочан Є. О., Фідаров М. І., Тугаєнко Ю. Ф. та багато інших [1–7]. Однак, існуючі конструкції умовно стрічкових (протяжних) фундаментів не вичерпують всіх можливих форм подошви на контакті з основою і не завжди є раціональними як у технічному, так і в технологічному аспектах. До того ж, взаємодія протяжних фундаментів з ґрунтовою основою в основному розглядається в рамках задачі теорії граничної рівноваги, попри те, що основним розрахунком основ у пострадянських країнах є розрахунок за другою групою граничних станів із визначенням розрахункового опору ґрунту  $R$ .

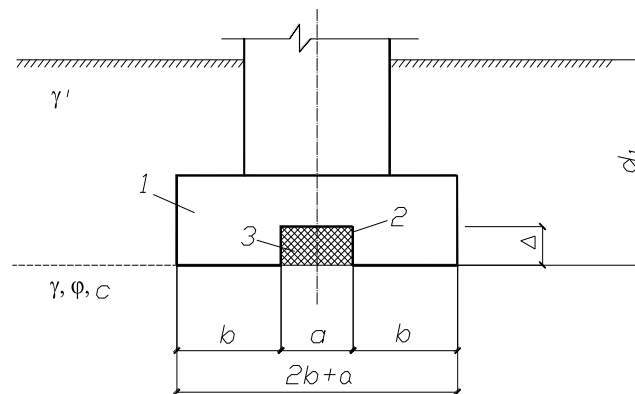
## 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою статті є демонстрація суттєвого економічного ефекту при використанні конструкції стрічкового фундаменту з повздовжнім вирізом по подошві у порівнянні з традиційним фундаментом із суцільною подошвою масивної підпірної стіни.

Для досягнення поставленої мети вирішуються наступні задачі дослідження: узагальнення деяких результатів досліджень взаємодії з ґрунтовою основою стрічкового фундаменту з повздовжнім вирізом по подошві та апробація відповідних методик розрахунку на прикладі проектування реального фундаменту масивної підпірної стіни.

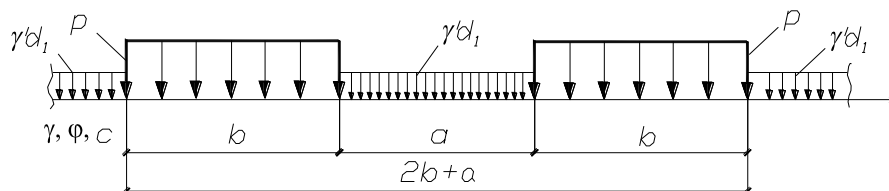
## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Попередні розрахунки показують, що у разі відсутності привантаження в зоні вирізу розрахунковий опір ґрунту знижується, тому запропоновано запатентовану конструкцію стрічкового фундаменту з повздовжнім вирізом по підшві (рис. 1), що складається з фундаментної частини 1 шириною  $(2b + a)$ , а також вирізу 2 шириною  $a$  та заввишки  $\Delta$ , який заповнюється низькомодульним матеріалом 3, наприклад, пінопластом [6].



**Рис. 1.** Стрічковий фундамент із повздовжнім вирізом по підшві:  
1 – фундамент; 2 – виріз; 3 – вставка із низькомодульного матеріалу

У цьому випадку пропонується розглянути розрахункову схему взаємодії фундаменту із ґрунтовою основою, яка представлена на рис. 2, де в межах ширини вирізу  $a$  при навантаженні фундаменту передається тиск, що дорівнює величині побутового тиску  $\gamma'd_1$  за межами фундаменту.



**Рис. 2.** Розрахункова схема взаємодії фундаменту з ґрунтовою основою

Тиск на основу в межах вирізу  $a$  передається за допомогою низькомодульного матеріалу з модулем пружності  $E_{вкл}$ , що дорівнює

$$E_{вкл} = \frac{\Delta}{s} \gamma' d_1, \quad (1)$$

де  $s$  – прогнозоване осідання фундаменту, м;

$\Delta$  – висота вирізу, м;

$\gamma'$  – питома вага ґрунту вище підшви фундаменту,  $\text{кН/м}^3$ ;

$d_1$  – глибина закладання фундаменту, м, або, навпаки, влаштується виріз заввишки  $\Delta$ , що дорівнює

$$\Delta = \frac{E_{вкл}}{\gamma' d_1} s. \quad (2)$$

Для визначення розрахункового опору основи фундаменту використано підхід М. М. Маслова: умова розташування нижньої межі зони зсуву  $z$  на вертикалі обрізу фундаменту, тобто при  $z = b \cdot \operatorname{tg} \varphi$  (рис. 3).

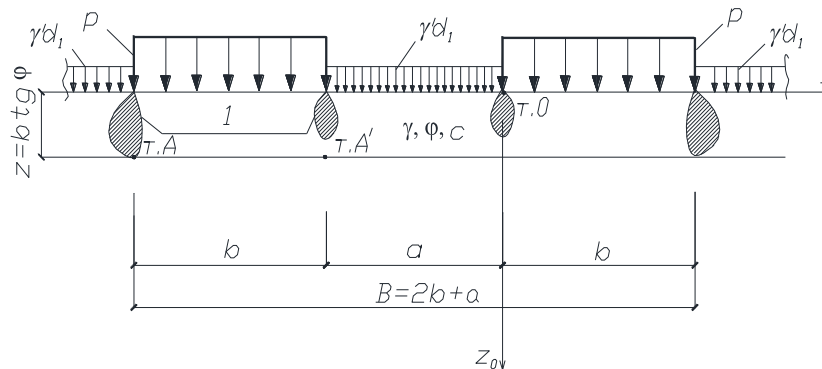


Рис. 3. Розрахункова схема до визначення розрахункового опору ґрунту  $R$  та осідання  $s$  основи стрічкового фундаменту з повздовжнім вирізом по підшви

Виходячи з рішень змішаної задачі теорії пружності та пластичності (плоска деформація) з використанням критерію міцності Кулона-Мора, проведено аналітичні дослідження розвитку пластичних зон в основі фундаменту, які показують, що граничний стан завжди виникає раніше у точках  $A$  (рис. 3), тобто під зовнішніми кряями фундаменту. При цьому, відносний допустимий тиск на основу  $\bar{R}$  можна навести у зручному для аналізу вигляді:

$$\bar{R} = k_d = \frac{R}{\gamma' d_1} = F(1 + \bar{b} \operatorname{tg} \varphi + \bar{c} \operatorname{ctg} \varphi) + 1, \quad (3)$$

де  $\bar{b} = b / d_1$ ;  $\bar{c} = c / \gamma' d_1$ ;  $\gamma = \gamma'$ ;

$$F = \frac{\pi}{\sqrt{T} \sin \varphi}; \quad T = \left( \frac{1}{2} \sin 2\varphi - \sigma_2 \right)^2 + (\cos^2 \varphi + \tau)^2;$$

$$\sigma_1 = \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \operatorname{arctg} \frac{\bar{a} + 2}{\operatorname{tg} \varphi} - \operatorname{arctg} \frac{\bar{a} + 1}{\operatorname{tg} \varphi}; \quad \sigma_2 = \left[ \frac{\bar{a} + 1}{(\bar{a} + 1)^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi} - \frac{\bar{a} + 2}{(\bar{a} + 2)^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \right] \operatorname{tg} \varphi;$$

$$\tau = \left[ \frac{1}{(\bar{a} + 1)^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi} - \frac{1}{(\bar{a} + 2)^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \right] \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

де  $\bar{a} = a / b$ ;

$\gamma$  і  $\gamma'$  – питома вага ґрунту відповідно вище та нижче підшви фундаменту;

$\varphi$  і  $c$  – характеристики міцності ґрунту основи: відповідно кут внутрішнього тертя та питоме зчеплення.

Згідно з формулою (3) при  $\bar{a} = a / b \rightarrow \infty$  будемо мати  $\bar{R}_0$  для одиночного фундаменту шириною  $b$  (рішення М. М. Маслова), а при  $\bar{a} = a / b \rightarrow 0$  – для суцільного фундаменту шириною  $2b$ .

Використовуючи вираз (3), побудуємо графіки функції (див. рис. 4) залежно від кута внутрішнього тертя  $\varphi = 20^\circ \div 45^\circ$ , прийнявши:  $b = d_1 = 1 \text{ м}$ ;  $\gamma = \gamma' = 18 \text{ кН/м}^3$ ;  $c = 0$ .



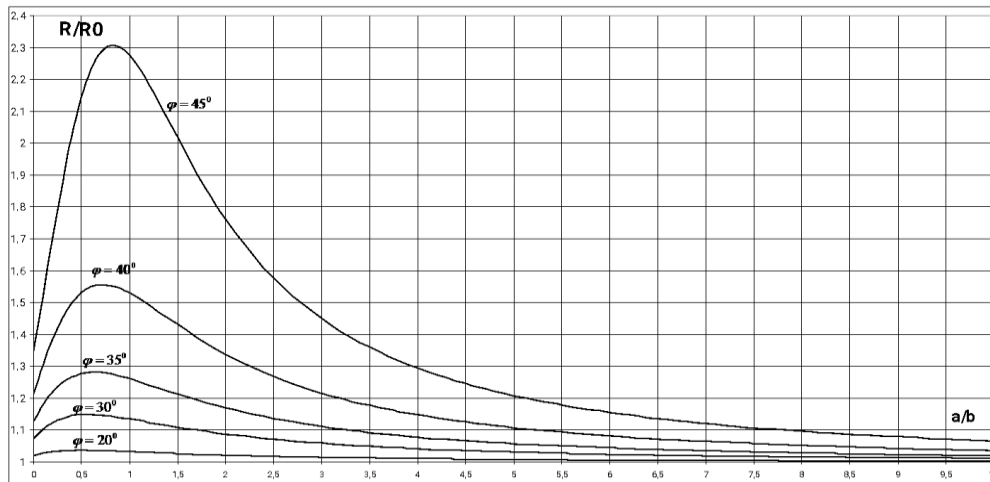


Рис. 4. Графіки залежностей  $R/R_0(k_d)$  від  $a/b$

Із графіків на рис. 4 видно, що «розсування» двох частин фундаменту шириною  $b$  на відстань  $a$  підвищує розрахунковий опір ґрунту фундаменту порівняно із суцільною шириною стрічкового фундаменту величиною  $2b$  (при  $a/b = 0$ ). При цьому існує максимум функції  $R/R_0$  при певному співвідношенні  $a/b$ .

Слід зазначити, що зміна зчеплення ґрунту  $c$  за інших рівних умов практично не впливає на зміну відносного розрахункового опору  $R/R_0$ .

У разі сприйняття фундаментом вертикального навантаження ширина  $B = (2b + a)$  підшови фундаменту з вирізом може призначатися ітераційно відповідно до загальноприйнятих принципів проєктування як для фундаменту шириною  $2b$  із суцільною підшовою, при цьому розрахунковий опір ґрунту фундаменту з вирізом  $R_{2b+a}$  приймається за формулою (4).

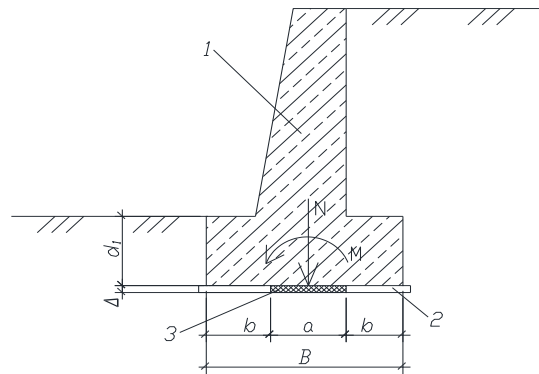
Розрахунковий опір основи стрічкового фундаменту з повздовжнім вирізом по підшві пропонується визначати за аналогією з переривчастим фундаментом згідно чинних норм [8] рівним:

$$R_{2b+a} = R_b \cdot k_d, \quad (4)$$

де  $R_b(R_0)$  – розрахунковий опір ґрунту основи фундаменту шириною  $b$ , який визначається за нормативною формулою [8] за умови прийняття будь-якого критерію розвитку зон граничної рівноваги під фундаментом;

$k_d(R/R_0)$  – коефіцієнт, який може визначатися відповідно до графіків на рис. 4.

У разі впливу на стрічкові фундаменти значних моментних навантажень  $M$ , наприклад, на фундаменти масивних підпірних стін (рис. 5), можуть застосовуватись запропоновані І. Я. Лучковським та О. В. Самородовим формули [7] для визначення раціональних геометричних розмірів підшови таких фундаментів при заданих зусиллях  $N, M$  та відповідному розрахунковому опорі ґрунту  $R_{2b+a}$  (див. формулу (4)). При цьому для технологічної зручності виріз може бути виконаний у межах бетонної підготовки за допомогою вкладки із низькомодульного матеріалу (рис. 5).



**Рис. 5.** Фундамент масивної підпірної стіни:  
1 – стіна; 2 – бетонна підготовка; 3 – вкладка із низькомодульного матеріалу

Однією з особливостей проектування фундаментів з вирізами на підшві в центральній частині є необхідність виконання умови:  $s < \Delta$ , тобто осідання  $s$  основи фундаменту не повинно перевищувати висоту вирізу  $\Delta$  для виключення потенційного повного контакту з основою фундаменту в зоні вирізу за весь термін експлуатації споруди. Тому, для визначення осідання основи таких фундаментів пропонується використовувати класичний метод пошарового підсумовування осідання уздовж осі фундаменту  $z_0$ , що проходить через точку  $O$  внутрішнього обрізу фундаменту (рис. 3) [8]. У табл. 1 наведено значення коефіцієнта затухання  $\alpha$  вертикальних напружень уздовж осі  $z_0$  на різних відносних глибинах  $z/b$  при різних співвідношеннях  $\eta = a/b$ , обчислені з використанням відомого рішення В. Г. Короткіна для умов плоскої деформації.

**Таблиця 1**

Значення коефіцієнта затухання  $\alpha$  вздовж осі  $z_0$

$\frac{z}{b}$	Значення коефіцієнта затухання $\alpha$ напруження вздовж осі $z_0$ для стрічкового фундаменту з повздовжнім вирізом по підшві при співвідношенні $\eta = a/b$ , що дорівнює									
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
<i>I</i>	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
0,4	0,9772	0,7013	0,5636	0,5065	0,4755	0,4481	0,4129	0,3595	0,2757	0,1531
0,8	0,8809	0,7251	0,5939	0,4954	0,4203	0,3565	0,2949	0,2296	0,1581	0,0807
1,2	0,7553	0,6481	0,5453	0,4530	0,3725	0,3014	0,2367	0,1754	0,1159	0,0574
1,6	0,6417	0,5606	0,4796	0,4022	0,3304	0,2647	0,2044	0,1486	0,0963	0,0469
2	0,5498	0,4849	0,4192	0,3549	0,2934	0,2355	0,1816	0,1314	0,0847	0,0410
2,4	0,4773	0,4234	0,3686	0,3143	0,2615	0,2111	0,1633	0,1184	0,0763	0,0369
2,8	0,4200	0,3738	0,3270	0,2804	0,2346	0,1903	0,1479	0,1076	0,0696	0,0337
3,2	0,3741	0,3337	0,2929	0,2521	0,2119	0,1727	0,1348	0,0984	0,0638	0,0310
3,6	0,3366	0,3009	0,2647	0,2285	0,1927	0,1576	0,1235	0,0905	0,0589	0,0287
4	0,3057	0,2736	0,2411	0,2086	0,1764	0,1447	0,1137	0,0836	0,0546	0,0267
4,4	0,2798	0,2506	0,2212	0,1917	0,1625	0,1336	0,1052	0,0776	0,0508	0,0249
4,8	0,2578	0,2311	0,2042	0,1772	0,1504	0,1239	0,0978	0,0723	0,0474	0,0233
5,2	0,2390	0,2143	0,1895	0,1647	0,1400	0,1154	0,0913	0,0676	0,0444	0,0218
5,6	0,2226	0,1998	0,1768	0,1537	0,1308	0,1080	0,0855	0,0634	0,0417	0,0206
6	0,2083	0,1870	0,1656	0,1441	0,1227	0,1014	0,0804	0,0597	0,0393	0,0194



Крен стрічкового фундаменту шириною  $B$  з величиною центрального повздовжнього вирізу  $a$  при дії сили  $N$  вздовж сторони  $B$  (рис. 5) визначається відповідно до теоретичних досліджень Флоріна В. А. та результатами наших досліджень [9]:

$$i = \frac{12Ne}{C_0(B^3 - a^3)} 0,07, \quad (5)$$

де  $C_0 = 3E/2(1 - \mu^2)$  – інтегральний коефіцієнт жорсткості основи для умов плоскої деформації, кПа;

$E$  – модуль деформації ґрунту, кПа;

$\mu$  – коефіцієнт Пуассона ґрунту, од.

**Приклад розрахунку стрічкового фундаменту з повздовжнім вирізом по підшві масивної підпірної стіни.**

В якості вихідних даних для проектування фундаменту стіни прийнято реальні ґрунтові умови будівельного майданчика в Харківській області (Україна). Основою фундаменту стіни служать дрібні щільні піски, маловологі, з прошарками пісків середньої щільності з наступними фізико-механічними характеристиками:  $\gamma = \gamma' = 17,84 \text{ кН/м}^3$ ;  $\varphi = 35^\circ$ ;  $E = 38 \text{ Па}$ ;  $\mu = 0,3$ .

Відповідно до попередніх розрахунків зусилля по підшві фундаменту, а також інші розміри та параметри мають такі значення:

$N = 135 \text{ кН}$  – вертикальна сила;

$M = 80,8 \text{ кН}\cdot\text{м}$  – моментне зусилля;

$d_1 = 1 \text{ м}$  – глибина закладання фундаменту;

$\Delta = \delta = 0,1 \text{ м} = 10 \text{ см}$  – висота вирізу, яка для зручності прийнята рівною товщині бетонної підготовки, тому виріз повинен бути заповнений низькомодульним матеріалом з модулем пружності не менше чим (див. формулу (1)):

$$E_{\text{вкл}} = \frac{\Delta}{s} \gamma' d_1 = \frac{0,1}{0,2} \cdot 17,84 \cdot 1 \approx 9,0 \text{ кПа.}$$

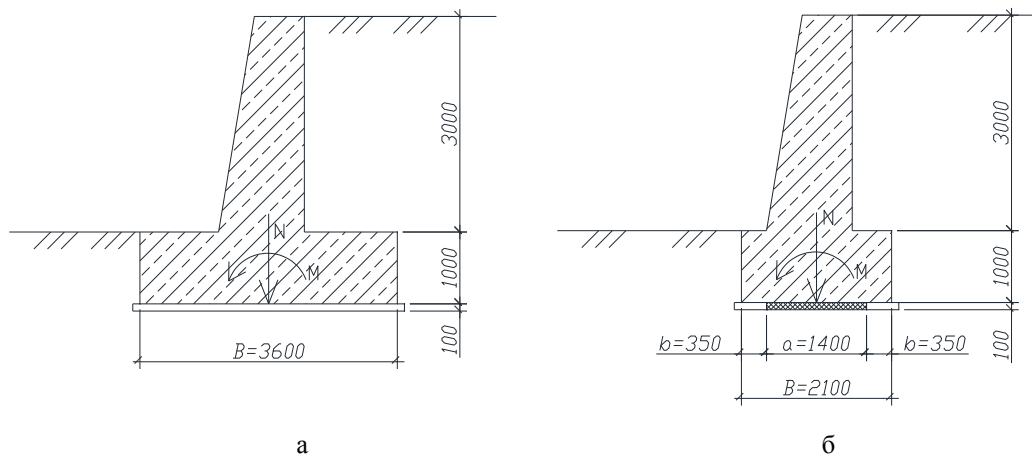
При цьому осідання фундаменту  $s$ , обчислене методом пошарового підсумовування деформацій по глибині вздовж осі внутрішнього обрізу фундаменту (рис. 3 і табл. 1) не перевищуватиме висоту вирізу  $\Delta: s = 2 \text{ см} < 10 \text{ см} = \Delta$ , що є особливістю проектування та принциповою вимогою при розрахунку фундаменту з повздовжнім вирізом у центральній частині підшви.

На підставі загальновідомих формул опору матеріалів виконано розрахунки розмірів підшви фундаментів масивної стіни для задоволення крайових обмежень тиску ( $p_{\text{max}}$  и  $p_{\text{min}}$ ) на ґрунтову основу. Результати зведені у табл. 2, а на рис. 6 представлені основні параметри розмірів підшви фундаментів стіни.

**Таблиця 2**

Результати розрахунку

Суцільна підшова фундаменту, $B = 2b$	Підшова фундаменту з повздовжнім вирізом, $B = 2b + a$
$B = 2b = 6M / N \approx 3,6\text{м}$ (мінімальна ширина підшови отримана для недопущення відриву підшови від основи)	$B = 2b + a = 2 \cdot 0,35 + 1,4 = 2,1\text{м}$ (розміри підшови отримані ітераційно)
$p = 37,5\text{кПа} < 470\text{кПа} \approx R_{2b}$	$p = 193\text{кПа} < 335\text{кПа} \approx R_{2b+a} = R_b \cdot k_d$ де $R_b \approx 310\text{кПа}$ ; $k_d = 1,08$ (при $a/b = 4$ )
$p_{\max} \approx 75\text{кПа} < 564\text{кПа} = 1,2R_{2b}$	$p_{\max} \approx 349\text{кПа} < 402\text{кПа} = 1,2R_{2b+a}$
$p_{\min} \approx 0$	$p_{\min} \approx 37\text{кПа} > 0$
$i = 0,000046$	$i = 0,00033$



**Рис. 6.** Порівняння основних параметрів стрічкових фундаментів масивної підпірної стіни:  
а) із суцільною підшовою; б) із повздовжнім вирізом по підшві

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Як видно із рис. 6, у даному реальному прикладі загальна ширина стрічкового фундаменту з повздовжнім вирізом менше на 1,5 м у порівнянні з суцільною формою підшови фундаменту, що дає суттєвий економічний ефект на кожному погонному метрі фундаменту стіни.

Слід відзначити, що на відміну від розглянутого прикладу розрахунку та будь-яких інших рівних умовах, в тому числі при можливості «відриву» його підшови від основи - фундамент із вирізом по підшві буде завжди мати менші розміри у порівнянні з фундаментом із суцільною підшовою [10].

## 6 ВИСНОВКИ

1. Узагальнено деякі результати досліджень взаємодії з ґрунтовою основою стрічкових фундаментів з повздовжнім вирізом по підшві, що сприймають значні моментні навантаження із запропонованим методик розрахунку для визначення розрахункового опору ґрунту основи, осідання та крену.
2. На реальному прикладі розрахунку стрічкового фундаменту масивної підпірної стіни проведено апробацію запропонованих методик із демонстрацією суттєвого економічного ефекту при застосуванні подібних фундаментів.

## Література

1. Сорочан Е. А. Исследования вопросов применения прерывистых фундаментов. М.: Тр. НИИОСП, 1959. №40. С. 28–45.
2. Тугаенко Ю. Ф., Кушак С. И. Деформации в основаниях фундаментов из шпальных элементов. Основания, фундаменты и механика грунтов, 1986. № 2. С. 9–11.
3. Фидаров М. И. Проектирование и возведение прерывистых фундаментов. М.: Стройиздат, 1986. 230 с.
4. Крахмальний Т. А. Исследования работы песчаного основания ленточного фундамента с ломаным очертанием опорной плиты: Дис. ... канд. техн. наук: 05.23.02. Санкт-Петербург, 2010. 236 с.
5. Евтушенко С. И., Крахмальний Т. А. Исследование работы ленточных фундаментов со сложной конфигурацией подошвы. Основания, фундаменты и механика грунтов, 2017. № 3. С. 14–17.
6. Самородов О. В., Лучковський І. Я., Конюхов О. В., Кротов О. В. Патент на винахід №100647, Україна. МПК (2006.01) E02D 27/01. Стрічковий фундамент з повздовжнім вирізом по підшві. Патентоволодар Харківський національний університет будівництва та архітектури. Заявл. 03.02.2012. Опубл. 10.01.2013. Бюл. №1, 2013. 4 с.
7. Самородов О. В., Лучковський І. Я., Конюхов О. В. Фундаменти с асимметричными вырезами по подошве при действии преобладающих односторонних моментных нагрузок. Науковий вісник будівництва. Харків: ХДТУБА, ХОТВ АБУ, 2010. №61. С. 140–145.
8. ДБН В.2.1-10-2009. Основи та фундаменти споруд. К.: Мінрегіонбуд України, 2009. 104 с.
9. Samorodov A. V., Konyukhov A. V. Field Investigations of Eccentrically Loaded Foundations with Lower-Surface cut-Outs. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2014. 51(3). pp. 105–110.
10. Самородов О. В., Гударі Раджешвар, Кротов О. В., Храпатова І. В.. Ефективні масивні плитні фундаменти з вирізами по підшві для легких баштових споруд. Науковий вісник будівництва, 2021. №4(106). С. 123–131.

## References

1. Sorochan, E. A. (1959). Issledovaniya voprosov primeneniya preryvistykh fundamentov [Research on issues of using discontinuous foundations]. *Proceedings of NIIOSP*. Moscow. 40. 28–45. [in Russian].
2. Tugayenko, Yu. F., Kushchak, S. I. (1986). Deformatsii v osnovaniyakh fundamentov iz shpal'nykh elementov [Deformations in the bases of foundations from sleeper elements]. *Bases, foundations and soil mechanics*. 2. 9–11. [in Russian].
3. Fidarov, M. I. (1986). *Proyektirovaniye i vozvedeniye preryvistykh fundamentov* [Design and erection of discontinuous foundations]. Moscow: Stroizdat. [in Russian].
4. Krakhmalny, T. A. (2010). *Issledovaniya raboty peschanogo osnovaniya lentochnoy fundamenta s lomanyy ocherchaniyem opornoj plity* [Research on the behaviour of the sand base of a strip foundation with the broken contour of the base slab]. Thesis for the degree of Candidate of Technical Sciences by speciality 05.23.02. Krakhmalny T.A., St. Petersburg, 2010. [in Russian].
5. Yevtushenko, S. I. Krakhmalny, T. A. (2017). Issledovaniye raboty lentochnykh fundamentov so slozhnoy konfiguratsiyey podoshvy [Research on the behaviour of strip foundations with a complex configuration of the bottom]. *Bases, foundations and soil mechanics*. 3. 14–17. [in Russian].
6. Samorodov, O. V., Luchkovsky, I. Ya., Konyukhov, O. V., Krotov, O.V. (2013). Patent for invention No.100647, Ukraine, IPC (2006.01) E02D 27/01. *Strip foundation with a longitudinal cut-out on the bottom*. Holder of patent: Kharkiv National University of Civil Engineering and Architecture. Appl. February 03. 2012. Publ. January 10. 2013. Bull. 1. [in Ukrainian].
7. Samorodov, A. V. Luchkovsky, I. Ya., Konyukhov, O. V. (2010). Fundamenti s asimmetrichnymi vrezami po podoshve pri deystvii prevaliruyushchikh odnostoronnikh momentnykh nagruzok [Foundations with asymmetric cut-outs on the bottom under the action of prevailing one-way moment loads]. *Naukovyy visnyk budivnytstva*. 61. 140–145. [in Russian].

8. DBN B.2.1-10-2009 (2009). *Osnovy ta fundamente sporud* [Bases and foundations of buildings]. Kyiv: Minregionbud of Ukraine. [in Ukrainian].
9. Samorodov, A. V., Konyukhov, A. V. (2014). Field Investigations of Eccentrically Loaded Foundations with Lower-Surface cut-Outs. *Soil Mechanics and Foundation Engineering* 51(3). 105–110.
10. Samorodov, O. V., Goodary Rajeshwar, Krotov, O. V., Khrapatova, I. V. (2021). Efektyvni masyvni plytni fundamente z vyrizamy po pidoshvi dlya lehkykh bashtovykh sporud [High-Performance Solid Raft Foundations with Cutouts in the Bottoms for Lightweight Tower-Type Structures]. *Naukovyy visnyk budivnytstva* 4(106). 123-131. [in Ukrainian].

**Самородов Олександр Віталійович**

Харківський національний університет міського господарства ім. О.М. Бекетова

д.т.н., професор

вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, Україна, 61002

osamorodov@ukr.net

ORCID 0000-0003-4395-9417

**Митинський Василь Михайлович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури

к.т.н., доцент

вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029

mitinskiy.v@gmail.com

ORCID 0000-0003-3976-2531

**Кротов Олег Вікторович**

Харківський національний університет міського господарства ім. О. М. Бекетова

к.т.н.

вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, Україна, 61002

krotov.project@gmail.com

ORCID 0000-0002-7588-1370

**Храпатова Ірина Вікторівна**

Харківський національний університет міського господарства ім. О.М. Бекетова

к.т.н., доцент

вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, Україна, 61002

irinakhrapatova@ukr.net

ORCID 0000-0003-3404-5349

*Для посилань:*

Самородов О. В., Митинський В. М., Кротов О. В., Храпатова І. В. Стрічковий фундамент з повздовжнім вирізом по підшві масивної підпірної стіни. *Механіка та математичні методи*, 2023. Т. 5. № 1. С. 33–43.

*For references:*

Samorodov O., Mitinskiy V., Krotov O., Khrapatova I. (2023). A strip foundation with a longitudinal cut-out in the bottom of a massive retaining wall. *Mechanics and Mathematical Methods*. 5(1). 33–43.

УДК 539.3

## РЕГУЛЯРНА ТА СКЛАДНА ПОВЕДІНКА МАЯТНИКОВОЇ СИСТЕМИ У МАГНІТНОМУ ПОЛІ

Сурганова Ю. Е.<sup>1</sup>, Міхлін Ю. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

**Анотація.** Розглянуто динаміку коливальної дисипативної системи, що складається з двох зв'язаних маятників у магнітному полі. Поєднання цих маятників відбувається за допомогою пружного елемента. Інерційні компоненти маятників змінюються в широких межах, причому в аналітичному дослідженні співвідношення мас вибирається як малий параметр. Для наближених розрахунків магнітних сил використовується апроксимація Паде, що найбільшою мірою задовольняє експериментальні дані. Це наближення забезпечує опис магнітного збудження з хорошою точністю. Наявність зовнішніх впливів у вигляді магнітних сил та різного типу навантажень, які існують в багатьох інженерних системах, приводить до значного ускладнення аналізу форм коливань нелінійних систем. Проведено дослідження нелінійних нормальних мод коливань (ННМ) в даній системі, причому одна з мод є зв'язаним режимом, а друга – локалізованою. Моді коливань побудовано методом багатьох масштабів. Вивчається як регулярна, так і складна поведінка при зміні параметрів системи, серед яких коефіцієнт пропорційності мас маятників, коефіцієнт зв'язку, коефіцієнт інтенсивності магнітного впливу, а також відстань між віссю обертання та центром тяжіння. Вплив вказаних параметрів досліджується як при малих, так і при чималих початкових кутах нахилу маятників. Аналітичний розв'язок порівняно з результатами чисельного моделювання, який базується на методі Рунге–Кутти четвертого порядку, де для розрахунку мод коливань використовуються початкові значення змінних, визначені в аналітичному розв'язку. Чисельне моделювання, що включає побудову фазових діаграм і траєкторій у конфігураційному просторі дозволяє оцінити динаміку системи, яка може бути як регулярною, так і складною. Стійкість мод коливань досліджується за допомогою чисельно-аналітичного тесту, що є чисельною реалізацією критерія стійкості за Ляпуновим. При цьому стійкість мод коливань визначається шляхом оцінки ортогональних відхилень від траєкторії відповідної моди коливань в конфігураційному просторі.

**Ключові слова:** пов'язані маятники, магнітні сили, нелінійні нормальні моди коливань, метод багатьох масштабів.

## REGULAR AND COMPLEX BEHAVIOR OF A PENDULUM SYSTEM IN A MAGNETIC FIELD

Y. Surhanova<sup>1</sup>, Yu. Mikhlin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»

**Abstract.** The dynamics of an oscillatory dissipative system consisting of two connected pendulums in a magnetic field is considered. The connection of these pendulums is realized by some elastic element. The inertial components of pendulums vary widely, and the mass ratio is chosen in analytical investigation as a small parameter. For approximate calculations of magnetic forces, the Padé approximation which best satisfies the experimental data, is used. Such approximation permits to describe the magnetic excitation with good accuracy. The presence of external influences in the form of magnetic forces and various types of other loads that exist in many engineering systems leads to a significant complication in the analysis of vibration modes of nonlinear systems. Nonlinear normal modes (NNM) are analysed in the system where one mode is connected and the other is localized. These modes are constructed by the multiple scales method. It is studied as the regular, as well the complex behaviour when changing system parameters, including the pendulums mass ratio, the



coupling coefficient, the magnetic impact intensity coefficient, and the distance between the axis of rotation and the center of gravity. The influence of these parameters is studied at both small and not small initial angles of the pendulums. The analytical solution is compared with results of numerical simulation which is based on the Runge–Kutta method of the fourth order, where initial values of variables defined in the analytical solution are used. Numerical simulation, which includes construction of phase diagrams and trajectories in the configuration space, permits to estimate the system dynamics which can be as regular, as well irregular one. The mode stability is studied by the numerical-analytical test which is a numerical realization of the Lyapunov stability criterion. Here the mode stability is determined by analysis of orthogonal deviations from the mode trajectory in the system configuration space.

**Keywords:** connected pendulums, magnetic forces, nonlinear normal modes, multiple scales method.



## 1 ВСТУП

Математичні та фізичні маятники є важливими моделями, що представляють типову нелінійну динаміку різних типів нелінійних систем. Одним з найважливіших етапів у дослідженні динаміки нелінійних систем з кількома степенями свободи є вивчення нелінійних нормальних мод коливань (ННМ). Велике значення для інженерних застосувань має визначення можливості локалізації коливань, яке іноді шкодить нормальному функціонуванню машин та апаратів. Крім того, важливим уявляється дослідження коливань систем, що знаходяться під впливом магнітних сил. Зазначимо, що ці остання задача для суттєво нелінійних систем є достатньо складною для дослідження і далека від свого розв'язання.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

В декількох останніх публікаціях проведено теоретичне та експериментальне дослідження динаміки двох з'єднаних маятників у магнітному полі [1–3]. В цих роботах, зокрема, представлено графік моменту магнітних сил, отриманий шляхом експериментів. Дослідження нелінійних режимів нормальних мод коливань в такій системі без врахування впливу дисипативних сил, для випадку, коли маси цих з'єднаних маятників істотно розрізняються, виконано в [4]. Зазначимо, відтепер різноманітні аспекти теорії ННМ (Nonlinear normal vibration modes, NNMs) та її різноманітні застосування представлено в багатьох публікаціях. Основні елементи цієї теорії та посилання на публікації можна знайти, зокрема, в оглядах [5, 6] і книзі [7]. Можна також відзначити, що проблема локалізації коливань дуже важлива як для теорії, так і для інженерної практики, і досліджувалася в останні десятиліття в численних публікаціях, серед яких ми виділяємо [8–10]. В даній моделі ми досліджуємо як пов'язану, так і локалізовану моди коливань.

## 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

В роботі досліджено нелінійні нормальні моди коливань (ННМ) в маятниковій системі, що знаходиться в магнітному полі, з урахуванням опору середовища та моменту демпфування, створеного пружним елементом. Розглядається система, в якій маси маятників суттєво розрізняються, що приводить к виникненню локалізації коливань. Ця система є автономною та дисипативною нелінійною системою з двома ступенями свободи. Суттєва нелінійність, присутня в системі, приводить до необхідності застосування асимптотичних методів для аналізу пов'язаної та локалізованої мод коливань. Буде використано метод багатьох масштабів, що може бути успішно застосований саме до дисипативних систем, а також чисельне моделювання. Крім побудови мод коливань ставиться задача дослідити їх стійкість, а також зробити про вплив зміни параметрів системи на її динаміку.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Досліджувана математична модель руху пов'язаних маятників представлена на рис. 1.



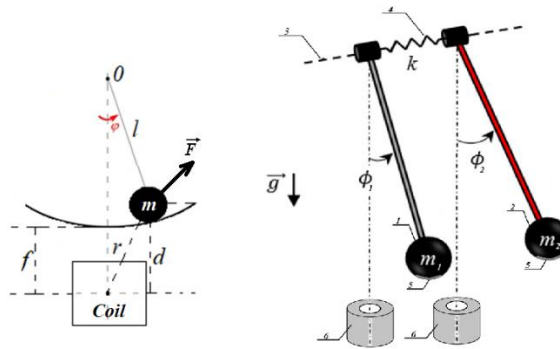


Рис. 1. Система пов'язаних маятників

де  $\mu$  – відношення мас двох маятників;  $\varepsilon$  – умовний малий параметр;  $\varepsilon = 1$ ;  $m$  – маса більшого маятника;  $k_l^* = k_l/I$ ,  $I = 4ms^2$ ,  $k_l$  – жорсткість пов'язаного пружного елемента;  $k_l^*(\varphi_1 - \varphi_2)$  – момент крутильної деформації пружного елемента;  $\gamma$  – інтенсивність магнітного збудження;  $M_{mag_{1,2}}^* = M_{mag_{1,2}}/I$ ,  $M_{mag_{1,2}}$  – магнітний вплив;  $C_{1,2}^* = C_{1,2}/I$ ,  $C_{1,2}$  – коефіцієнт опору в'язкого повітря;  $C_e^* = C_e/I$ ,  $C_e$  – коефіцієнт демпфуючого моменту, створеного пружним елементом;  $r^* \sin \varphi_1$  – момент повернення сили тяжіння;  $r^* = r/I$ ;  $s$  – відстань між центром мас маятника і віссю обертання. Ця система описується наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \varepsilon \mu \ddot{\varphi}_1 = \varepsilon \gamma M_{mag_1}^* - \varepsilon C_1^* \dot{\varphi}_1 - \varepsilon C_e^* (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \varepsilon \mu r^* \sin \varphi_1 - k_l^* (\varphi_1 - \varphi_2); \\ \ddot{\varphi}_2 = \varepsilon \gamma M_{mag_2}^* - \varepsilon C_2^* \dot{\varphi}_2 - \varepsilon C_e^* (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - r^* \sin \varphi_2 - k_l^* (\varphi_2 - \varphi_1), \end{cases} \quad (1)$$

Досліджується ситуація, коли кути повороту двох маятників є не дуже значними, тому використовується розкладання синусів в ряди Маклорена зі збереженням членів не вище третього ступеня.

Використано Паде-апроксимацію магнітного впливу у формі (2).

$$M_{mag}(\varphi) = \left( a_0 + \frac{a_1 \varphi + a_2 \varphi^3}{1 + b_1 \varphi^2 + b_2 \varphi^3} \right) \text{sign}(\varphi), \quad (2)$$

де  $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2$  – коефіцієнти моделі, отримані з використанням процедури нелінійного методу найменших квадратів для того, щоб найкращим чином задовольнити експериментальні дані [1–3]. Порівняння цієї апроксимації з експериментальними даними представлено рис. 2.

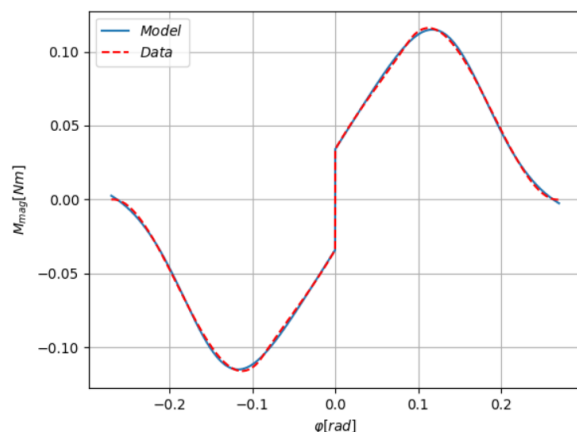


Рис. 2. Експериментальні дані магнітного моменту у порівнянні з чисельно узгодженою моделлю

Представимо розв'язок (1) у вигляді розкладання за малим параметром (3).

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{10} + \varepsilon \varphi_{11} + O(\varepsilon^2); \\ \varphi_2 &= \varphi_{20} + \varepsilon \varphi_{21} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\varphi_{10}, \varphi_{20}$  – розв'язок породжувальної лінійної системи,  $\varphi_{11}, \varphi_{21}$  – розв'язок першого наближення по малому параметру  $\varepsilon$ .

Використовується метод багатьох масштабів [10]. У відповідності до цього методу вводимо часові масштаби, а саме:

$$T_0 = \tau, T_1 = \varepsilon \tau, \tau = \omega_0 t, \quad (4)$$

де  $T_0$  – швидкий час;  $T_1$  – повільний час,  $\omega_0^2 = r^*$ .

Виконуючи стандартні перетворення цього методу, отримаємо системи рівнянь (5) та (6), відповідні двом першим наближенням за малим параметром  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} -k_i^* (\varphi_{10} - \varphi_{20}) = 0, \\ \omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0^2} = -r^* \varphi_{20} - k_i^* (\varphi_{20} - \varphi_{10}). \end{cases} \quad (5)$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} \mu \omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial T_0^2} = \gamma M_{mag1}^* - C_1^* \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial T_0} - \mu r^* \varphi_{10} - k_i^* (\varphi_{11} - \varphi_{21}), \\ \omega_0^2 \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial T_0^2} \right) = \gamma M_{mag2}^* - C_2^* \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial T_0} - r^* \left( \varphi_{21} - \frac{1}{6} \varphi_{20}^3 \right) - k_i^* (\varphi_{21} - \varphi_{11}). \end{cases} \quad (6)$$

Розв'язком (5) є  $\varphi_{10} = \varphi_{20} = A_1(T_1) \cos(T_0 + \nu)$ , що відповідає синфазній пов'язаній формі коливань. Магнітний момент, що діє на перший маятник, представлено рядом Фур'є відповідно до співвідношення (7) (для магнітного впливу на другий маятник будемо використовувати коефіцієнти  $h_i, i = \overline{(0, 6)}$ ).

$$M_{mag1}^* \approx \frac{1}{I} \left( \frac{g_0}{2} + \sum_{i=1}^6 g_i \cos(i(T_0 + \nu)) \right), \quad (7)$$

$$\text{де } g_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sign}(\varphi_{10}) \left( a_0 + \frac{a_1 \varphi_{10} + a_2 \varphi_{10}^3}{1 + b_1 \varphi_{10}^2 + b_2 \varphi_{10}^3} \right) \cos(i(T_0 + \nu)) dT_0, i = \overline{(0, 6)}.$$

Щоб запобігти появі секулярних доданків у системі рівнянь (6), ми виключаємо доданки, що містять функції  $\cos(T_0 + \nu)$  та  $\sin(T_0 + \nu)$  у правій частині цих рівнянь, і в результаті отримуємо рівняння (8) та (9).

$$\cos(T_0 + \nu) : 2\omega_0^2 A_1 \frac{d\nu_1}{dT_1} + \frac{\gamma}{I} (g_1 + h_1) + \frac{r^* A_1}{8} = 0, \quad (8)$$

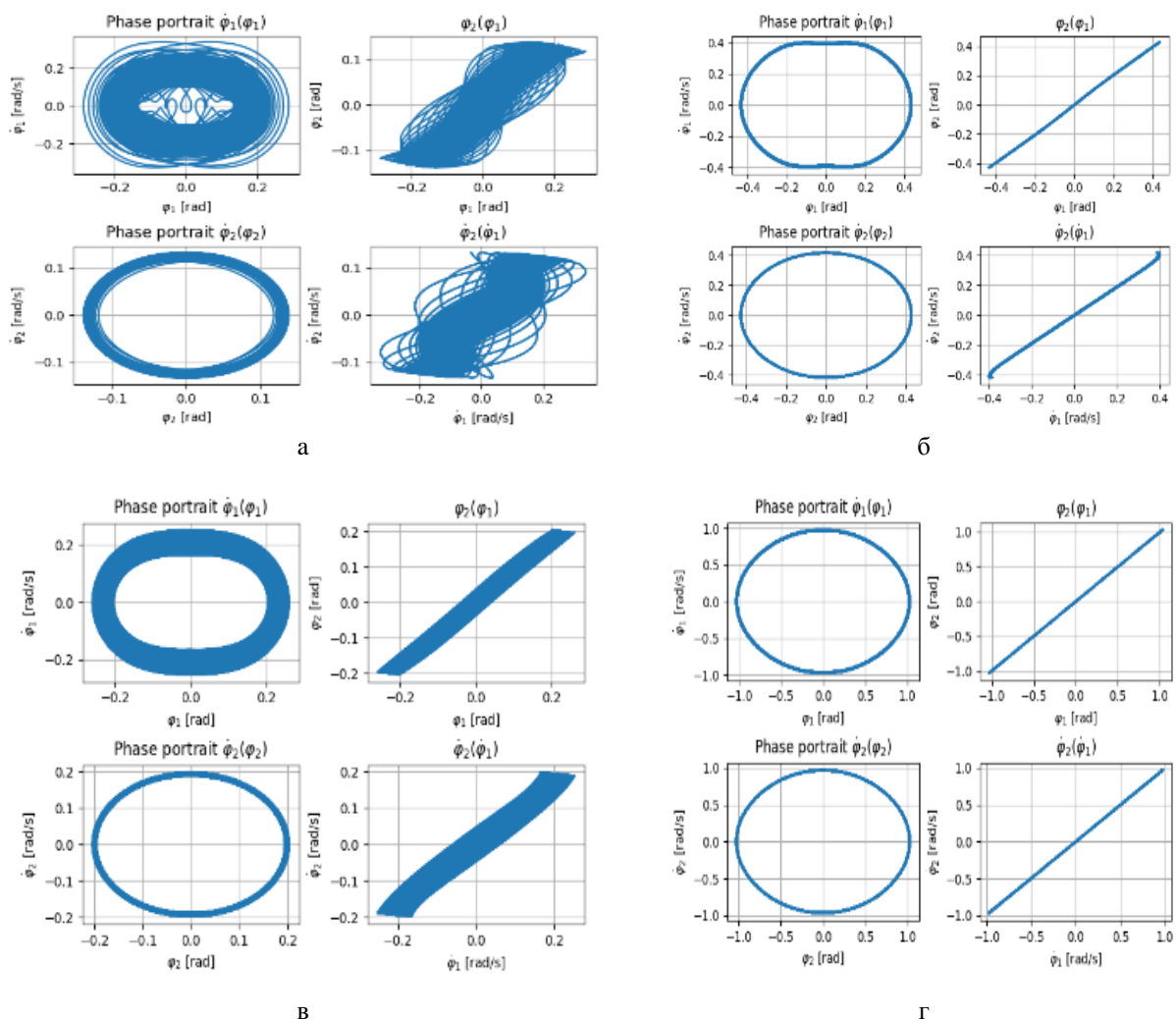
$$\sin(T_0 + \nu) : 2\omega_0^2 \frac{dA_1}{dT_1} + A_1 (C_1^* + C_2^*) = 0. \quad (9)$$

Звідси випливає, що

$$A_1 = e^{A_3 \frac{(C_1^* + C_2^*) T_1}{2\omega_0^2}}, \quad \nu = \frac{-\gamma(g_1 + h_1)}{I(C_1^* + C_2^*)} e^{\frac{(C_1^* + C_2^*) T_1}{2\omega_0^2} - A_3} + \frac{\omega_0^2}{16(C_1^* + C_2^*)} e^{2A_3 \frac{(C_1^* + C_2^*) T_1}{\omega_0^2}},$$

де  $A_3$  – довільна константа, що визначається початковим відхиленням маятника. Порівняння аналітичного розв’язку з чисельним, застосованим до базової системи (1) з використанням методу Рунге–Кутти 4-го порядку, проведено для початкових значень змінних, які визначаються з аналітичного рішення. Таке порівняння показує хорошу точність аналітичної апроксимації при достатньо малих значеннях параметра  $\mu$ , та для таких значень початкових кутів маятників, які приблизно не перевищують  $60^\circ$ .

Тепер розглянемо вплив параметрів системи та початкових умов на цю форму коливань. Параметр  $A_3$ , який пов’язаний з початковим відхиленням, будемо змінювати у діапазоні від  $-1.5$  до  $1.5$  і розглядати тільки випадки, коли початкове відхилення не перевищує  $60^\circ$ . Інші параметри зафіксуємо таким чином:  $m = 0.5(\text{kg})$ ,  $s = 2.5(\text{m})$ ,  $k_l = 1(\text{Nm/rad})$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\gamma = 1/5$ ,  $\dot{\varphi}_{1,2}(0) = 0(\text{rad/s})$ , і розглянемо декілька значень коефіцієнту пропорційності мас  $\mu = \{0.01, 0.05, 0.1\}$ . Тут і надалі час моделювання поведінки системи складатиме 3000 секунд. Результати представлено на рис. 3.

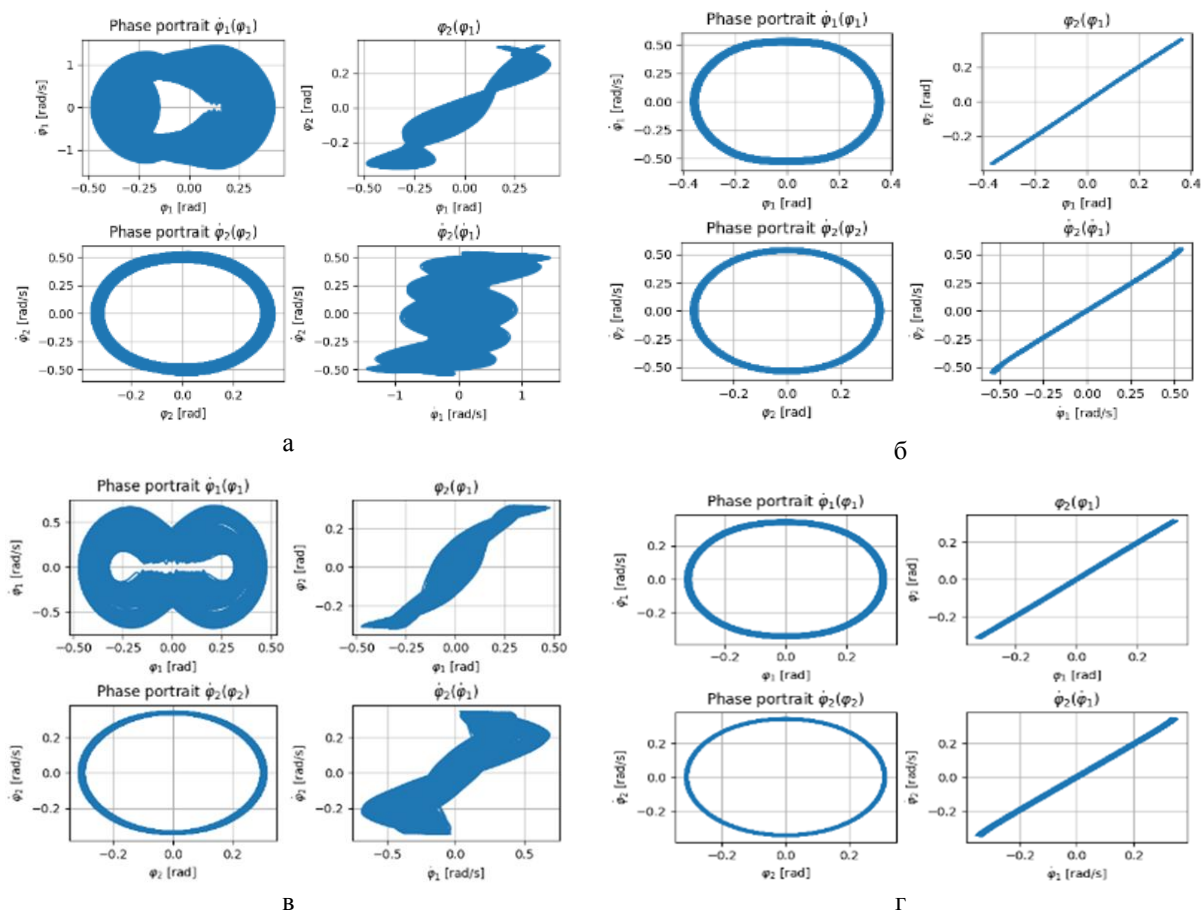


**Рис. 3 (а-г).** Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі при різних початкових умовах та коефіцієнтах пропорційності мас двох маятників

На рис. 3 бачимо, що не на всьому діапазоні початкових умов реалізується синфазна мода коливань (на рис. 3а використано таке:  $A_3 = -0.69$ ,  $\varphi_1(0) = -0.1333\text{rad}$  ( $-7.64^\circ$ ),  $\varphi_2(0) = -0.1389\text{rad}$  ( $-7.9584^\circ$ ),  $\mu = 0.05$ ). Порівнюючи рис. 3а та рис. 3в, де

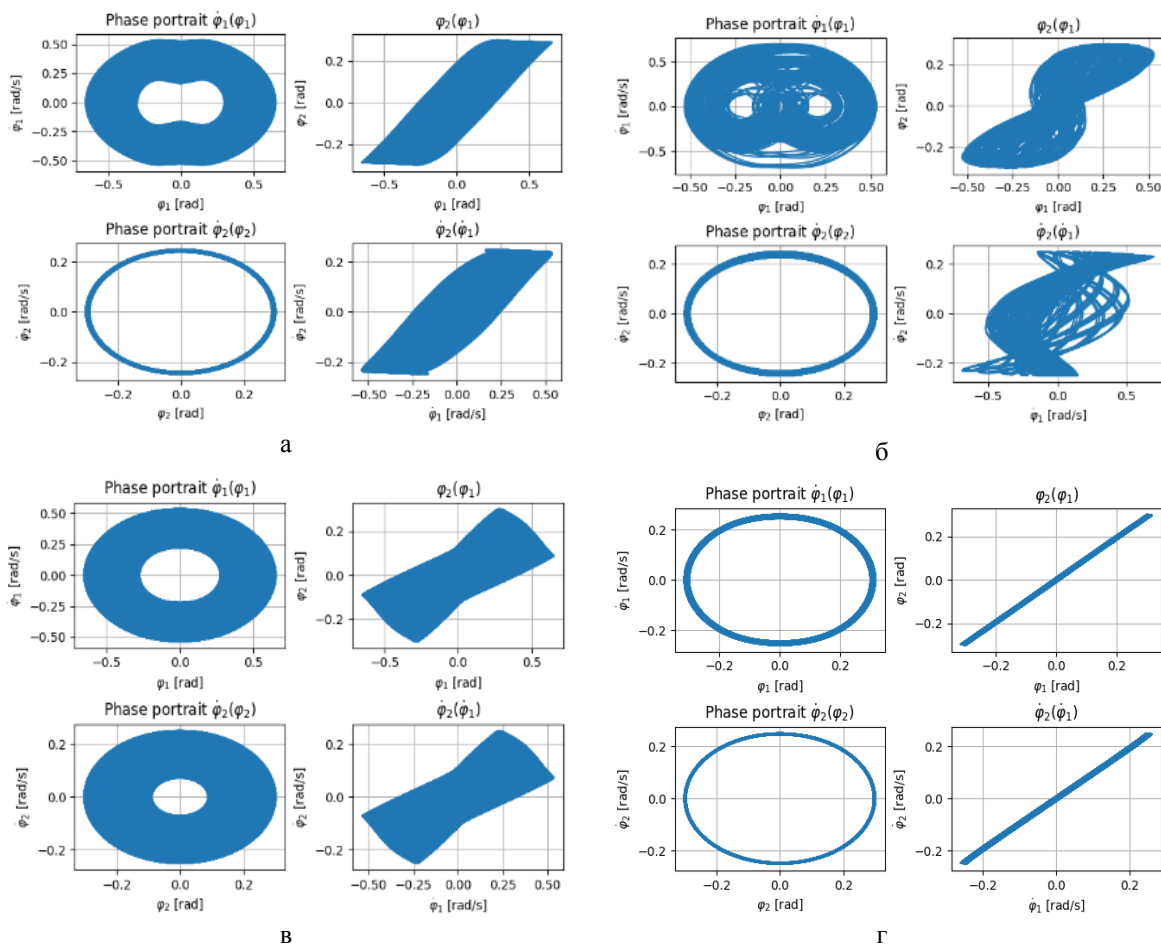
$A_3 = 0.14$ ,  $\varphi_1(0) = 0.20364\text{rad}(11.67^\circ)$ ,  $\varphi_2(0) = 0.204\text{rad}(11.69^\circ)$ ,  $\mu = 0.1$ , приходимо до висновку, що зі збільшенням коефіцієнта пропорційності мас маятників блукання поблизу модальних траєкторій в конфігураційному та фазовому просторах системи зменшуються. На рис. 3б маємо:  $A_3 = -0.04$ ,  $\varphi_1(0) = -0.432\text{rad}(-24.752^\circ)$ ,  $\varphi_2(0) = -0.4289\text{rad}(-24.574^\circ)$ ,  $\mu = 0.05$ , а на рис. 3г:  $A_3 = 1$ ,  $\varphi_1(0) = 1.0314\text{rad}(59.095^\circ)$ ,  $\varphi_2(0) = 1.02995\text{rad}(59.0118^\circ)$ ,  $\mu = 0.1$ .

Розберемо вплив відстані між віссю обертання та центром тяжіння маятників  $s$ . На цьому етапі дослідження ми розглядаємо різні початкові значення кутів маятників та різні величини коефіцієнту пропорційності мас маятників, а параметр  $s \in [0.1, 4](m)$ . Інерційні моменти при зміні відстані перераховувались кожного разу. Отримано, що синфазна форма більш виражена при збільшенні як відстані, так і маси меншого маятника (рис. 4). Зі збільшенням відстані такий результат є очевидним, оскільки в такому випадку вплив магнітного моменту менший. На рис.4а обрано таке:  $\mu = 0.02$ ,  $s = 1(m)$ ,  $I = 2(kgm^2)$ ,  $r = 4.905(Nm)$ ,  $\varphi_1(0) = 0.3607\text{rad}(20.7^\circ)$ ,  $\varphi_2(0) = 0.3602\text{rad}(20.64^\circ)$ , на рис. 4б:  $\mu = 0.25$ ,  $s = 1(m)$ ,  $I = 2(kgm^2)$ ,  $r = 4.905(Nm)$ ,  $\varphi_1(0) = 0.3607\text{rad}(20.7^\circ)$ ,  $\varphi_2(0) = 0.3602\text{rad}(20.64^\circ)$ , на рис. 4в:  $\mu = 0.02$ ,  $s = 2(m)$ ,  $I = 8(kgm^2)$ ,  $r = 9.81(Nm)$ ,  $\varphi_1(0) = 0.315\text{rad}(18.05^\circ)$ ,  $\varphi_2(0) = 0.3166\text{rad}(18.14^\circ)$  та на рис. 4г:  $\mu = 0.25$ ,  $s = 2(m)$ ,  $I = 8(kgm^2)$ ,  $r = 9.81(Nm)$ ,  $\varphi_1(0) = 0.315\text{rad}(18.05^\circ)$ ,  $\varphi_2(0) = 0.3166\text{rad}(18.14^\circ)$ .



**Рис. 4 (а-г).** Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі при різних значеннях початкових умов, коефіцієнтах пропорційності мас двох маятників та відстані між центром тяжіння та віссю обертання маятників

Дослідимо ефект коефіцієнту зв'язку  $k_l$ , величину котрого змінюємо від 0.01 до 1  $Nm/rad$ . У більшості розглянутих випадках при великій відстані від осі обертання до центру мас маятника і чималому коефіцієнту співвідношення мас маятників збільшення значення коефіцієнта зв'язку призводить до стабілізації синфазної форми коливань і зменшення блукань траекторій поблизу такої форми (рис. 5). На рис. 5а:  $\mu = 0.02$ ,  $s = 3.5(m)$ ,  $I = 24.5(kgm^2)$ ,  $r = 17.1675(Nm)$ ,  $k_l = 0.04(Nm/rad)$ ,  $\varphi_1(0) = -0.3rad(-17.19^\circ)$ ,  $\varphi_2(0) = -0.3015rad(-17.275^\circ)$ , на рис. 5б:  $\mu = 0.02$ ,  $s = 3.5(m)$ ,  $I = 24.5(kgm^2)$ ,  $r = 17.1675(Nm)$ ,  $k_l = 0.93(Nm/rad)$ ,  $\varphi_2(0) = -0.3015rad(-17.275^\circ)$ ,  $\varphi_1(0) = -0.3014rad(-17.27^\circ)$ , на рис. 5в:  $\mu = 0.25$ ,  $s = 3.5(m)$ ,  $I = 24.5(kgm^2)$ ,  $r = 17.1675(Nm)$ ,  $k_l = 0.06(Nm/rad)$ ,  $\varphi_1(0) = -0.3rad(-17.19^\circ)$ ,  $\varphi_2(0) = -0.3015rad(-17.275^\circ)$  та на рис. 5г:  $\mu = 0.25, s = 3.5(m)$ ,  $I = 24.5(kgm^2)$ ,  $r = 17.1675(Nm)$ ,  $k_l = 0.93(Nm/rad)$ ,  $\varphi_1(0) = -0.3014rad(-17.27^\circ)$ ,  $\varphi_2(0) = -0.3015rad(-17.275^\circ)$ .



**Рис. 5 (а-г).** Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі при різних значеннях початкових умов, коефіцієнтах пропорційності мас двох маятників, відстані між центром тяжіння та віссю обертання маятників і коефіцієнтах зв'язку

Вивчимо вплив в'язкого опору  $C_{1,2}$  у сукупності з коефіцієнтом демпфуючого моменту  $C_e$ . Для проведення дослідження ми варіювали вказані параметри у діапазоні від  $10^{-5}$  до  $10^{-2} (Nms/rad)$ . Отримано, що збільшення параметрів дисипації не завжди



стягує траєкторії до форми (рис. 6). На рис. 6а:  $s = 3.5(m)$ ,  $k_l = 0.5(Nms/rad)$ ,  $\mu = 0.55$ ,  $\varphi_1(0) = -0.942rad(-53.973^\circ)$ ,  $\varphi_2(0) = -0.913rad(-52.31^\circ)$ ,  $C_{1,2,e} = 7 \cdot 10^{-5} (Nms/rad)$ , на рис. 6б:  $s = 3.5(m)$ ,  $k_l = 0.5(Nms/rad)$ ,  $\mu = 0.55$ ,  $\varphi_1(0) = -0.5445rad(-31.2^\circ)$ ,  $\varphi_2(0) = -0.542rad(-31.05^\circ)$ ,  $C_{1,2,e} = 0.000574(Nms/rad)$ , на рис. 6в:  $s = 1.5(m)$ ,  $k_l = 0.96(Nms/rad)$ ,  $\mu = 0.02$ ,  $\varphi_1(0) = 0.853rad(48.8733^\circ)$ ,  $\varphi_2(0) = 0.8522rad(48.83^\circ)$ ,  $C_{1,2,e} = 0.00086(Nms/rad)$ , на рис. 6г:  $s = 1.5(m)$ ,  $k_l = 0.96(Nms/rad)$ ,  $\mu = 0.02$ ,  $\varphi_1(0) = 0.4087rad(23.42^\circ)$ ,  $\varphi_2(0) = 0.387rad(22.2^\circ)$ ,  $C_{1,2,e} = 0.00856(Nms/rad)$ .

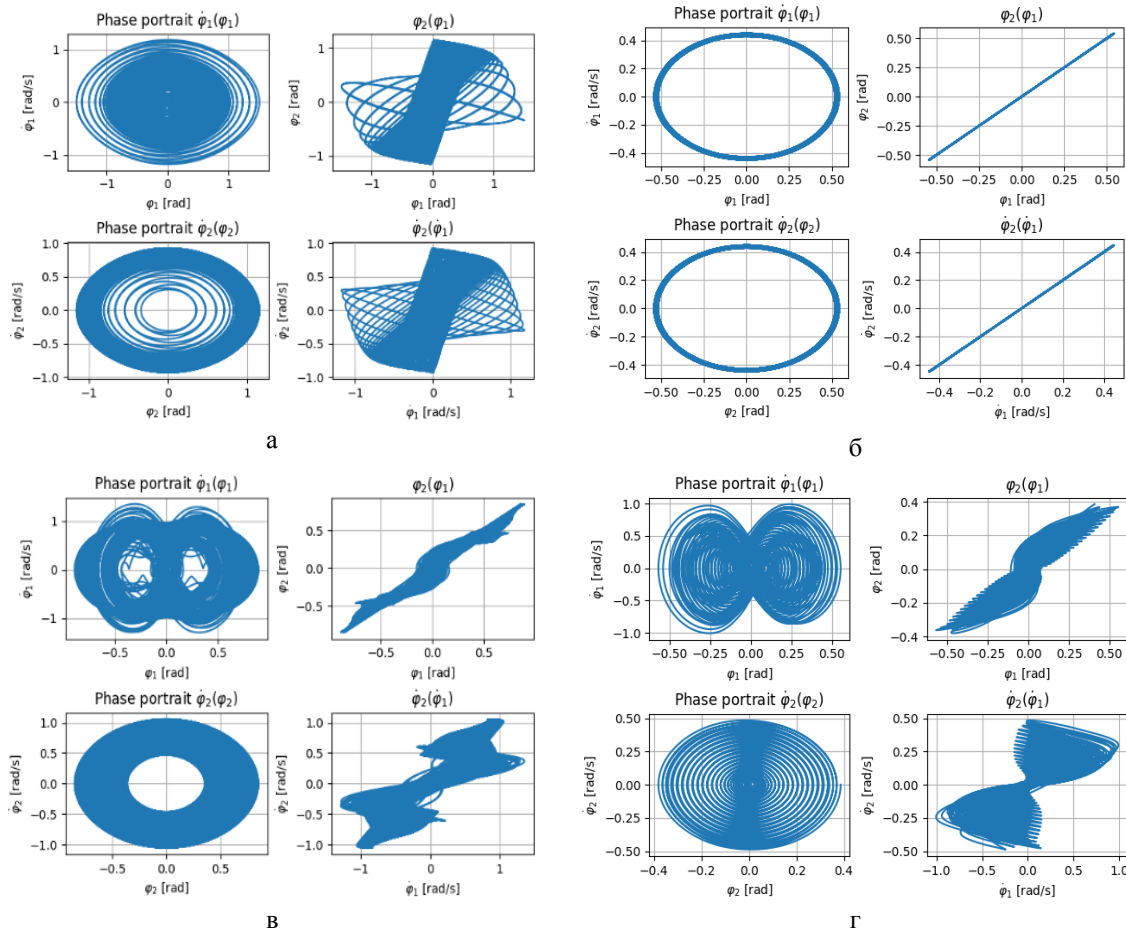
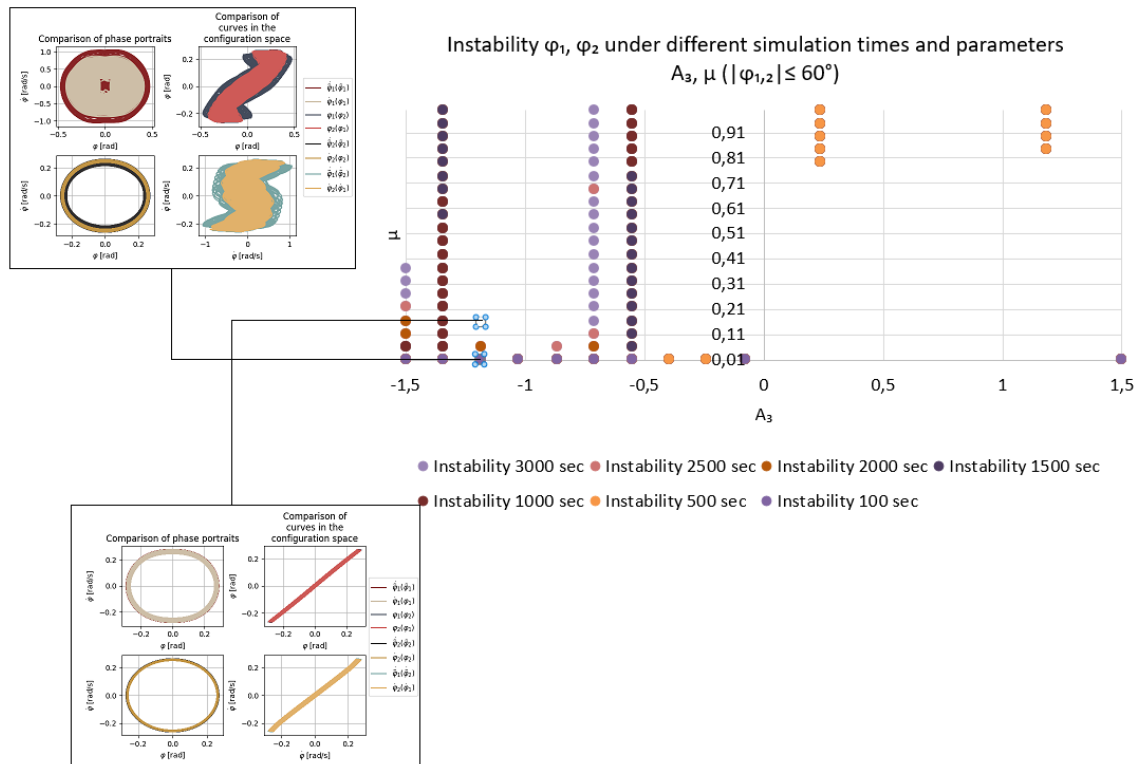


Рис. 6 (а-г). Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі (вплив параметрів дисипації)

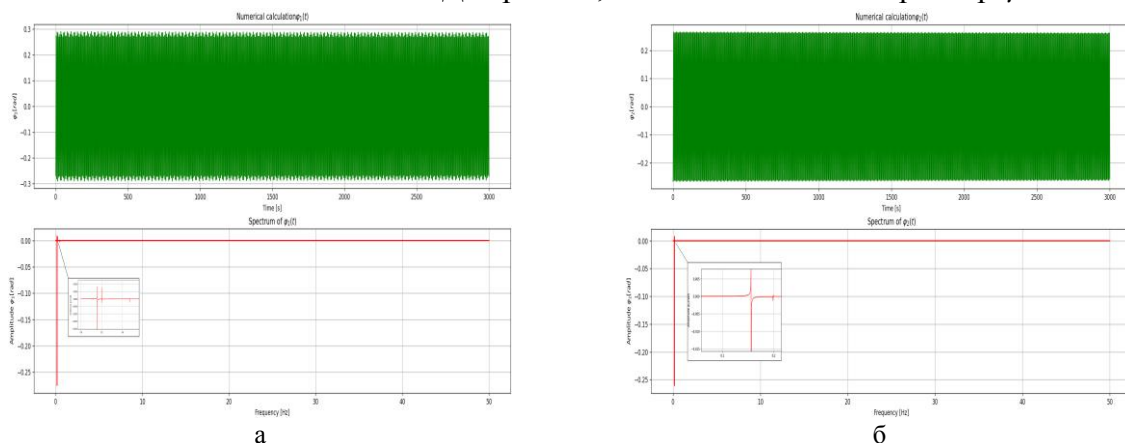
Проаналізуємо стійкість пов'язаної форми коливань в залежності від параметрів  $A_3$ ,  $\mu$  шляхом чисельної реалізації критерія стійкості за Ляпуновим, який було запропоновано та описано в роботі [11]. Стійкість моди коливань визначається ортогональними відхиленнями від її траєкторії в конфігураційному просторі. Початкові умови для відхилень від траєкторії визначаються через початкові значення кутів двох маятників на формі коливань як  $\tilde{\varphi}_{1,2}(0) = 1.01\varphi_{1,2}(0)$ . Потім розраховуються вказані відхилення при зміні часу. Нестійкість моди коливань фіксуємо, коли відхилення за модулем  $|\varphi_{1,2}(t)|$  перевищують значення  $\rho|\varphi_{1,2}(0)|$ . Як показано в [11], значення  $\rho$  можуть бути обрані в достатньо широкому діапазоні чисел, що перевищують 1. В даній роботі прийнято  $\rho = 1.1$ . Оскільки ми досліджуємо стійкість мод коливань в залежності від значень параметрів  $A_3$ ,  $\mu$ , то на відповідній площині встановимо сітку значень в

прямокутнику  $A_3 \in [-1.5, 1.5]$ ,  $\mu \in [0.01, 1]$ . Сітка будується за допомогою методу, який повертає по 20 рівновіддалених точок масиву з вказаного діапазону. Обчислення відхилень проведено методом Рунге-Кутти в вузлах сітки зі зростанням часу. Обчислення припиняються, коли границі областей стійкості/нестійкості на площині параметрів стабілізуються в обраному масштабі сітки при збільшенні часу обчислень. Результати розрахунків представлені на рис. 7, де виділено області нестійкості.



**Рис. 7.** Области нестійкості розв’язку  $\varphi_1$  в залежності від часу моделювання системи та значень параметрів  $A_3, \mu$

Результати розрахунків демонструють, що пов’язана мода є нестійкою при малих значеннях параметру  $\mu$ , якщо початкові значення кутів малі. Це майже очевидно, тому що при малих початкових кутах вплив магнітних сил суттєво перевищує вплив пружних характеристик системи. Розглянемо АЧХ для випадків, представлених на рис. 7, де для рис. 7а,б обрано такі значення параметрів:  $A_3 = -1.184$ ,  $\mu = 0.1663$ ,  $s = 2.5(m)$ ,  $k_l = 1(Nm/rad)$ ,  $\varphi_1(0) = -0.2687rad(-15.344^\circ)$ ,  $\varphi_2(0) = -0.2652rad(-15.195^\circ)$  для кожного маятника відповідно. Для рис. 7в,г змінюється лише параметр  $\mu = 0.01$ .





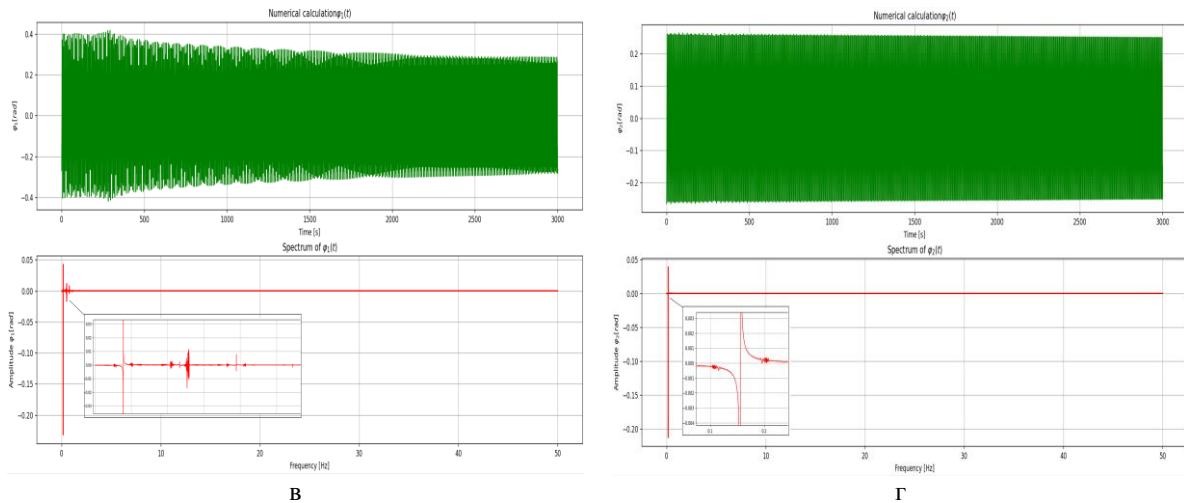


Рис. 8 (а-г). АЧХ для пов'язаної моди коливань

Проведемо тепер дослідження локалізованого режиму. Така мода коливань може бути аналітично представлена після введення перетворення часу:  $t = \sqrt{\varepsilon}\tau$ . Тоді система (1) набуває вигляду (9).

$$\begin{cases} \mu\ddot{\varphi}_1 = \varepsilon\gamma M_{mag1}^* - \varepsilon C_1^* \dot{\varphi}_1 - \varepsilon C_e^* (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \varepsilon\mu r^* \sin \varphi_1 - k_l^* (\varphi_1 - \varphi_2); \\ \ddot{\varphi}_2 = \varepsilon^2 \gamma M_{mag2}^* - \varepsilon^2 C_2^* \dot{\varphi}_2 - \varepsilon^2 C_e^* (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - \varepsilon r^* \sin \varphi_2 - \varepsilon k_l^* (\varphi_2 - \varphi_1). \end{cases} \quad (9)$$

Аналогічно, як і у випадку синфазної форми, введемо у відповідності до метода багатьох масштабів швидкі та повільні часові масштаби та розкладемо шукані функції за малим параметром  $\varepsilon$ , подібно формулам (3) та (4). Запишемо дві системи, що відповідають двом наближенням за малим параметром:

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} \mu\omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial T_0^2} = -k_l^* (\varphi_{10} - \varphi_{20}), \\ \omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0^2} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} \mu\omega_0^2 \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial T_0^2} \right) = \gamma M_{mag1}^* - C_1^* \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial T_0} - C_e^* \left( \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial T_0} \right) - \mu r^* \varphi_{10} - k_l^* (\varphi_{11} - \varphi_{21}), \\ \omega_0^2 \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial T_0^2} \right) = -r^* \varphi_{20} - k_l^* (\varphi_{20} - \varphi_{10}). \end{cases} \quad (11)$$

Рішенням (10) є  $\varphi_{20} = 0$ ,  $\varphi_{10} = A_1(T_1) \cos(T_0 + \nu)$ ,  $\omega_0^2 = k_l^* / \mu$ . Магнітний момент представимо у вигляді (7). Знову виключаємо доданки, що містять  $\cos(T_0 + \nu)$  та  $\sin(T_0 + \nu)$ , тому

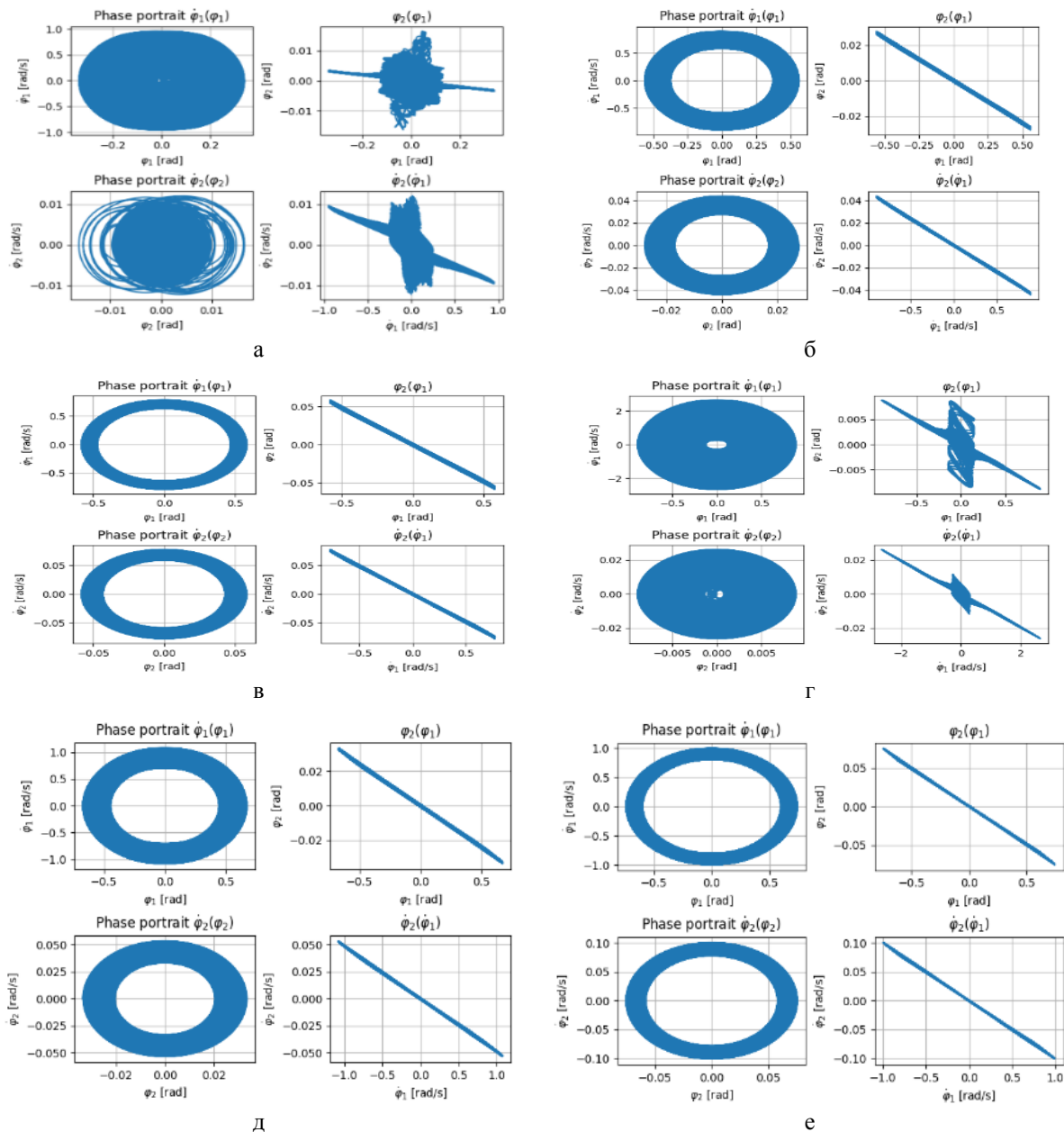
$$\cos(T_0 + \nu) : 2\mu\omega_0^2 A_1 \frac{d\nu_1}{dT_1} + \frac{\gamma}{I} g_1 - \mu A_1 (r^* + k_l^*) = 0, \quad (12)$$

$$\sin(T_0 + \nu) : 2\mu\omega_0^2 \frac{dA_1}{dT_1} + A_1 (C_1^* + C_e^*) = 0. \quad (13)$$

Звідси випливає, що

$$A_1 = e^{A_3 \frac{(C_1^* + C_e^*)T_1}{2k_l^*}}, \quad \nu = \frac{-\gamma g_1}{C_1^* + C_e^*} e^{\frac{(C_1^* + C_e^*)T_1}{2k_l^*} - A_3} + \frac{(r^* + k_l^*)T_1}{2\omega_0^2}.$$

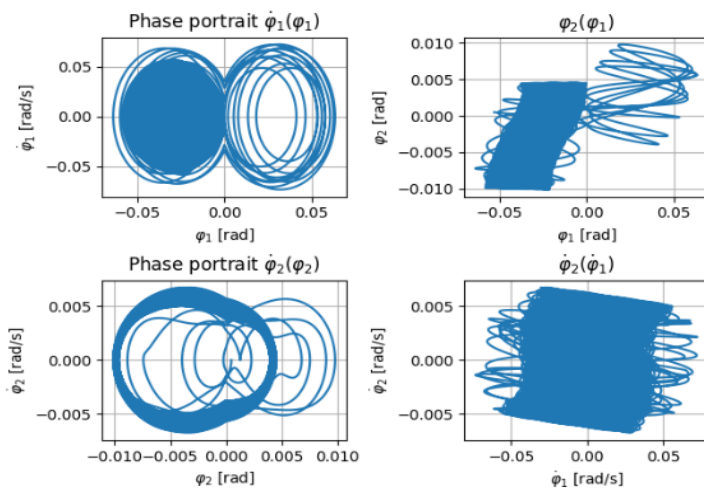
Далі досліджується вплив параметрів та початкових умов на локалізований режим. Починаємо з параметра  $A_3$ , який визначається початковими кутами маятників. Даний параметр й інші параметри системи змінюємо у тому ж діапазоні, що і при дослідженні синфазного режиму коливаль, а саме:  $m = 0.5(kg)$ ,  $s = 2.5(m)$ ,  $k_l = 1(Nm/rad)$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\gamma = 1/5$ ,  $\dot{\varphi}_{1,2}(0) = 0(rad/s)$ ,  $\mu = \{0.01, 0.05, 0.1\}$ . Результати подано на рис. 9.



**Рис. 9 (а-е).** Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі при різних значеннях початкових умов та коефіцієнтів відношення мас маятників

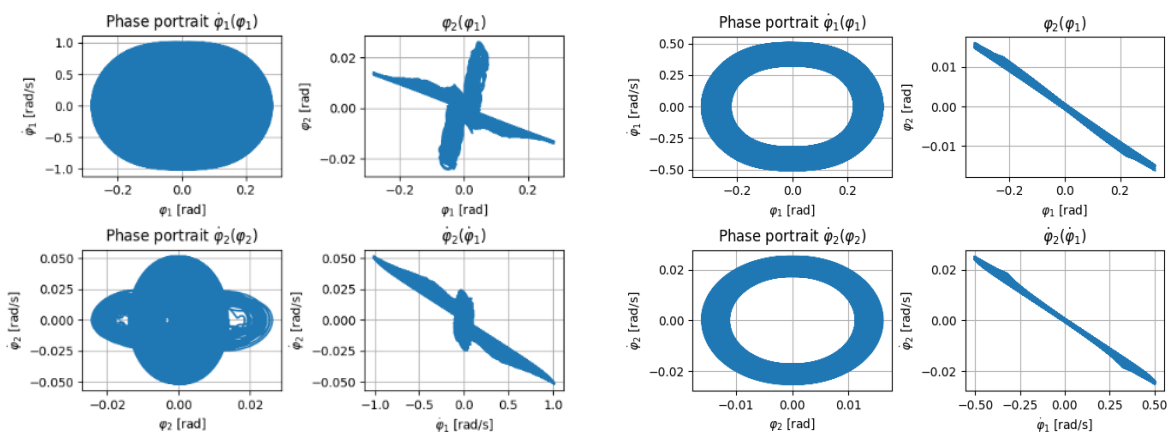
На рис. 9а-в зображено випадки, коли  $A_3 = -0.33$ , причому на рис. 9а  $\mu = 0.01$ ,  $\varphi_1(0) = 0.3396rad (19.46^\circ)$ ,  $\varphi_2(0) = -0.003473rad (-0.2^\circ)$ . На рис. 9б:

$\mu = 0.05, \varphi_1(0) = -0.56\text{rad}(-32.1^\circ), \varphi_2(0) = 0.028\text{rad}(1.6^\circ)$ ; на рис. 9в:  $\mu = 0.1, \varphi_1(0) = -0.58\text{rad}(-33.23^\circ), \varphi_2(0) = 0.06\text{rad}(3.44^\circ)$ . На рис. 9г-е:  $A_3 = 1$ , але на рис. 9г:  $\mu = 0.01, \varphi_1(0) = -0.8935\text{rad}(-51.2^\circ), \varphi_2(0) = 0.0088\text{rad}(0.504^\circ)$ , на рис. 9д:  $\mu = 0.05, \varphi_1(0) = 0.671\text{rad}(38.445^\circ), \varphi_2(0) = -0.0335\text{rad}(-1.92^\circ)$ . На рис. 9е:  $\mu = 0.1, \varphi_1(0) = -0.741\text{rad}(-42.456^\circ), \varphi_2(0) = 0.0748\text{rad}(-4.286^\circ)$ . Бачимо, що зі збільшенням величини коефіцієнта пропорційності мас маятників, блукання поблизу режиму зменшуються і форма стає більш визначеною. Зрозуміло, що при малих початкових кутах локалізований режим не існує, тому, що вплив магнітного моменту є дуже значним (рис. 10). Для побудови рис. 10 використовувалися такі значення параметрів:  $A_3 = -0.73, \mu = 0.01, \varphi_1(0) = -0.053\text{rad}(-3.04^\circ), \varphi_2(0) = 0.000486\text{rad}(0.03^\circ)$ .



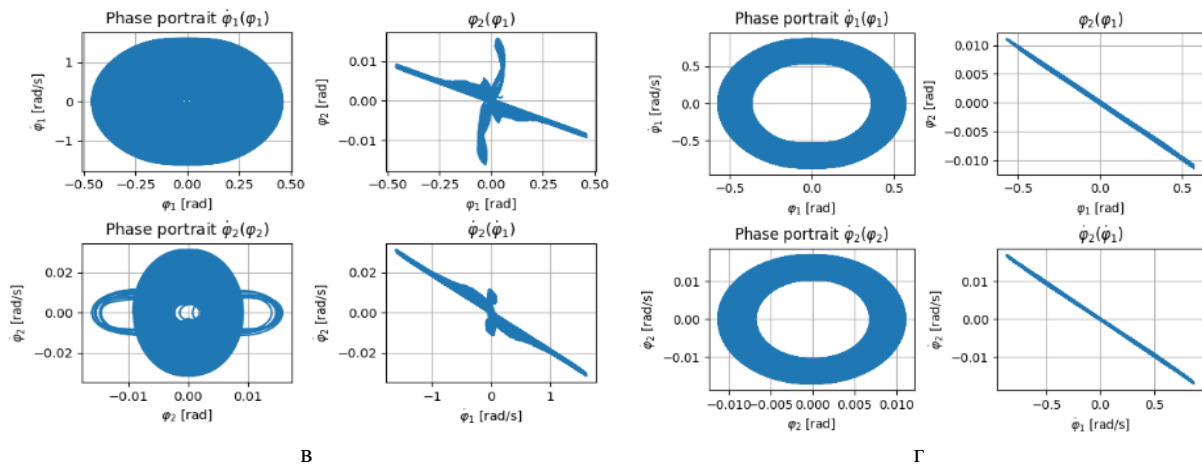
**Рис. 10.** Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі малих початкових кутів маятників

Розберемо вплив відстані між віссю обертання та центром тяжіння маятників  $s$ . Як і для синфазної форми, локалізований режим спостерігається при збільшенні відстані  $s$ . (рис. 11). На рис. 11а маємо:  $\mu = 0.05, s = 0.9(m), \varphi_1(0) = -0.282\text{rad}(-16.16^\circ), \varphi_2(0) = 0.0141\text{rad}(0.808^\circ), A_3 = -1.13$ , на рис. 11б:  $\mu = 0.05, s = 2.5(m), \varphi_1(0) = 0.3266\text{rad}(18.713^\circ), \varphi_2(0) = -0.01614\text{rad}(-0.925^\circ), A_3 = -1.13$ , на рис. 11в:  $\mu = 0.02, s = 1.5(m), \varphi_1(0) = 0.4614\text{rad}(26.44^\circ), \varphi_2(0) = -0.0092\text{rad}(-0.53^\circ), A_3 = -0.33$  і для рис. 11г:  $\mu = 0.02, s = 3.8(m), \varphi_1(0) = 0.57\text{rad}(32.66^\circ), \varphi_2(0) = -0.01126\text{rad}(-0.645^\circ), A_3 = -0.33$ .



а

б



**Рис. 11 (а-г).** Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі при різних значеннях початкових умов, коефіцієнтів відношення мас маятників та відстані між центром мас та віссю обертання маятників

Дослідимо ефект коефіцієнту зв'язку  $k_l$ . Виявляється, що локалізований режим проявляється при збільшенні зв'язку та відстані між центром мас та віссю обертання маятників або при збільшенні, як зв'язку, так і коефіцієнта пропорційності мас маятників. Відповідні приклади показано на рис. 12. На рис. 12а:  $\mu = 0.01$ ,  $s = 3.5(m)$ ,  $\varphi_1(0) = -0.3rad(-17.19^\circ)$ ,  $A_3 = -1.13, k_l = 0.14(Nm/rad)$ ,  $\varphi_2(0) = 0.0032rad(0.183^\circ)$ , на рис. 12б:  $\mu = 0.01$ ,  $s = 3.5(m)$ ,  $A_3 = -1.13$ ,  $k_l = 0.84(Nm/rad)$ ,

$\varphi_1(0) = -0.2612rad(-14.966^\circ)$ ,  $\varphi_1(0) = 0.00262rad(0.15^\circ)$ , на рис.12в:

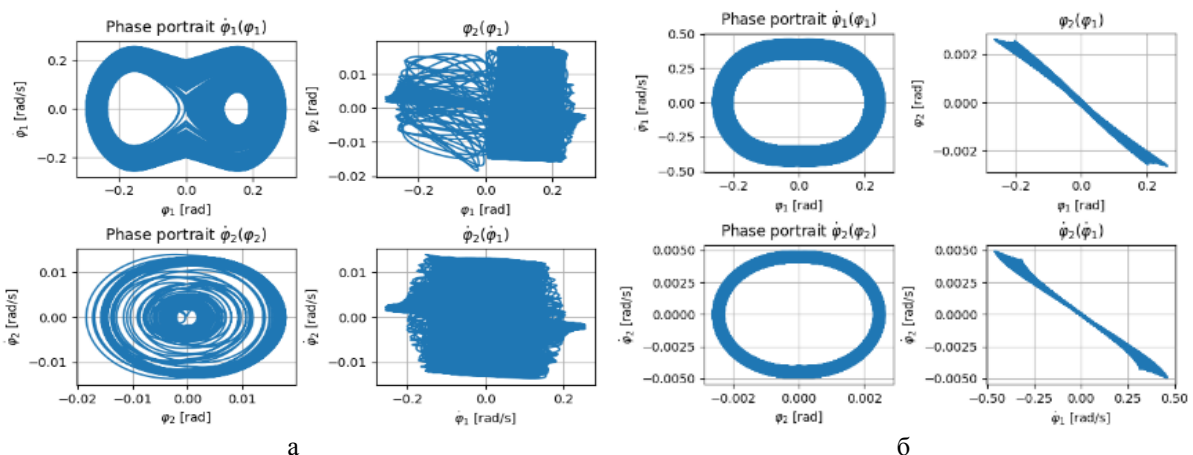
$\mu = 0.01, s = 1.5(m)$ ,  $\varphi_1(0) = -0.281rad(-16.1^\circ)$ ,  $A_3 = -1.13, k_l = 0.19(Nm/rad)$ ,

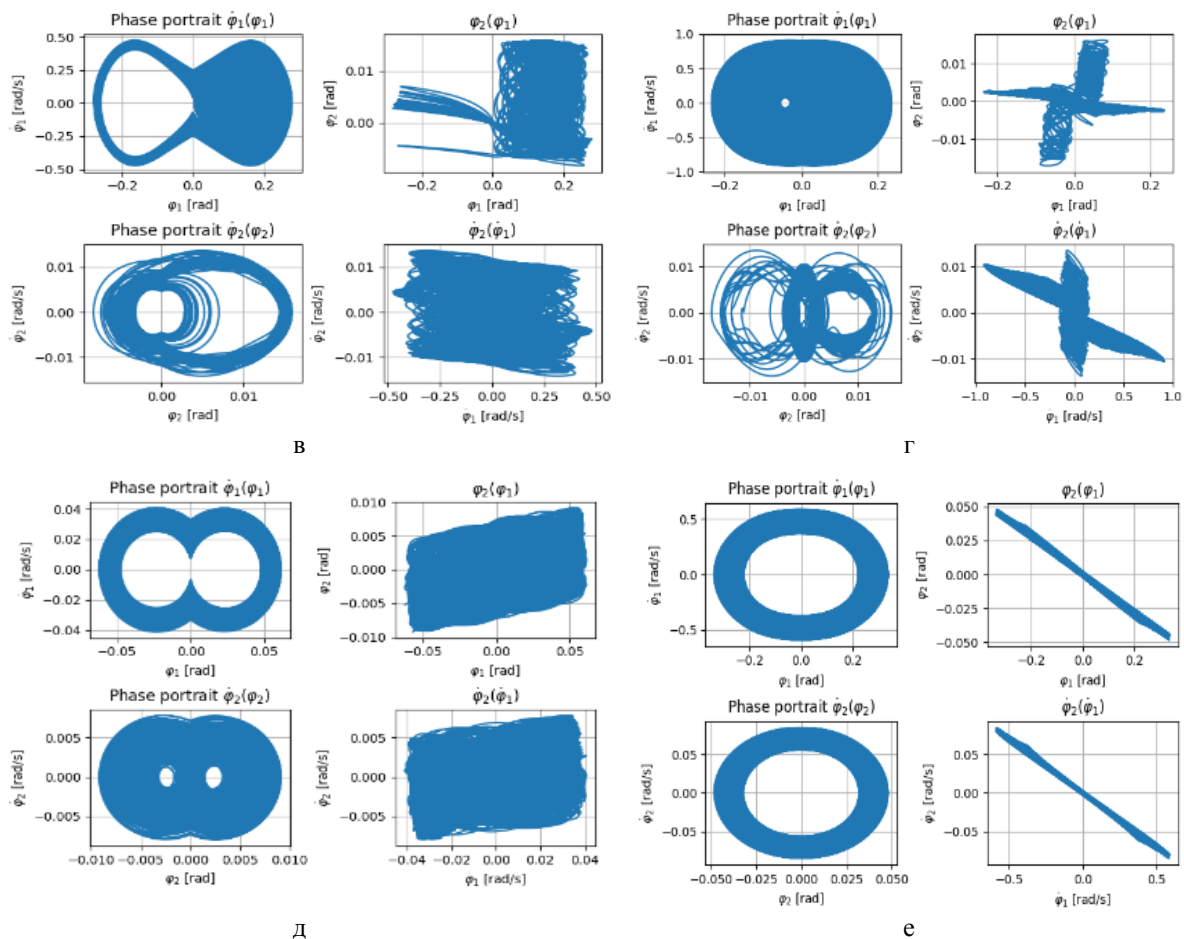
$\varphi_2(0) = 0.00282rad(0.1616^\circ)$ , на рис. 12г:  $\mu = 0.01$ ,  $s = 1.5(m)$ ,

$\varphi_1(0) = 0.2354rad(13.5^\circ)$ ,  $A_3 = -1.13$ ,  $k_l = 0.91(Nm/rad)$ ,  $\varphi_2(0) = -0.0023rad(-0.132^\circ)$ ,

на рис. 12д  $\mu = 0.15$ ,  $s = 1.5(m)$ ,  $\varphi_1(0) = -0.06206rad(-3.56^\circ)$ ,  $A_3 = -1.13$ ,  $k_l = 0.08(Nm/rad)$ ,  $\varphi_2(0) = -0.00515rad(-0.3^\circ)$  та на рис. 12е:  $\mu = 0.15$ ,  $s = 1.5(m)$ ,

$A_3 = -1.13$ .  $\varphi_1(0) = 0.333rad(19.08^\circ)$ ,  $k_l = 0.99(Nm/rad)$ ,  $\varphi_2(0) = -0.04824rad(-2.764^\circ)$ .





**Рис. 12 (а-е).** Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі для дослідження впливу коефіцієнту

Для скорочення опишемо вплив коефіцієнтів дисипації на поведінку системи у випадку локалізованої моди коливань без представлення рисунків. Як і у випадку пов'язаної моди коливань деяке зростання цього коефіцієнту не завжди зберігає цю моду чи стягує близькі траєкторії до неї. Чисельне моделювання дозволяє зробити висновок, що зростання коефіцієнту пропорційності мас  $\mu$  разом зі значними значеннями зв'язку  $k_l$  та відстані  $s$  при збільшенні коефіцієнтів тертя зменшують блукання траєкторій поблизу локалізованого режиму або стягують траєкторії до цього режиму.

## 5 ВИСНОВКИ

Стійка синфазна (пов'язана) форма коливань присутня не на всьому діапазоні початкових умов. Вона є нестійкою при малих початкових значеннях кутів відхилення маятників якщо маси маятників суттєво розрізняються. Збільшення коефіцієнта пропорційності мас маятників призводить до зменшення блукання траєкторій поблизу режиму. Синфазна мода більш виражена при більшій відстані між центром мас та віссю обертання, оскільки тоді вплив магнітного моменту менший. Цей пов'язаний режим спостерігається при збільшенні як відстані, так і маси меншого маятника. У більшості розглянутих випадках при великій відстані від осі обертання до центру мас маятника і чималому коефіцієнту співвідношення мас маятників збільшення значення коефіцієнта зв'язку призводить до стабілізації синфазної форми і зменшення блукання траєкторій поблизу такої моди. Збільшення дисипації не завжди стягує траєкторії до форми.



Як і синфазна мода, локалізована існує не на всому діапазоні початкових відхилень маятників. Зі збільшенням величини коефіцієнта пропорційності мас маятників, блукання поблизу режиму зменшуються і форма стає більш визначеною. Як і для пов'язаної моди, локалізована спостерігається при збільшенні відстані  $s$ . З'ясувалося, що локалізований режим проявляється при збільшенні зв'язку та відстані між центром мас та віссю обертання маятників або при збільшенні, як зв'язку, так і коефіцієнта пропорційності мас маятників. Чималий коефіцієнт пропорційності мас разом з великим значенням зв'язку та відстані при збільшенні коефіцієнтів тертя зменшують блукання траєкторій поблизу локалізованого режиму або стягують траєкторії до цього режиму.

## Література

1. Polczyński K., Wijata A., Awrejcewicz J., Wasilewski G. Numerical and experimental study of dynamics of two pendulums under a magnetic field, *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers. Part I: Journal of Systems and Control Engineering*. 2019. 233. pp. 441–453.
2. Wijata A., Polczyński K., Awrejcewicz J. Theoretical and numerical analysis of regular one-side oscillations in a single pendulum system driven by a magnetic field. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2021. Volume 150. 107229. DOI:10.1016/j.ymssp.2020.107229.
3. Polczyński K., Skurativskiy S., Bednarek M., Awrejcewicz J. Nonlinear oscillations of coupled pendulums subjected to an external magnetic stimulus. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2021. Volume 154(2). DOI:10.1016/j.ymssp.2020.107560.
4. Sarganova Yu. E., Mikhlin Yu. V. Localized and non-localized nonlinear normal modes in a system of two connected pendulums under a magnetic field. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2022. Volume 147. 104182.
5. Mikhlin Yu. V., Avramov K. V. Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments. *Appl. Mech. Rev.* 2010. Issue. 63(6). 060802.
6. Avramov K.V., Mikhlin Yu.V. Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. *Appl. Mech. Rev.* 2013. 65(2). 020801.
7. *Modal Analysis of Nonlinear Mechanical Systems* (Ed. G. Kerschen). Springer: Vienna. 2014. 340p.
8. Manevitch L. I., Smirnov V. V. Limiting Phase Trajectories and the Origin of Energy Localization in Nonlinear Oscillatory Chains. *Phys. Rev. E*. 2010. 82(3). 036602, 9p. DOI:https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.036602.
9. Vakakis A. F., Gendelman O. V., Bergman L. A., McFarland D. M. *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*. Springer Netherlands. 2018. 156.
10. Nayfeh A. H., Mook D. T. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons. 2008.
11. Mikhlin Yu. V., Shmatko T.V., Manucharyan G. V. Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions [*Computer & Structures*]. 2004. 82. 2733–2742.

## References

1. Polczyński, K., Wijata, A., Awrejcewicz, A., Wasilewski, G. (2019). Numerical and experimental study of dynamics of two pendulums under a magnetic field. *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*. 233. 441–453.
2. Wijata, A., Polczyński, K., Awrejcewicz, J. (2021). Theoretical and numerical analysis of regular one-side oscillations in a single pendulum system driven by a magnetic field. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 150. DOI:10.1016/j.ymssp.2020.107229.
3. Polczyński, K., Skurativskiy, S., Bednarek, M., Awrejcewicz, J. (2021) Nonlinear oscillations of coupled pendulums subjected to an external magnetic stimulus. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 154(2). DOI:10.1016/j.ymssp.2020.107560.
4. Sarganova, Yu. E., Mikhlin, Yu. V. (2022) Localized and non-localized nonlinear normal modes in a system of two connected pendulums under a magnetic field. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 147. 104182.

5. Mikhlin, Yu. V., Avramov, K. V. (2010) Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments. *Appl. Mech. Rev.* 63(6). 060802.
6. Avramov, K.V., Mikhlin, Yu.V. (2013) Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. *Appl. Mech. Rev.* 65 (2). 020801.
7. *Modal Analysis of Nonlinear Mechanical Systems* (Ed. G. Kerschen). Springer: Vienna (2014).
8. Manevitch, L. I., Smirnov, V. V. (2010) Limiting Phase Trajectories and the Origin of Energy Localization in Nonlinear Oscillatory Chains. *Phys. Rev. E.* no 82 (3). 036602. 9.
9. Vakakis A. F., Gendelman O. V., Bergman L. A., McFarland D. M. *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*. Springer Netherlands. 2018. 156.
10. Nayfeh A. H., Mook D. T. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons. (2008).
11. Mikhlin Yu. V., Shmatko T. V. Manucharyan G.V. (2004) Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions. *Computer & Structures*. 82.2733–2742.

**Сурганова Юлія Едуардівна**

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»  
аспірант, асистент  
вул. Кирпичова, 2, Харків, Україна, 61000  
surganova.julia@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-6540-3025

**Міхлін Юрій Володимирович**

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»  
д.ф.-м.н., професор  
вул. Кирпичова, 2, Харків, Україна, 61000  
yuri.mikhlin@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-1780-9346

*Для посилань:*

Сурганова Ю. Е., Міхлін Ю. В. Регулярна та складна поведінка маятникової системи у магнітному полі. *Механіка та математичні методи*, 2023. Т. 5. № 1. С. 44–60.

*For references:*

Surhanova Y., Mikhlin Yu. (2023). Regular and complex behavior of a pendulum system in a magnetic field. *Mechanics and Mathematical Methods*. 5 (1). 44–60.



UDC 624.154.3

## CALCULATION OF REINFORCED -CONCRETE FRAME FOR STABILITY UNDER THE ACTION OF AGGRESSIVE ENVIRONMENT

V. Fomin<sup>1</sup>, I. Fomina<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract.** The stability of a double-span reinforced concrete frame depends on many factors, including the geometry of the frame, the characteristics of the materials, the loads it must withstand, and the operating conditions. One of the main factors that affect the stability of the frame is its shape. The optimal shape of the frame should be such that it can effectively distribute the loads it must withstand and minimize stresses in the materials. Another factor is the quality of the materials used to build the frame. Reinforced concrete is a durable material, but its strength can vary greatly depending on the quality of the concrete and reinforcement used in the structure.

The load that the frame must withstand is also an important factor. Frames can be subject to loads from wind, snow, traffic, people, and other sources, and they must be designed to withstand all of these loads. In addition, operating conditions can affect the stability of the frame.

For example, frames located in areas where earthquakes occur frequently should be designed and built with this factor in mind. In general, the stability of a double-span reinforced concrete frame depends on many factors, and its design and construction must be carefully thought out and executed by professionals taking into account all these factors.

The stability of frames (such as metal frames) under environmental influences can depend on various factors, including material, surface treatment and operating conditions. The environment may include moisture, corrosives, temperature changes and wear, which can affect the stability of frames. Some materials, such as stainless steel, aluminum or alloys, have natural resistance to oxidation and corrosion, which ensures their long service life in various environments. Other materials, such as ordinary steel, may be more susceptible to corrosion, and therefore require protective coatings, such as painting or electroplating, to maintain their stability. Additionally, if frames are used in high humidity environments, measures can be taken to prevent icing or condensation, such as well-designed drainage or ventilation systems. In addition, frames can be subjected to endurance and stability tests according to established norms and standards, which are based on the specific production of frames. At the same time, in order to ensure the stability of the frames for the activity of the northern environment, it is important to obirate the foreign material.

**Keywords:** reinforce concrete, corrosion, stability, method of limit elements, method of finite elements, frame, delivery and arrangement.

## РОЗРАХУНОК ЗАЛІЗОБЕТОННОЇ РАМИ НА СТІЙКІСТЬ ПІД ДІЄЮ АГРЕСИВНОГО СЕРЕДОВИЩА

Фомін В. М.<sup>1</sup>, Фоміна І. П.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація.** Стійкість двопрогонувої залізобетонної рами залежить від багатьох факторів, включаючи геометрію рами, характеристики матеріалів, навантаження, які вона повинна витримувати, і умови експлуатації.

Одним із основних факторів, що впливають на стійкість рами, є її форма. Оптимальна форма рами повинна бути такою, щоб вона могла ефективно розподіляти навантаження, які вона повинна витримувати, і мінімізувати напруження в матеріалах.



Іншим фактором є якість матеріалів, що використовуються для будівництва рами. Залізобетон є міцним матеріалом, але його міцність може сильно варіюватися в залежності від якості бетону і арматури, що використовуються в конструкції.

Навантаження, яке має витримувати рама, також є важливим фактором. Рами можуть бути схильні до навантажень від вітру, снігу, транспорту, людей та інших джерел, і вони повинні бути спроектовані таким чином, щоб витримувати всі ці навантаження.

Крім того, умови експлуатації можуть вплинути на стійкість рами. Наприклад, рами, розташовані на місцевості, де часто відбуваються землетруси, мають бути спроектовані та побудовані з урахуванням цього фактора.

В цілому, стійкість двопрогової залізобетонної рами залежить від багатьох факторів, і її проектування та будівництво повинні бути ретельно продумані та виконані професіоналами з урахуванням усіх цих факторів.

Стійкість рам (як, наприклад, металевих рам) під дією навколишнього середовища може залежати від різних факторів, включаючи матеріал, обробку поверхні та умови експлуатації. Навколишнє середовище може включати в себе вологу, агресивні речовини, температурні зміни і зношування, які можуть впливати на стійкість рам.

Деякі матеріали, наприклад, нержавіюча сталь, алюміній або сплави, мають природну стійкість до окислення та корозії, що забезпечує їх тривалий термін служби в різних середовищах. Інші матеріали, такі як звичайна сталь, можуть бути більш схильні до корозії, і тому вимагають захисних покриттів, таких як фарбування або гальванічне покриття, для збереження їх стійкості.

Додатково, якщо рами використовуються в середовищі з високою вологістю, можуть бути вжиті заходи для запобігання заledenінню або утворенню конденсату, такі як добре розроблені системи дренажу або вентиляції.

Крім того, рами можуть бути піддані випробуванням на витривалість та стійкість відповідно до встановлених норм і стандартів, які залежать від конкретного застосування рам.

У загальному випадку, для забезпечення стійкості рам під дією навколишнього середовища, важливо обирати відповідний матеріал.

**Ключові слова:** залізобетон, корозія, стійкість, метод граничних елементів, метод кінцевих елементів, рама, будівлі та споруди.

## 1 INTRODUCTION

In the process of operation, buildings and structures are affected by the external environment for a long time and, as an example, corrosion. This greatly complicates the durability and function-ality of objects.

## 2 ANALYSIS OF LITERARY DATA AND PROBLEM STATEMENT

The methodology for calculating the stability of reinforced concrete structures, including a twospan reinforced concrete frame, is determined by regulatory documents and standards of the construction industry in accordance with safety requirements [1-5]. One of the most common methods for calculating the stability of reinforced concrete structures is the Finite Element Method (FEM), which allows you to carry out complex calculations for the strength and stability of structures, taking into account all the necessary factors. To calculate the stability of reinforced concrete structures, including a double-span reinforced concrete frame, it is necessary to take into account factors such as the shape and geometry of the structure, the materials from which it is made, the loads it must withstand, and the operating conditions.

The following factors must also be taken into account in stability calculations: Compressed and flexural stresses caused by loads; Stresses caused by bending moment and longitudinal force; Various types of loads, such as static, dynamic and fatigue. The influence of temperature, wind and other factors on the structure [6-8]. Calculations for the stability of reinforced concrete structures can be carried out both manually, using mathematical formulas and tables, and using specialized software tools based on the finite element method. However, to ensure the safety of the structure, such calculations must be performed by professional engineers who have the necessary qualifications [9-12].

## 3 PURPOSE AND OBJECTIVES OF THE RESEARCH

In this article, the stability of a two-span reinforced concrete frame under aggressive environmental conditions is investigated.

## 4 RESEARCH RESULTS

The frame is part of the structure of a single-story industrial building (Fig. 1). The corrosive environment is located inside the building, so the side columns of the frame are exposed to asymmetrical environmental influences.

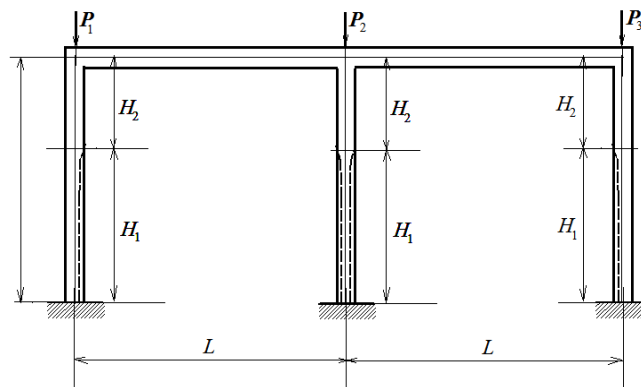


Fig. 1. Double-span frame

To determine the critical combination of loads  $P_1$ ,  $P_2$  and  $P_3$  we will use the method of boundary elements [1]. On each of the rods, a local coordinate system is selected (Fig. 2, rod

numbers are placed in circles, node numbers are in squares). For each rod, write the following equality:

$$\mathbf{Y}^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)}(l_i)\mathbf{X}^{(i)}. \quad (1)$$

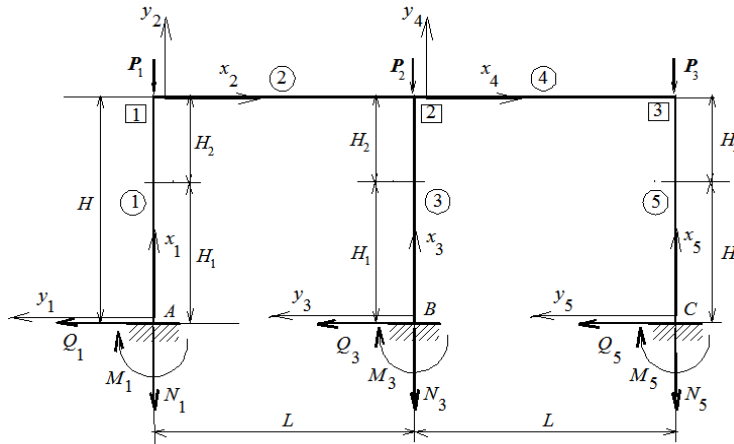


Fig. 2. Forces acting on the frame

In here:

$$\mathbf{X}^{(i)} = \begin{bmatrix} B_i(0)y_i(0) \\ B_i(0)y_i'(0) \\ M_i(0) \\ Q_i \\ N_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{(i)} = \begin{bmatrix} B_i(l_i)y_i(l_i) \\ B_i(l_i)y_i'(l_i) \\ M_i(l_i) \\ Q_i \\ N_i \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{A}^{(i)}(k_i, x_i) = \begin{bmatrix} 1 & a_{1,2}(k_i, x_i) & a_{1,3}(k_i, x_i) & a_{1,4}(k_i, x_i) & 0 \\ 0 & a_{2,2}(k_i, x_i) & a_{2,3}(k_i, x_i) & a_{2,4}(k_i, x_i) & 0 \\ 0 & a_{3,2}(k_i, x_i) & a_{3,3}(k_i, x_i) & a_{3,4}(k_i, x_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

( $i$  – rod number,  $B_i(x_i)$  – its flexural rigidity,  $M_i(x_i)$ ,  $Q_i$ ,  $N_i$  – bending moment, transverse and longitudinal forces). If the cross-section of the rod and reinforcement remain unchanged along its length, then the functions  $a_j(x_i)$  ( $j=1, 2, 3; k=2, 3, 4$ ) have the following form:

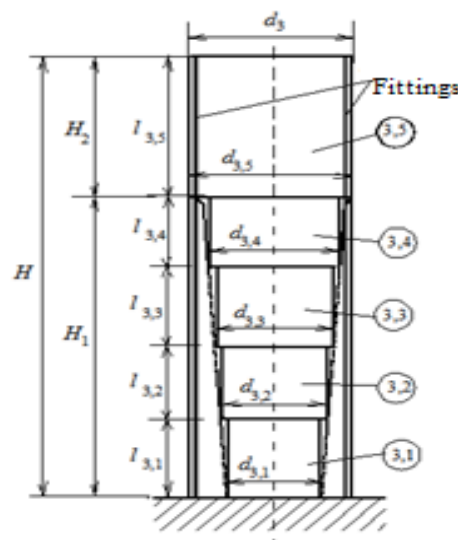


Fig. 3. Breaking the rod into parts

$$\begin{aligned}
 a_{1,2}(k_i, x_i) &= \frac{\sin k_i x_i}{k_i}, & a_{1,3}(k_i, x_i) &= \frac{1 - \cos k_i x_i}{k_i^2}, & a_{1,4}(k_i, x_i) &= \frac{k_i x_i - \sin k_i x_i}{k_i^3}, \\
 a_{2,2}(k_i, x_i) &= \cos k_i x_i, & a_{3,2}(k_i, x_i) &= -k_i \sin k_i x_i, & k_i &= \sqrt{\frac{N_i}{B_i}}.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

In Fig. 2 points *A*, *B* and *C* show the two components of the support reaction and the reactive moment. They are presented in the form of longitudinal and transverse forces and bending moment in the lower section of rods 1, 2 and 3 (the drawing shows their positive directions). Following [1] we build matrices  $A^{(1)}$  and  $A^{(5)}$  for rods 1 and 5. To construct the matrix  $A^{(3)}$ , we do the same. We divide the rod 3 into several sections, within each of which the cross-section will be considered constant (Fig. 3). Each of the sections, as well as its length and width, received double numbering. The first of the numbers is the rod number and the second is the parcel number.

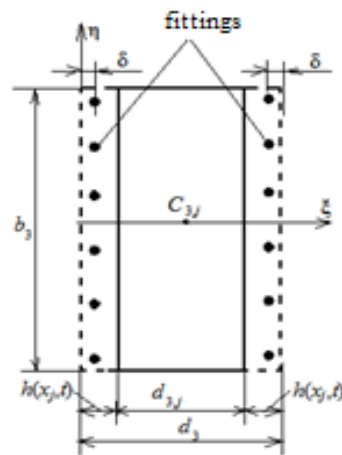


Fig. 4. Cross-section of the site

The cross-section of each of the sections is shown in Fig. 4. Considering the conditions of continuity of functions  $y_1(x_1)$  and  $y_1'(x_1)$  on the boundaries of the parcels, you can write the following ratio:

$$\mathbf{X}^{(3,j+1)} = \mathbf{C}^{(3,j)} \mathbf{Y}^{(3,j)}.
 \tag{4}$$

Where is

$$\mathbf{C}^{(3,j)} = \begin{bmatrix} B_{3,j+1} / B_{3,j} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{3,j+1} / B_{3,j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

For the first section we have:

$$\mathbf{Y}^{(3,1)} = \mathbf{A}^{(3,1)}(k_{3,1}, l_{3,1}) \mathbf{X}^{(3)}, \quad \mathbf{X}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \\ Q_3 \\ N_3 \end{bmatrix}.
 \tag{5}$$

For subsequent:

$$\mathbf{X}^{(3,i)} = \mathbf{C}^{(3,i-1)} \mathbf{Y}^{(3,i-1)}, \mathbf{Y}^{(3,i)} = \mathbf{A}^{(3,i)}(k_{3,i}, l_{3,i}) \mathbf{X}^{(3,i)}. \quad (6)$$

From (5) and (6) we get for the last section:

$$\mathbf{Y}^{(3,n_{pl})} = \mathbf{A}^{(3,n_{pl})}(k_{3,n_{pl}}, l_{3,n_{pl}}) \prod_{i=1}^{n_{pl}-1} \mathbf{C}^{(3,i)} \mathbf{A}^{(3,i)}(k_{3,i}, l_{3,i}) \mathbf{X}^{(3)}. \quad (7)$$

( $n_{pl}$  – number of plots). Given that  $\mathbf{Y}^{(3,n_{pl})} = \mathbf{Y}^{(3)}$ , we find that

$$\mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{A}^{(3,n_{pl})}(k_{3,n_{pl}}, l_{3,n_{pl}}) \prod_{i=1}^{n_{pl}-1} \mathbf{C}^{(3,i)} \mathbf{A}^{(3,i)}(k_{3,i}, l_{3,i}), \quad (8)$$

i. e. we get a matrix  $\mathbf{A}^{(3)}$  for the rod 3. In [1] the following ratio is obtained:

$$\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{Y}^{(1)} + \hat{\mathbf{P}}_1, \mathbf{D}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 / B_1(l_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{P}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

From which it follows that:

$$\mathbf{Y}^{(2)} = \mathbf{A}^{(2)}(k_2, L) (\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{X}^{(1)} + \hat{\mathbf{P}}_1). \quad (10)$$

Equality (1) at  $i = 3$  and  $i = 5$  it is written as follows:

$$\mathbf{Y}^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)} \mathbf{X}^{(i)}, \mathbf{X}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_i \\ Q_i \\ N_i \end{bmatrix} \quad (i = 3, 5). \quad (11)$$

Where is  $Q_i, N_i, M_i (i = 3, 5)$  – reference reactions and reactive moments at points  $B$  and  $C$  (Fig. 2).

Let us now consider the equilibrium of the boundary element 2 located between the members 2, 3 and 4 (Fig. 5). Let's make the equations of equilibrium.

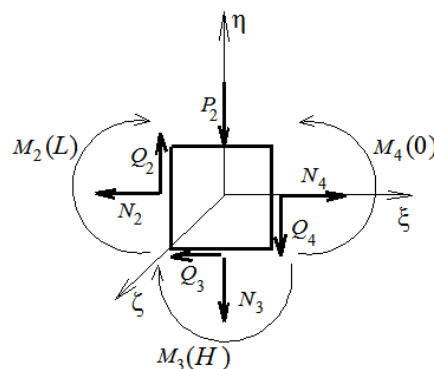


Fig. 5. Boundary element

$$\begin{aligned} N_4 - N_2 - Q_3 &= 0, \\ Q_2 - N_3 - Q_4 - P_2 &= 0, \\ M_4(0) - M_2(L) - M_3(H) &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Let's also take into account the ratios:

$$y_4(0) = 0, \quad y_4'(0) = y_2'(L). \tag{13}$$

Equations (12) and (13) can be written as follows:

$$X_1^{(4)} = 0, \quad X_2^{(4)} = Y_2^{(2)}, \quad X_3^{(4)} = Y_3^{(2)} + Y_3^{(3)}, \quad X_4^{(4)} = Y_4^{(2)} + Y_5^{(3)} + P_2, \quad X_5^{(4)} = Y_4^{(3)} + Y_5^{(2)}. \tag{14}$$

From (14) it follows:

$$X^{(4)} = D^{(2)}Y^{(2)} + D^{(3)}Y^{(3)} + \hat{P}_2. \tag{15}$$

Where is:

$$D^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 / B_2(L) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

From (10), (11) and (15) we find:

$$Y^{(4)} = A^{(4)}(k_4, L)X^{(4)} = A^{(4)}(k_4, L) \left\{ D^{(2)}A^{(2)}(k_4, L) \left[ D^{(1)}A^{(1)}X^{(1)} + \hat{P}_1 \right] + D^{(3)}A^{(3)}X^{(3)} + \hat{P}_2 \right\}. \tag{16}$$

From formulas (11) and (16) it follows that the components of the vectors  $Y^{(4)}$  and  $Y^{(5)}$  are functions of nine unknown quantities  $M_i, Q_i, N_i (i=1, 3, 5)$ .

Note that the elements of the matrices  $A^{(1)}, A^{(2)}$  and  $A^{(3)}$  also depend on  $M_i, Q_i, N_i (i=1, 3, 5)$ , since the quantities  $k$  included in formulas (3) are functions of these quantities. Consider the equilibrium of the boundary element 3 located between the rods 4 and 5 (Fig. 6). Equilibrium equations:

$$\begin{aligned} N_4 + Q_5 &= 0, \\ Q_4 - N_5 - P_3 &= 0, \\ M_4(L) + M_5(H) &= 0. \end{aligned}$$

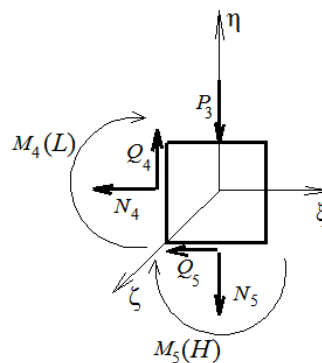


Fig. 6. Third boundary element





They can be presented in the following form:

$$\begin{aligned} Y_5^{(4)} + Y_4^{(5)} &= 0, \\ Y_4^{(4)} - Y_5^{(5)} - P_3 &= 0, \\ Y_3^{(4)} + Y_3^{(5)} &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Equations (17) are three equations with respect to the above nine unknowns. To compile additional equations, we will use the relations:

$$y_2'(L) = y_3'(H), \quad y_4'(L) = y_5'(H), \tag{18}$$

As well as the equations resulting from the assumption that there are no longitudinal displacements of the points of the members:

$$y_2(L) = 0, \quad y_4(L) = 0, \quad y_3(H) = y_1(H), \quad y_5(H) = y_1(H). \tag{19}$$

Let's write (18) and (19) as follows:

$$\begin{aligned} Y_2^{(2)} - Y_2^{(3)} &= 0, \\ Y_2^{(4)} - Y_2^{(5)} &= 0, \\ Y_1^{(2)} &= 0, \\ Y_1^{(4)} &= 0, \\ Y_1^{(3)} - Y_1^{(1)} &= 0, \\ Y_1^{(5)} - Y_1^{(1)} &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Equations (17) and (20) are a system of equations with respect to unknowns  $M_i, Q_i, N_i (i=1, 3, 5)$ . Let's write this system in the following form:

$$U(\mathbf{u}, \mathbf{p})\mathbf{u} = \mathbf{w}(\mathbf{u}, \mathbf{p}). \tag{21}$$

In here

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ N_1 \\ M_1 \\ Q_3 \\ N_3 \\ M_3 \\ Q_5 \\ N_5 \\ M_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}.$$

To solve the problems of longitudinal-transverse bending at given values  $P_1, P_2$  and  $P_3$  we use the method of successive approximations: at the first step we believe  $n_1 = -P_2, n_3 = -P_2, n_5 = -P_3, Q_1 = Q_3 = Q_5 = M_1 = M_3 = M_5 = 0$ , thereby defining the vector  $\mathbf{u}$ . Then we define the elements of the matrix  $U(\mathbf{u}, \mathbf{p})$  and vector  $\mathbf{w}(\mathbf{u}, \mathbf{p})$  and solving the system (21), we find new values  $M_i, Q_i, N_i (i=1, 3, 5)$ , through them, we determine the new values of the matrix elements  $U(\mathbf{u}, \mathbf{p})$  and vectors  $\mathbf{w}(\mathbf{u}, \mathbf{p})$  etc. The method turns out to

converge quickly due to the smallness of the values of the function  $h(x,t)$  compared to cross-sectional dimensions.

When solving stability problems to find the value of critical forces, we use the equation:

$$\det[U(\mathbf{u}, \mathbf{p})] = 0. \quad (22)$$

The solution of this equation defines some surface (let's call it critical) in the coordinate system  $P_1, P_2, P_3$ . Let's set some value  $P_2 = P_2^{(0)}$ . This value will determine the curve resulting from the intersection of the said surface by the plane  $P_2 = P_2^{(0)}$ . Then we set the initial values  $P_1$  and  $P_3$  and we use the method of successive approximations in the same way as in solving problems of longitudinal-transverse bending, as a result, we find the value of the determinant  $\det[U(\mathbf{u}, \mathbf{p})]$ . If it turns out to be not equal to zero, then fix the value  $P_1$  and changing the value  $P_3$ . We find its value at which equation (22) is satisfied, and for each value  $P_3$  using the method of successive approximations. Then we set the new value  $P_1$  and for it we find the value  $P_3$ , at which (27) is executed, etc. Using a polynomial approximation, we can find the equation for the cross-section of a critical surface by a plane  $P_2 = P_2^{(0)}$ . Changing the values  $P_2^{(0)}$ , we build a new section of the critical surface, etc.

## 5 DISCUSSION OF RESEARCH RESULTS

This technique allows us to consider the problems that arise in the study of the impact of the environment on reinforced concrete structures, in particular, on two-span frames. The same technique can be taken into account when exposed to corrosion of various origins.

## 6 CONCLUSIONS

The method of boundary elements makes it possible to accurately carry out calculations for the stability of multi-span frame reinforced concrete structures, taking into account the forces and mo-ments that arise.

## References

1. Fomina, I. P. (2014). Ustoichevost zeleobetonoy P-obraznoy rami pod deystviem agresivnoy sredy. *Visnik ODABA*. 57. 436-444. [in Russian].
2. Bliarskiy, Z. Y. (2011). *Zalizobetonni konstrukcii v agresivnomu seredovischi za dii navantazhenya tai h pidsilenya* [Reinforced concrete structures in an aggressive environment under the action of loads and their reinforcement]. Lviv. [in Ukraine].
3. Bliarskiy, Z. Y. (2005). Naprujeno-deformovany stan zalizobetonnyh konstruktsiy v agresivnomu seredovischi pri dii navantazheniya [The stressed-deformed state of reinforced concrete structures in an aggressive environment under load]. *Lvivska politehnikaark.: ris., tabl. Bibliogr.:* ark. 298–338. [in Ukrainian].
4. Nikiforova, T. D. (2013). Doslidjenya naprujeno-deformovanogo stanu zalizobetonnyh konstruktsiy zagliblenyh budivel z urahuvanyam ih vzaemodii z gruntovim masivov [Study of the stress-strain state of reinforced concrete structures of buried buildings taking into account their interaction with the soil massif]. *Visnik PDABA*. 1–2. 19–25 [in Ukraine].
5. Prokopovich, I. E. (1963). *Vliyanie dlitelnih procesov na napryajenoe i deformirovanoe sostoyanie sooruzheniy* [The influence of long-term processes on the stressed and deformed state of structures]. Gosudarstvenoe izdatelstvo literaturi po stroitelstvu, arhitekture i stroitel'nim materialam. M. [in Russian].

6. Kostochka, V. A. (2019). Vliyanie okruzhayushey sredy na sostoyanie zalizobetonnykh konstruksiy [The influence of the environment on the condition of reinforced concrete structures]. *Akademiya stroitelstva i arhitekturi SamGTU*. 12. 56–59. [in Russian].
7. Gribniak, V., Bacinskas, D., Kacianauskas, R., Kaklauskas, G., Torres, L. (2013). Long-term deflections of reinforced concrete elements: accuracy analysis of predictions by different methods. *Mech Time-Depend Mater*. 17. 297–313.
8. DSTU B V.-145:2010 (2010). Zahist betonih i zalizobetonih konstrukciy vid korozii [Protection of concrete and reinforced concrete structures from corrosion]. K. Minregionbud. [in Ukraine].
9. Zarakovskaya, K. I., Zaharov, V. F. Oпитnye diagrami sostoyaniya betona sostavnykh gelezobetonnykh sterzhney s visokoprochnoy armaturoy posle dlitelnykh ispitaniy [Experimental diagrams of the state of concrete of composite reinforced concrete rods with high-strength reinforcement after lengthy tests]. *Vesnik Evraziyskoy nauki*. 3. [in Russian].
10. Krainskiy, P. I. (2016). Mitsnist ta deformativnist zalizobetonnykh stisnuto - zignutikh elementiv, pidsilenikh zalizobetonnoyu oboymoyu pri dii navantazhennya [Mind and deformability of cast-in-place concrete squeezed-curved elements, strengthened by cast-in-place concrete clip with diversification]. Spetsialnist 05.23.01 – Budivelni konstruksii budivli ta sporudi. Disertatsiya na zdobuttya naukovoogo stupenya kandidata tekhnichnikh nauk. [in Ukraine].
11. Sadeghi, K., Nouban, F. (2016). Damage and fatigue quantification of RC structures. *Structural Engineering and Mechanics*. 58(6). 1021–1044.
12. Lobodanov, M. M., Vehera, P. I., Blikharskyi, Z. Ya. (2018). Analiz vplyvu osnovnykh vydiv defektiv ta poshkodzhen na zalizobetonnu zdatnist zalizobetonnykh elementiv [Analysis of the influence of the main types of defects and damage on the reinforced concrete capacity of reinforced concrete elements]. *Visnyk Natsionalnoho universytetu «Lvivska politekhnika»*. Seriya «Teoriia i praktyka budivnytstva». 888. 93–100. [in Ukraine].
13. Sola, E., Ožbolt, J., Balabanic, G. (2016). Modelling Corrosion of Steel Reinforcement in Concrete: Natural vs. Accelerated Corrosion. Conference Paper: 9th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures. <https://doi.org/10.21012/FC9.097>.

## Література

1. Фомина И. П. Устойчивость П-образной железобетонной рамы подверженной воздействию агрессивной среды. Вісник ОДАБА. Одесса, 2014. №57. С. 436–444.
2. Бліхарський З. Я. Залізобетонні конструкції в агресивному середовищі за дії навантаження та їх підсилення. Львів, 2011. 296 с.
3. Бліхарський З. Я. Напружено-деформований стан залізобетонних конструкцій в агресивному середовищі при дії навантаження: дис. д-ра техн. наук: 05.23.01. Національний ун-т "Львівська політехніка". Л., 2005. 348 арк.: рис., табл. Бібліогр.: арк. 298–338.
4. Нікіфорова Т. Д. Дослідження напружено-деформованого стану залізобетонних конструкцій заглиблених будівель з урахуванням їх взаємодії з ґрунтовим масивом, 2013. Вісник ПДАБА. №1–2. С. 19–25.
5. Прокопович И. Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояния сооружений. Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1963. М. 260 с.
6. Косточка В. А. Влияние окружающей среды на состояние железобетонных конструкций. Академия строительства и архитектуры СамГТУ, 2019. №12. С. 56–59.
7. Gribniak V., Bacinskas D., Kacianauskas R., Kaklauskas G., Torres L. Long-term deflections of reinforced concrete elements: accuracy analysis of predictions by different methods. *Mech Time-Depend Mater*. 2012. №17. pp. 297–313.
8. ДСТУ Б В.2.6-145:2010. Захист бетонних і залізобетонних конструкцій від корозії. К. Мінрегіонбуд, 2010. 52 с.
9. Зараковская К. И., Захаров В. Ф. Опытные диаграммы состояния бетона составных железобетонных стержней с высокопрочной арматурой после длительных испытаний. Вестник Евразийской науки, 2018. 3.
10. Країнський П. І. Міцність та деформативність залізобетонних стиснуто – зігнутих елементів, підсилені залізобетонною обіймою при дії навантаження.

Спеціальність 05.23.01 – Будівельні конструкції, будівлі та споруди. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук, 2016. 158 с.

11. Sadeghi K., Nouban F. Damage and fatigue quantification of RC structures. *Structural Engineering and Mechanics*. 2016. 58(6). pp. 1021–1044.
12. Лободанов М. М., Вегера П. І., Бліхарський З. Я. Аналіз впливу основних видів дефектів та пошкоджень на залізобетонну здатність залізобетонних елементів. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка»*. Серія «Теорія і практика будівництва», 2018. № 888. С. 93–100.
13. Sola E., Ožbolt J., Balabanic G. Modelling Corrosion of Steel Reinforcement in Concrete: Natural vs. Accelerated Corrosion. *Conference Paper: 9th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*. 2016. <https://doi.org/10.21012/FC9.097>.

**Fomin Volodymyr**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
DScTech, Professor  
Didrihsona str., 4, Odessa, Ukraine, 65029  
Fomin@ogasa.org.ua  
ORCID: 0000-0003-4814-6415

**Fomina Inna**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Senior Lecturer  
Didrihsona str., 4, Odessa, Ukraine, 65029  
Fomina@ogasa.org.ua  
ORCID: 0000-0001-7366-1537

*For references:*

Fomin V., Fomina I. (2023). Calculation of reinforced -concrete frame for stability under the action of aggressive environment. *Mechanics and Mathematical Methods*. 5 (1). 61 – 71.

*Для посилань:*

Фомін В. М., Фоміна І. П. Розрахунок залізобетонної рами на стійкість під дією агресивного середовища. *Механіка та математичні методи*, 2023. Т. 5. №. 1. С. 61–71.

УДК 624.04

## ГРАНИЧНИЙ СТАН ДВУТАВРОВОГО АРМОВАНОГО ПЕРЕРІЗУ З ВИКОРИСТАННЯМ ПРУЖНОПЛАСТИЧНИХ ДІАГРАМ ДЕФОРМУВАННЯ МАТЕРІАЛІВ

Сорока М. М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Анотація.** У роботі розглядається методика побудови області міцності двотаврового армованого перерізу. Поняття "область міцності перерізу" використовується в розрахунках конструкцій за граничною рівновагою. Область міцності являє собою замкнуту область в координатах «момент – поздовжня сила». Особливість області міцності перерізу полягає в тому, що всередині області переріз працює в пружній стадії, а на її межі переходить у граничний стан із можливістю необмеженого пластичного деформування. Рівняння, що описують межу області міцності перерізу, часто називають умовами пластичності. Складність отримання рівнянь, що описують межу області міцності перерізу, багато в чому залежить від того, якими математичними залежностями описуються фізичні властивості матеріалів, з яких виконано переріз. У даній роботі передбачається, що матеріал, з якого виконано перетин, і армуючий матеріал деформуються за законом ідеального пружнопластичного тіла. Таким чином, діаграми деформування матеріалів описуються діаграмою Прандтля. Причому матеріал, з якого виконано переріз, має різні межі пластичності при розтягуванні та стисканні. Армуючий матеріал має однакові межі пластичності при розтягуванні та стисканні.

При виведенні рівнянь, що описують область міцності перерізу, передбачалося, що в перерізі діють згинальний момент і поздовжня сила, прикладена в центрі стінки двотавра. З урахуванням того, що перетин двотавра може бути несиметричним і мати несиметричне армування, для опису верхньої та нижньої меж області міцності використовуються різні рівняння. Для побудови області міцності, у загальному випадку, необхідно розв'язати оптимізаційну задачу – при заданому значенні поздовжньої сили знайти екстремальне значення моменту з урахуванням обмежень (рівнянь і нерівностей). Аналіз отриманих таким чином результатів дозволив запропонувати простішу методику побудови області міцності армованого двотаврового перетину без вирішення оптимізаційної задачі.

**Ключові слова:** пружнопластичне тіло, двотавровий армований перетин, область міцності, розрахунок за граничною рівновагою.

## LIMIT STATE OF A I-REINFORCED SECTION USING ELASTOPLASTIC DIAGRAMS OF DEFORMATION OF MATERIALS

M. Soroka<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract.** The paper considers a technique for constructing the strength area of a I-reinforced section. The concept of "section strength area" is used in structural calculations based on ultimate equilibrium. The strength area is a closed area in the coordinates "moment - longitudinal force". A specific feature of the section strength region is that inside the strength region the section operates in the elastic stage, and at its boundary it passes into the limiting state with the possibility of unlimited plastic deformation. The equations describing the boundary of the section strength region are often called yield conditions. The complexity of obtaining dependencies describing the boundary of the section strength region largely depends on what mathematical dependencies describe the physical properties of the materials from which the section is made. In this work, it is assumed that the material



from which the section is made and the reinforcing material are deformed according to the law of an ideal elastoplastic body. Thus, the deformation diagrams of materials are described by the Prandtl diagram. Moreover, the material from which the section is made has different yield strengths in tension and compression. The reinforcing material has the same tensile and compressive yield strengths.

When deriving the equations describing the strength region of the section, it was assumed that a bending moment and a longitudinal force applied in the center of the I-beam wall. Taking into account that the section of an I-beam can be asymmetrical and have asymmetric reinforcement, different equations are used to describe the upper and lower boundaries of the strength region. To construct the strength area, in the general case, it is necessary to solve the optimization problem - for a given value of the longitudinal force, find the extreme value of the moment, taking into account the constraints (equalities and inequalities). Analysis of the results obtained in this way for a symmetrically reinforced section made it possible to propose a simpler technique for constructing the strength area of a I-reinforced section without solving the optimization problem.

**Keywords:** elastoplastic body, reinforced I-section, strength area, calculation by limit equilibrium.



## 2 ВСТУП

Досить часто виникає задача знаходження граничного навантаження для конструкції. Для визначення навантаження, що призведе до руйнування конструкції, використовується метод розрахунку конструкцій за граничною рівновагою. Для досягнення граничного стану конструкції необхідно, щоб один або кілька перерізів досягли граничного стану. При використанні методу граничної рівноваги вводиться припущення про те, що до переходу матеріалу усього перерізу у пластичний стан переріз працює в пружній стадії. Деформаційні характеристики матеріалу описуються з допомогою діаграми Прандтля.

Для визначення граничного навантаження необхідно знати за яких зусиль окремі елементи конструкції досягнуть пластичної стадії. Якщо в розрахунок брати тільки згинальний момент, то критерієм руйнування перерізу буде досягнення граничного моменту та утворення пластичного шарніру. При обліку двох факторів – моменту та поздовжньої сили для перерізу існує область міцності, всередині якої міцність перерізу забезпечена, а на межі області переріз досягає граничного стану. Рівняння, що описують межу області міцності перерізу – умови пластичності, дозволяють визначити граничні зусилля для перерізу і потім – граничне навантаження для конструкції.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Проблему знаходження руйнівного навантаження для конструкції вперше сформулював Галілео Галілей. Але тільки в першій половині минулого століття був розроблений відповідний математичний апарат і було отримано розв'язок такої задачі в працях Гвоздева А. А. [1], Ржаніцина А. Р. [2], Чираса А. А. [3], Піковського А. А. [4] та інших дослідників. Перші дослідження виконувались у припущенні про незначний вплив поздовжньої сили на величину граничного навантаження і в розрахунок враховувався лише згинальний момент. У подальших розробках було показано, що такий підхід не завжди дозволяє одержати вірні результати. Наприклад, для арокних систем, де виникають значні поздовжні сили, ігнорування поздовжніх сил призводить до похибок у визначенні граничного навантаження [3], [5], [6]. Приклади визначення граничних навантажень для арок з урахуванням згинального моменту та поздовжньої сили розглянуто у роботах Чираса А. А. [3], Піковського А. А. [4], Проценко А. М., Власова В. В., [7], Габбасова Р. Ф., Чан Тхань Тунг [8].

При дослідженнях граничного стану конструкцій з урахуванням і моменту і поздовжньої сили важливу роль відіграє область міцності поперечного перерізу її елементів. Область міцності являє собою замкнуту область у координатах «момент – поздовжня сила» і для даного перерізу є його незмінною характеристикою. Межа такої області визначає значення моменту та поздовжньої сили, що відповідають граничному стану перерізу. Область міцності має криволінійну форму і залежить від геометрії поперечного перерізу і наявності армування [3], [4], [7], [9], [10], але для зручності знаходження граничного навантаження її часто представляють у вигляді багатокутника [4], [7].

## 3 МЕТА ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даного дослідження є розробка методики побудови області міцності армованого двотаврового перерізу, виконаного з матеріалів, фізичні властивості яких описуються діаграмою Прандтля. Граничні зусилля – момент і поздовжню силу,



розташовані на межі області міцності, передбачається визначити з розв'язання екстремальної задачі з наступним аналізом отриманого результату.

#### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

При виконанні досліджень передбачається, що фізичні характеристики матеріалу, з якого виконано переріз та арматура, відповідають характеристикам ідеального пружнопластичного тіла (рис. 1).

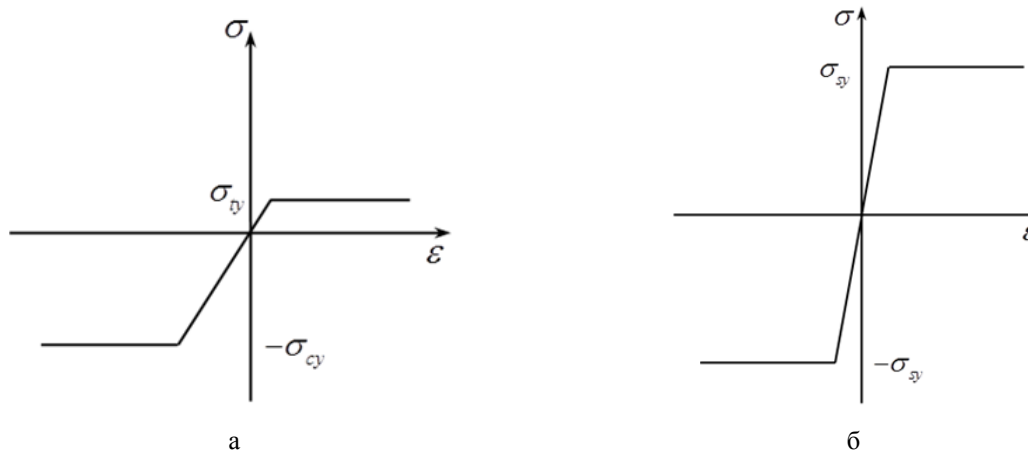


Рис. 1. Діаграми деформування: а) матеріалу перерізу, б) арматури

Розглянемо несиметрично армований двотавровий переріз, в якому діють граничні зусилля – згинальний момент  $M_b$  і поздовжня сила  $N_b$ . Для даного перерізу необхідно отримати залежності для побудови межі області міцності. Двотавровий переріз потребує виведення таких залежностей при трьох варіантах розташування центру згину, а саме: центр згину розташований в межах стінки двотавра; центр згину розташований у межах верхньої полиці; центр згину розташований у межах нижньої полиці.

Розглянемо докладніше виведення залежностей для побудови верхньої межі області міцності.

1. Центр згину розташований у межах стінки двотавра ( $-h/2 \leq y \leq h/2$ ) (рис. 2).

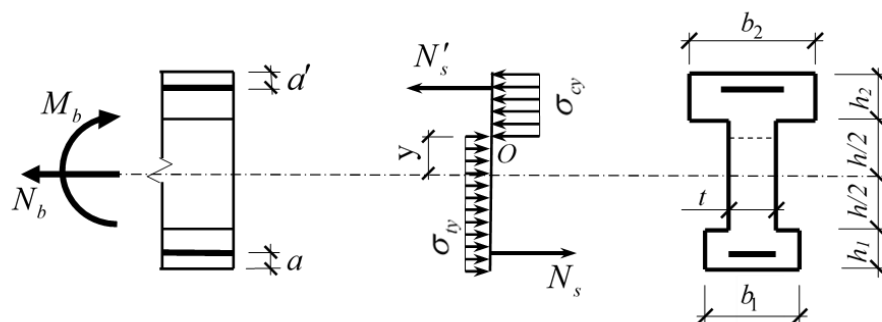


Рис. 2. Схема дії зусиль у двотавровому перерізі при дії граничних моменту та поздовжньої сили (центр згину розташований у межах стінки двотавра)

Із рівняння рівноваги  $\sum X = 0$  одержуємо:

$$N_b = -\sigma_{cy} \left[ b_2 h_2 + t \left( \frac{h}{2} - y \right) \right] + \sigma_{ty} \left[ b_1 h_1 + t \left( \frac{h}{2} + y \right) \right] - N'_s + N_s, \quad (1)$$

де  $N_s = \sigma_s A_s$ ;  $N'_s = \sigma'_s A'_s$ ;  $\sigma_s, \sigma'_s, A_s, A'_s$  – відповідно напруження та площі перерізу нижньої та верхньої арматури.

Використовуючи те ж рівняння рівноваги запишемо вираз для координати центру згину перерізу –  $y$  :

$$y = \left[ \sigma_{cy} \left( b_2 h_2 + \frac{th}{2} \right) - \sigma_{ty} \left( b_1 h_1 + \frac{th}{2} \right) + N'_s - N_s + N_b \right] / t (\sigma_{cy} + \sigma_{ty}). \quad (2)$$

Використовуючи рівняння рівноваги  $\sum m_o = 0$ , отримаємо вираз для моменту:

$$M_b = \sigma_{cy} \left[ b_2 h_2 \left( \frac{h+h_2}{2} - y \right) + \frac{t}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right)^2 \right] + \sigma_{ty} \left[ b_1 h_1 \left( \frac{h_1+h}{2} + y \right) + \frac{t}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right)^2 \right] + N'_s \left( h_2 - a' + \frac{h}{2} - y \right) + N_s \left( h_1 - a + \frac{h}{2} + y \right) - N_b y. \quad (3)$$

2. Центр згину розташований у межах верхньої полиці двотавра ( $h/2 < y \leq h/2 + h_2$ ).

Використовуючи рівняння рівноваги, одержуємо:

$$N_b = -\sigma_{cy} b_2 \left( \frac{h}{2} + h_2 - y \right) + \sigma_{ty} \left[ b_1 h_1 + th + b_2 \left( y - \frac{h}{2} \right) \right] - N'_s + N_s; \quad (4)$$

$$y = \left[ \sigma_{cy} b_2 \left( \frac{h}{2} + h_2 \right) + \sigma_{ty} \left( \frac{b_2 h}{2} - th - b_1 h_1 \right) + N'_s - N_s + N_b \right] / b_2 (\sigma_{cy} + \sigma_{ty}), \quad (5)$$

$$M_b = \sigma_{cy} \frac{b_2}{2} \left( \frac{h}{2} + h_2 - y \right)^2 + \sigma_{ty} \left[ b_1 h_1 \left( \frac{h_1+h}{2} + y \right) + thy + \frac{b_2}{2} \left( y - \frac{h}{2} \right)^2 \right] + N'_s \left( h_2 - a' + \frac{h}{2} - y \right) + N_s \left( h_1 - a + \frac{h}{2} + y \right) - N_b y. \quad (6)$$

3. Центр згину розташований у межах нижньої полиці двотавра ( $-\left(\frac{h}{2} + h_2\right) \leq y < -\frac{h}{2}$ ).

Із рівнянь рівноваги одержуємо:

$$N_b = -\sigma_{cy} \left[ b_2 h_2 + th - b_1 \left( \frac{h}{2} + y \right) \right] + \sigma_{ty} b_1 \left( \frac{h}{2} + h_1 + y \right) - N'_s + N_s; \quad (7)$$

$$y = \left[ \sigma_{cy} \left( b_2 h_2 + th - \frac{b_1 h}{2} \right) - \sigma_{ty} b_1 \left( \frac{h}{2} + h_1 \right) + N'_s - N_s + N_b \right] / b_1 (\sigma_{cy} + \sigma_{ty}); \quad (8)$$

$$M_b = \sigma_{cy} \left[ b_2 h_2 \left( \frac{h_2+h}{2} - y \right) - thy + \frac{b_1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right)^2 \right] + \frac{\sigma_{ty} b_1}{2} \left( \frac{h}{2} + h_1 + y \right)^2 + N'_s \left( h_2 - a' + \frac{h}{2} - y \right) + N_s \left( h_1 - a + \frac{h}{2} + y \right) - N_b y. \quad (9)$$

Для побудови межі області міцності перерізу визначаємо границі, у яких може змінюватись поздовжня сила та відповідні моменти. Максимально можлива поздовжня сила відповідає випадку розтягування всього перерізу. При цьому в перерізі діють

тільки напруження розтягу  $\sigma_{ty}$  і  $\sigma'_s = \sigma_s = \sigma_{sy}$ . Використання рівнянь рівноваги призводить до залежностей:

$$N_{b,\max} = \sigma_{ty} [b_1 h_1 + th + b_2 h_2] + \sigma_{sy} (A_s + A'_s); \quad (10)$$

$$M_b = \sigma_{ty} \left[ b_1 h_1 \left( \frac{h_1}{2} + h + h_2 \right) + th \left( \frac{h}{2} + h_2 \right) + \frac{b_2 h_2^2}{2} \right] + \sigma_{sy} [A_s (h_1 + h + h_2 - a) + A'_s a'] - N_b \left( \frac{h}{2} + h_2 \right). \quad (11)$$

Мінімально можлива поздовжня сила відповідає випадку стиснення всього перерізу. При цьому в перерізі діє тільки напруження стиску  $\sigma_{cy}$  і  $\sigma'_s = \sigma_s = -\sigma_{sy}$ . Використання рівнянь рівноваги призводить до залежностей:

$$N_{b,\min} = -\sigma_{cy} (b_1 h_1 + th + b_2 h_2) - \sigma_{sy} (A_s + A'_s); \quad (12)$$

$$M_b = \sigma_{cy} \left[ \frac{b_1 h_1^2}{2} + th \left( \frac{h}{2} + h_1 \right) + b_2 h_2 \left( \frac{h_2}{2} + h + h_1 \right) \right] + \sigma_{sy} [A'_s (h_1 + h + h_2 - a') + A_s a] + N_b \left( \frac{h}{2} + h_1 \right). \quad (13)$$

Максимальне значення граничного моменту  $M_{b,\max}$  отримаємо, прирівнюючи похідну моменту до нуля:

$$\frac{dM_b(N_b)}{dN_b} = -y = 0. \quad (14)$$

Із (14) випливає, що крива, яка описує межу області міцності перерізу, має екстремальне значення, коли центр згину розташований у центрі стінки двотавра. Для визначення максимального моменту та відповідної йому поздовжньої сили слід скористатися виразами (3) та (1) при  $y = 0$ :

$$M_{b,\max} = \sigma_{cy} \left( b_2 h_2 \frac{h+h_2}{2} + \frac{th^2}{8} \right) + \sigma_{ty} \left( b_1 h_1 \frac{h_1+h}{2} + \frac{th^2}{8} \right) + A'_s \sigma_{sy} \left( h_2 - a' + \frac{h}{2} \right) + A_s \sigma_{sy} \left( h_1 - a + \frac{h}{2} \right); \quad (15)$$

$$N_b = -\sigma_{cy} \left( b_2 h_2 + \frac{th}{2} \right) + \sigma_{ty} \left( b_1 h_1 + \frac{th}{2} \right) - \sigma_{sy} (A'_s - A_s). \quad (16)$$

Для кожного з трьох варіантів розташування центру згину перерізу є два незалежні рівняння рівноваги і п'ять невідомих величин:  $M_b$ ,  $N_b$ ,  $y$ ,  $\sigma_s$ ,  $\sigma'_s$ . Для визначення граничного моменту при заданому значенні поздовжньої сили складаємо оптимізаційну задачу, де цільовою функцією є екстремальне значення моменту  $M_b$ , змінними проекту – напруження в арматурі  $\sigma_s$  і  $\sigma'_s$ , обмеженнями є рівняння рівноваги  $\sum X = 0$ , границі зміни  $y$  та напруження в арматурі. Наприклад, для побудови верхньої ділянки межі області міцності для випадку, коли центр згину розташовується в межах стінки двотавра слід розв'язати задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_b \rightarrow \max; \\ y - \left[ \sigma_{cy} \left( b_2 h_2 + \frac{th}{2} \right) - \sigma_{ty} \left( b_1 h_1 + \frac{th}{2} \right) + N'_s - N_s + N_b \right] / t (\sigma_{cy} + \sigma_{ty}) = 0; \\ -h/2 \leq y \leq h/2; \\ |\sigma_s| \leq \sigma_{sy}; \\ |\sigma'_s| \leq \sigma_{sy}, \end{array} \right. \quad (17)$$

де  $M_b$  визначається відповідно до (3).

Задаючи значення поздовжньої сили і щоразу розв'язуючи оптимізаційну задачу (17), отримаємо точки кривої в координатах  $M_b - N_b$ , яка обмежує ділянку області міцності двотаврового армованого перерізу зверху.

Відповідні задачі розв'язуються і для випадків, коли центр згину розташовується у верхній та нижній полицях двотавра.

Побудова нижньої межі області міцності виконується за алгоритмом, що описаний вище.

**Приклад.** Побудова області міцності для симетричного двотаврового перерізу з несиметричним армуванням.

Розглянемо переріз із характеристиками:

$$b_1 = 0.4\text{м}; h_1 = 0.2\text{м}; b_2 = 0.4\text{м}; h_2 = 0.2\text{м}; h = 0.8\text{м}; t = 0.15\text{м};$$

$$A_s = 0.001232\text{м}^2; A'_s = 0.000628\text{м}^2; a = 0.03\text{м}; a' = 0.03\text{м};$$

$$\sigma_{cy} = 14500\text{кН/м}^2; \sigma_{ty} = 1300\text{кН/м}^2; \sigma_{sy} = 365000\text{кН/м}^2;$$

$$E = 2.3 \cdot 10^7\text{кН/м}^2; E_s = 2.1 \cdot 10^8\text{кН/м}^2.$$

Верхня межа області міцності, а також графіки зміни центру згину та напруження в арматурі, побудовані шляхом вирішення оптимізаційної задачі за допомогою EXCEL, представлені на рис. 3

Як впливає з рис. 3:

– графік зміни центру згину перерізу складається з прямолінійних відрізків, з точками зламу в центрі ваги арматури та в місцях сполучення стінки двотавра з полицями;

– на межі області міцності арматура знаходиться у пластичній стадії, крім ділянок ВС для нижньої арматури та FG для верхньої арматури, де напруження в арматурі змінюються за лінійним законом.

Якщо верхню межу області міцності перерізу представити, як деяку фіктивну балкову епюру моментів, то на підставі диференціальних залежностей при згині похідну такої епюри можна назвати фіктивною поперечною силою:

$$\frac{dM_b(N_b)}{dN_b} = Q^f(N_b) = -y(N_b). \quad (18)$$

Похідна поперечної сили є фіктивним навантаженням прикладеним до балки:

$$\frac{dQ^f(N_b)}{dN_b} = \frac{dy(N_b)}{dN_b} = q^f(N_b). \quad (19)$$

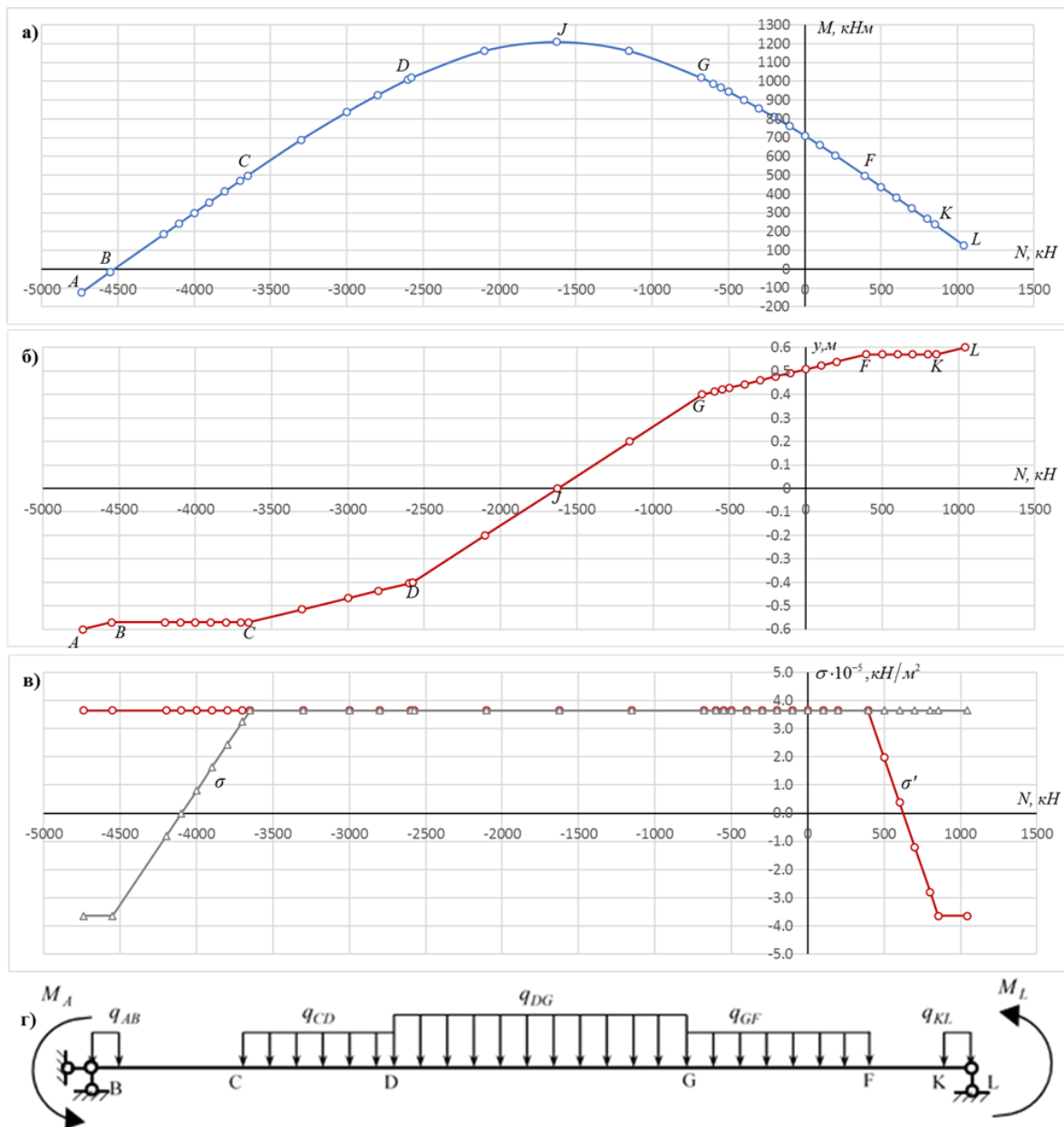


Рис. 3. а) – верхня межа області міцності; б) – графік зміни координати центру згину; в) – графік зміни напруження в арматурі; г) – балкова аналогія

Виходячи з цього, для побудови верхньої межі області міцності перерізу можна використовувати балочну аналогію (рис. 3г). Межами прикладання навантаження до бвлки є точки зламу графіка  $y(N_b)$  (таб. 1). Значення фіктивних навантажень визначаємо за допомогою залежностей:

$$q_{AB}^f = q_{CD}^f = \frac{-1}{b_2(\sigma_{cy} + \sigma_{ty})};$$

$$q_{DG}^f = \frac{-1}{t(\sigma_{cy} + \sigma_{ty})};$$

$$q_{GF}^f = q_{KL}^f = \frac{-1}{b_1(\sigma_{cy} + \sigma_{ty})}.$$
(20)

Таблиця 1

Параметричні точки верхньої межі області міцності

Точка	$y$	$\sigma_s$	$\sigma'_s$	Формула для обчислення $N_b, M_b$	$N_b, \text{кН}$	$M_b, \text{кНм}$	$q^f, \frac{M}{\text{кН}}$
A	$-(h/2 + h_1)$	$-\sigma_{sy}$	$\sigma_{sy}$	(12), (13)	4739.010	-125.600	$\frac{-1}{6320}$
B	$-(h/2 + h_1 - a)$	$-\sigma_{sy}$	$\sigma_{sy}$	(7), (9)	4549.410	-14.684	0
C	$-(h/2 + h_1 - a)$	$\sigma_{sy}$	$\sigma_{sy}$	(7), (9)	3650.050	497.951	$\frac{-1}{6320}$
D	$-h/2$	$\sigma_{sy}$	$\sigma_{sy}$	(1), (3)	2575.650	1019.035	$\frac{-1}{2370}$
J	0	$\sigma_{sy}$	$\sigma_{sy}$	(16), (15)	1627.650	1208.635	$\frac{-1}{2370}$
G	$h/2$	$\sigma_{sy}$	$\sigma_{sy}$	(1), (3)	-679.650	1019.035	$\frac{-1}{6320}$
F	$h/2 + h_2 - a'$	$\sigma_{sy}$	$\sigma_{sy}$	(4), (6)	394.751	497.951	0
K	$h/2 + h_2 - a'$	$\sigma_{sy}$	$-\sigma_{sy}$	(4), (6)	853.410	236.516	$\frac{-1}{6320}$
L	$h/2 + h_2$	$\sigma_{sy}$	$-\sigma_{sy}$	(10), (11)	1043.010	125.600	$\frac{-1}{6320}$

Таким чином, верхня межа області міцності може бути побудована з використанням балкової аналогії за допомогою алгоритму:

- визначаємо границі зміни поздовжньої сили  $N_{b,\max}, N_{b,\min}$  і відповідні моменти  $M_L, M_A$ ;
- визначаємо значення  $N_b$  в точках зламу графіку  $y$  (таб. 1);
- обчислюємо значення фіктивних навантажень  $q^f$  (20);
- для шарнірно опертої балки, завантаженої крайовими моментами  $M_A, M_L$  і навантаженням  $q^f$  (рис. 3г), будуємо епюру моментів, яка повторює контури верхньої межі області міцності перерізу.

Балкова аналогія дозволяє наочно показати, що на відрізках, де навантаження  $q^f$  не діє, межа області міцності накреслена прямою ділією, а на відрізках, де діє навантаження, – квадратною параболою.

Для побудови нижньої межі області міцності використовується аналогічна методика:

- записуються рівняння рівноваги перерізу;
- визначаються параметричні точки межі області міцності;
- з використанням балкової аналогії будується межа області міцності.

Область міцності двотаврового несиметрично армованого перерізу представлена на рис.4.

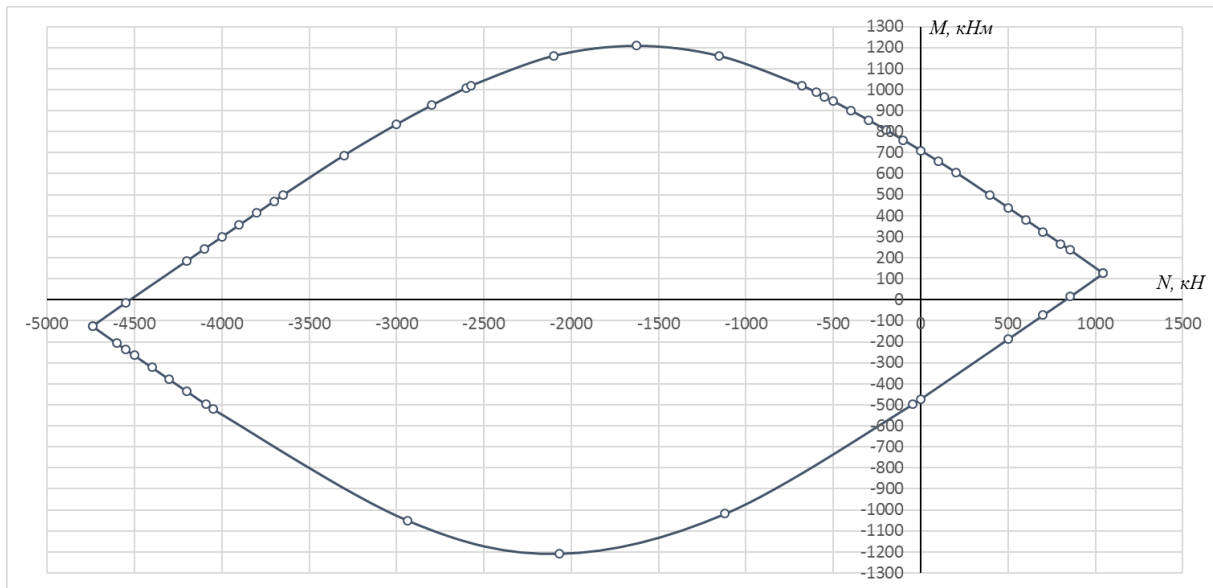


Рис. 4. Область міцності симетричного двотаврового перерізу із несиметричним армуванням

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Після побудови області міцності армованого двотаврового перерізу методом розв'язання екстремальної задачі типу (17) було виявлено характерні особливості у поведінці графіку зміни центру згину перерізу та графіків зміни напруження в арматурі. Встановлено, що ці графіки описуються лінійними функціями.

Якщо припустити, що верхня (нижня) межа області міцності є балковою епюрою моментів, то на підставі диференціальних залежностей при згині похідна граничного моменту  $M_b$  за поздовжньою силою  $N_b$  буде відповідати фіктивній поперечній силі, а похідна фіктивної поперечної сили – буде відповідати фіктивному навантаженню. Таким чином, межу області міцності можна побудувати як епюру моментів для шарнірно опертої балки, завантаженої фіктивним навантаженням та крайовими моментами.

Також встановлено, що вираз для фіктивної поперечної сили точно збігається з виразом, що описує положення центру згину перерізу, що дозволяє розглядати графік зміни центру згину перерізу як епюру фіктивної поперечної сили. Цей факт, з погляду фізичного сенсу, поки що не пояснений, але дозволяє значно спростити задачу побудови області міцності двотаврового армованого перерізу.

## 6 ВИСНОВКИ

1. Граничний стан армованого двотаврового перерізу досягається, коли весь матеріал перетину та арматура (або одна з арматур) переходять у пластичний стан.
2. Межа області міцності двотаврового армованого перерізу описується лінійними та квадратичними функціями.
3. Лінійні графіки зміни координати центру згину перерізу та напруження в арматурі дозволяють побудувати межу області міцності перерізу з використанням балочної аналогії без розв'язку оптимізаційних задач, типу (17).



4. Екстремальне значення граничного моменту  $M_{b,\max}$  та відповідне значення поздовжньої сили  $N_b$  визначаються при  $y = 0$ , тобто, коли центр згину двотаврового перерізу знаходиться на середині стінки двотавра.

## Література

1. Гвоздев А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. Москва: Стройиздат, 1949. 248с.
2. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов москва: Гостехиздат, 1954. 287с.
3. Чирас А. А. Строительная механика, теория и алгоритмы. Москва: Стройиздат, 1989. 256с
4. Пиковский А. А. Статика стержневых систем со сжатыми элементами. М.: Физматгиз, 1961. 394с.
5. Soroka M. The limit state of non-hinged arch with a cross-section in the form of an idealized I-beam. *International Journal of Engineering and Technology*. 2018. Vol. 10 No 6. pp. 1712–1718. DOI: 10.21817/ijet/2018/v10i6/181006095.
6. Soroka M. Bearing capacity of structures made of materials with different tensile and compression strengths: 6th International Conference "Actual Problems of Engineering Mechanics", (APEM 2019). 2019. vol. 968. pp. 200–208.
7. Проценко А. М., Власов В. В. Статический принцип предельного равновесия и определение деформированного состояния статически неопределимых железобетонных конструкций в стадии исчерпания их несущей способности. //В сб. НИИЖБ, - «Воздействие статических, динамических и многократно повторяющихся нагрузок на бетон и элементы железобетонных конструкций» –М.: Стройиздат, 1972. С. 191 – 220.
8. Габбасов Р. Ф. Чан Тхань Тунг. Численный метод расчета арок по предельному равновесию – М: Вестник МГСУ, 2010. № 4. том 1. с. 18–23.
9. Bridge R., Wheeler A. Cross-section Strength Of Columns. Part 1: AS 3600 Design. OneSteel Reinforcing Pty Ltd CAN 004 148 289. 2000. 104p.
10. Vrouwenvelder A.C.W.M., Witteveen J. The plastic behaviour and the calculation of the plates subjected to bending. Technical university delft faculty of civil engineering and geosciences. 2003. *Plasticity Ct* 4150. 121p.
11. Дарков А. В., Шапошников Н. Н. Строительная механика. М: «Высшая школа», 1986. 607с.

## References

1. Gvozdev A. A. (1949). *Raschet nesushchey sposobnosti konstruktsiy po metodu predel'nogo ravnovesiya* [Calculation of the bearing capacity of structures by the method of limit equilibrium]. Moscow: Stroyizdat. [in Russian].
2. Rzhantsyn A. R. (1954). *Raschet sooruzheniy s uchetom plasticheskikh svoystv materialov*. [Calculation of structures taking into account the plastic properties of materials]. Moscow: The state publishing house of literature on construction and architecture. [in Russian].
3. Chiras A. A. (1989). *Stroitel'naya mekhanika, teoriya i algoritmi* [Building mechanics, theory and algorithms]. Moscow: Stroyizdat. [in Russian].
4. Pikovsky A. A. (1961). *Statika stержnevih system so szhatimy elementamy* [Statics of bar systems with compressed elements]. Moscow: State publishing house of physical and mathematical literature. [in Russian].
5. Soroka M. (2018). The limit state of non-hinged arch with a cross-section in the form of an idealized I-beam. *International Journal of Engineering and Technology*. 10(6). 1712–1718. DOI: 10.21817/ijet/2018/v10i6/181006095.
6. Soroka M. (2019). Bearing capacity of structures made of materials with different tensile and compression strengths. *6th International Conference "Actual Problems of Engineering Mechanics", (APEM 2019)*. 968. 200-208.
7. Protsenko A. M., Vlasov V. V. (197). *Statcheskiy printsip predel'nogo ravnovesiya i opredeleniye deformirovannogo sostoyaniya staticheski neopredelimykh zhelezobetonnykh konstruktsiy v stadii ischerpaniya ikh nesushchey* [Static principle of limit equilibrium and determination of the deformed state of statically indeterminate reinforced concrete structures at the stage of exhaustion

- of their bearing capacity]. V sb. NIIZHБ, - «Vozdeystviye staticheskikh, dinamicheskikh i mnogokratno povtoryayushchikhsya nagruzok na beton i elementy zhelezobetonnykh konstruktsiy». Moscow: Stroyizdat. pp. 191–220. [in Russian].
8. Chan Tkhun Tung (2010). Chislennij method rascheta arok po predelnomy ravnovesiu. Moscow: MGSU bulletin. 4(1). 18–23. [in Russian].
  9. Bridge R., Wheeler A. (2000). *Cross-section Strength Of Columns. Part 1: AS 3600 Design. OneSteel Reinforcing*. Pty Ltd CAN 004 148 289.
  10. Vrouwenvelder A.C.W.M., Witteveen J. (2003). *The plastic behaviour and the calculation of the plates subjected to bending*. Technical university delft faculty of civil engineering and geosciences. Plasticity Ct 4150.
  11. Darkov A. V., Shaposhnikov N. N. (1986). *Stroitel'naya mehanika*. [Structural mechanics]. Moscow: "Higher school". [in Russian].

**Сорока Микола Миколайович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури

к.т.н., доцент

вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029

soroka@ogasa.org.ua

ORCID: 0000-0002-9551-9475

*Для посилань:*

Сорока М. М. Граничний стан двутаврового армованого перерізу з використанням пружнопластичних діаграм деформування матеріалів. Механіка та математичні методи, 2023. Т. 5. №. 1. С. 72–83.

*For references:*

Soroka M. (2023). Limit state of a i-reinforced section using elastoplastic diagrams of deformation of materials. Mechanics and Mathematical Methods. 5 (1). 72 – 83.

УДК 539.3

## ВИКОРИСТАННЯ СИМЕТРІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДЕФОРМУВАННЯ ПЛИТ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ

Гуртовий О. Г.<sup>1</sup>, Тинчук С. О.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Національний університет водного господарства та природокористування

**Анотація.** Запропонована оптимізація розрахункової схеми деформування прямокутної багатошарової плити з трансверсально-ізотропними шарами, що опирається на жорстку (недеформівну) основу. Суть оптимізації полягає в розгляданні такої розрахункової схеми плити, в якій напружено-деформований стан (НДС) плити повністю описується лише одною складовою, а саме беззгиноюю складовою симетричного НДС відносно серединної поверхні двосторонньо симетрично навантаженої плити. Для цього замість реальної конструкції багатошарової плити, що деформується без відриву від основи, пропонується розглядати розрахункову схему плити, яка утворена симетричною добудовою відносно поверхні контакту даної плити з основою. Плита буде двосторонньо симетрично навантаженою відносно серединної поверхні плити, а товщина плити збільшиться вдвоє. На серединній поверхні виконуються умови ковзного контакту верхньої і нижньої частин симетричної плити, тобто ковзкого контакту плити з основою. Для моделювання абсолютно жорсткого контакту на границі з основою в добудовану плиту вводиться додатковий тонкий шар великої жорсткості («недеформівний шар»), що не змінює суть розрахункової моделі. НДС плити буде беззгиновим, що суттєво спрощує його моделювання. Для беззгинового НДС побудована в пружній постановці двовимірна, високого ступеня ітераційного наближення, але тривимірна за характером відображення НДС модель деформування багатошарових прямокутних плит на жорсткій основі з ізотропними та трансверсально-ізотропними шарами, яка достатньо повно враховує деформації поперечного зсуву та поперечного обтиснення при поперечному навантаженні плити. Модель – континуальна, тобто кількість рівнянь та порядок диференціювання розрахункової системи рівнянь не залежить від кількості шарів в плиті. Цей порядок диференціювання і кількість розрахункових рівнянь може залежати лише від порядку ітераційного наближення моделі. Приведено виведення розрахункових диференціальних рівнянь в узагальнених зусиллях та в функціях переміщень, а також отримано граничні умови варіаційним методом Лагранжа. Приведено результати аналітичного розв'язку задачі деформування однорідної прямокутної плити при ковзному контакті з жорсткою основою при граничних умовах типу Нав'є під дією поперечного синусоїдального навантаження. Виконано порівняння результатів розрахунків з точним тривимірним розв'язком.

**Ключові слова:** багатошарова плита, жорстка основа, поперечний зсув, поперечне обтиснення, континуальна модель.

## USING SYMMETRY TO SOLVE PROBLEMS OF DEFORMATION OF PLATES ON A RIGID FOUNDATION

O. Gurtovyi<sup>1</sup>, S. Tynchuk<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National University of Water and Environmental Engineering

**Abstract.** The optimization of the design scheme of deformation of a rectangular multilayer plate with transversally isotropic layers resting on a rigid (non-deformable) foundation is proposed. The essence of optimization is to consider such a design diagram of the plate, in which the stress-strain state (SSS) of plate would be fully described by only one component, namely the unflexural component of symmetrical SSS relative to the middle surface of plate which is bilaterally symmetrically loaded. To do this, instead of the actual design of the multilayer plate, which is deformed without separation from the foundation, it is suggested to consider the design diagram of the



plate, which is formed by supplementing it with a symmetric one about the contact surface of the foundation. In this case, the plate will be symmetrically loaded with respect to the middle surface of the plate, and the thickness of the plate will double. On the middle surface, the conditions of sliding contact of the upper and lower parts of the symmetrical plate, i.e. sliding contact of the plate with foundation are fulfilled. To model absolutely rigid contact at the border with the foundation, an additional thin layer of high rigidity ("non-deformable layer") is introduced into the supplemented plate. This does not change the essence of the calculation model of plate. The SSS of plate will be unflexural, which significantly simplifies its modeling. A two-dimensional model of deformation of multilayer rectangular plates on a rigid foundation with isotropic and transversally-isotropic layers is constructed in an elastic formulation for a unflexural SSS, with a high degree of iterative approximation, but three-dimensional by the nature display of the SSS. This model sufficiently takes into account transverse shear deformations and of transverse compression of the plate under transverse loading. The model is continuous, that is, the number of equations and the order of differentiation of the solving system of equations does not depend on the number of layers in the plate. This order of differentiation and the number of solving equations can depend only on the order of iterative approximation of the model. The derivation of the solving differential equations in the generalized forces and displacement functions is given, as well as the boundary conditions are obtained by the variational Lagrange method. The results of the analytical solution of the problem of deformation of homogeneous rectangular plate in sliding contact with a rigid foundation with Navier-type boundary conditions under the action of a transverse sinusoidal load are given. A comparison of the calculation results with the exact three-dimensional solution ones was made.

**Keywords:** multilayered plate, rigid foundation, transverse shear, transverse compression, continual model.

## 1 ВСТУП

Застосування понять симетрія, кососиметрія досить поширене в практиці інженерних розрахунків конструкцій, так як дозволяє іноді суттєво спростити підходи до розв'язання задач. В даному дослідженні ці поняття застосовано до розв'язання задачі аналізу напружено-деформованого стану багатошарових прямокутних плит, що спираються на недеформівну, абсолютно жорстку основу. Моделі деформування плит на жорсткій основі мають свою специфіку, оскільки в них переважає беззгинова складова НДС і важливу роль відіграють, окрім деформацій поперечного зсуву, також деформації поперечного обтиснення.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Як показано численними дослідженнями, ефекти поперечного обтиснення та поперечного зсуву при згинанні трансверсально-ізотропних пластин та в пластинах на пружних основах суттєво впливають на напружено-деформований стан пластин. Підходи до побудови уточнених моделей, в тому числі ітераційних за своїм змістом, які враховують ці ефекти, викладено в [1, 2]. Проте ці моделі являються згинувими за своїм змістом. А при деформуванні плит на недеформівній основі переважає беззгинова компонента НДС. Тому актуальною є розробка та числова реалізація беззгинової уточненої моделі НДС багатошарових плит на жорстких основах, причому важливим фактором є її континуальна концепція. Задачі деформування плит на жорсткій основі розглядалися в уточненій постановці О. Г. Гуртовим [3], Гуртовим О. Г. і Тинчуком С. О. [4], а в тривимірній постановці О. В. Марчуком [5]. Саме беззгинова уточнена континуальна модель розглянута в [4]. Подальші дослідження в цьому напрямку представлено в даній роботі.

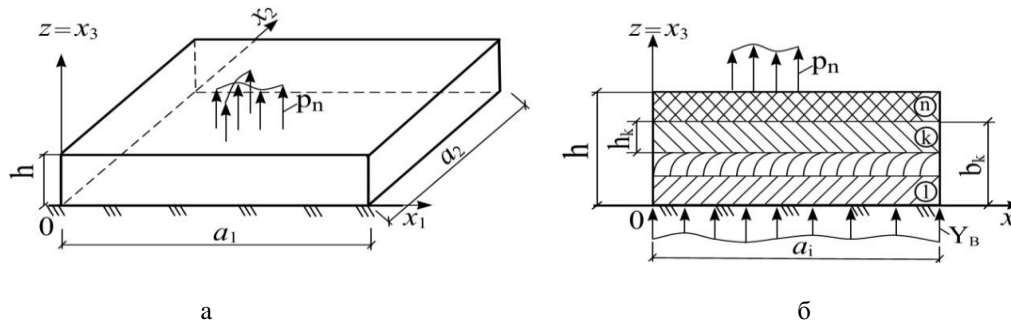
## 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою роботи є розробка уточненої моделі беззгинового НДС плит та її застосування для дослідження НДС багатошарових ізотропних та трансверсально-ізотропних плит, що опираються на жорсткі основи, за дії поперечних навантажень.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглядається лінійно-пружне деформування багатошарової прямокутної плити товщиною  $h$  і розмірами в плані  $a_1$  та  $a_2$ , яка опирається на жорстку основу. Шари плити  $k = \overline{1, n}$  трансверсально-ізотропні та ізотропні, кожний з довільною, але сталою товщиною  $h_k$ . В ортогональній системі координат  $x_1, x_2, x_3 = z$  площина  $x_1 O x_2$  співпадає з площиною контакту плити та основи (рис. 1) і паралельна з площиною ізотропії матеріалу в кожному шарі, а вісь  $z$  направлена перпендикулярно до цієї поверхні контакту і до поверхонь міжшарового контакту. На плиту діє поперечне навантаження  $p_n(x_i)$ , прикладене до верхньої поверхні плити.

Застосовується наступна система позначень: верхній індекс в дужках позначає номер шару плити, а нижні індекси – напрямки координатних осей ( $i, j = \overline{1, 2}; \alpha, \beta = \overline{1, 3}$ ); частинні похідні позначені нижніми індексами після коми  $( )_{,\alpha} = \partial/\partial x_\alpha$ .



**Рис. 1.** Розрахункова схема багатошарової плити на основі:  
 а) загальний вигляд; б) поперечний переріз плити

$Y_B(x_i)$  – реакція відпору основи, яка є невідомою функцією. Вводиться підсумовування за нижніми індексами, що повторюються. Сума інтегралів по  $z$  від довільної функції  $f(z)$  з розривами на межах шарів  $z = b_k$  позначена одним інтегралом

$$\text{від цієї функції } F^{(k)}(z) = \int_{b_{k-1}}^z f^{(k)}(z)dz + \sum_{r=1}^{k-1} \int_{b_{r-1}}^{b_r} f^{(r)}(z)dz = \int_{b_0}^z f^{(k)}(z)dz.$$

В довільній точці  $k$ -го шару компоненти вектора зміщень позначено функціями  $u_\alpha^{(k)}(x_i, z)$ , компоненти тензора деформацій –  $e_{\alpha\beta}^{(k)}(x_i, z)$ , компоненти тензора напруження –  $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}(x_i, z)$ .

На поверхні  $S$  контакту плити з основою при  $z = 0$  моделюється ковзкий контакт без тертя та без відриву від основи. Граничні умови для всіх компонентів вектора зміщень  $u_\alpha$  та для поперечних нормальних напруження  $\sigma_{33}$  і поперечних дотичних напруження  $\sigma_{i3}$  на поверхні  $S$  мають вигляд:

$$u_\alpha^{(1)} \neq 0; \sigma_{33}^{(1)} = -Y_B; \sigma_{i3}^{(1)} = 0; i = \overline{1, 2}; \alpha = \overline{1, 3}; z = 0. \quad (1)$$

Між шарами плити виконуються умови жорсткого контакту без проковзування на поверхнях з координатою  $z = b_k$  ( $k = \overline{1, (n-1)}$ ):

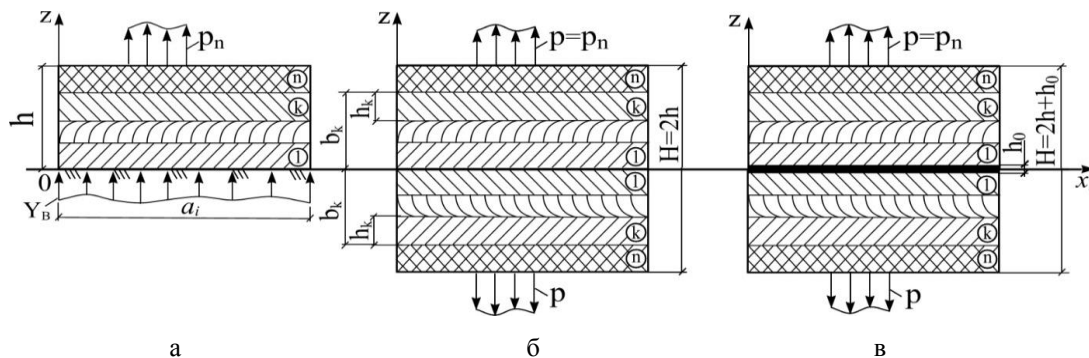
$$u_\alpha^{(k)}(x_i, b_k) = u_\alpha^{(k-1)}(x_i, b_k); \sigma_{\alpha 3}^{(k)}(x_i, b_k) = \sigma_{\alpha 3}^{(k-1)}(x_i, b_k). \quad (2)$$

Розв’язання задачі з визначення НДС плити виконаємо наближено, зведенням тривимірної задачі до двовимірної. Застосуємо для цього метод гіпотез, зокрема континуальний підхід [1, 4], задавши гіпотетично функції розподілу НДС за поперечною координатою  $z$ .

Ґрунтуючись на розкладанні НДС плити на згинові та беззгинові складові, пропонується оптимізація розрахункової схеми деформування прямокутної багатошарової плити на жорсткій основі. Суть оптимізації полягає в розгляді такої розрахункової схеми плити, в якій НДС плити повністю описувався б лише одною складовою, а саме беззгиновою складовою НДС. Для цього замість реальної конструкції багатошарової плити (рис. 2, а), що деформується без відриву від основи, пропонується розглядати розрахункову схему плити, яка утворена симетричною добудовою відносно поверхні контакту даної плити з основою. У цьому випадку плита буде двосторонньо симетрично навантаженою відносно серединної поверхні плити, а товщина плити збільшиться вдвоє (рис. 2, б).



Оскільки у випадку жорсткої основи деформації основи відсутні, координатну поверхню  $x_1 0 x_2$  сумісно з поверхнею контакту плити і основи (рис. 2, б). Тоді функція прогину на цій поверхні  $w(x_j) \equiv 0$  при  $z = \delta_w = 0$ , і отже  $w$  не увійде у вираз, що апроксимує зміщення  $u_3^{(k)}$ .



**Рис. 2.** Схеми оптимізації розрахункової схеми плити:

- а) задана розрахункова схема; б) оптимізована розрахункова схема плити за умови ковзкого контакту з основою; в) оптимізована розрахункова схема плити за умови жорсткого контакту з основою

Для моделювання жорсткого контакту плити з основою без проковзування в розрахунковій схемі (рис. 2, в) всередині плити потрібно додатково вводити відносно тонкий, у порівнянні з іншими шарами, товщиною  $h_0$  „абсолютно” жорсткий прошарок, позначений  $k = 0$ . „Абсолютна” жорсткість прошарку (відносно жорсткості інших шарів) забезпечується прийняттям відносно великих модулів пружності  $E^{(0)} = E^{(0)} = nE$ ;  $G^{(0)} = G^{(0)} = nG$ ;  $\nu = \nu' \equiv 0$ , де  $n \approx 10^3$ , а  $E$  і  $G$  – найбільші значення модулів пружності та зсуву із усіх наявних матеріалів шарів у плити. У цьому випадку граничні умови при  $z = \pm h_0 / 2$  матимуть вигляд:

$$u_3^{(1)} = 0; u_i^{(1)} = 0; \sigma_{i3}^{(1)} \neq 0 \text{ (при } z = \pm h_0 / 2 \text{)}. \quad (3)$$

І хоча на поверхні  $z = 0$  залишаються справедливими умови (1), проте  $u_i^{(1)} \rightarrow 0$  внаслідок відносно великої жорсткості прошарку.

В результаті континуального наближеного моделювання за методикою, викладеною в [4], отримано компоненти вектора переміщень і кінематична модель (модель 1) має вигляд:

$$\begin{aligned} u_3^{(k)} &= \psi_{3t,3}^{(k)}(z)\gamma_t + \psi_{33,3}^{(k)}(z)p; \quad t = \overline{1, 2}; \\ u_i^{(k)} &= v_i - \psi_{3t}^{(k)}(z)\gamma_{t,i} - \psi_{33}^{(k)}(z)p_{,i} - \psi_{ir}^{(k)}(z)\beta_{ir}; \quad r = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (4)$$

При цьому компоненти зміщень представлені сумами добутоків гіпотетично заданих степеневих функцій  $\psi_{3t}^{(k)}$ ,  $\psi_{ir}^{(k)}$  поперечної координати  $z$ , представлених в [4], та шуканих функцій  $\gamma_t$  – функцій поперечного обтиснення,  $\beta_{ir}$  – функцій поперечного зсуву і  $v_i$  – горизонтальних переміщень координатної поверхні  $x_1 0 x_2$ .

Таким чином, тривимірна задача НДС зведена до уточненої двовимірної задачі НДС з шуканими функціями двох координат  $x_1, x_2$ .

Проте, при застосуванні числових методів розрахунку, зокрема ВРМ, виявляється необхідним замінити  $p(x_i)$  в (4) невідомою функцією обтиснення  $\gamma_3(x_i)$ . Таким чином, далі реалізується також модель 2 у вигляді, що містить лише невідомі функції координатної поверхні  $x_1 0 x_2$ :



$$\begin{aligned} u_3^{(k)} &= \psi_{3t,3}^{(k)}(z)\gamma_t; \quad t = \overline{1, 3}; \\ u_i^{(k)} &= v_i - \psi_{3t}^{(k)}(z)\gamma_{t,i} - \psi_{ir}^{(k)}(z)\beta_{ir}; \quad r = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (5)$$

Шукана функція  $\gamma_3(x_i)$  – гладка й відповідає умовам нерозривності й диференційованості так само, як і функції  $v_i, \gamma_1, \gamma_2, \beta_{ir}$ .

Для підвищення точності апроксимації беззгинового НДС у моделі (4), (5) включені запропоновані в [4, 6, 7] функції, що моделюють ефекти від поперечних зсувних деформацій та від деформацій поперечного обтиснення у вищих наближеннях. Ці апроксимуючі за координатою  $z$  функції мають вигляд:

$$\begin{aligned} \psi_{3t,3}^{(k)} &= \int_0^z a_{3333}^{(s)} f_t^{(s)} dz; \quad \psi_{33,3}^{(k)} = \int_0^z a_{3333}^{(s)} dz; \\ \psi_{ir}^{(k)} &= -\int_0^z a_{i3i3}^{(s)} f_{ir}^{(s)} dz; \quad \psi_{3l}^{(k)} = \int_0^z \psi_{3l,3}^{(s)} dz; \quad s = \overline{1, k}; \quad l = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Функції  $[\psi_{3l,3}] = a_t^{(k)} z^{2t+1}$  – непарного степеню  $z$ , а функції  $[\psi_{3l}; \psi_{ir}] = a_t^{(k)} z^{2t}$  – парного степеню  $z$ .

Зокрема, для однорідної пластини функції (6) запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \psi_{31,3} &= A_{jjj} a_{3333} H^5 (48\xi^5 - 40\xi^3 + 15\xi) / 5760; \quad \psi_{33,3} = a_{3333} H \xi; \quad \xi = \frac{z}{H}; \\ \psi_{31} &= A_{jjj} a_{3333} H^6 (16\xi^6 - 20\xi^4 + 15\xi^2) / 11520; \quad \psi_{33} = a_{3333} H^2 \xi^2 / 2; \quad j = \overline{1, 2}; \\ \psi_{32,3} &= A_{jjj}^2 a_{3333} a_{j3j3} H^7 (192\xi^7 - 336\xi^5 + 196\xi^3 - 63\xi) / 967680; \quad -0,5 \leq \xi \leq 0,5; \\ \psi_{32} &= A_{jjj}^2 a_{3333} a_{j3j3} H^8 (48\xi^8 - 112\xi^6 + 98\xi^4 - 63\xi^2) / 1935360; \\ \psi_{i1} &= -A_{iii} a_{i3i3} H^4 (2\xi^4 - \xi^2) / 48; \quad \psi_{i2} = -A_{iii}^2 a_{i3i3}^2 H^6 (16\xi^6 - 20\xi^4 + 7\xi^2) / 11520; \\ \psi_{i3} &= -A_{iii}^3 a_{i3i3}^3 H^8 (48\xi^8 - 112\xi^6 + 98\xi^4 - 31\xi^2) / 1935360; \\ \psi_{i4} &= -A_{iii}^4 a_{i3i3}^4 H^{10} (2560\xi^{10} - 960\xi^8 + 1568\xi^6 - 1240\xi^4 + 381\xi^2) / 928972800. \end{aligned} \quad (7)$$

Розрахункову систему рівнянь та граничні умови для варіанту моделі 1 отримаємо із варіаційного принципу Лагранжа, за яким варіація повної потенціальної енергії складає:

$$\delta U = \delta \Pi - \delta H_{1n} - \delta H_{1L} = 0. \quad (8)$$

Тут  $\delta \Pi$  – варіація потенціальної енергії деформації має вигляд:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \iint_S \left\{ \int_{-b_n}^{b_n} \left[ \sigma_{ij}^{(k)} \cdot \delta \left( v_{i,j} - \psi_{3t}^{(k)}(z)\gamma_{t,ij} - \psi_{ir}^{(k)}(z)\beta_{ir,j} \right) + \sigma_{i3}^{(k)} \cdot \delta \left( -\psi_{ir,3}^{(k)}(z)\beta_{ir} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. + \sigma_{33}^{(k)} \cdot \delta \left( \psi_{3t,33}^{(k)}(z)\gamma_t \right) \right] dz \right\} dS. \end{aligned} \quad (9)$$

Для навантаження, прикладеного на зовнішніх горизонтальних поверхнях плити, варіація роботи має вигляд:

$$\delta H_{1n} = \iint_S \left( \overline{\psi}_{3t,3}^{(-n)} + \overline{\psi}_{3t,3}^{(-n)} \right) p \cdot \delta \gamma_t dS, \quad (10)$$

де  $\psi_{3t,3}^{-(n)}$  та  $\psi_{3t,3}^{-(-n)}$  – значення функції  $\psi_{3t,3}^{(k)}$  при  $z = \pm b_n$  (рис. 2, б, в) в точках на поверхнях плити ( $k = \pm n$ ).

Варіацію роботи поверхневих сил на торцях плити зведемо до роботи контурних сил на контурі плити  $L$  в площині  $x_1 x_2$ . Запишемо її у вигляді

$$\delta H_{1L} = \int_L \left\{ \int_{-b_n}^{b_n} \left[ \sigma_{mm}^{(k)} (\delta v_m - \psi_{3t}^{(k)}(z) \delta \gamma_{t,m} - \psi_{mr}^{(k)}(z) \delta \beta_{mr}) + \sigma_{m3}^{(k)} (\psi_{3t,3}^{(k)}(z) \delta \gamma_t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma_{ml}^{(k)} (\delta v_l - \psi_{3t}^{(k)}(z) \delta \gamma_{t,l} - \psi_{lr}^{(k)}(z) \delta \beta_{lr}) \right] dz \right\} dL; \quad t = \overline{1, 2}; \quad r = \overline{1, 4}. \quad (11)$$

Для отримання із функціонала повної енергії (8) розрахункової системи диференціальних рівнянь введемо наступні узагальнені зусилля:

$$N_{ij} = \int_{-b_n}^{b_n} \sigma_{ij}^{(k)} dz; \quad M_{ij}^{[\alpha s]} = \int_{-b_n}^{b_n} \sigma_{ij}^{(k)} \psi_{\alpha s}^{(k)} dz; \quad \alpha = \overline{1, 3}; \quad s = \overline{1, 4}; \\ Q_i^{[\alpha s]} = \int_{-b_n}^{b_n} \sigma_{i3}^{(k)} \psi_{\alpha s,3}^{(k)} dz; \quad N_3^{[3r]} = \int_{-b_n}^{b_n} \sigma_{33}^{(k)} \psi_{3r,33}^{(k)} dz. \quad (12)$$

Із варіаційного рівняння отримуємо систему диференціальних рівнянь в узагальнених зусиллях, вигляд якої і кількість рівнянь не залежить від числа шарів у плиті:

$$N_{ij,j} = 0 \quad (\delta v_i); \quad i, j = \overline{1, 2}; \\ M_{ij,[3r]} - N_3^{[3r]} + p \cdot (\psi_{3t,3}^{(n)} + \psi_{3t,3}^{(-n)}) = 0 \quad (\delta \gamma_t); \quad t = \overline{1, 2}; \\ M_{ij,[r]} - Q_i^{[ir]} = 0 \quad (\delta \beta_{ir}); \quad r = \overline{1, 4}, \quad (13)$$

де в дужках вказано відповідні множники варіацій шуканих функцій в  $\delta \Pi$ .

Граничні умови на краях та на торцях плити  $x_m = 0$ ,  $x_m = a_m$  ( $m, l = \overline{1, 2}$ ) мають вигляд:

$$(N_{mm} - N_{mm}^*) \delta v_m = 0; \quad (N_{ml} - N_{ml}^*) \delta v_l = 0; \\ (M_{mm,[3r]} + 2M_{ml,[3r]} - M_{ml,[3r]}^* - Q_m^{[3r]*}) \delta \gamma_t = 0; \quad (M_{mm,[3r]} - M_{mm,[3r]}^*) \delta \gamma_{t,m} = 0; \\ (M_{mm,[mr]} - M_{mm,[mr]}^*) \delta \beta_{mr} = 0; \quad (M_{ml,[lr]} - M_{ml,[lr]}^*) \delta \beta_{lr} = 0. \quad (14)$$

Для їх виконання достатньо щоб один із множників дорівнював нулю в кожній умові.

Розрахункова система диференціальних рівнянь відносно функцій зміщень у частинних похідних зі сталими коефіцієнтами отримана із системи (13) підстановкою виразів для зусиль (12) та з використанням кінематичних гіпотез (4) моделі 1, співвідношень Коші й закону Гука. Система має вигляд:

$$[L] \cdot [u] = [p], \quad (15)$$

де  $[u]$  – матриця шуканих функцій, яка має вигляд

$$[u] = [v_1, v_2, \gamma_t, \beta_{1r}, \beta_{2r}]^T. \quad (16)$$

$[L]$  – матриця диференціальних операторів

$$[L] = \begin{pmatrix} L_{v_1}^{v_1} & L_{v_1}^{v_2} & L_{v_1}^{\gamma_t} & L_{v_1}^{\beta_{1r}} & L_{v_1}^{\beta_{2r}} \\ L_{v_2}^{v_1} & L_{v_2}^{v_2} & L_{v_2}^{\gamma_t} & L_{v_2}^{\beta_{1r}} & L_{v_2}^{\beta_{2r}} \\ L_{\gamma_t}^{v_1} & L_{\gamma_t}^{v_2} & L_{\gamma_t}^{\gamma_q} & L_{\gamma_t}^{\beta_{1r}} & L_{\gamma_t}^{\beta_{2r}} \\ L_{\beta_{1r}}^{v_1} & L_{\beta_{1r}}^{v_2} & L_{\beta_{1r}}^{\gamma_t} & L_{\beta_{1r}}^{\beta_{1g}} & L_{\beta_{1r}}^{\beta_{2g}} \\ L_{\beta_{2r}}^{v_1} & L_{\beta_{2r}}^{v_2} & L_{\beta_{2r}}^{\gamma_t} & L_{\beta_{2r}}^{\beta_{1g}} & L_{\beta_{2r}}^{\beta_{2g}} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

де в диференціальних операторах  $L_k^f$  верхній індекс  $f$  вказує на невідомі функції зміщень, що підлягають диференціюванню. В цих операторах множник типу  $(\cdot)_{,ij}$  потрібно розуміти як диференціювання  $(\cdot)_{,ij} = \partial^2(\cdot) / \partial x_i \partial x_j$  відповідних функцій  $f$  (позначені в операторі верхнім індексом), а індекс  $k$  позначає функцію, при варіюванні якої отримано даний оператор;

$[p]$  – матриця, що враховує задане зовнішнє навантаження  $p$  і має вигляд

$$[p] = [p_{v_1}, p_{v_2}, p_{\gamma_t}, p_{\beta_{1r}}, p_{\beta_{2r}}]^T \cdot p. \quad (18)$$

Диференціальні оператори в (17) мають вигляд:

$$\begin{aligned} L_{v_i}^{v_j} &= B_0 \cdot (\cdot)_{,ii} + F_0 \cdot (\cdot)_{,jj}; \quad L_{v_i}^{\gamma_t} = B_0' \cdot (\cdot)_{,ji} + F_0 \cdot (\cdot)_{,ji}; \\ L_{v_i}^{\gamma_t} &= -B_{3t} \cdot (\cdot)_{,iii} - (B_{3t}' + 2F_{3t}') \cdot (\cdot)_{,ijj} + P_t \cdot (\cdot)_{,i}; \quad L_{v_i}^{\beta_{1r}} = -B_{ir} \cdot (\cdot)_{,ii} - F_{ir} \cdot (\cdot)_{,jj}; \\ L_{v_i}^{\beta_{jr}} &= -B_{jr}' \cdot (\cdot)_{,ji} - F_{jr} \cdot (\cdot)_{,ji}; \quad L_{\gamma_t}^{v_i} = B_{3t} \cdot (\cdot)_{,iii} + (B_{3t}' + 2F_{3t}') \cdot (\cdot)_{,ijj} - P_t \cdot (\cdot)_{,i}; \quad t, q = \overline{1, 2}; \\ L_{\gamma_q}^{\gamma_t} &= -D_{qt}^{33} \cdot (\cdot)_{,iii} - (2D_{qt}'^{33} + 4K_{qt}^{33}) \cdot (\cdot)_{,ijj} + (J_{qt}^3 + H_{qt}^3) \cdot (\cdot)_{,ii} + R_{qt} \cdot (\cdot); \\ L_{\gamma_t}^{\beta_{1r}} &= -D_{rt}^{i3} \cdot (\cdot)_{,iii} - (D_{rt}'^{i3} + 2K_{rt}^{i3}) \cdot (\cdot)_{,ijj} + J_{rt}^i \cdot (\cdot)_{,i}; \quad r, g = \overline{1, 4}; \\ L_{\beta_{1g}}^{\beta_{1r}} &= -D_{gr}^{ii} \cdot (\cdot)_{,ii} - K_{gr}^{ii} \cdot (\cdot)_{,jj} + T_{gr}^i \cdot (\cdot); \quad L_{\beta_{1g}}^{\beta_{jr}} = -D_{gr}^{ij} \cdot (\cdot)_{,ij} - K_{gr}^{ij} \cdot (\cdot)_{,ij}. \end{aligned} \quad (19)$$

Диференціальні оператори  $p_k$  в (18) мають вигляд:

$$\begin{aligned} p_{v_i} &= B_{33} \cdot (\cdot)_{,iii} + (B_{33}' + 2F_{33}') \cdot (\cdot)_{,ijj} - P_3 \cdot (\cdot)_{,i}; \\ p_{\gamma_t} &= D_{33}^{33} \cdot (\cdot)_{,iii} + (2D_{33}'^{33} + 4K_{33}^{33}) \cdot (\cdot)_{,ijj} - (J_{33}^3 + H_{33}^3) \cdot (\cdot)_{,ii} - R_{qt} \cdot (\cdot) - (\psi_{3t,3}^{(n)} + \psi_{3t,3}^{(-n)}) \cdot (\cdot); \\ p_{\beta_{1r}} &= D_{r3}^{i3} \cdot (\cdot)_{,iii} + (D_{r3}'^{i3} + 2K_{r3}^{i3}) \cdot (\cdot)_{,ijj} - J_{r3}^i \cdot (\cdot)_{,i}. \end{aligned} \quad (20)$$

Сталі коефіцієнти в диференціальних операторах (19) і (20) є узагальненими фізико-геометричними характеристиками плити і визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} B_0 &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} dz; \quad B_0' = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1122} dz; \quad B_{\alpha s} = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} \psi_{\alpha s} dz; \quad B_{\alpha s}' = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1122} \psi_{\alpha s} dz; \\ P_t &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{3t,33} dz; \quad F_0 = \int_{-b_n}^{b_n} G dz; \quad F_{\alpha s} = \int_{-b_n}^{b_n} G \psi_{\alpha s} dz; \quad \alpha, \mu = \overline{1, 3}; \\ K_{fs}^{\alpha\mu} &= \int_{-b_n}^{b_n} G \psi_{\alpha f} \psi_{\mu s} dz; \quad D_{fs}^{\alpha\mu} = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} \psi_{\alpha f} \psi_{\mu s} dz; \quad s, f = \overline{1, 4}; \quad D_{fs}'^{\alpha\mu} = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1122} \psi_{\alpha f} \psi_{\mu s} dz; \\ J_{ft}^\alpha &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{\alpha f} \psi_{3t,33} dz; \quad H_{ts}^\alpha = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{3t,33} \psi_{\alpha s} dz; \end{aligned}$$

$$R_{iq} = \int_{-b_n}^{b_n} A_{3333} \psi_{3t,33} \psi_{3q,33} dz; \quad t, q = \overline{1, 3}; \quad T_{rg}^i = \int_{-b_n}^{b_n} G' \psi_{ir,3} \psi_{ig,3} dz; \quad r, g = \overline{1, 4}. \quad (21)$$

Загальний порядок диференціювання системи (15) не залежить від кількості шарів і визначається як  $n = 2 \cdot 2 \cdot (1 + r) + 4 \cdot t$ .

Для варіанту 2 моделі (5) кількість шуканих функцій обчислення збільшується з двох до трьох  $\gamma_t$  ( $t = \overline{1, 3}$ ), а вплив зовнішнього навантаження на НДС плити в функціоналі повної енергії (8) враховується функціоналом роботи зовнішнього навантаження (10).

Система розрахункових рівнянь в узагальнених зусиллях та граничні умови для моделі варіанту 2 аналогічні (13) та (14), проте збільшується кількість невідомих функцій обчислення ( $t = \overline{1, 3}$ ). Система розрахункових рівнянь в зміщеннях має вигляд (15), проте для варіанту моделі 2 спрощується права частина (18) до вигляду:

$$p_{v_i} = 0; \quad p_{\gamma_t} = -p \cdot (\psi_{3t,3}^{(n)} + \psi_{3t,3}^{(-n)}); \quad p_{\beta_r} = 0; \quad t = \overline{1, 3}. \quad (22)$$

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для обґрунтування достовірності отриманої моделі розглянуто задачу плоскої деформації товстої однорідної плити на жорсткій основі під дією синусоїдального навантаження  $p = p_0 \sin(\pi x_1 / a_1)$ . Матеріал плити ізотропний з коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,3$ ;  $h = 0,6$  м;  $a_1 = 1,8$  м ( $a_1 / h = 3$ ;  $a_1 / H = 1,5$ ). На контурі ( $x_1 = 0$ ;  $a_1$ ) виконуються граничні умови Нав'є:  $u_2 = u_3 = 0$ ;  $\sigma_{11} = 0$ . Контакт плити з основою ковзкий.

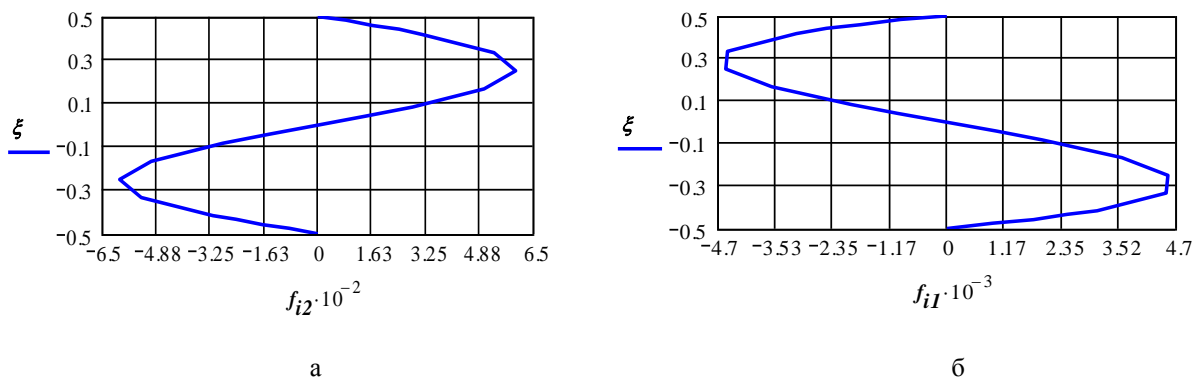


Рис. 3. Графіки функцій розподілу напруження  $\sigma_{13}$  по висоті однорідної плити

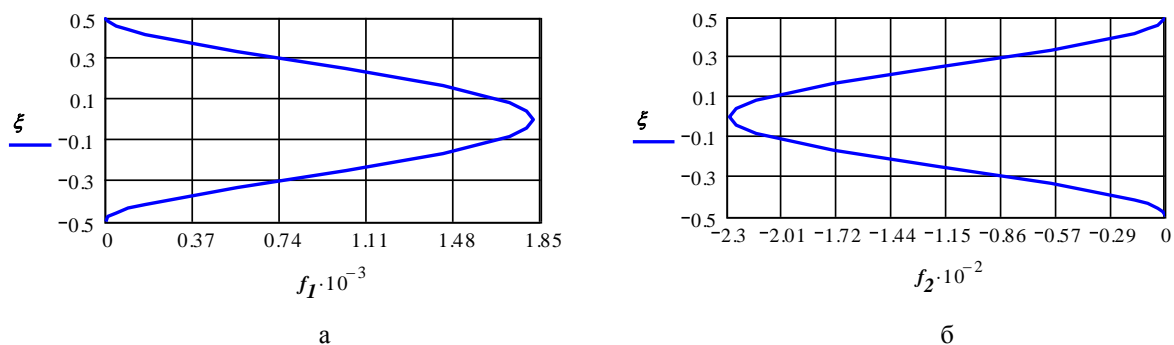


Рис. 4. Графіки функцій розподілу напруження  $\sigma_{33}$  по висоті однорідної плити

Гіпотетичні функції розподілу напруження по висоті для симетрично добудованої (рис. 2, б) однорідної плити за ковзкого контакту з основою мають вигляд ( $-0,5 \leq \xi \leq 0,5$ ;  $\xi = z/H$ ) представлені на рисунках 3 і 4.

Гіпотетичні функції розподілу зміщень (6), (7) по висоті плити представлені на рисунках 5 і 6.

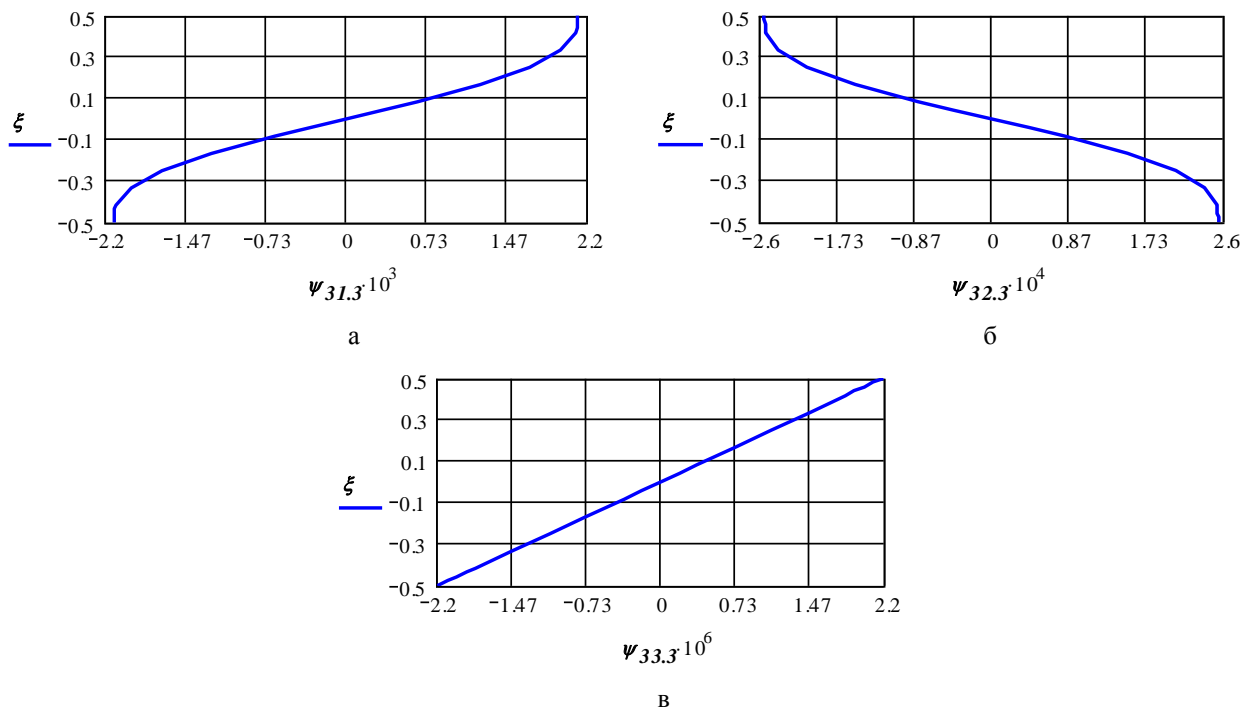
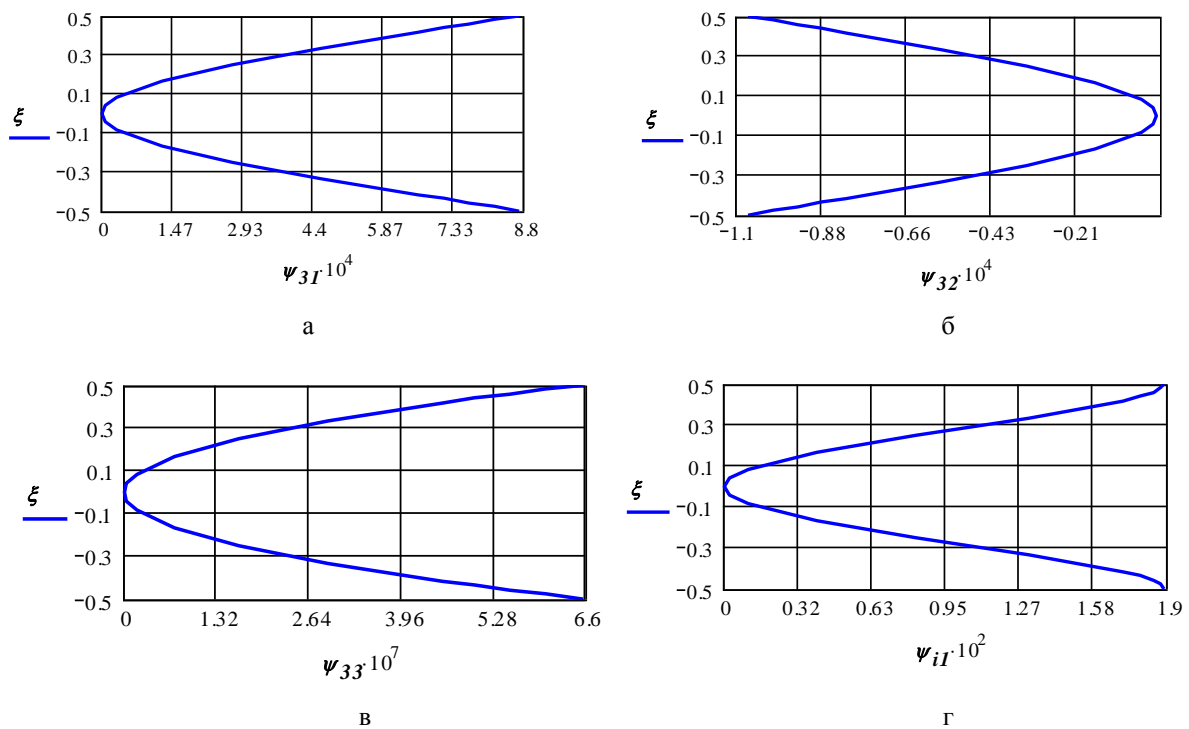


Рис. 5. Функції розподілу зміщень  $u_3$  по висоті плити



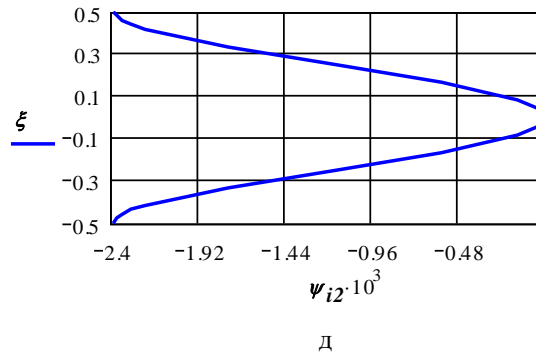


Рис. 6. Функції розподілу зміщень  $u_i$  по висоті плити

В результаті розрахунку ізотропної плити отримано розподіл відносних нормальних зміщень  $u_3^\# = u_3 E / (p_0 h)$  посередині плити ( $x_1 = a_1 / 2$ ) та відносних тангенціальні зміщень  $u_1^\# = u_1 E / (p_0 h)$  на краю плити ( $x_1 = a_1$ ) (рис. 7). Розрахунки виконані за моделлю (4) при утриманні в ній двох невідомих функцій поперечного обтиснення та двох функцій поперечного зсуву.

В дужках курсивом (рис. 7, рис. 8) показані результати за тривимірним розв'язком (T), отримані нами з використанням підходу [8].

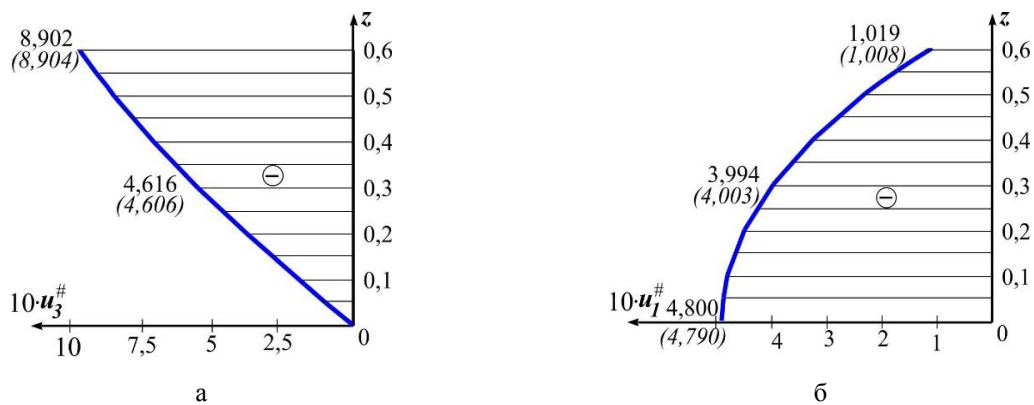


Рис. 7. Відносні зміщення по висоті однорідної ізотропної плити:  
а) нормальні зміщення  $u_3^\#$ ; б) тангенціальні зміщення  $u_1^\#$

Епюри розподілу відносних напруження  $\sigma_{\alpha\alpha}^\# = \sigma_{\alpha\alpha} / p_0$  посередині плити ( $x_1 = a_1 / 2$ ) показано на рис. 8.

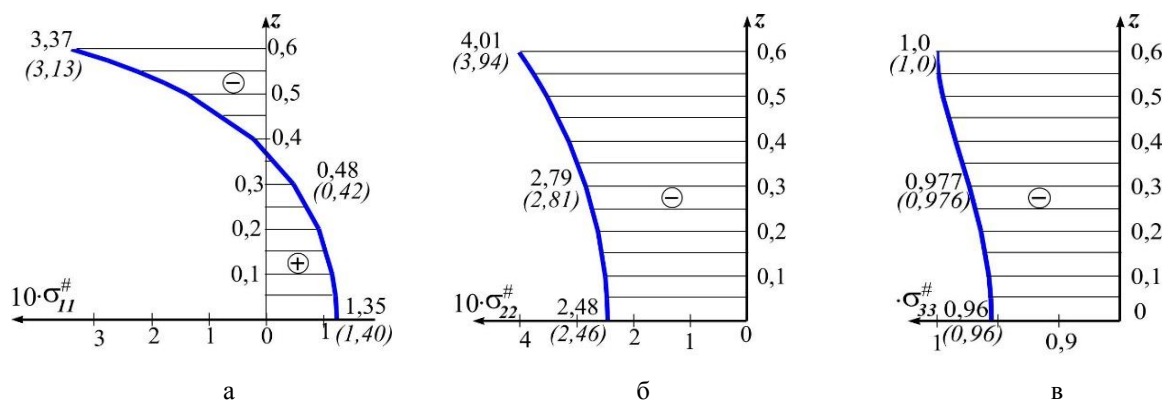


Рис. 8. Епюри відносних напруження  $\sigma_{\alpha\alpha}^\#$  по висоті однорідної ізотропної плити

З результатів розрахунків (рис. 7, рис. 8) видно, що запропонована оптимізована модель (4) якісно і кількісно практично точно відображає НДС в однорідній ізотропній плиті в порівнянні з тривимірним розв'язком ( $T$ ).

## 6 ВИСНОВКИ

Побудовано варіант уточненої структурно-континуальної моделі з гіпотезами ітераційного типу та реалізовано методику високоточного розрахунку в пружній постановці НДС поперечно навантажених багатошарових прямокутних товстих плит на жорсткій основі з ізотропними та трансверсально-ізотропними шарами. Модель беззгинового НДС враховує деформації поперечного зсуву та поперечного обтиснення. З варіаційного принципу Лагранжа отримано систему розрахункових рівнянь відносно невідомих функцій переміщень.

Встановлено певні особливості НДС: в ізотропній плиті максимуми напруження  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  знаходяться біля навантаженої верхньої поверхні плити. Тангенціальні переміщення  $u_i$  набувають максимуму біля поверхні контакту з основою, що може в деяких конструкціях перевищувати допустимі деформації.

При стиску плити і ковзкому контакті з основою в плиті біля основи з'являються напруження розтягу, що може бути небезпечним для плити або шару з крихкого матеріалу.

## Література

1. Пискунов В. Г., Рассказов А. О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек. Прикладная механика, 2002. Т. 38. № 2. С. 22–57.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1987. 360 с.
3. Гуртовий А. Г. Контактная задача для анизотропной слоистой плиты с упругим и с абсолютно жестким основаниями. В зб.: Теоретическая и прикладная механика. Харьков: «Основа», 2002. Вып. 35. С. 163–169.
4. Гуртовий О. Г., Тинчук С. О. Дослідження деформування багатошарової трансверсально-ізотропної плити на жорсткій основі за беззгиною уточненою континуальною моделлю. Механіка та математичні методи. Том IV. №1, 2022. С.64–74.
5. Марчук А. В. Применение вариационного подхода для исследования напряженно-деформированного состояния слоистых пластин на жестком основании в трехмерной постановке. Проблемы прочности, 1997. № 6. С. 86–94.
6. Гуртовий А. Г. Високоточне моделювання деформування слоистих структур. Механіка композит. Матеріалів, 1999. Т. 35. № 1. С. 13–28.
7. Гуртовий А. Г. Континуальні апроксимації переміщень в товстих слоистих пластинах при розділенні термомеханічних навантажень на двохсторонні симетричні та косо-симетричні складові. Механіка композит. Матеріалів, 1999. Т. 35. № 6. С. 743–756.
8. Пискунов В. Г., Сипетов В. С., Туйметов Ш. Ш. Изгиб толстой трансверсально-изотропной плиты поперечной нагрузкой. Прикладная механика, 1987. Т. 23, № 11. С.21–26.
9. Пискунов В. Г., Вериженко В. Е., Присяжнюк В. К., Сипетов В. С., Карпиловский В. С. Расчет неоднородных оболочек и пластин методом конечных элементов. К.: Вища школа, 1987. 200 с.
10. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.

## References

1. Piskunov V. G., Rasskazov A. O. (2002). Razvitiye teorii sloistykh plastin i obolochek [Development of the theory of layered plates and shells]. *Prikladnaya mekhanika*. 38. 2. 22–57. [in Russian].



2. Ambartsumyan S. A. (1987). *Teoriya anizotropnykh plastin. Prochnost', ustoychivost' i kolebaniya* [Theory of anisotropic plates. Strength, stability and fluctuations]. 2nd ed., revised. and add. Moskva: Nauka. [in Russian].
3. Gurtovyi A. G. (2002). Kontaktnaya zadacha dlya anizotropnoy sloistoy plyty s uprugim i s absolyutno zhestkim osnovaniyami [Contact problem for an anisotropic layered plate with elastic and absolutely rigid foundations]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*. Kharkov: "Osnova". 35. 163–169. [in Russian].
4. Gurtovyi O. G., Tynchuk S. O. (2022). Doslidzhennya deformuvannya bahatosharovoyi transversalno-izotropnoyi plyty na zhorstkiy osnovi za bezzhynovoyu utochnenoyu kontynualnoyu modellyu. [Investigation deformation of a multilayered transversal-isotropic plate on a rigid foundation by unflexural refined continual model]. *Mekhanika ta matematychni metody*. 4. 1. 64–74. [in Ukraine].
5. Marchuk A. V. (1997). Primeneniye variatsionnogo podkhoda dlya issledovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya sloistyykh plastin na zhestkom osnovanii v trekhmernoy postanovke [Application of the variational approach for the study of the stress-strain state of layered plates on a rigid foundation in a three-dimensional setting]. *Problemy prochnosti*. 6. 86–94. [in Russian].
6. Gurtovyi A. G. (1999). Vysokotochnoye modelirovaniye deformirovaniya sloistyykh struktur [High-precision modeling of deformation of layered structures]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 35. 1. 13–28. [in Russian].
7. Gurtovyi A. G. (1999). Kontinual'nyye approksimatsii peremeshcheniy v tolstykh sloistyykh plastinakh pri razdelenii termomekhanicheskikh nagruzok na dvukhstoronniye simmetricheskiye i kososimmetricheskiye sostavlyayushchiye [Continuous approximations of displacements in thick layered plates during the separation of thermomechanical loads into bilateral symmetric and obliquely symmetric components]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 35.6. 743–756. [in Russian].
8. Piskunov V. G., Sipetov V. S., Tuimetov Sh. Sh. (1987). Izgib tolstoy transversal'no-izotropnoy plyty poperechnoy nagruzkoy [Bending of a thick transversally isotropic plate by a transverse load]. *Prikladnaya mekhanika*. 23. 11. 21–26. [in Russian].
9. Piskunov V. G., Verizhenko V. E., Prisyazhnyuk V. K., Sipetov B. C., Karpilovsky B. C. (1987). Raschet neodnorodnykh obolochek i plastin metodom konechnykh elementov [Calculation of inhomogeneous shells and plates by the finite element method]. Kyiv: Higher school. [in Russian].
10. Ambartsumyan S.A. (1974). *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek*. Moskva: Nauka. [in Russian].

**Гуртовий Олександр Григорович**

Національний університет водного господарства та природокористування  
к.т.н., доцент  
вул. Соборна, 11, Рівне, Україна, 33028  
o.g.gurtovyi@nuwm.edu.ua  
ORCID 0000-0002-2651-948X

**Тинчук Сергій Олександрович**

Національний університет водного господарства та природокористування  
к.т.н., доцент  
вул. Соборна, 11, Рівне, Україна, 33028  
s.o.tynchuk@nuwm.edu.ua  
ORCID 0000-0002-1763-8620

*Для посилань:*

Гуртовий О. Г., Тинчук С. О. Використання симетрії для розв'язування задач деформування плит на жорсткій основі. Механіка та математичні методи, 2023. Т 5. №. 1. С. 84–96.

*For references:*

Gurtovyi O., Tynchuk S. (2023). Using symmetry to solve problems of deformation of plates on a rigid foundation. *Mechanics and Mathematical Methods*. 5 (1). 84–96.

УДК 539.3

## ІНФІНІТЕЗИМАЛЬНІ ДЕФОРМАЦІЇ ПОВЕРХОНЬ ІЗ ЗАДАНОЮ ЗМІНОЮ ТЕНЗОРА РІЧЧІ

Вашпанова Н. В.<sup>1</sup>, Лесечко О. В.<sup>1</sup>, Подоусова Т. Ю.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Анотація.** У тривимірному евклідовому просторі досліджується задача про існування нескінченно малої деформації першого порядку однозв'язних регулярних поверхонь із заздалегідь заданою зміною тензора Річчі. Показано, що для поверхонь ненульової гауссової кривини ця задача зводиться до дослідження та розв'язування системи семи рівнянь (серед яких є і диференціальні рівняння) відносно семи невідомих функцій, кожний розв'язок якої визначає векторне поле, яке буде однозначною функцією (з точністю до постійного вектора) та який можна інтерпретувати як безмоментний напружений стан рівноваги навантаженої оболонки.

Для регулярних поверхонь ненульових гауссової та середньої кривин поставлена задача зводиться до пошуку розв'язків одного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку відносно двох невідомих функцій. При заданій одній з цих функцій отримане рівняння в загальному випадку буде неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку з частинними похідними (неоднорідним диференціальним рівнянням Вейнгартена).

Доведено, що будь-яка регулярна поверхня додатної гауссової та ненульової середньої кривин допускає нескінченно малу деформацію першого порядку із заданою зміною тензора Річчі в області достатньо малої міри. Тензорні поля при цьому матимуть представлення через довільну та заздалегідь задану регулярні функції. Розглянувши задачу Неймана отримано, що однозв'язна регулярна поверхня еліптичного типу додатної гауссової та від'ємної середньої кривин з регулярною межею при певній граничній умові допускає в «цілому» нескінченно малу деформацію першого порядку із заздалегідь заданою зміною тензора Річчі. Тензорні поля при цьому будуть визначатися однозначно.

Для поверхонь від'ємної гауссової та ненульової середньої кривин отримане неоднорідне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку буде гіперболічного типу з відомими коефіцієнтами та правою частиною. Для цього рівняння розглянута задача Дарбу. Доведено, що будь-яка регулярна поверхня від'ємної гауссової та ненульової середньої кривин допускає нескінченно малу деформацію першого порядку із заданою зміною тензора Річчі. Тензорні поля при цьому виражаються через задану функцію двох змінних та через дві довільні регулярні функції однієї змінної.

**Ключові слова:** нескінченно мала деформація, тензор Річчі, тензорні поля, гауссова кривина, середня кривина.

## INFINITESIMAL DEFORMATIONS OF SURFACES WITH A GIVEN CHANGE OF THE RICCI TENSOR

N. Vashpanova<sup>1</sup>, O. Lesechko<sup>1</sup>, T. Podousova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract.** In three-dimensional Euclidean space, we study the problem of the existence of an infinitesimal first-order deformation of single-connected regular surfaces with a predetermined change in the Ricci tensor. It is shown that for surfaces of nonzero Gaussian curvature, this problem is reduced to the study and solution of a system of seven equations (including differential equations) with respect to seven unknown functions, each solution of which determines a vector field that is a univariate function (with an accuracy of a constant vector) and can be interpreted as a moment-free stress state of equilibrium of a loaded shell.



For regular surfaces of non-zero Gaussian and mean curvatures, the problem is reduced to finding solutions to one second-order partial differential equation with respect to two unknown functions. Given one of these functions, the resulting equation will in general be a nonhomogeneous second-order partial differential equation (nonhomogeneous Weingarten differential equation).

It is proved that any regular surface of positive Gaussian and non-zero mean curvature admits an infinitesimal first-order deformation with a given change in the Ricci tensor in a sufficiently small region. In this case, the tensor fields will be represented by an arbitrary and predefined regular function. By considering the Neumann problem, it is shown that a single-connected regular surface of elliptic type of positive Gaussian and negative mean curvature with a regular boundary under a certain boundary condition admits, in general, an infinitesimal first-order deformation with a predetermined change in the Ricci tensor. In this case, the tensor fields will be determined uniquely.

For surfaces of negative Gaussian and non-zero mean curvature, the resulting inhomogeneous partial differential equation with second-order partial differentials will be of hyperbolic type with known coefficients and right-hand side. The Darboux problem is considered for this equation. It is proved that any regular surface of negative Gaussian and non-zero mean curvature admits an infinitesimal first-order deformation with a given change in the Ricci tensor. Tensor fields are expressed through a given function of two variables and through two arbitrary regular functions of one variable.

**Keywords:** infinitesimal deformation, Ricci tensor, tensor fields, Gaussian curvature, mean curvature.

## 1 ВСТУП

Деформація поверхні – це зміна її форми та розмірів, яка пов'язана з переміщенням. Кожна деформація поверхні супроводжується зміною її величин. Кожна геометрична величина, яка характеризує ту чи іншу властивість поверхні, отримує при деформації деякий приріст, який в регулярному випадку можна розкласти за степенями деякого малого параметра. Коефіцієнти цього розкладу називаються відповідно першою, другою і т. д. варіаціями величини.

В даній роботі будемо розглядати нескінченно малі (н. м.) деформації першого порядку поверхонь, при яких перша варіація тензора Річчі заздалегідь задана. Вивчення цих деформацій зводиться до аналізу та розв'язування певних систем рівнянь, які містять також і диференціальні рівняння.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Теорія нескінченно малих деформацій має багату та довгу історію розвитку. В сучасній диференціальній геометрії широко досліджуються різні класи інфінітезимальних деформацій поверхонь трьохвимірного евклідового простору. Фундаментальні результати в цій теорії отримані М. В. Єфімовим, А. В. Погореловим, І. Н. Векуа. В останні роки стали активно вивчатися спеціальні види нескінченно малих деформацій: конформні, ареальні, геодезичні, зберігаючі головну кривину, зберігаючі середню кривину. Також значна увага приділяється деформаціям  $n$ -вимірних поверхонь в  $n$ -вимірних просторах. Зауважимо, що результати, отримані для  $n$ -вимірних поверхонь, часто відрізняються від результатів теорії нескінченно малих деформацій  $три$ -вимірних поверхонь. Тому вивчення деформацій поверхонь малих розмірностей не втрачає актуальності.

Вивчення деформацій зводиться до розв'язування рівнянь та систем рівнянь, що призводить до серйозних труднощів технічного характеру. Найчастіше ці системи рівнянь є невизначеними [1]. У зв'язку з цим вводяться додаткові обмеження, які спрощують розв'язування цих систем. А це призводить до спеціалізації деформацій [2-7].

Ми будемо розглядати н. м. деформації першого порядку поверхонь із заздалегідь заданою варіацією тензора Річчі. Результати, отримані в даній роботі, є узагальненням результатів, отриманих в [8].

## 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даної роботи є дослідження питання існування н. м. деформацій першого порядку поверхонь, при яких тензор Річчі змінюється за певним правилом.

Об'єктом дослідження є поверхні евклідового простору.

Задача дослідження – дати відповідь на питання: які поверхні та при яких умовах допускають н. м. деформацію першого порядку із заданою зміною тензора Річчі?

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

### 4.1. Постановка задачі та її математична модель

Нехай у  $E_3$ -просторі задана однозв'язна регулярна поверхня  $S$  класу  $C^3$  з радіус-вектором

$$\bar{r} = \bar{r} x^1, x^2 \quad (1)$$

і гомеоморфна області  $G$  площини  $x^1 O x^2$ .

Будемо розглядати загальну н. м. деформацію першого порядку цієї поверхні з вектором зсуву  $\bar{y} x^1, x^2 \in C^2$ , частинні похідні якого мають вид [8]:

$$\bar{y}_i = c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} + \mu c^{\alpha\beta} \bar{r}_\beta + c_{i\alpha} T^{\alpha\bar{n}}. \quad (2)$$

Тут  $c_{i\alpha}$  – дискримінантний тензор поверхні  $S$  ( $c_{11} = c_{22} = 0$ ,  $c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g}$ ,  $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ ,  $g_{\alpha\beta}$  – метричний тензор  $S$ ),  $c^{\alpha\beta} = g^{\alpha i} g^{\beta j} c_{ij}$ ,  $g^{ij}$  – елементи матриці, оберненої до матриці  $\|g_{\alpha\beta}\|$ ,  $\bar{n}$  – одиничний вектор нормалі поверхні  $S$ ,  $\bar{r}_\beta = \partial r / \partial x^\beta$ ,  $T^{\alpha\beta}$ ,  $T^\alpha$  – деякі тензорні поля на поверхні  $S$ . Індеси всюди набувають значень 1, 2.

Відомо [8], що існування загальної н. м. деформації першого порядку поверхонь визначається розв'язком наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} T_{,\alpha}^{\alpha i} - b_\alpha^i T^\alpha = \mu_\alpha c^{i\alpha} \\ b^{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = -T_{,\alpha}^\alpha \\ c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

де  $b_\alpha^i = g^{\beta i} b_{\alpha\beta}$ ,  $b_{\alpha\beta}$  – коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні  $S$ ,  $\mu(x^1, x^2)$  – деяка функція класу  $C^2$ . Комою позначено коваріантне диференціювання на базі  $g_{\alpha\beta}$ .

Основна система рівнянь загальної н. м. деформації першого порядку поверхонь (3) містить чотири рівняння відносно семи невідомих функцій:  $T^{\alpha\beta}$ ,  $T^\alpha$ ,  $\mu$ . Накладемо на дану деформацію певні обмеження. Припустимо, що при цій деформації варіації тензора Річчі мають вид:

$$\delta R_{ij} = -\Phi_{ij}, \quad (4)$$

де  $\Phi_{ij}$  – заздалегідь задані функції класу  $C^3$ .

Мають місце наступні теореми.

**Теорема 1.** Для того, щоб при н. м. деформації першого порядку поверхонь ненульової гауссової кривини  $K \neq 0$  тензор Річчі змінювався згідно (4) необхідно і достатньо щоб виконувалися рівності

$$c_{i\alpha} g_{i\beta} + c_{j\alpha} g_{i\beta} T^{\alpha\beta} = \frac{1}{K} \Phi_{ij} - \frac{1}{2K} g_{ij} g^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta}. \quad (5)$$

**Доведення.**

**Необхідність.** Шляхом варіювання рівності  $R_{ij} = -Kg_{ij}$ , знайдемо варіацію тензора Річчі

$$\delta R_{ij} = -g_{ij} \delta K - 2K \varepsilon_{ij}, \quad (6)$$

де

$$2\varepsilon_{ij} = \delta g_{ij} = c_{i\alpha} g_{j\beta} + c_{j\alpha} g_{i\beta} T^{\alpha\beta} - 2\mu g_{ij} \quad (7)$$

варіації матричного тензора [8].

Порівнюючи рівності (4) та (6), отримуємо

$$g_{ij}\delta K + 2K\varepsilon_{ij} = \Phi_{ij}. \quad (8)$$

Згорнемо (8) по  $g^{ij}$ :

$$g_{ij}g^{ij}\delta K + 2Kg^{ij}\varepsilon_{ij} = g^{ij}\Phi_{ij}.$$

Оскільки  $g_{ij}g^{ij} = 2$ ,  $g^{ij}\varepsilon_{ij} = -2\mu$ , то попередні рівності набудуть вигляду

$$\delta K = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta} + 2K\mu. \quad (9)$$

Підставимо (9) та (7) в рівності (8) і отримуємо (5).

**Достатність.** Із виконання рівностей (5) згідно (9) із (6) отримуємо (4):

$$\begin{aligned} \delta R_{ij} &= -g_{ij}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta} + 2K\mu\right) - K\left[c_{i\alpha}g_{j\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta}T^{\alpha\beta} - 2\mu g_{ij}\right] = \\ &= -\frac{1}{2}g_{ij}g^{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta} - 2Kg_{ij} + 2K\mu g_{ij} - K\left(\frac{1}{K}\Phi_{ij} - \frac{1}{2K}g_{ij}g^{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta}\right) = -\Phi_{ij}. \end{aligned}$$

Теорему доведено.

**Теорема 2.** Для існування н. м. деформації першого порядку ненульової гауссової кривини із задалегідь заданою зміною тензора Річчі (4) необхідно і достатньо щоб наступна система рівнянь

$$\begin{cases} T_{,\alpha}^{\alpha i} + \mu_{\alpha}c^{\alpha i} = b_{\alpha}^i T^{\alpha}, \\ b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = -T_{,\alpha}^{\alpha}, \\ c_{\beta\alpha}T^{\alpha\beta} = 0, \\ c_{i\alpha}g_{i\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta}T^{\alpha\beta} = B_{ij}, \end{cases} \quad (10)$$

мала ненульовий розв'язок відносно симетричного тензора  $T^{\alpha\beta}$ , компонентів вектора  $T^{\alpha}$  та функції  $\mu$   $x^1, x^2 \in C^2$ .

Тут

$$B_{ij} = \frac{1}{K}\Phi_{ij} - \frac{1}{2K}g_{ij}g^{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta}. \quad (11)$$

Доведення випливає з теореми 1 та системи рівнянь (3).

Слід зазначити, що кожний розв'язок системи рівнянь (10) визначає н. м. деформацію поверхні  $S$  ненульової гауссової кривини з наперед заданими варіаціями тензора Річчі, яку можна інтерпретувати як безмоментний напружений стан рівноваги навантаженої оболонки [8]. Якщо вектор зсуву  $\bar{y} = const$ , то поверхню  $S$  називатимемо жорсткою по відношенню до даної н. м. деформації.

Отже, задача про існування н. м. деформацій поверхонь ненульової гауссової кривини, при якій тензор Річчі змінюється згідно (4), звелась до пошуку розв'язків системи рівнянь (10).

#### 4.2. Зведення задачі до розв'язання одного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку

Із (10) розглянемо наступну алгебраїчну систему рівнянь:

$$\begin{cases} b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = -T_{,\alpha}^{\alpha} \\ c_{i\alpha} g_{j\beta} + c_{j\alpha} g_{i\beta} T^{\alpha\beta} = B_{ij}, \end{cases}$$

яка в розгорнутому виді запишеться так:

$$\begin{cases} b_{11} T^{11} + 2b_{12} T^{12} + b_{22} T^{22} = -T_{,\alpha}^{\alpha} \\ g_{22} T^{22} - g_{11} T^{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} B_{12} \\ g_{11} T^{12} + g_{12} T^{22} = \frac{1}{2\sqrt{g}} B_{11} \\ g_{12} T^{11} + g_{22} T^{12} = \frac{1}{2\sqrt{g}} B_{22}. \end{cases} \quad (12)$$

Розглянемо спочатку перші три рівняння цієї системи. Складемо та обчислимо головний визначник такої системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & 2b_{12} & b_{22} \\ -g_{11} & 0 & g_{22} \\ 0 & g_{11} & g_{12} \end{vmatrix} = -2Hg g_{11}.$$

Нехай середня кривина поверхні  $H \neq 0$ . Тоді  $\Delta \neq 0$ .

За правилом Крамера знаходимо розв'язок цієї системи

$$\begin{cases} T^{11} = -\frac{T_{,\alpha}^{\alpha}}{2H} g^{11} + A \\ T^{12} = -\frac{T_{,\alpha}^{\alpha}}{2H} g^{12} + B \\ T^{22} = -\frac{T_{,\alpha}^{\alpha}}{2H} g^{22} + C, \end{cases} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} A &= \frac{B_{11} b_{12} g_{22} - B_{12} 2b_{12} g_{12} - g_{11} b_{22}}{-2Hg \sqrt{g} g_{11}}, \\ B &= \frac{2B_{12} b_{11} g_{12} - B_{11} b_{11} g_{22} + g_{11} b_{22}}{-2Hg \sqrt{g} g_{11}}, \\ C &= \frac{B_{11} b_{12} g_{11} - B_{12} b_{11} g_{11}}{-2Hg \sqrt{g} g_{11}}, \end{aligned}$$

причому  $A, B, C$  – відомі функції точки поверхні.

Підставимо (13) в четверте рівняння системи (12). В результаті отримаємо рівність

$$g^{ij} B_{ij} = 0,$$



яку також можна отримати при множенні (11) на  $g^{ij}$ . Це означає, що знайдений розв'язок (13) задовольняє систему рівнянь (12).

Введемо до розгляду новий тензор

$$\tilde{T}^{ij} = T^{ij} + \frac{T_{,\alpha}^{\alpha}}{2H} g^{ij}. \quad (14)$$

Тоді система рівнянь (10) набуде вигляду

$$\begin{cases} \tilde{T}_{,\alpha}^{\alpha i} - \left( \frac{T_{,\alpha}^{\alpha}}{2H} \right)_{\beta} g^{\beta i} + \mu_{\alpha} c^{\alpha i} = b_{\alpha}^i T^{\alpha} \\ b_{\alpha\beta} \tilde{T}^{\alpha\beta} = 0 \\ \tilde{T}^{11} = A, \tilde{T}^{12} = B, \tilde{T}^{22} = C. \end{cases} \quad (15)$$

Нехай

$$\varphi = -\frac{T_{,\alpha}^{\alpha}}{2H}. \quad (16)$$

Згідно (16) перше рівняння системи (15) запишеться так:

$$b_{\alpha}^i T^{\alpha} = \tilde{T}_{,\alpha}^{\alpha i} + \varphi_{\beta} g^{\beta i} + \mu_{\alpha} c^{\alpha i}.$$

Помножимо отримані рівності на  $d_i^k$  – елементи матриці, оберненої до  $\|b_{\alpha}^{\beta}\|$ .

Внаслідок рівностей

$$b_k^{\beta} d_{\beta}^k = \delta_{\alpha}^k = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k = \alpha \\ 0, & \text{якщо } k \neq \alpha \end{cases}$$

$$g^{\beta i} d_i^k = d^{\beta k}, \quad d^{\beta k} = \frac{1}{K} c^{\beta i} c^{kj} b_{ij}$$

будемо мати

$$T^k = \tilde{T}_{,\alpha}^{\alpha i} d_i^k + \varphi_{\beta} d^{\beta k} + \mu_{\alpha} c^{\alpha i} d_i^k. \quad (17)$$

Обчислимо коваріантну похідну від  $T^k$ :

$$T_{,k}^k = \tilde{T}_{,\alpha}^{\alpha i} d_{i,k}^k + \varphi_{\beta,k} d^{\beta k} + \varphi_{\beta} d_{,k}^{\beta k} + (\mu_{\alpha} c^{\alpha i} d_i^k)_{,k}.$$

Підставимо її вираз в (16). В результаті отримаємо

$$d^{\beta\alpha} \varphi_{\beta,\alpha} + \varphi_{\beta} d_{,\alpha}^{\beta\alpha} + 2H\varphi = \mu_{\alpha,\beta} c^{i\alpha} d_i^{\beta} + \mu_{\alpha} c^{i\alpha} d_{i,j}^j - \tilde{T}_{,\alpha}^{\alpha i} d_{i,\beta}^{\beta}.$$

Звільнившись від коваріантних похідних, останньому рівнянню можна надати наступний вид:

$$d^{\beta\alpha} \varphi_{\beta\alpha} + d_{,\alpha}^{\beta\alpha} - \Gamma_{sk}^{\beta} d^{s\alpha} \varphi_{\beta} + 2H\varphi = \mu_{\alpha\beta} c^{i\alpha} d_i^{\beta} + c^{i\alpha} d_{i,\beta}^{\beta} - \Gamma_{s\beta}^{\alpha} c^{is} d_i^{\beta} \mu_{\alpha} - \tilde{T}_{,\alpha}^{\alpha i} d_{i,\beta}^{\beta}, \quad (18)$$



де  $\Gamma_{ij}^k$  – символи Христофеля другого роду,  $\varphi_{\alpha\beta} = \partial^2\varphi/\partial x^\alpha\partial x^\beta$ .

Отже, пошук розв'язків системи рівнянь (10) зводиться до дослідження та розв'язування одного диференціального рівняння виду (18) відносно функцій  $\mu, x^1, x^2$  та  $\varphi, x^1, x^2$ .

### 4.3. Про існування н. м. деформацій деяких поверхонь із задалегідь заданою зміною тензора Річчі

Нехай  $S \in C^{4,\alpha}$  – поверхня додатної гауссової та ненульової середньої кривин, гомеоморфна області  $G$  площини  $x^1Ox^2$ , яка обмежена кривою  $\partial G \in C^{1,\alpha}$   $0 < \alpha \leq 1$  та з радіус-вектором виду (1). Позначення класів функцій запозичені в [9].

Припустимо, що  $\mu(x^1, x^2) \in C^{3,\alpha}$  є задалегідь заданою функцією. Тоді (18) в загальному вигляді є неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними (неоднорідне рівняння Вейнгартена [8]) відносно функції  $\varphi, x^1, x^2$ :

$$d^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta} + e^\alpha\varphi_\alpha + 2H\varphi = F(\mu, \Phi^{\alpha\beta}) \quad (19)$$

де  $F(\mu, \Phi^{\alpha\beta}) = c^{i\alpha}d_i^\beta\mu_{\alpha\beta} + c^{ik}d_{i,\beta}^\beta - \Gamma_{s\beta}^\alpha c^{is}d_i^\beta\mu_\alpha - \tilde{T}_{,\alpha}^{oi}d^{i\beta}_{,\beta}$ ,

$$e^\alpha = c^{i\alpha}d_{i,\beta}^\beta - \Gamma_{s\beta}^\alpha c^{is}d_i^\beta.$$

Тоді  $e^\alpha, d^{\alpha\beta}, H \in C^{2,\alpha}$   $\bar{G}$  і функція  $F(\mu, \Phi^{\alpha\beta}) \in C^{1,\alpha}$   $\bar{G}$  є відомими функціями точки поверхні  $S$ .

Легко впевнитися в тому, що дискримінант рівняння (19)

$$\Delta = \frac{1}{gK}.$$

Отже, у випадку, коли  $K > 0$  в області  $\bar{G}$  рівняння (19) задовольняє умову рівномірної еліптичності  $\Delta > \Delta_0 > 0$ ,  $\Delta_0 = const$ . Тоді на поверхні  $S$  існує ізометрична параметризація [9], відносно якої (19) набуде канонічного виду в  $G$ :

$$\varphi_{11} + \varphi_{22} + m\varphi_1 + l\varphi_2 + p\varphi = f(\mu, \Phi^{\alpha\beta}). \quad (20)$$

Тут

$$f(\mu, \Phi^{\alpha\beta}) = \frac{Kg}{b_{22}} F(\mu, \Phi^{\alpha\beta}),$$

$$m = \frac{Kg}{b_{22}} d_{,\alpha}^{1\alpha} - \Gamma_{s\alpha}^1 d^{s\alpha},$$

$$l = \frac{Kg}{b_{22}} d_{,\alpha}^{2\alpha} - \Gamma_{s\alpha}^2 d^{s\alpha}, \quad p = 2Hb_{22}.$$

Має місце наступна теорема.

**Теорема 3.** Будь-яка поверхня  $S \in C^{4,\alpha}$  додатної гауссової та ненульової середньої кривин допускає н. м. деформацію першого порядку, при якій тензор Річчі змінюється згідно (4) в області достатньо малої міри. Тензорні поля при цьому матимуть

представлення через довільну функцію  $\omega \ x^1, x^2 \in C^{3,\alpha} \bar{G}$  та задалегідь задану функцію  $\mu \ x^1, x^2 \in C^{3,\alpha}$ .

**Доведення.** Оскільки  $S \in C^{4,\alpha}$ , то коефіцієнти рівняння (20)  $m, l, p$  та функція  $f$  належить класу  $C^{3,\alpha}$ . Це означає, що в області, достатньо малої міри, що входить в  $G$ , рівняння (20) має розв'язок [11], який залежить від довільної функції  $\omega(x^1, x^2) \in C^{3,\alpha}$ .

Із рівностей (13) внаслідок (16) знайдемо тензорні поля  $T^{\alpha\beta}$ , а компоненти контраваріантного вектора  $T^\alpha$  набудуть виду (17).

Тоді безпосередньо із (2) отримаємо вектор зсуву  $\bar{y} \ x^1, x^2$ , який визначається однозначно (з точністю до сталого вектора) [8].

Теорему доведено.

Слід зазначити наступне:

- остання теорема узагальнює результат, отриманий для поверхонь додатної гауссової та ненульової середньої кривин із збереженням тензора Річчі при н. м. деформації першого порядку [8];
- поверхня, у якій  $K > 0, H \neq 0$  буде жорсткою по відношенню до даних деформацій тільки у випадку, коли  $\mu = 0, \varphi = 0, \Phi^{\alpha\beta} = 0$  [8].

#### 4.4. Задача Неймана для однозв'язної поверхні

Для рівняння (19) розглянемо задачу Неймана [10] з граничною умовою

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} + \sigma \ x^1, x^2 \ \varphi = 0 \text{ на } \partial G \in C^{1,\alpha},$$

де  $\sigma \ x^1, x^2$  – задана неперервна функція класу  $C^{2,\alpha} \partial G$ ,  $\partial \varphi / \partial \bar{n}$  – похідна функції  $\varphi$  в напрямку внутрішньої нормалі поверхні  $S$ .

Враховуючи геометричний зміст функції  $\varphi \ x^1, x^2$  [8]:

$$\varphi = \frac{c^{\alpha\beta} \bar{r}_\beta \ \delta n_{,\alpha}}{2H}$$

попередня гранична умова набуде такого виду:

$$\frac{\partial \left( \frac{1}{2H} c^{\alpha\beta} \bar{r}_\beta \ \delta n_{,\alpha} \right)}{\partial \bar{n}} + \frac{\sigma \ x^1, x^2}{2H} c^{\alpha\beta} \bar{r}_\beta \ \delta n_{,\alpha} = 0 \quad (21)$$

на  $\partial G$ .

Тоді у випадку  $H < 0$  задача Неймана (19), (21) має єдиний розв'язок  $\varphi \ x^1, x^2$  для функції  $F \in C^2$  [10].

Отже, ми отримали наступний результат.

**Теорема 4.** Нехай  $S$ – поверхня еліптичного типу класу  $C^{4,\alpha}$  додатної гауссової та від'ємної середньої кривини з межею  $\partial S \in C^{2,\alpha}$ . Тоді при граничній умові виду (21) поверхня  $S$  в «цілому» допускає н. м. деформацію першого порядку із заданою зміною тензора Річчі (4). Тензорні поля при цьому будуть визначені однозначно.

#### 4.5. Задача Дарбу для однозв'язної поверхні

Припустимо тепер, що поверхня  $S \in C^4$  від'ємної гауссової і ненульової середньої кривин. Тоді рівняння (19) буде неоднорідним диференціальним рівнянням з частинними похідними другого порядку гіперболічного типу з відомими коефіцієнтами та правою частиною.

Віднесемо поверхню  $S$  до асимптотичних ліній  $b_{11} = b_{22} = 0$ ,  $b_{12} \neq 0$ .

Тоді рівняння (19) набуде наступного канонічного виду:

$$\varphi_{12} + a\varphi_1 + m\varphi_2 + c\varphi = \frac{Kg}{b_2} F \mu, \Phi^{\alpha\beta}, \quad (22)$$

де

$$a = \frac{Kg}{b_{12}} d_{,\alpha}^{1\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^1 d^{\alpha\beta}, \quad m = \frac{Kg}{b_{12}} d_{,\alpha}^{2\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^2 d^{\alpha\beta}, \quad c = 2Hb_{12}.$$

Для рівняння (22) розглянемо задачу Дарбу [12] відносно функції  $\varphi(x^1, x^2)$ . Якщо будемо шукати такий інтеграл, який набуває певних значень на характеристиках  $x_1 = x_0^1$ ,  $x_2 = x_0^2$

$$\varphi(x^1, x_0^2) = \lambda x^1, \quad \varphi(x_0^1, x^2) = \tau x^2,$$

то кожній парі функцій  $\lambda(x^1), \tau(x^2)$ , відповідає єдиний розв'язок  $\varphi(x^1, x^2)$  рівняння (22) для даної правої частини [12].

Отже, справедлива наступна теорема.

**Теорема 5.** Будь-яка поверхня  $S \in C^4$  від'ємної гауссової та ненульової середньої кривин допускає н. м. деформацію із задалегідь заданою зміною тензора Річчі (4). Тензорні поля  $T^{\alpha\beta}, T^\alpha$  при цьому виражаються через задану функцію двох змінних класу  $C^3$  та через дві довільні функції класу  $C^2$ , кожна з яких – від однієї змінної.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

В якості прикладу розглянемо сферу радіуса  $R$ , рівняння якої має вид:

$$\bar{r} = \left( \frac{2Rx}{1+x^2+y^2}; \frac{2Ry}{1+x^2+y^2}; \frac{R(1-x^2-y^2)}{1+x^2+y^2} \right).$$

Варіації тензора Річчі задамо наступним чином

$$\Phi_{11} = \frac{4x^2 - y^2}{R(1+x^2+y^2)^4}; \quad \Phi_{22} = \frac{12x^2 - y^2}{R(1+x^2+y^2)^4}; \quad \Phi_{12} = \Phi_{21} = -\frac{8xy}{R(1+x^2+y^2)^4}. \quad (23)$$

Оскільки

$$g_{11} = g_{22} = \sqrt{g} = \frac{4R^2}{1+x^2+y^2}; \quad g_{12} = 0; \quad b_{11} = b_{22} = \frac{4R}{1+x^2+y^2}; \quad b_{12} = 0;$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{22}^1 = -\frac{2x}{1+x^2+y^2}; \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 = -\frac{2y}{1+x^2+y^2};$$

$$K = \frac{1}{R^2}; \quad H = \frac{1}{R}.$$

З урахуванням (11) отримаємо вирази функції

$$A = -\frac{\Phi_{12} b_{22}}{2HKg\sqrt{g}}; \quad B = \frac{b_{11} \Phi_{11} - \Phi_{22}}{2HKg\sqrt{g}}; \quad C = \frac{\Phi_{12} b_{11}}{2HKg\sqrt{g}}.$$

Згідно (23), тензорні поля  $\tilde{T}^{\alpha\beta}$  матимуть представлення

$$\tilde{T}^{11} = -\tilde{T}^{22} = -\frac{xy}{4R^3}; \quad \tilde{T}^{12} = -\frac{x^2 - y^2}{8R^3}.$$

Нехай  $\mu = C = const$ .

Тоді рівняння (19) для сфери запишеться так:

$$\varphi_{11} + \varphi_{22} + \frac{4m}{1+x^2+y^2} \varphi = 0, \quad (24)$$

де  $m=1$ .

Відомо [13], що будь-який розв'язок рівняння (24) має представлення через функцію Рімана. Один із напрямних косинусів нормалі сфери співпадає з функцією Рімана, тобто один з його розв'язків буде дорівнювати нулю:  $\varphi = 0$ .

В якості області  $\bar{G}$  для рівняння (24) можна взяти будь-яку однозв'язну область, розташовану всередині круга  $x^2 + y^2 = 1$ .

Із рівностей (17) знаходимо компоненти  $T^\alpha$ :

$$T^1 = \frac{y}{2R^2} \frac{1-x^2-y^2}{1-x^2-y^2}; \quad T^2 = -\frac{x}{2R^2} \frac{1-x^2-y^2}{1-x^2-y^2},$$

Слід зазначити, що  $T_{,\alpha}^\alpha = 0$ .

Із (14) випливає, що тензорні поля  $T^{\alpha\beta}$  матимуть вид:

$$T^{11} = -T^{22} = -\frac{xy}{4R^3}; \quad T^{12} = -\frac{x^2 - y^2}{8R^3}.$$

Тоді з рівностей (3) знайдемо вектор зсуву  $\bar{y}$   $x^1, x^2$  в явному виді

$$y = \left\{ \frac{x}{1+x^2+y^2} \frac{x^2+y^2 - 2CRx}{1+x^2+y^2}; \frac{y}{1+x^2+y^2} \frac{x^2+y^2 - 2CRy}{1+x^2+y^2}; \frac{1+x^2+y^2 + 2}{1+x^2+y^2} \frac{x^2+y^2 - 2CR}{1+x^2+y^2} \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \right\}. \quad (25)$$

Отже, сфера допускає н. м. деформації з заданими варіаціями тензора Річчі, вектор зсуву якої має вид (25).

## 6 ВИСНОВКИ

Отримані результати мають теоретичний і практичний характер. Вони можуть бути використані в теорії н. м. деформацій поверхонь, а також їх можна застосувати в безмоментній теорії тонких пружних оболонок при розрахунках їх рівноваги.

### Література

- 1 Podousova T., Vashpanova N. About the existence of ovaloid deformations. *Proceedings of the International Geometry Center*. 2020. 13 (1). 23–34. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v13i1.1709>.
- 2 Vashpanova N., Savchenko A., Vasylieva N. Generalized  $\varphi(\text{Ric})$ -vector fields in special pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of International Geometry Center*. 2021. 14 (4). 1–12. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i4.2155>.
- 3 Кіосак В. А., Лесечко О. В. Моделі механічних систем, що зберігають тензор Вейля. *Механіка та математичні методи*, 2019. №1. С. 25–34. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-1-25-34>.
- 4 Vashpanova N., Podousova T., Fedchenko Yu. Canonikal deformations of pseudo-Riemanni spases. *AIP Conference Proceedings*. 2019. 2164. 040005. <https://doi.org/10.1063/1.5130797>.
- 5 Podousova T., Ugol'nikov A., Dumanska V. Infinitesimally small deformation which preserves geodesic lines. *AIP Conference Proceedings*. 2020. 2302. 040007. <https://doi.org/10.1063/5.0033749>.
- 6 Гаврильченко М. Л., Кіосак В. А., Микеш Й. Геодезические деформации гиперповерхностей римановых пространств. *Известия высш. учебн. Завед*, 2004. №11 (510). С. 23–29.
- 7 Безкоровайна Л. Л., Хомич Ю. С. QA-деформація поверхні від'ємної гауссової кривини. *Дослідження в математиці і механіці*, 2018. т. 23. 1 (31). С. 14–22.
- 8 Подоусова Т. Ю., Вашпанова Н. В. Деформації поверхонь зі стаціонарним тензором Річчі. *Механіка та математичні методи*. 2020. Т. 2. Вип. 2. С. 51–62. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-51-62>.
- 9 Векуа И. Н. *Обобщенные аналитические функции*. М: Наука, 1988. 509 с.
- 10 Михайлов В. П. *Дифференциальные уравнения в частных производных*. М: Наука, 1976. 392 с.
- 11 Миранда К. *Уравнения с частными производными эллиптического типа*. М.:ИЛ, 1956. 256 с.
- 12 Кошляков Н. С. и др. *Уравнения в частных производных математической физики*. Учеб. пособ. для мех.-мат. фак. ун-тов. М: «Высшая школа», 1970. 712 с.
- 13 Векуа И. Н. *Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек*. М: Наука, 1982. 288 с.

### References

1. Podousova, T., Vashpanova, N. (2020). About the existence of ovaloid deformations. *Proceedings of the International Geometry Center*. 13 (1). 23–34. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v13i1.1709>.
2. Vashpanova, N., Savchenko, A., Vasylieva, N. (2021). Generalized  $\varphi(\text{Ric})$ -vector fields in special pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of International Geometry Center*. 14 (4). 1–12. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i4.2155>.
3. Kiosak, V., Lesechko, O. (2019). Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor. *Mechanics and Mathematical Methods*. 1. 25–34. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-1-25-34>.
4. Vashpanova, N., Podousova, T., Fedchenko, Yu. (2019) Canonikal deformations of pseudo-Riemanni spases. *AIP Conference Proceedings*. 2164. 040005. <https://doi.org/10.1063/1.5130797>.

5. Podousova, T., Ugol'nikov, A., Dumanska, V. (2020). Infinitesimally small deformation which preserves geodesic lines. *AIP Conference Proceedings*. 2020. 2302. 040007. <https://doi.org/10.1063/5.0033749>.
6. Gavrilchenko, M. L., Kiosak, V. A., Mikesch, J. (2004). Heodezycheskye deformatsyy hyperpoverkhnosti rymanovykh prostranstv [Geodesic deformations of hypersurfaces of Riemannian spaces]. *News of higher educational institutions*. 11 (510). 23–29. [in Russian].
7. Bezkorovaina, L. L., Khomych, Y. S. (2018). QA-deformatsiia poverkhni vidiemnoi haussovoi kryvyny [QA-deformation of a surface of negative Gaussian curvature]. *Research in Mathematics and Mechanics*. 23. 1(31). 14–22. [in Ukrainian].
8. Podousova, T., Vashpanova N. (2020). Deformations of surfaces from stationary Ricci tensor. *Mechanics and Mathematical Methods*. 2 (2). 51–62. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-51-62>.
9. Vekua, I. N. (1988). *Obobshchennyye analytycheskiye funktsyy* [Generalized analytical functions]. M: Nauka. [in Russian].
10. Mikhailov, V. P. (1976). *Dyfferentsyalnye uravneniya v chastnykh proyzvodnykh* [Differential equations in partial differentials]. M: Nauka. [in Russian].
11. Miranda, K. (1956). *Uravneniya s chastnymy proyzvodnymy ellyptycheskoho tipa*. [Partial differential equations of elliptic type]. M: IL. [in Russian].
12. Koshlyakov, N. S. et al. (1970). *Uravneniya v chastnykh proyzvodnykh matematycheskoi fizyky* [Partial differential equations of mathematical physics]. Textbook for meh.-mat. faculties of universities. M: «Vysshaya shkola». [in Russian].
13. Vekua, I. N. (1982). *Nekotorye obshchye metody postroyeniya razlychnykh varyantov teoryi obolochek* [Some general methods for constructing various variants of the theory of shells]. M: Nauka. [in Russian].

**Вашпанова Ніна Володимирівна**

Одеська державна академія будівництва та архітектури  
к.ф.-м.н., доцент  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029  
vashanina@ukr.net  
ORCID: 0000-0002-8639-8368

**Лесечко Олександр Васильович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури  
к.ф.-м.н., доцент  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029  
a.lesechko@ukr.net  
ORCID: 0000-0002-2352-6174

**Подоусова Тетяна Юрївна**

Одеська державна академія будівництва та архітектури  
к.ф.-м.н., доцент  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029  
podousova\_tatyana@ukr.net  
ORCID: 0000-0002-9492-126X

*Для посилань:*

Вашпанова Н. В., Лесечко О. В., Подоусова Т. Ю. Інфінітезимальні деформації поверхонь із заданою зміною тензора Річчі. *Механіка та математичні методи*, 2023. Т. 5. №. 1. С. 97–109.

*For references:*

Vashpanova N., Lesechko O., Podousova T. (2023). Infinitesimal deformations of surfaces with a given change of the Ricci tensor. *Mechanics and Mathematical Methods*. 5 (1). 97–109.



UDC 624.04

## STABILITY OF RODS WITH INITIAL IMPERFECTIONS IN THE FORM OF ECCENTRICITY OF LOAD APPLICATION UNDER LINEAR AND NON-LINEAR CREEP CONDITIONS

**M. Bekirova<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract.** Stability of a compressed rod having initial imperfections in the form of eccentricity of applied load under conditions of linear and nonlinear creep is considered. It is noted that all real elements have some initial imperfections in the form of technological deflections, eccentricities of applied loads, etc., so they begin to bulge from the very beginning of loading.

Another important factor in stability theory is the consideration of material creep. In this regard, the loading process is divided into two phases: the instantaneous loading process and the creep phase under constant external load. Moreover, creep can be time-limited or unrestricted.

In the paper formulas for determination of critical forces of stability loss of the rod having initial imperfections, under short-term and long-term action of load are obtained. The equation allowing to determine time of the first crack appearance is derived. Derived are equations the roots of which are loads at action of which the first cracks appear at initial moment of time and at arbitrarily long period of load action. Analysis of acting force determining the character of rod deformation is executed. From the constructed stability equation it is possible to determine the critical force corresponding to the critical length of the section with cracks.

For similar problems in nonlinear formulation formulas for determining critical force and critical displacement corresponding to maximum load are obtained. For the case of long duration load the equation which establishes relationship between load and displacement is obtained. Equation for determination of critical force under prolonged action of load has been derived. It has been established that critical displacement is the same under short- and continuous action of load. It is shown that at any intermediate moment critical displacement can be achieved under load lying in certain interval.

**Keywords:** stability, rod, initial imperfection, eccentricity, linear creep, non-linear creep, critical force, crack, critical displacement.

## СТІЙКІСТЬ СТРИЖНІВ, ЩО МАЮТЬ ПОЧАТКОВІ НЕДОСКОНАЛОСТІ У ВИГЛЯДІ ЕКСЦЕНТРИСИТЕТУ ПРИКЛАДЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ В УМОВАХ ЛІНІЙНОЇ ТА НЕЛІНІЙНОЇ ПОВЗУЧОСТІ

**Бекірова М. М.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація.** Розглядається стійкість стисненого стрижня, що має початкові недосконалості у вигляді ексцентриситету застосування навантаження в умовах лінійної та нелінійної повзучості. Зазначається, що це реальні елементи мають ті чи інші початкові недосконалості як технологічних прогинів, ексцентриситетів прикладених навантажень та інших, тому вони починають витріщатися від початку навантаження.

Ще одним важливим фактором теорії стійкості є облік повзучості матеріалів. У зв'язку з цим процес навантаження розділяється на два етапи: миттєвий процес навантаження та етап повзучості при постійному зовнішньому навантаженні. Причому повзучість може бути обмеженою в часі або необмеженою.



У роботі отримані формули визначення критичних сил втрати стійкості стрижня, має початкові недосконалості, при короткочасному і тривалому дії навантаження. Побудовано рівняння, що дозволяє визначити час появи першої тріщини. Виведені рівняння, корінням яких є навантаження, при дії яких утворюються перші тріщини в початковий момент часу і при будь-якому великому часі дії навантаження. Проведено аналіз чинної сили, що визначає характер деформування стрижня. Зі побудованого рівняння стійкості можна визначити критичну силу, якій відповідає критична довжина ділянки з тріщинами.

Для аналогічних завдань у нелінійній постановці отримані формули визначення критичної сили і критичного переміщення, відповідальних максимальному навантаженні. Для випадку тривалої дії навантаження одержано рівняння, що встановлює зв'язок між навантаженням та переміщенням. Виведено рівняння визначення критичної сили при тривалому дії навантаження. Встановлено, що критичні переміщення однакові за короткочасної та тривалої дії навантаження. Показано, що у будь-який проміжний момент часу критичне переміщення може бути досягнуто при навантаженні, що лежить у певному інтервалі.

**Ключові слова:** стійкість, стрижень, початкова недосконалість, ексцентриситет, повзучість лінійна, повзучість нелінійна, критична сила, тріщина, критичне переміщення.

## 1 INTRODUCTION

It is known [1, 2] that one of the most important problems of deformable solid mechanics is the problem of structural stability. It is the loss of stability that is associated with a number of accidents and disasters. Loss of stability is especially dangerous because it occurs suddenly, often with stresses that are significantly lower than the ultimate strength of the material.

Modern stability theory is based on the study of the loading process of structures and their elements, and this process is considered unstable if a catastrophic development of movements and deformations corresponds to its continuation, however small. Failure occurs at the limit points called bifurcation points and the corresponding loads are called stability limits or critical loads.

All real elements have some kind of initial imperfection (technological deflections, eccentricity of load application etc.) and therefore they start to bulge from the very beginning of loading.

Another important factor in stability theory is the consideration of material creep. The loading process is therefore divided into two phases: the instantaneous loading process and the creep phase under constant external load. Moreover, creep can be time-limited or unrestricted.

## 2 LITERATURE ANALYSIS AND PROBLEM STATEMENT

The problem on the stability of an elastic rod under the action of an axial compressive force was first solved by L. Euler. This solution is given in numerous literature on the stability of rods, of which special mention should be made [3-5]. However, field tests have shown that this solution is not applicable for real steel rods, due to the inevitable curvature of the element axis during fabrication and transportation and inaccuracies in alignment during assembly. In this regard, different solutions have been obtained for a rod under the action of an axial compressive force applied with eccentricity [3-5].

An interesting analysis of the calculation procedures for centrally compressed steel rods laid down in various normative documents has been carried out in [6].

One of the first publications in which the influence of initial imperfections on stability was investigated is the monograph by A. R. Rzhantsyn [7]. Initial geometric imperfections most significantly affect the stability of thin-walled open section elements [8]. In [9] a fourth degree polynomial is used to describe the shape of initial imperfections.

There are a large number of publications on creep rupture of compressed rods, including [10-14] and others. The approaches to the problem are very different - finite difference method, finite element method, Bubnov-Galerkin method, power method in the Ritz-Timoshenko form, etc.

N. Rabotnov [15] and S. A. Shesterikov [16, 17] suggested a new approach - they connected the question of creep stability with the classical definition of stability. Taking strengthening law as a basis, they conducted its linearization taking into account small deflections, and then performed analysis of rod motion under action of perturbations.

The works of scientists from Odessa school of creep theory headed by I. E. Prokopovich [18-20] should not be overlooked.

All works considering the issues of rod stability with regard to creep can be divided into two directions. The first, classical approach assumes the existence of change of stable configurations of equilibrium - after some time, which is called critical, there is a transition of rectilinear form into curved one. The second approach to investigating buckling is to assume that the creeping process in the rod leads to reduction of its stiffness and, consequently, the

loss of stability.

The second approach in investigation of rod bulging in creep is based on the consideration of initial imperfections, defects (malformations, eccentricity of load, etc.). In this approach it is assumed that initial imperfections in geometry or eccentricities increase with time, leading to failure.

### 3 PURPOSE AND OBJECTIVES OF THE STUDY

The aim of this work is to solve the problem on the stability of a rod having initial imperfections in the form of eccentricity of load application under conditions of linear and nonlinear creep.

In the stability of elastic rods one distinguishes a loss of stability of the first kind, associated with the possibility of existence of two forms of equilibrium - stable and unstable, and a loss of stability of the second kind, associated with the possibility of unlimited development of movements of the rod, possessing one or another initial imperfection.

Since the creep increases the deformations and displacements, it is natural to consider a loss of stability of the second kind in the study of the stability of rods made of materials with a considerable creep. For a rectilinear rod, such a loss of stability is possible only in the presence of initial imperfections of shape (initial failure) or state (eccentric application of compressive force, deviation from rectilinear shape due to external action).

### 4 RESEARCH RESULTS

To solve the problem of the stability of a flexible reinforced concrete rod under conditions of linear creep with account of cracking, consider a rod pivoted at the ends with a rectangular symmetrically reinforced cross-section. The load  $P$  is constant in time and is applied with eccentricity  $e_0$ .

Two stages can be distinguished in the deformation of such a rod. Stage I - the load  $P$  is conditionally "small" to such an extent that cracks in the concrete tensile zone do not appear during the whole considered time interval. Stage II - the load  $P$  is conditionally "large" to such an extent that cracks in the concrete tensile zone appear either at the time  $t_0$  of load application or at the time  $t_1 > t_0$  ( $t_1$  - time of the first crack formation).

The relationship between deformations and stresses in concrete is established by the linear theory of elastic heredity (TEH):

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)\delta(t, \tau) - \int_{t_0}^t \sigma(\tau)\delta(t, \tau) / \delta\tau d\tau;$$

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau) + C(t, \tau)}; \tag{1}$$

$$C(t, \tau) = C_0 [1 - Be^{-\gamma(t-\tau)}];$$

$$C(t_0, t_0) = C_0(1 - B).$$

The difference  $(1 - B)$  takes into account the fast-moving part of the creep deformation, conventionally referred to a point in time  $t_0$ , hence  $C(t_0, t_0)$  corresponding to the short-term action of the load.

Stage I. At this stage the solution of the integrodifferential equation of motion of the reinforced rod, or a corresponding partial differential equation, is the function

$$y(z, t) = \frac{f(t) \sin \pi x}{e_0}, \quad (2)$$

where  $f(t)$  — displacement of the middle section along the length of the bar:

$$f(t) = f(t_0) \left\{ \left[ 1 - (P_{cr} - P) / (P_{cont} - P) \right] \cdot \exp \left[ -\gamma_1 (P_{cont} - P) / (P_{cr} - P) (t - t_0) \right] + (P_{cr} - P) / (P_{cont} - P) \right\}; \quad (3)$$

$$f(t_0) = \frac{4e_0 P}{\pi (P_{cr} - P)};$$

$$\gamma_1 = \frac{\gamma(1 + \varphi)}{[1 + (1 - B)\varphi]};$$

$$\varphi = E_b C_0.$$

At  $t - t_0 \rightarrow \infty$  we have:

$$f(\infty) = \frac{4e_0 P}{\pi (P_{cont} - P)}. \quad (4)$$

According to the solutions obtained for the reinforced concrete core, two forces can be specified —  $P_{cr}$  and  $P_{cont}$ .

$$P_{cr} = \pi^2 E_0 J_0 / l^2 \left\{ \alpha + 1 / [1 + (1 - B)\varphi] \right\};$$

$$P_{cont} = \pi^2 E_b J_b / l^2 [\alpha + 1 / (1 + \varphi)];$$

$$\alpha = \mu \rho_1 \eta;$$

$$\mu = \frac{2A_s}{A_b}; \quad (5)$$

$$\rho_1 = \frac{h_1^2 A_b}{I_b};$$

$$\eta = \frac{E_s}{E_b}.$$

The critical force for a loss of stability of the second kind is defined as the minimum value of force that results in an unrestricted increase in displacement.

$P_{cr}$  — the critical force under short-term loading, determined by the condition  $f(t_0) \rightarrow \infty$ ;

$P_{cont}$  — the critical force under continuous load, determined by the condition  $f(\infty) \rightarrow \infty$ .

Knowing the displacement  $y(z, t)$ , it is possible to determine the height of the concrete compression zone and the stresses in the reinforcement and concrete in any cross-section at any time.

In bendable and eccentrically compressed reinforced concrete bars, cracks in the cross-sections in the tensile concrete appear if the condition

$$\sigma_{b(z,t)} = -2R_p. \quad (6)$$

After a number of transformations we obtain an equation which allows us to determine the time of the appearance of the first crack. The first crack appears in the average section along the length of the rod ( $z = l/2$ ), and the time of its appearance is defined as follows:

$$t_T = t_0 - 1/\gamma_1 (P_{cr} - P) / (P_{cont} - P) \cdot \ln[(P_{cr} - P) \cdot (P_{cont} - P) / (P_{cont} - P_{cr}) / \pi y_T / 4e_0 P - 1 / (P_{cont} - P)]. \quad (7)$$

Of interest are the loads  $P_T$  and  $P_T^*$ , under the action of which the first cracks are formed at the times  $t = t_0$  and  $t = \infty$ , respectively.

$P_T$  and  $P_T^*$  are defined as the roots of the equations

$$\frac{\pi y_T (P_{cr} - P)}{4e_0 P} = 1; \quad (8)$$

$$\frac{\pi y_T (P_{cont} - P)}{4e_0 P} = 1.$$

Let's look at the magnitude of the acting force, which determines the nature of the deformation of the rod.

If  $P \leq P_T^*$ , then over the whole considered time interval the deformation occurs without crack formation (stage I). If  $P_T^* < P < P_T$ , then cracks appear during the deformation process (stage II). If  $P > P_T$ , then cracks appear immediately after load application (Stage II).

Stage II. In the section of the rod with length  $l_T$  there will be additional displacements caused by the decrease of stiffness as a result of cracking. Considering the rod deformation at the segment  $l_T$ , one can find the critical force under prolonged action taking into account cracking -  $P_{cont}^T$ .

After a number of transformations the stability equation is reduced to the form

$$P \cdot l_T = 2\pi^2 A_s E_s [3(y_T + e_0)^2 - h(y_T + e_0) + h_1^2]. \quad (9)$$

Here  $l_T$  – the length of the section with cracks, determined by the dependencies

$$\frac{\pi y_T (P_{cr} - P)}{4e_0 P} = 1;$$

$$\frac{\pi y_T (P_{cont} - P)}{4e_0 P} = 1; \quad (10)$$

$$l_T = l \left\{ 1 - 2 / \pi \arcsin \left[ \pi y_T (P_{cont} - P_{cont}^T) / 4e_0 P_{cont}^T \right] \right\}.$$

To the critical force  $P_{cont}^T$ , determined from equation (9), corresponds the critical length of the section with cracks  $l_{T_{cont}}$ .

## 5 DISCUSSION OF RESEARCH FINDINGS

It can be concluded from the results of these calculations that consideration of creep and cracking leads to a significant reduction in the critical forces.

However, all the above considerations refer to the behavior of compressed flexible rods under prolonged action of loading under conditions of linear creep. Let's consider the operation of the rod under creep conditions in geometrically nonlinear formulation.

Consider a flexible rod made of a material with creep. The support is articulated. The rod is loaded with a longitudinal compressive force  $P$ , constant in time, applied with eccentricity  $e_0$  in the direction of displacement.

The integral-differential equation of slow motion has the form

$$\frac{1}{\rho(x,t)} - \frac{P}{EI} [y(x,t) + e_0] + \frac{P}{I} \int_{t_0}^t [y(x,\tau) + e_0] \frac{\partial \sigma(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau = 0. \quad (11)$$

Here  $y(x, \tau)$  – The movement of the rod in the plane of deformation (in the direction of  $e_0$ );  
 $1/\rho(x, t)$  – rod curvature in the same plane;

$$\frac{1}{\rho(x,t)} = -y^4(x,t) [1 + (y')^2(x,t)]^{-\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

The creep is further accounted for at the level of elastic heredity theory (TEH), as in the case of the linear creep variant.

After a number of transformations the equation is obtained

$$f^3(t_0) + \frac{8l^4}{3\pi^4} \left( \frac{P}{EI} - \frac{\pi^2}{l^2} \right) f(t_0) + \frac{32e_0}{3\pi} \cdot \frac{l^4}{\pi^4} \cdot \frac{P}{EI} = 0, \quad (13)$$

which establishes the relationship between displacement, eccentricity and short-term loading.

After introducing relative eccentricities  $s = e_0/l$  and displacements

$$F(t_0) = \frac{\pi}{e_0} f(t_0); \quad F(t) = \frac{\pi}{e_0} f(t), \quad (14)$$

equation (13) is written as:

$$F^3(t_0) + \frac{8}{3} \left( \frac{P}{EI} - 1 \right) F(t_0) + \frac{32}{3} \cdot s \cdot \frac{P}{P_e} = 0. \quad (15)$$

Here  $P_e = \pi^2 EI/l^2$  – is the Euler force, i.e. the critical force under short-term loading in the case of approximate curvature (linear formulation).

From equation (15) it follows a linear relationship

$$P = \frac{1}{8} P_e \frac{8F(t_0) - 3F^3(t_0)}{4s + F(t_0)}, \quad (16)$$

which establishes the relationship between load, displacement and eccentricity. The critical force is determined from the condition

$$\frac{\partial P}{\partial F} = 0. \quad (17)$$

It follows that

$$F^3(t_0) + 6sF^2(t_0) - \frac{16}{3}s = 0. \quad (18)$$



The critical force is determined by the formula:

$$P_{cr} = \frac{1}{8} P_e \frac{F_{cr} (8 - 3F_{cr}^2)}{4s + F_{cr}}, \quad (19)$$

where  $F_{cr}$  – the displacement corresponding to the maximum load, which is the root of equation (18):

$$F_{cr} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}s(1-3s^2 + \sqrt{1-6s})} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}s(1-3s^2 - \sqrt{1-6s})} - 2s. \quad (20)$$

At small values of  $s$  ( $s \leq 0,01$ ) dependency can be used:

$$F_{cr} = 2 \left[ \sqrt[3]{\frac{1}{3}s(1-3s^2 + \sqrt{1-6s^2})} - s \right]. \quad (21)$$

Displacements at  $t \rightarrow \infty$  are defined as a root of equation

$$F^3(\infty) - \frac{8}{3} \left[ 1 - \frac{P}{(1+\varphi)P_e} \right] F(\infty) + \frac{32}{3} s \frac{P}{(1+\varphi)P_e} = 0. \quad (22)$$

From (22) it follows

$$P = \frac{1}{8} (1+\varphi) P_e \frac{8F(\infty) - 3F^3(\infty)}{4s - F(\infty)}. \quad (23)$$

This relationship establishes the relationship between load and displacement in the case of prolonged load action. This is the equilibrium curve. The maximum on this curve determines the critical force  $P_{cont}$ . From condition (17) it follows that

$$F^3(\infty) + 6sF^2(\infty) + \frac{16}{3}s = 0. \quad (24)$$

Critical force  $P_{cont}$  is defined by equation:

$$P_{cont} = \frac{1}{8} (1+\varphi) P_e \frac{F_{cont} (8 - 3F_{cont}^2)}{4s - F_{cont}}, \quad (25)$$

where  $F_{cont}$  – the displacement corresponding to the maximum load, which is the root of equation (24).

It is obvious that the roots of equations (18) and (24), representing the critical displacements  $F_{cr}$  and  $F_{cont}$  of both short-term and long-term loading respectively, are the same

$$F_{cr} = F_{cont} = F^*. \quad (26)$$

In case  $t = t_0$  displacement  $F^*$  is developed by the action of a force  $F_{cr}$ , and in case  $t \rightarrow \infty$  – by the action of a force  $F_{cont}$ .

Since the critical displacements for both momentary and continuous loading are the same, it follows that at any intermediate point in time  $t_0 \leq t \leq \infty$  such a displacement  $F^*$  can be achieved at a load lying in the interval

$$F_{cr} > F > F_{cont} . \quad (27)$$

## 6 CONCLUSIONS

Thus, formulas for determination of critical forces of stability loss of the rod having initial imperfections, under short-term and long-term action of load  $P_{cr}$  and  $P_{cont}$  respectively, are obtained. An equation permitting to determine time of the first crack to appear has been derived. Derived are the equations the roots of which are loading  $P_T$  and  $P_T^*$ , under the action of which the first cracks form at time moments  $t = t_0$  and  $t = \infty$  respectively. The analysis of acting force determining the character of rod deformation has been carried out. From the stability equation (9) it is possible to determine the critical force  $P_{cont}$ , to which corresponds the critical length of the section with cracks  $l_{T_{cont}}$ .

For the similar problems in nonlinear formulation formulas for determining of critical force and critical displacement corresponding to maximum load have been obtained. For the case of prolonged action of load, equation which establishes relationship between load and displacement was obtained. Equation for determination of critical force  $P_{cont}$  under prolonged action of load has been derived. It has been established that critical displacement is the same in short term and long term action of load. Consequently, at any intermediate point of time  $t_0 \leq t \leq \infty$  displacement  $F^*$  can be achieved at a load lying in the interval of  $F_{cr} > F > F_{cont}$ .

## References

1. Rabotnov, Yu. N. (1979). *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a Deformable Solid Body]. M.: Nauka. [in Russian].
2. Krutii, Yu. S., Lazarijeva, D. V., Surianinov, M. H. *Mekhanika deformovanoho tverdoho tila* [Mechanics of a Deformed Solid Body] Odesa: ODABA. [in Ukrainian].
3. Timoshenko, S. P. (1955). *Ustoichivost' uprugikh sistem* [Buckling of elastic systems]. Moscow: GITTL Publ. [In Russian].
4. Streleckij, N. S. (1959). *Materialy k kursu stal'nykh konstruksii*. Vyp. II. Ch. 1: Rabota szhatykh stoek [Materials for steel structures course. Issue II. Part 1: Strength of elastic columns]. Moscow: Gosstroizdat Publ. [in Russian].
5. Volmir, A. S. (1967). *Ustoichivost' deformiruemykh sistem* [Buckling of deforming systemms]. Moscow: Nauka Publ. [In Russian].
6. Anikeev, I. D., Golikov, A. V. (2018). Derivation and analysis of methods for calculation of axially loaded steel compression members based on different building codes. *RUDN Journal of Engineering Researches*. 19(3). 299–316. DOI 10.22363/2312-8143-2018-19-3-299-316.
7. Rzhانيتsyn, A. R. (1946). *Raschet metallicheskih dvutavrovyykh balok, poluchivshikh nachalnoe iskrivlenie v gorizontальной ploskosti* [Calculation of metal I-beams that received initial curvature in the horizontal plane]. L.,M.: Stroiizdat. [in Russian].
8. Wang, Y. C., Nethercot, D. A. (1990). Bracing requirements for elate-rally unrestrained beams. *J. Constr. Steel Res.* 4. 305–315.
9. Mohler, K., Schelling, W. (1968). Zur Bemessung von Knickverbanden und Knickaussteif ungen im Holzbau. *Bauingenieur*. 2. 43–48.
10. Chepurnenko, A. S., Litvinov, S. V., Filenko, M.A. (2013). *Raschet sterzhnei na prodolno-poperechnyi izgib s uchetom deformatsii polzuchesti i nachalnykh nesovershenstv* [Calculation of rods for longitudinal-transverse bending, taking into account creep deformations and initial imperfections]. RGSU. [in Russian].
11. Kozelskaya, M. Yu., Chepurnenko, A. S., Litvinov, S. V. (2013). Primenenie metoda Galerkina pri raschete na ustoychivost szhatykh sterzhnei s uchetom polzuchesti [Application of the Galerkin method when calculating stability of compressed rods taking into account creep]. *Inzhenernyi vestnik Dona*. 2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1714. [in Russian].

12. Chepurnenko, A. S., Andreev, V. I., Yazyev, B. M. (2013). Energeticheskii metod pri raschete na ustoichivost szhatykh sterzhnei s uchetom polzuchesti [Energy method in the calculation of stability of compressed rods taking into account creep]. *Vestnik MGSU*. 1. 101–108. [in Russian].
13. Andreev, V. I., Chepurnenko, A. S., Yazyev, B. M. (2014). Energy method in the calculation stability of compressed polymer rods considering creep. *Advanced Materials Research*. 1004–1005. 257–260.
14. Chepurnenko, A. S., Nikora, N. I. (2015). Ustoichivost prodolno-szhatykh sterzhnei peremennoi zhestkosti [Stability of longitudinally compressed rods of variable stiffness]. *RGSU*. 103–104. [in Russian].
15. Rabotnov, Yu. N. (1966). *Polzuchest elementov konstruksii* [Creep of structural elements]. M.: Nauka. [in Russian].
16. Shesterikov, S. A. (1961). Dinamicheskii kriterii ustoichivosti pri polzuchesti dlya sterzhnei [Dynamic criterion of creep stability for rods]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 1. 68–71. [in Russian].
17. Shesterikov, S. A. (1959). O kriterii ustoichivosti pri polzuchesti [On the criterion of creep stability]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. XXIII. 6. 1101–1106. [in Russian].
18. Prokopovich, I. E. (1969). Vliyanie polzuchesti na ustoichivost tonkostennykh sterzhnei [Influence of creep on the stability of thin-walled rods]. *Stroitelstvo i arkhitektura*. 12. 33–38. [in Russian].
19. Prokopovich, I. E. (1967). O vliyanii polzuchesti na ustoichivost szhatykh sterzhnei [On the influence of creep on the stability of compressed rods]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii*. 1. 5–9. [in Russian].
20. Orlov, A. N. (1977). Opredelenie kriticheskikh sil pri dlitelnom deistvii nagruzki dlya gibkikh sterzhnei s opornymi zakreplenyami, obladayushchimi polzuchestyu [Determination of critical forces under long-term load for flexible rods with support fastenings with creep]. *Izvestiya AN Arm. SSR, Mekhanika*. Erevan. XXX. 3. [in Russian].

## Література

1. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
2. Крутий Ю. С., Лазарева Д. В., Сур'янінов М. Г. Механіка деформованого твердого тіла. Одеса: ОДАБА, 2017. 260с.
3. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. Москва: ГИТТЛ, 1955. 567 с.
4. Стрелецкий Н. С. Материалы к курсу стальных конструкций. Вып. II. ч. 1: Работа сжатых стоек. Москва: Госстройиздат, 1959. 284 с.
5. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Москва: Наука, 1967. 984 с.
6. Anikeev I. D., Golikov A. V. Derivation and analysis of methods for calculation of axially loaded steel compression members based on different building codes. *RUDN Journal of Engineering Researches*. 19(3). 299–316. DOI 10.22363/2312-8143-2018-19-3-299-316.
7. Ржаницын А. Р. Расчет металлических двутавровых балок, получивших начальное искривление в горизонтальной плоскости. Л., М.: Стройиздат, 1946. 30 с.
8. Wang Y. C., Nethercot D. A. Bracing requirements for elate-rally unrestrained beams. *J. Constr. Steel Res.* 1990. №4. pp. 305–315.
9. Mohler K., Schelling W. Zur Bemessung von Knickverbänden und Knickaussteif ungen im Holzbau. *Bauingenieur*. 1968. №. 2. pp. 43–48.
10. Чепурненко А. С., Литвинов С. В., Филенко М. А. Расчёт стержней на продольно-поперечный изгиб с учётом деформаций ползучести и начальных несовершенств. *Строительство–2013: РГСУ*, 2013. 1995 с.
11. Козельская М. Ю., Чепурненко А. С., Литвинов С. В. Применение метода Галёркина при расчете на устойчивость сжатых стержней с учетом ползучести. *Инженерный вестник Дона*. 2013. №2. URL: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1714>.
12. Чепурненко А. С., Андреев В. И., Языев Б. М. Энергетический метод при расчете на устойчивость сжатых стержней с учетом ползучести. *Вестник МГСУ*. 2013. №1. С. 101–108.
13. Andreev V. I., Chepurnenko A. S., Yazyev B. M. Energy method in the calculation stability of compressed polymer rods considering creep. *Advanced Materials Research*. 2014. T. 1004–1005. P. 257–260.
14. Чепурненко А.С. Никора Н. И. Устойчивость продольно-сжатых стержней переменной жесткости. *РГСУ*, 2015. С. 103–104.

15. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
16. Шестериков С. А. Динамический критерий устойчивости при ползучести для стержней. Прикладная механика и техническая физика, 1961. №1. С. 68–71.
17. Шестериков С. А. О критерии устойчивости при ползучести. Прикладная математика и механика. 1959. Т. XXIII. Вып. 6. С. 1101–1106.
18. Прокопович И. Е. Влияние ползучести на устойчивость тонкостенных стержней. Строительство и архитектура, 1969. №12. С. 33–38.
19. Прокопович И. Е. О влиянии ползучести на устойчивость сжатых стержней. Строительная механика и расчет сооружений, 1967. №1. С. 5–9.
20. Орлов А. Н. Определение критических сил при длительном действии нагрузки для гибких стержней с опорными закреплениями, обладающими ползучестью. «Известия АН Арм. ССР. Механика». Ереван, 1977. XXX. №3

**Mariam Bekirova**

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
PhD, Associate Professor  
Didrihsona str., 4, Odessa, Ukraine, 65029  
bekirova.ogasa@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-6162-9967

*For references:*

Bekirova M. (2023). Stability of rods with initial imperfections in the form of eccentricity of load application under linear and non-linear creep conditions. *Mechanics and Mathematical Methods*. 5 (1). 110–120.

*Для посилань:*

Бекірова М. М. Стійкість стрижнів, що мають початкові недосконалості у вигляді ексцентриситету прикладеного навантаження в умовах лінійної та нелінійної повзучості. *Механіка та математичні методи*, 2023. Т. 5. № 1. С. 110–120.

Наукове видання

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ  
MECHANICS AND MATHEMATICAL METHODS

Науковий журнал

(українською та англійською мовами)

Відповідальний за випуск: Ковров А. В.

Підписано до друку 03.07.2023 р.  
Формат 60×84/8 Папір офісний Гарнітура Times  
Цифровий друк. Ум.-друк. арк. 14,18.  
Наклад 50 прим. Зам. №23-16Е

Видавець і виготовлювач:  
**Одеська державна академія будівництва та архітектури**  
**Свідоцтво ДК № 4515 від 01.04.2013 р.**  
Україна, 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 4.  
тел.: (048) 729-85-34, e-mail: [rio@ogasa.org.ua](mailto:rio@ogasa.org.ua)

---

Надруковано в авторській редакції з готового оригінал-макету в редакційно-видавничому відділі ОДАБА