

УДК 539.3

РЕГУЛЯРНА ТА СКЛАДНА ПОВЕДІНКА МАЯТНИКОВОЇ СИСТЕМИ У МАГНІТНОМУ ПОЛІ

Сурганова Ю. Е.¹, Міхлін Ю. В.¹

¹*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»*

Анотація. Розглянуто динаміку коливальної дисипативної системи, що складається з двох зв'язаних маятників у магнітному полі. Поєднання цих маятників відбувається за допомогою пружного елемента. Інерційні компоненти маятників змінюються в широких межах, причому в аналітичному дослідженні співвідношення мас вибирається як малий параметр. Для наближених розрахунків магнітних сил використовується апроксимація Паде, що найбільшою мірою задовольняє експериментальні дані. Це наближення забезпечує опис магнітного збудження з хорошою точністю. Наявність зовнішніх впливів у вигляді магнітних сил та різного типу навантажень, які існують в багатьох інженерних системах, приводить до значного ускладнення аналізу форм коливань нелінійних систем. Проведено дослідження нелінійних нормальних мод коливань (ННМ) в даній системі, причому одна з мод є зв'язаним режимом, а друга – локалізованою. Моді коливань побудовано методом багатьох масштабів. Вивчається як регулярна, так і складна поведінка при зміні параметрів системи, серед яких коефіцієнт пропорційності мас маятників, коефіцієнт зв'язку, коефіцієнт інтенсивності магнітного впливу, а також відстань між віссю обертання та центром тяжіння. Вплив вказаних параметрів досліджується як при малих, так і при чималих початкових кутах нахилу маятників. Аналітичний розв'язок порівняно з результатами чисельного моделювання, який базується на методі Рунге–Кутти четвертого порядку, де для розрахунку мод коливань використовуються початкові значення змінних, визначені в аналітичному розв'язку. Чисельне моделювання, що включає побудову фазових діаграм і траєкторій у конфігураційному просторі дозволяє оцінити динаміку системи, яка може бути як регулярною, так і складною. Стійкість мод коливань досліджується за допомогою чисельно-аналітичного тесту, що є чисельною реалізацією критерія стійкості за Ляпуновим. При цьому стійкість мод коливань визначається шляхом оцінки ортогональних відхилень від траєкторії відповідної моди коливань в конфігураційному просторі.

Ключові слова: пов'язані маятники, магнітні сили, нелінійні нормальні моди коливань, метод багатьох масштабів.

REGULAR AND COMPLEX BEHAVIOR OF A PENDULUM SYSTEM IN A MAGNETIC FIELD

Y. Surhanova¹, Yu. Mikhlin¹

¹*National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»*

Abstract. The dynamics of an oscillatory dissipative system consisting of two connected pendulums in a magnetic field is considered. The connection of these pendulums is realized by some elastic element. The inertial components of pendulums vary widely, and the mass ratio is chosen in analytical investigation as a small parameter. For approximate calculations of magnetic forces, the Padé approximation which best satisfies the experimental data, is used. Such approximation permits to describe the magnetic excitation with good accuracy. The presence of external influences in the form of magnetic forces and various types of other loads that exist in many engineering systems leads to a significant complication in the analysis of vibration modes of nonlinear systems. Nonlinear normal modes (NNM) are analysed in the system where one mode is connected and the other is localized. These modes are constructed by the multiple scales method. It is studied as the regular, as well the complex behaviour when changing system parameters, including the pendulums mass ratio, the

coupling coefficient, the magnetic impact intensity coefficient, and the distance between the axis of rotation and the center of gravity. The influence of these parameters is studied at both small and not small initial angles of the pendulums. The analytical solution is compared with results of numerical simulation which is based on the Runge–Kutta method of the fourth order, where initial values of variables defined in the analytical solution are used. Numerical simulation, which includes construction of phase diagrams and trajectories in the configuration space, permits to estimate the system dynamics which can be as regular, as well irregular one. The mode stability is studied by the numerical-analytical test which is a numerical realization of the Lyapunov stability criterion. Here the mode stability is determined by analysis of orthogonal deviations from the mode trajectory in the system configuration space.

Keywords: connected pendulums, magnetic forces, nonlinear normal modes, multiple scales method.

1 ВСТУП

Математичні та фізичні маятники є важливими моделями, що представляють типову нелінійну динаміку різних типів нелінійних систем. Одним з найважливіших етапів у дослідженні динаміки нелінійних систем з кількома степенями свободи є вивчення нелінійних нормальних мод коливань (ННМ). Велике значення для інженерних застосувань має визначення можливості локалізації коливань, яке іноді шкодить нормальному функціонуванню машин та апаратів. Крім того, важливим уявляється дослідження коливань систем, що знаходяться під впливом магнітних сил. Зазначимо, що ці остання задача для суттєво нелінійних систем є достатньо складною для дослідження і далека від свого розв'язання.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

В декількох останніх публікаціях проведено теоретичне та експериментальне дослідження динаміки двох з'єднаних маятників у магнітному полі [1–3]. В цих роботах, зокрема, представлено графік моменту магнітних сил, отриманий шляхом експериментів. Дослідження нелінійних режимів нормальних мод коливань в такій системі без врахування впливу дисипативних сил, для випадку, коли маси цих з'єднаних маятників істотно розрізняються, виконано в [4]. Зазначимо, відтепер різноманітні аспекти теорії ННМ (Nonlinear normal vibration modes, NNMs) та її різноманітні застосування представлено в багатьох публікаціях. Основні елементи цієї теорії та посилання на публікації можна знайти, зокрема, в оглядах [5, 6] і книзі [7]. Можна також відзначити, що проблема локалізації коливань дуже важлива як для теорії, так і для інженерної практики, і досліджувалася в останні десятиліття в численних публікаціях, серед яких ми виділяємо [8–10]. В даній моделі ми досліджуємо як пов'язану, так і локалізовану моди коливань.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

В роботі досліджено нелінійні нормальні моди коливань (ННМ) в маятниковій системі, що знаходиться в магнітному полі, з урахуванням опору середовища та моменту демпфування, створеного пружним елементом. Розглядається система, в якій маси маятників суттєво розрізняються, що приводить к виникненню локалізації коливань. Ця система є автономною та дисипативною нелінійною системою з двома ступенями свободи. Суттєва нелінійність, присутня в системі, приводить до необхідності застосування асимптотичних методів для аналізу пов'язаної та локалізованої мод коливань. Буде використано метод багатьох масштабів, що може бути успішно застосований саме до дисипативних систем, а також чисельне моделювання. Крім побудови мод коливань ставиться задача дослідити їх стійкість, а також зробити про вплив зміни параметрів системи на її динаміку.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Досліджувана математична модель руху пов'язаних маятників представлена на рис. 1.

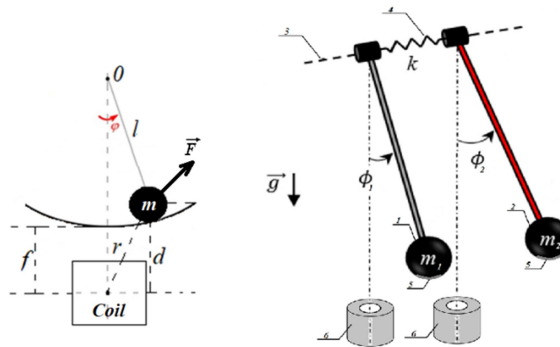


Рис. 1. Система пов'язаних маятників

де μ – відношення мас двох маятників; ε – умовний малий параметр; $\varepsilon = 1$; m – маса більшого маятника; $k_l^* = k_l/I$, $I = 4ms^2$, k_l – жорсткість пов'язаного пружного елемента; $k_l^*(\varphi_1 - \varphi_2)$ – момент крутильної деформації пружного елемента; γ – інтенсивність магнітного збудження; $M_{mag_{1,2}}^* = M_{mag_{1,2}}/I$, $M_{mag_{1,2}}$ – магнітний вплив; $C_{1,2}^* = C_{1,2}/I$, $C_{1,2}$ – коефіцієнт опору в'язкого повітря; $C_e^* = C_e/I$, C_e – коефіцієнт демпфуючого моменту, створеного пружним елементом; $r^* \sin \varphi_1$ – момент повернення сили тяжіння; $r^* = r/I$; s – відстань між центром мас маятника і віссю обертання. Ця система описується наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \varepsilon \mu \ddot{\varphi}_1 = \varepsilon \gamma M_{mag_1}^* - \varepsilon C_1^* \dot{\varphi}_1 - \varepsilon C_e^* (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \varepsilon \mu r^* \sin \varphi_1 - k_l^* (\varphi_1 - \varphi_2); \\ \ddot{\varphi}_2 = \varepsilon \gamma M_{mag_2}^* - \varepsilon C_2^* \dot{\varphi}_2 - \varepsilon C_e^* (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - r^* \sin \varphi_2 - k_l^* (\varphi_2 - \varphi_1), \end{cases} \quad (1)$$

Досліджується ситуація, коли кути повороту двох маятників є не дуже значними, тому використовується розкладання синусів в ряди Маклорена зі збереженням членів не вище третього ступеня.

Використано Паде-апроксимацію магнітного впливу у формі (2).

$$M_{mag}(\varphi) = \left(a_0 + \frac{a_1 \varphi + a_2 \varphi^3}{1 + b_1 \varphi^2 + b_2 \varphi^3} \right) \text{sign}(\varphi), \quad (2)$$

де a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 – коефіцієнти моделі, отримані з використанням процедури нелінійного методу найменших квадратів для того, щоб найкращим чином задовольнити експериментальні дані [1–3]. Порівняння цієї апроксимації з експериментальними даними представлено рис. 2.

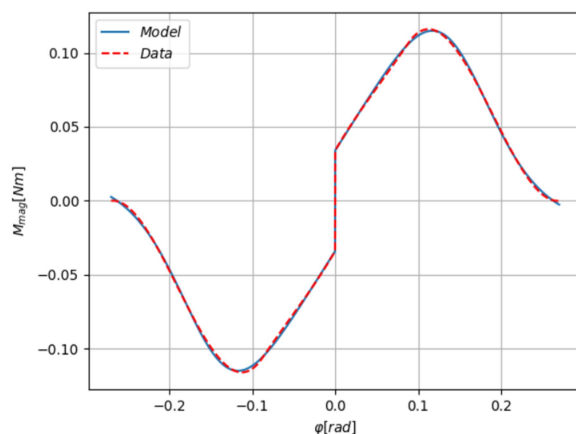


Рис. 2. Експериментальні дані магнітного моменту у порівнянні з числово узгодженою моделлю

Представимо розв'язок (1) у вигляді розкладання за малим параметром (3).

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{10} + \varepsilon\varphi_{11} + O(\varepsilon^2); \\ \varphi_2 &= \varphi_{20} + \varepsilon\varphi_{21} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3)$$

де $\varphi_{10}, \varphi_{20}$ – розв'язок породжувальної лінійної системи, $\varphi_{11}, \varphi_{21}$ – розв'язок першого наближення по малому параметру ε .

Використовується метод багатьох масштабів [10]. У відповідності до цього методу вводимо часові масштаби, а саме:

$$T_0 = \tau, T_1 = \varepsilon\tau, \tau = \omega_0 t, \quad (4)$$

де T_0 – швидкий час; T_1 – повільний час, $\omega_0^2 = r^*$.

Виконуючи стандартні перетворення цього методі, отримаємо системи рівнянь (5) та (6), відповідні двом першим наближенням за малим параметром ε :

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} -k_i^*(\varphi_{10} - \varphi_{20}) = 0, \\ \omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0^2} = -r^* \varphi_{20} - k_i^*(\varphi_{20} - \varphi_{10}). \end{cases} \quad (5)$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} \mu\omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial T_0^2} = \gamma M_{mag1}^* - C_1^* \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial T_0} - \mu r^* \varphi_{10} - k_l^*(\varphi_{11} - \varphi_{21}), \\ \omega_0^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial T_0^2} \right) = \gamma M_{mag2}^* - C_2^* \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial T_0} - r^* \left(\varphi_{21} - \frac{1}{6} \varphi_{20}^3 \right) - k_l^*(\varphi_{21} - \varphi_{11}). \end{cases} \quad (6)$$

Розв'язком (5) є $\varphi_{10} = \varphi_{20} = A_1(T_1) \cos(T_0 + \nu)$, що відповідає синфазній пов'язаній формі коливань. Магнітний момент, що діє на перший маятник, представлено рядом Фур'є відповідно до співвідношення (7) (для магнітного впливу на другий маятник будемо використовувати коефіцієнти $h_i, i = \overline{(0, 6)}$).

$$M_{mag1}^* \approx \frac{1}{I} \left(\frac{g_0}{2} + \sum_{i=1}^6 g_i \cos(i(T_0 + \nu)) \right), \quad (7)$$

$$\text{де } g_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sign}(\varphi_{10}) \left(a_0 + \frac{a_1 \varphi_{10} + a_2 \varphi_{10}^3}{1 + b_1 \varphi_{10}^2 + b_2 \varphi_{10}^3} \right) \cos(i(T_0 + \nu)) dT_0, i = \overline{(0, 6)}.$$

Щоб запобігти появі секулярних доданків у системі рівнянь (6), ми виключаємо доданки, що містять функції $\cos(T_0 + \nu)$ та $\sin(T_0 + \nu)$ у правій частині цих рівнянь, і в результаті отримуємо рівняння (8) та (9).

$$\cos(T_0 + \nu) : 2\omega_0^2 A_1 \frac{d\nu_1}{dT_1} + \frac{\gamma}{I} (g_1 + h_1) + \frac{r^* A_1}{8} = 0, \quad (8)$$

$$\sin(T_0 + \nu) : 2\omega_0^2 \frac{dA_1}{dT_1} + A_1 (C_1^* + C_2^*) = 0. \quad (9)$$

Звідси випливає, що

$$A_1 = e^{A_3 \frac{(C_1^* + C_2^*) T_1}{2\omega_0^2}}, \quad \nu = \frac{-\gamma(g_1 + h_1)}{I(C_1^* + C_2^*)} e^{\frac{(C_1^* + C_2^*) T_1}{2\omega_0^2} - A_3} + \frac{\omega_0^2}{16(C_1^* + C_2^*)} e^{2A_3 \frac{(C_1^* + C_2^*) T_1}{\omega_0^2}},$$

де A_3 – довільна константа, що визначається початковим відхиленням маятника. Порівняння аналітичного розв’язку з чисельним, застосованим до базової системи (1) з використанням методу Рунге–Кутти 4-го порядку, проведено для початкових значень змінних, які визначаються з аналітичного рішення. Таке порівняння показує хорошу точність аналітичної апроксимації при достатньо малих значеннях параметра μ , та для таких значень початкових кутів маятників, які приблизно не перевищують 60° .

Тепер розглянемо вплив параметрів системи та початкових умов на цю форму коливань. Параметр A_3 , який пов’язаний з початковим відхиленням, будемо змінювати у діапазоні від -1.5 до 1.5 і розглядати тільки випадки, коли початкове відхилення не перевищує 60° . Інші параметри зафіксуємо таким чином: $m = 0.5(kg)$, $s = 2.5(m)$, $k_l = 1(Nm/rad)$, $\varepsilon = 1$, $\gamma = 1/5$, $\dot{\varphi}_{1,2}(0) = 0(rad/s)$, і розглянемо декілька значень коефіцієнту пропорційності мас $\mu = \{0.01, 0.05, 0.1\}$. Тут і надалі час моделювання поведінки системи складатиме 3000 секунд. Результати представлено на рис. 3.

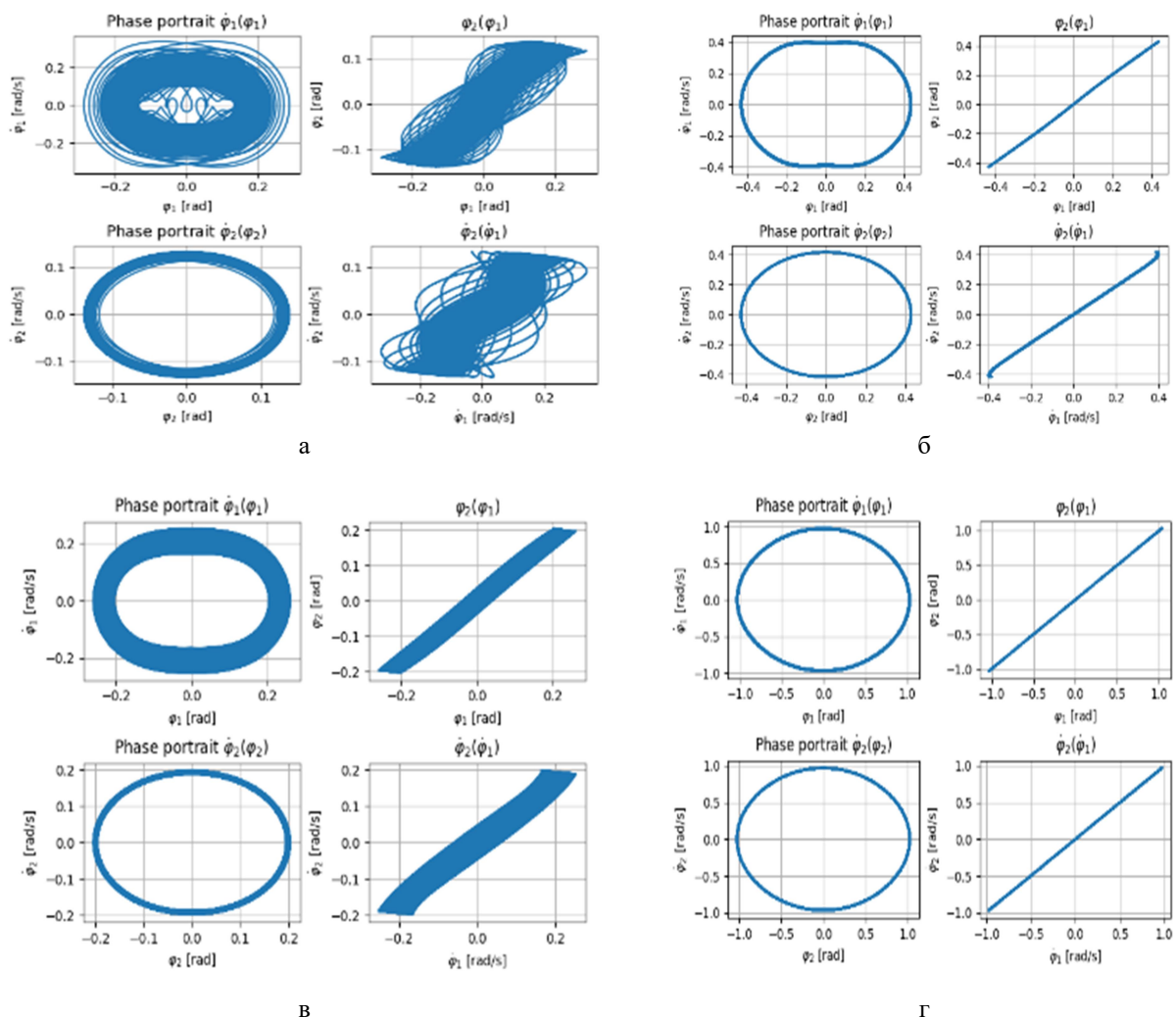


Рис. 3 (а-г). Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі при різних початкових умовах та коефіцієнтах пропорційності мас двох маятників

На рис. 3 бачимо, що не на всьому діапазоні початкових умов реалізується синфазна мода коливань (на рис. 3а використано таке: $A_3 = -0.69$, $\varphi_1(0) = -0.1333rad$ (-7.64°), $\varphi_2(0) = -0.1389rad$ (-7.9584°), $\mu = 0.05$). Порівнюючи рис. 3а та рис. 3в, де

$A_3 = 0.14$, $\varphi_1(0) = 0.20364rad(11.67^\circ)$, $\varphi_2(0) = 0.204rad(11.69^\circ)$, $\mu = 0.1$, приходимо до висновку, що зі збільшенням коефіцієнта пропорційності мас маятників блукання поблизу модальних траєкторій в конфігураційному та фазовому просторах системи зменшуються. На рис. 3б маємо: $A_3 = -0.04$, $\varphi_1(0) = -0.432rad(-24.752^\circ)$, $\varphi_2(0) = -0.4289rad(-24.574^\circ)$, $\mu = 0.05$, а на рис. 3г: $A_3 = 1$, $\varphi_1(0) = 1.0314rad(59.095^\circ)$, $\varphi_2(0) = 1.02995rad(59.0118^\circ)$, $\mu = 0.1$.

Розберемо вплив відстані між віссю обертання та центром тяжіння маятників s . На цьому етапі дослідження ми розглядаємо різні початкові значення кутів маятників та різні величини коефіцієнту пропорційності мас маятників, а параметр $s \in [0.1, 4](m)$. Інерційні моменти при зміні відстані перераховувались кожного разу. Отримано, що синфазна форма більш виражена при збільшенні як відстані, так і маси меншого маятника (рис. 4). Зі збільшенням відстані такий результат є очевидним, оскільки в такому випадку вплив магнітного моменту менший. На рис.4а обрано таке: $\mu = 0.02$, $s = 1(m)$, $I = 2(kgm^2)$, $r = 4.905(Nm)$, $\varphi_1(0) = 0.3607rad(20.7^\circ)$, $\varphi_2(0) = 0.3602rad(20.64^\circ)$, на рис. 4б: $\mu = 0.25$, $s = 1(m)$, $I = 2(kgm^2)$, $r = 4.905(Nm)$, $\varphi_1(0) = 0.3607rad(20.7^\circ)$ $\varphi_2(0) = 0.3602rad(20.64^\circ)$, на рис. 4в: $\mu = 0.02$, $s = 2(m)$, $I = 8(kgm^2)$, $r = 9.81(Nm)$, $\varphi_1(0) = 0.315rad(18.05^\circ)$, $\varphi_2(0) = 0.3166rad(18.14^\circ)$ та на рис. 4г: $\mu = 0.25$, $s = 2(m)$, $I = 8(kgm^2)$, $r = 9.81(Nm)$, $\varphi_1(0) = 0.315rad(18.05^\circ)$, $\varphi_2(0) = 0.3166rad(18.14^\circ)$.

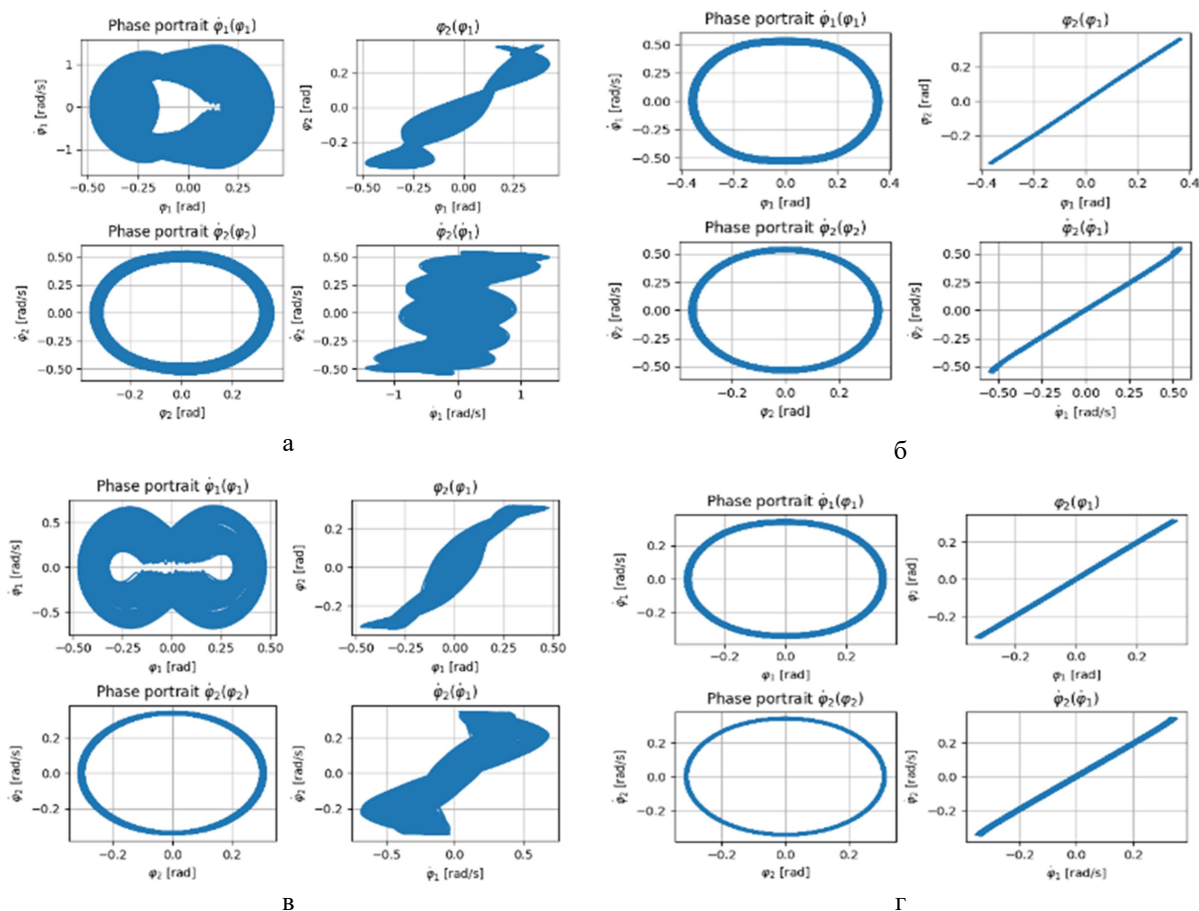


Рис. 4 (а-г). Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі при різних значеннях початкових умов, коефіцієнтах пропорційності мас двох маятників та відстані між центром тяжіння та віссю обертання маятників

Дослідимо ефект коефіцієнту зв'язку k_l , величину котрого змінюємо від 0.01 до 1 Nm/rad . У більшості розглянутих випадках при великій відстані від осі обертання до центру мас маятника і чималому коефіцієнту співвідношення мас маятників збільшення значення коефіцієнта зв'язку призводить до стабілізації синфазної форми коливань і зменшення блукань траєкторій поблизу такої форми (рис. 5). На рис. 5а: $\mu = 0.02$, $s = 3.5(m)$, $I = 24.5(kgm^2)$, $r = 17.1675(Nm)$, $k_l = 0.04(Nm/rad)$, $\varphi_1(0) = -0.3rad(-17.19^\circ)$, $\varphi_2(0) = -0.3015rad(-17.275^\circ)$, на рис. 5б: $\mu = 0.02$, $s = 3.5(m)$, $I = 24.5(kgm^2)$, $r = 17.1675(Nm)$, $k_l = 0.93(Nm/rad)$, $\varphi_2(0) = -0.3015rad(-17.275^\circ)$, $\varphi_1(0) = -0.3014rad(-17.27^\circ)$, на рис. 5в: $\mu = 0.25$, $s = 3.5(m)$, $I = 24.5(kgm^2)$, $r = 17.1675(Nm)$, $k_l = 0.06(Nm/rad)$, $\varphi_1(0) = -0.3rad(-17.19^\circ)$, $\varphi_2(0) = -0.3015rad(-17.275^\circ)$ та на рис. 5г: $\mu = 0.25, s = 3.5(m)$, $I = 24.5(kgm^2)$, $r = 17.1675(Nm)$, $k_l = 0.93(Nm/rad)$, $\varphi_1(0) = -0.3014rad(-17.27^\circ)$, $\varphi_2(0) = -0.3015rad(-17.275^\circ)$.

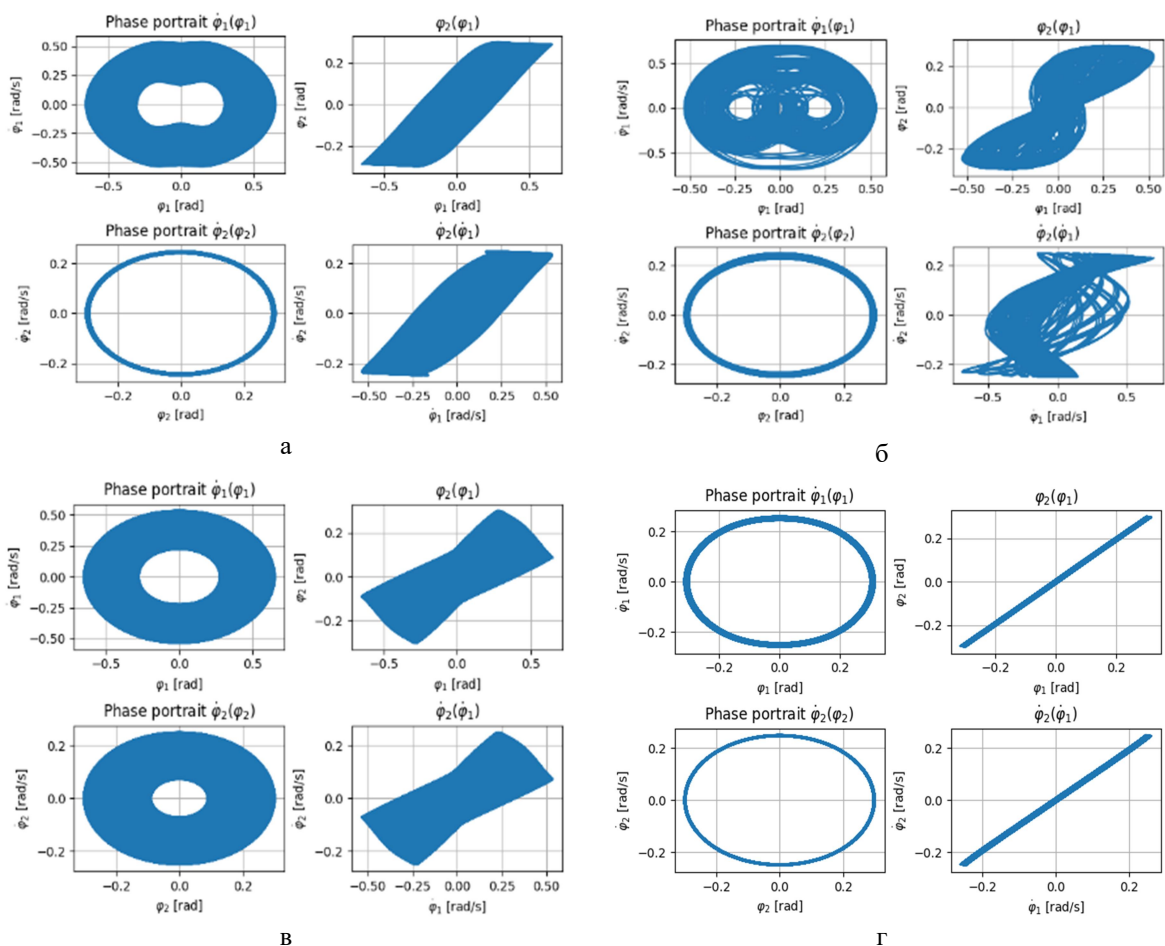


Рис. 5 (а-г). Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі при різних значеннях початкових умов, коефіцієнтах пропорційності мас двох маятників, відстані між центром тяжіння та віссю обертання маятників і коефіцієнтах зв'язку

Вивчимо вплив в'язкого опору $C_{1,2}$ у сукупності з коефіцієнтом демпфуючого моменту C_e . Для проведення дослідження ми варіювали вказані параметри у діапазоні від 10^{-5} до 10^{-2} (Nms/rad). Отримано, що збільшення параметрів дисипації не завжди

стягує траєкторії до форми (рис. 6). На рис. 6а: $s = 3.5(m)$, $k_l = 0.5(Nms/rad)$, $\mu = 0.55$, $\varphi_1(0) = -0.942rad(-53.973^\circ)$, $\varphi_2(0) = -0.913rad(-52.31^\circ)$, $C_{1,2,e} = 7 \cdot 10^{-5}(Nms/rad)$, на рис. 6б: $s = 3.5(m)$, $k_l = 0.5(Nms/rad)$, $\mu = 0.55$, $\varphi_1(0) = -0.5445rad(-31.2^\circ)$, $\varphi_2(0) = -0.542rad(-31.05^\circ)$, $C_{1,2,e} = 0.000574(Nms/rad)$, на рис. 6в: $s = 1.5(m)$, $k_l = 0.96(Nms/rad)$, $\mu = 0.02$, $\varphi_1(0) = 0.853rad(48.8733^\circ)$, $\varphi_2(0) = 0.8522rad(48.83^\circ)$, $C_{1,2,e} = 0.00086(Nms/rad)$, на рис. 6г: $s = 1.5(m)$, $k_l = 0.96(Nms/rad)$, $\mu = 0.02$, $\varphi_1(0) = 0.4087rad(23.42^\circ)$, $\varphi_2(0) = 0.387rad(22.2^\circ)$, $C_{1,2,e} = 0.00856(Nms/rad)$.

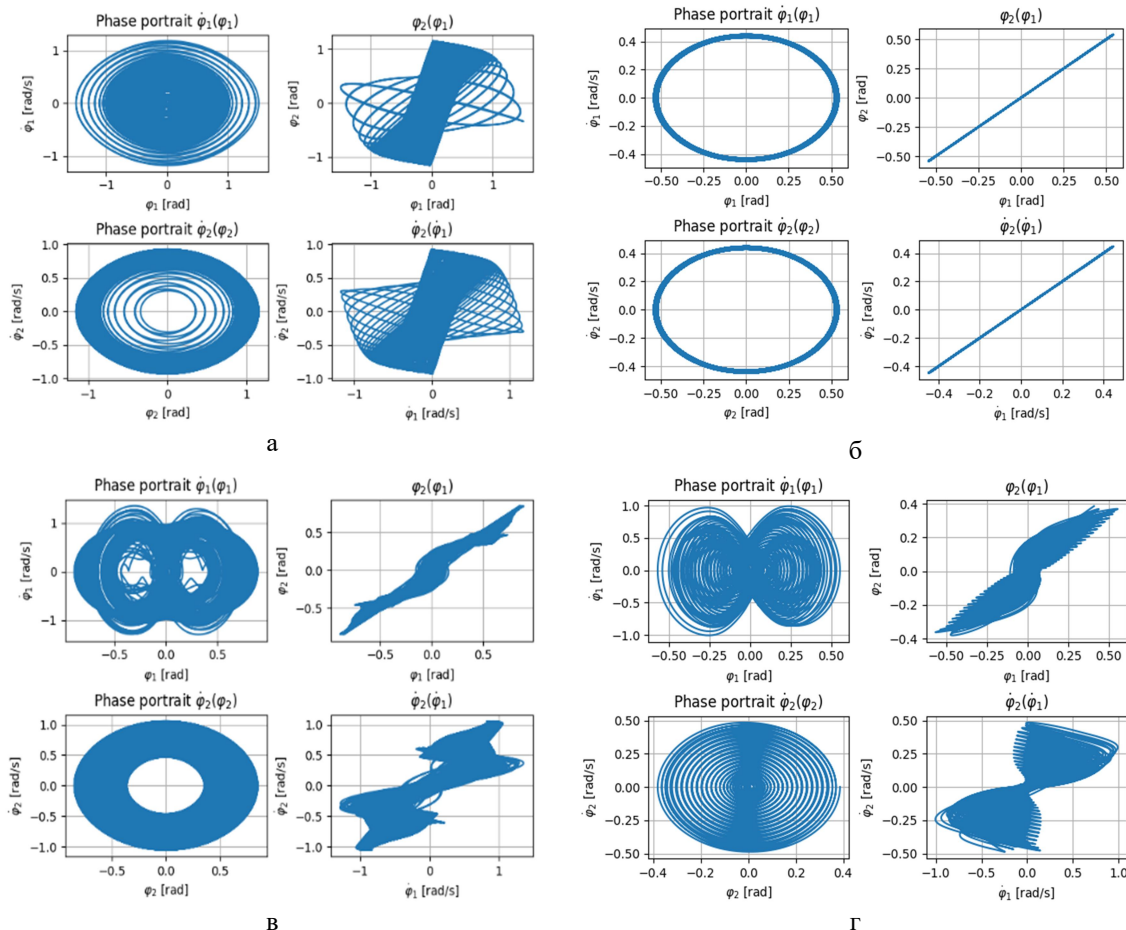


Рис. 6 (а-г). Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі (вплив параметрів дисипації)

Проаналізуємо стійкість пов'язаної форми коливань в залежності від параметрів A_3 , μ шляхом чисельної реалізації критерія стійкості за Ляпуновим, який було запропоновано та описано в роботі [11]. Стійкість моди коливань визначається ортогональними відхиленнями від її траєкторії в конфігураційному просторі. Початкові умови для відхилень від траєкторії визначаються через початкові значення кутів двох маятників на формі коливань як $\tilde{\varphi}_{1,2}(0) = 1.01\varphi_{1,2}(0)$. Потім розраховуються вказані відхилення при зміні часу. Нестійкість моди коливань фіксуємо, коли відхилення за модулем $|\varphi_{1,2}(t)|$ перевищують значення $\rho|\varphi_{1,2}(0)|$. Як показано в [11], значення ρ можуть бути обрані в достатньо широкому діапазоні чисел, що перевищують 1. В даній роботі прийнято $\rho = 1.1$. Оскільки ми досліджуємо стійкість мод коливань в залежності від значень параметрів A_3 , μ , то на відповідній площині встановимо сітку значень в

прямокутнику $A_3 \in [-1.5, 1.5]$, $\mu \in [0.01, 1]$. Сітка будується за допомогою методу, який повертає по 20 рівновіддалених точок масиву з вказаного діапазону. Обчислення відхилень проведено методом Рунге-Кутти в вузлах сітки зі зростанням часу. Обчислення припиняються, коли границі областей стійкості/нестійкості на площині параметрів стабілізуються в обраному масштабі сітки при збільшенні часу обчислень. Результати розрахунків представлені на рис. 7, де виділено області нестійкості.

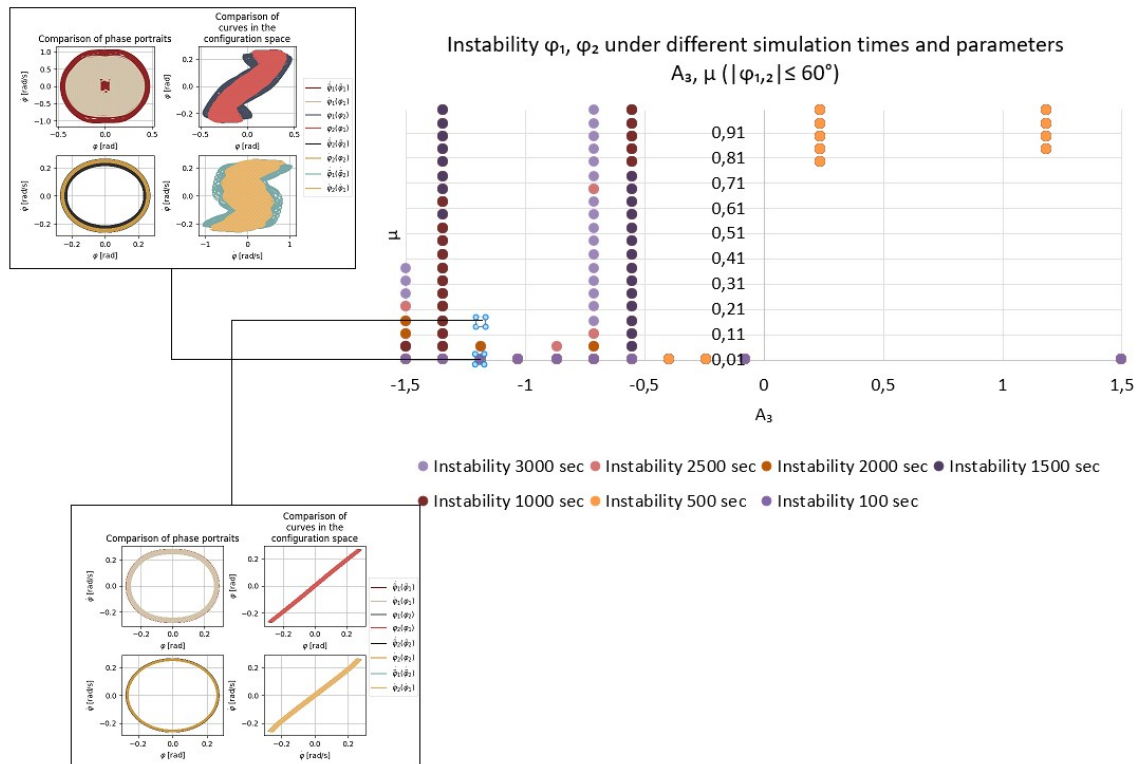
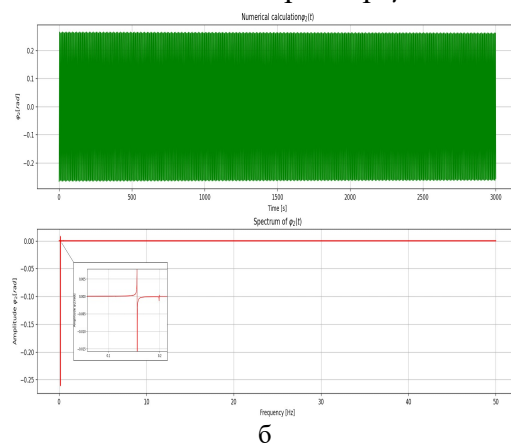
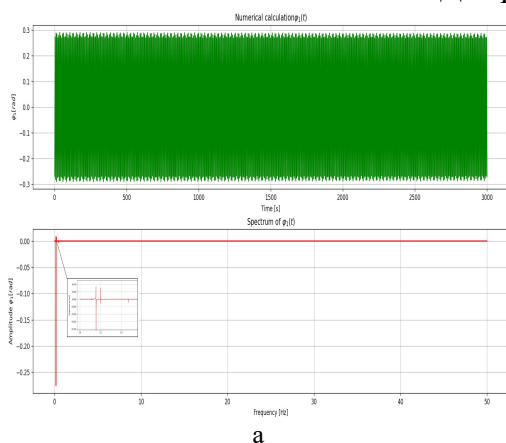


Рис. 7. Области нестійкості розв’язку φ_1 в залежності від часу моделювання системи та значень параметрів A_3, μ

Результати розрахунків демонструють, що пов’язана мода є нестійкою при малих значеннях параметру μ , якщо початкові значення кутів малі. Це майже очевидно, тому що при малих початкових кутах вплив магнітних сил суттєво перевищує вплив пружних характеристик системи. Розглянемо АЧХ для випадків, представлених на рис. 7, де для рис. 7а,б обрано такі значення параметрів: $A_3 = -1.184$, $\mu = 0.1663$, $s = 2.5(m)$, $k_l = 1(Nm/rad)$, $\varphi_1(0) = -0.2687rad(-15.344^\circ)$, $\varphi_2(0) = -0.2652rad(-15.195^\circ)$ для кожного маятника відповідно. Для рис. 7в,г змінюється лише параметр $\mu = 0.01$.



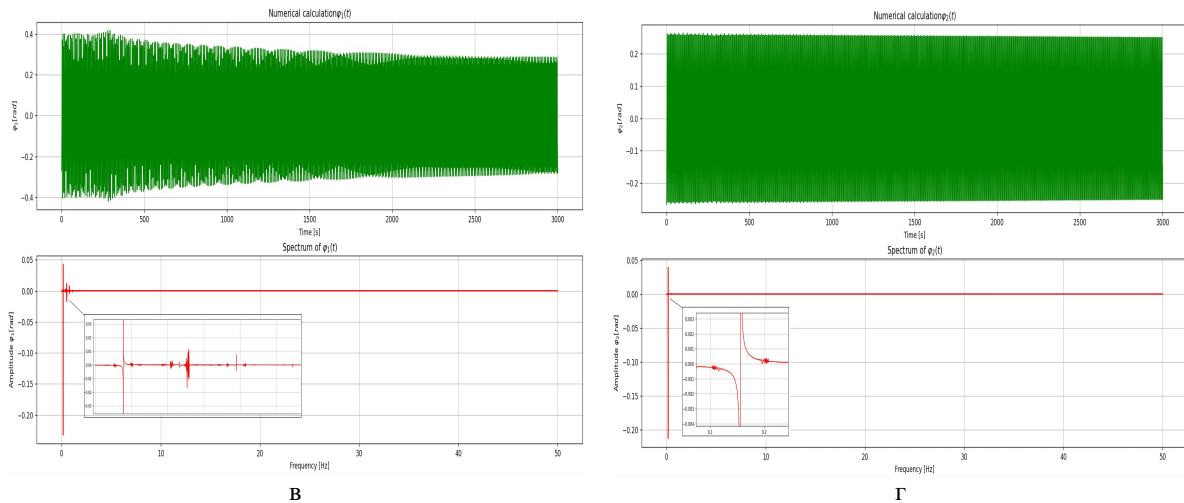


Рис. 8 (а-г). АЧХ для пов'язаної моди коливань

Проведемо тепер дослідження локалізованого режиму. Така мода коливань може бути аналітично представлена після введення перетворення часу: $t = \sqrt{\varepsilon}\tau$. Тоді система (1) набуває вигляду (9).

$$\begin{cases} \mu\ddot{\varphi}_1 = \varepsilon\gamma M_{mag_1}^* - \varepsilon C_1^* \dot{\varphi}_1 - \varepsilon C_e^* (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \varepsilon\mu r^* \sin \varphi_1 - k_l^* (\varphi_1 - \varphi_2); \\ \ddot{\varphi}_2 = \varepsilon^2 \gamma M_{mag_2}^* - \varepsilon^2 C_2^* \dot{\varphi}_2 - \varepsilon^2 C_e^* (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - \varepsilon r^* \sin \varphi_2 - \varepsilon k_l^* (\varphi_2 - \varphi_1). \end{cases} \quad (9)$$

Аналогічно, як і у випадку синфазної форми, введемо у відповідності до метода багатьох масштабів швидкі та повільні часові масштаби та розкладемо шукані функції за малим параметром ε , подібно формулам (3) та (4). Запишемо дві системи, що відповідають двом наближенням за малим параметром:

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} \mu\omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial T_0^2} = -k_l^* (\varphi_{10} - \varphi_{20}), \\ \omega_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0^2} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} \mu\omega_0^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial T_0^2} \right) = \gamma M_{mag_1}^* - C_1^* \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial T_0} - C_e^* \left(\frac{\partial \varphi_{10}}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial T_0} \right) - \mu r^* \varphi_{10} - k_l^* (\varphi_{11} - \varphi_{21}), \\ \omega_0^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial T_0^2} \right) = -r^* \varphi_{20} - k_l^* (\varphi_{20} - \varphi_{10}). \end{cases} \quad (11)$$

Рішенням (10) є $\varphi_{20} = 0$, $\varphi_{10} = A_1(T_1) \cos(T_0 + \nu)$, $\omega_0^2 = k_l^* / \mu$. Магнітний момент представимо у вигляді (7). Знову виключаємо доданки, що містять $\cos(T_0 + \nu)$ та $\sin(T_0 + \nu)$, тому

$$\cos(T_0 + \nu) : 2\mu\omega_0^2 A_1 \frac{d\nu_1}{dT_1} + \frac{\gamma}{I} g_1 - \mu A_1 (r^* + k_l^*) = 0, \quad (12)$$

$$\sin(T_0 + \nu) : 2\mu\omega_0^2 \frac{dA_1}{dT_1} + A_1 (C_1^* + C_e^*) = 0. \quad (13)$$

Звідси випливає, що

$$A_1 = e^{A_3 \frac{(C_1^* + C_e^*)T_1}{2k_l^*}}, \quad \nu = \frac{-\gamma g_1}{C_1^* + C_e^*} e^{\frac{(C_1^* + C_e^*)T_1}{2k_l^*} - A_3} + \frac{(r^* + k_l^*)T_1}{2\omega_0^2}.$$

Далі досліджується вплив параметрів та початкових умов на локалізований режим. Починаємо з параметра A_3 , який визначається початковими кутами маятників. Даний параметр й інші параметри системи змінюємо у тому ж діапазоні, що і при дослідженні синфазного режиму коливаль, а саме: $m = 0.5(kg)$, $s = 2.5(m)$, $k_l = 1(Nm/rad)$, $\varepsilon = 1$, $\gamma = 1/5$, $\dot{\varphi}_{1,2}(0) = 0(rad/s)$, $\mu = \{0.01, 0.05, 0.1\}$. Результати подано на рис. 9.

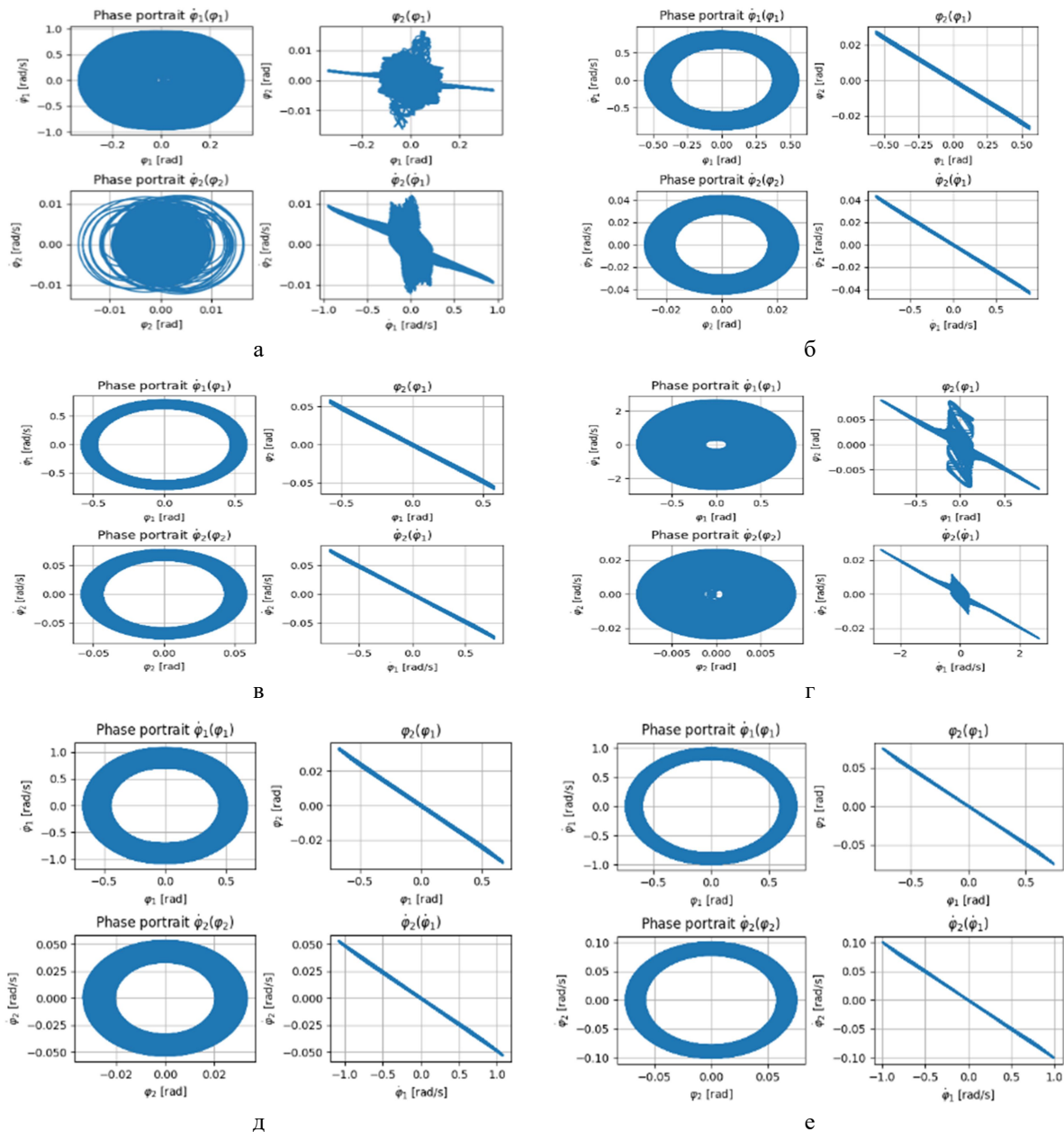


Рис. 9 (а-е). Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі при різних значеннях початкових умов та коефіцієнтів відношення мас маятників

На рис. 9а-в зображено випадки, коли $A_3 = -0.33$, причому на рис. 9а $\mu = 0.01$, $\varphi_1(0) = 0.3396rad (19.46^\circ)$, $\varphi_2(0) = -0.003473rad (-0.2^\circ)$. На рис. 9б:

$\mu = 0.05, \varphi_1(0) = -0.56rad (-32.1^\circ), \varphi_2(0) = 0.028rad (1.6^\circ)$; на рис. 9в: $\mu = 0.1, \varphi_1(0) = -0.58rad (-33.23^\circ), \varphi_2(0) = 0.06rad (3.44^\circ)$. На рис. 9г-е: $A_3 = 1$, але на рис. 9г: $\mu = 0.01, \varphi_1(0) = -0.8935rad (-51.2^\circ), \varphi_2(0) = 0.0088rad (0.504^\circ)$, на рис. 9д: $\mu = 0.05, \varphi_1(0) = 0.671rad (38.445^\circ), \varphi_2(0) = -0.0335rad (-1.92^\circ)$. На рис. 9е: $\mu = 0.1, \varphi_1(0) = -0.741rad (-42.456^\circ), \varphi_2(0) = 0.0748rad (-4.286^\circ)$. Бачимо, що зі збільшенням величини коефіцієнта пропорційності мас маятників, блукання поблизу режиму зменшуються і форма стає більш визначеною. Зрозуміло, що при малих початкових кутах локалізований режим не існує, тому, що вплив магнітного моменту є дуже значним (рис. 10). Для побудови рис. 10 використовувалися такі значення параметрів: $A_3 = -0.73, \mu = 0.01, \varphi_1(0) = -0.053rad (-3.04^\circ), \varphi_2(0) = 0.000486rad (0.03^\circ)$.

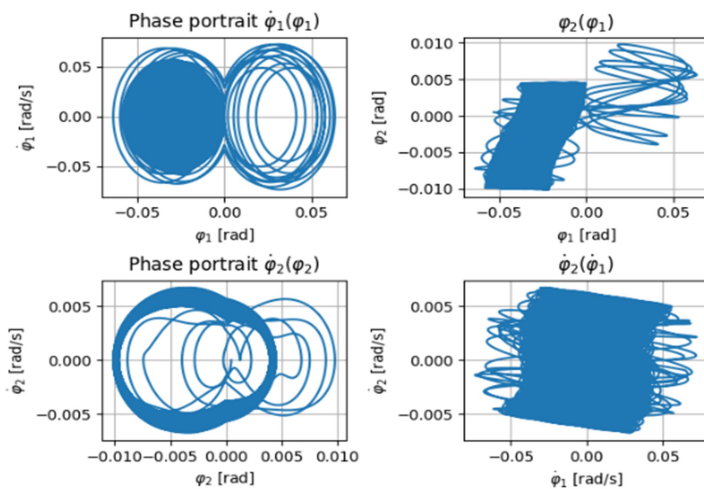
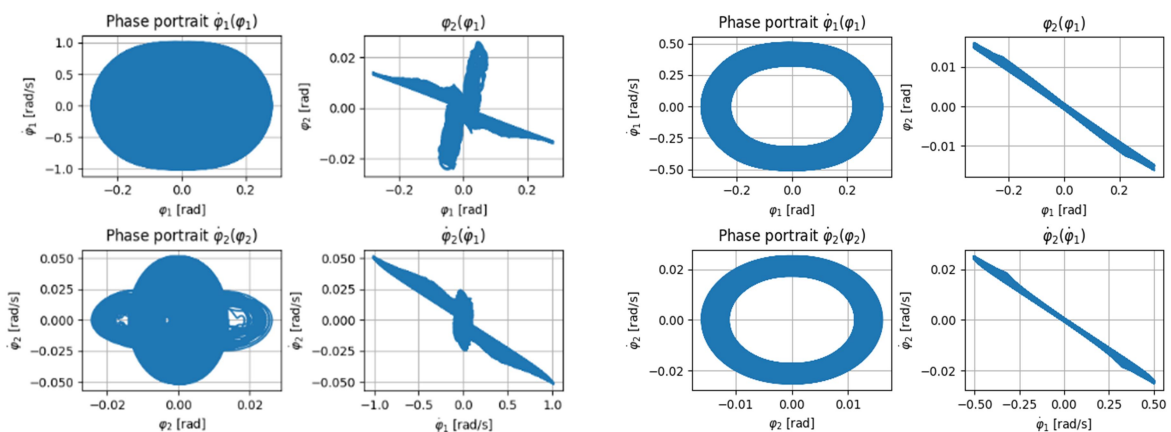


Рис. 10. Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі малих початкових кутах маятників

Розберемо вплив відстані між віссю обертання та центром тяжіння маятників s . Як і для синфазної форми, локалізований режим спостерігається при збільшенні відстані s . (рис. 11). На рис. 11а маємо: $\mu = 0.05, s = 0.9(m), \varphi_1(0) = -0.282rad (-16.16^\circ), \varphi_2(0) = 0.0141rad (0.808^\circ), A_3 = -1.13$, на рис. 11б: $\mu = 0.05, s = 2.5(m), \varphi_1(0) = 0.3266rad (18.713^\circ), \varphi_2(0) = -0.01614rad (-0.925^\circ), A_3 = -1.13$, на рис. 11в: $\mu = 0.02, s = 1.5(m), \varphi_1(0) = 0.4614rad (26.44^\circ), \varphi_2(0) = -0.0092rad (-0.53^\circ), A_3 = -0.33$ і для рис. 11г: $\mu = 0.02, s = 3.8(m), \varphi_1(0) = 0.57rad (32.66^\circ), \varphi_2(0) = -0.01126rad (-0.645^\circ), A_3 = -0.33$.



а

б

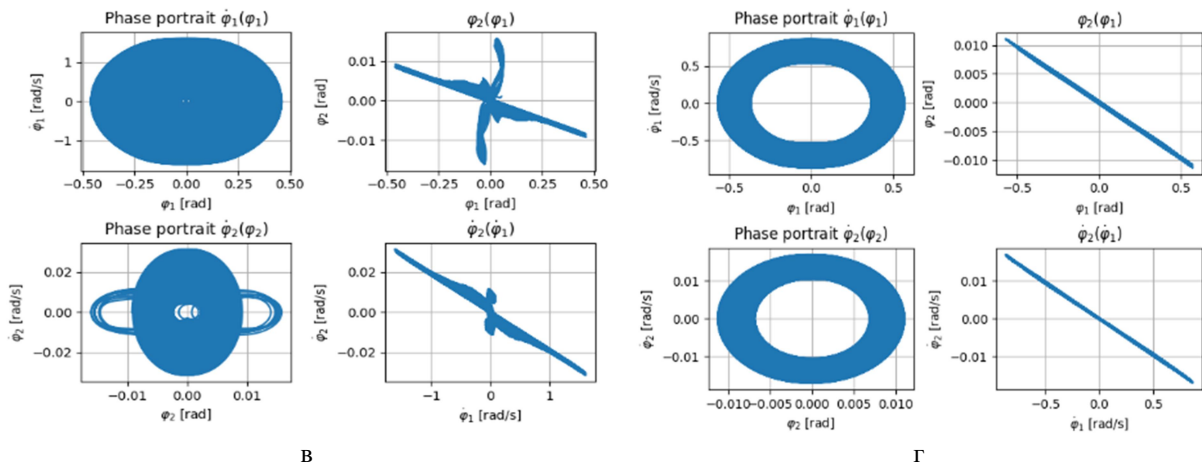


Рис. 11 (а-г). Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі при різних значеннях початкових умов, коефіцієнтів відношення мас маятників та відстані між центром мас та віссю обертання маятників

Дослідимо ефект коефіцієнту зв'язку k_l . Виявляється, що локалізований режим проявляється при збільшенні зв'язку та відстані між центром мас та віссю обертання маятників або при збільшенні, як зв'язку, так і коефіцієнта пропорційності мас маятників. Відповідні приклади показано на рис. 12. На рис. 12а: $\mu = 0.01$, $s = 3.5(m)$, $\varphi_1(0) = -0.3rad(-17.19^\circ)$, $A_3 = -1.13, k_l = 0.14(Nm/rad)$, $\varphi_2(0) = 0.0032rad(0.183^\circ)$, на рис. 12б: $\mu = 0.01$, $s = 3.5(m)$, $A_3 = -1.13$, $k_l = 0.84(Nm/rad)$,

$\varphi_1(0) = -0.2612rad(-14.966^\circ)$, $\varphi_1(0) = 0.00262rad(0.15^\circ)$, на рис.12в:

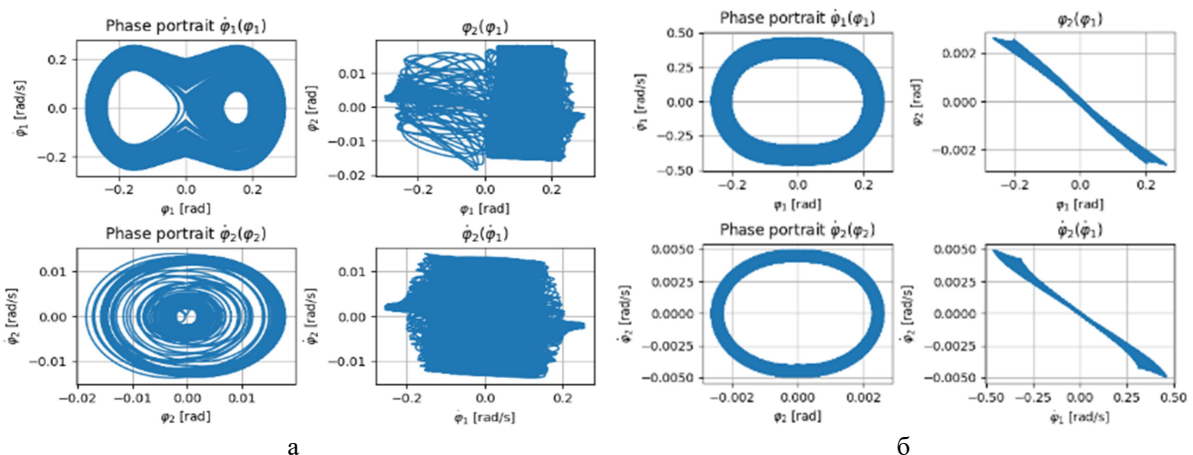
$\mu = 0.01, s = 1.5(m)$, $\varphi_1(0) = -0.281rad(-16.1^\circ)$, $A_3 = -1.13, k_l = 0.19(Nm/rad)$,

$\varphi_2(0) = 0.00282rad(0.1616^\circ)$, на рис. 12г: $\mu = 0.01$, $s = 1.5(m)$,

$\varphi_1(0) = 0.2354rad(13.5^\circ)$, $A_3 = -1.13$, $k_l = 0.91(Nm/rad)$, $\varphi_2(0) = -0.0023rad(-0.132^\circ)$,

на рис. 12д $\mu = 0.15, s = 1.5(m)$, $\varphi_1(0) = -0.06206rad(-3.56^\circ)$, $A_3 = -1.13$, $k_l = 0.08(Nm/rad)$, $\varphi_2(0) = -0.00515rad(-0.3^\circ)$ та на рис. 12е: $\mu = 0.15, s = 1.5(m)$,

$A_3 = -1.13$. $\varphi_1(0) = 0.333rad(19.08^\circ)$, $k_l = 0.99(Nm/rad)$, $\varphi_2(0) = -0.04824rad(-2.764^\circ)$.



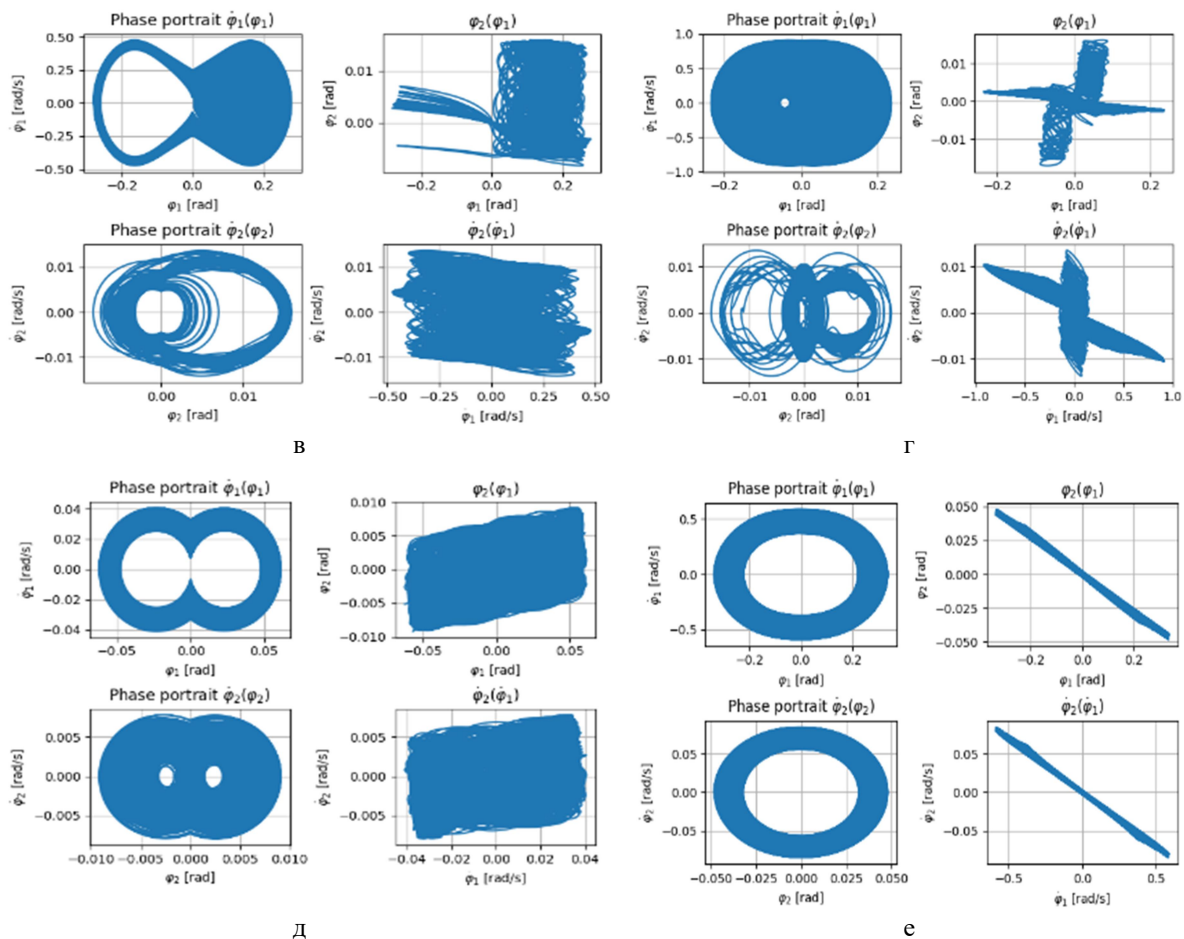


Рис. 12 (а-е). Фазові портрети та криві у конфігураційному просторі для дослідження впливу коефіцієнту

Для скорочення опишемо вплив коефіцієнтів дисипації на поведінку системи у випадку локалізованої моди коливань без представлення рисунків. Як і у випадку пов'язаної моди коливань деяке зростання цього коефіцієнту не завжди зберігає цю моду чи стягує близькі траєкторії до неї. Чисельне моделювання дозволяє зробити висновок, що зростання коефіцієнту пропорційності мас μ разом зі значними значеннями зв'язку k_l та відстані s при збільшенні коефіцієнтів тертя зменшують блукання траєкторій поблизу локалізованого режиму або стягують траєкторії до цього режиму.

5 ВИСНОВКИ

Стійка синфазна (пов'язана) форма коливань присутня не на всьому діапазоні початкових умов. Вона є нестійкою при малих початкових значеннях кутів відхилення маятників якщо маси маятників суттєво розрізняються. Збільшення коефіцієнта пропорційності мас маятників призводить до зменшення блукання траєкторій поблизу режиму. Синфазна мода більш виражена при більшій відстані між центром мас та віссю обертання, оскільки тоді вплив магнітного моменту менший. Цей пов'язаний режим спостерігається при збільшенні як відстані, так і маси меншого маятника. У більшості розглянутих випадках при великій відстані від осі обертання до центру мас маятника і чималому коефіцієнті співвідношення мас маятників збільшення значення коефіцієнта зв'язку призводить до стабілізації синфазної форми і зменшення блукання траєкторій поблизу такої моди. Збільшення дисипації не завжди стягує траєкторії до форми.

Як і синфазна мода, локалізована існує не на всьому діапазоні початкових відхилень маятників. Зі збільшенням величини коефіцієнта пропорційності мас маятників, блукання поблизу режиму зменшуються і форма стає більш визначеною. Як і для пов'язаної моди, локалізована спостерігається при збільшенні відстані s . З'ясувалося, що локалізований режим проявляється при збільшенні зв'язку та відстані між центром мас та віссю обертання маятників або при збільшенні, як зв'язку, так і коефіцієнта пропорційності мас маятників. Чималий коефіцієнт пропорційності мас разом з великим значенням зв'язку та відстані при збільшенні коефіцієнтів тертя зменшують блукання траєкторій поблизу локалізованого режиму або стягують траєкторії до цього режиму.

Література

1. Polczyński K., Wijata A., Awrejcewicz J., Wasilewski G. Numerical and experimental study of dynamics of two pendulums under a magnetic field, *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers. Part I: Journal of Systems and Control Engineering*. 2019. 233. pp. 441–453.
2. Wijata A., Polczyński K., Awrejcewicz J. Theoretical and numerical analysis of regular one-side oscillations in a single pendulum system driven by a magnetic field. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2021. Volume 150. 107229. DOI:10.1016/j.ymssp.2020.107229.
3. Polczyński K., Skurativskiy S., Bednarek M., Awrejcewicz J. Nonlinear oscillations of coupled pendulums subjected to an external magnetic stimulus. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2021. Volume 154(2). DOI:10.1016/j.ymssp.2020.107560.
4. Sarganova Yu. E., Mikhlin Yu. V. Localized and non-localized nonlinear normal modes in a system of two connected pendulums under a magnetic field. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2022. Volume 147. 104182.
5. Mikhlin Yu. V., Avramov K. V. Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments. *Appl. Mech. Rev.* 2010. Issue. 63(6). 060802.
6. Avramov K.V., Mikhlin Yu.V. Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. *Appl. Mech. Rev.* 2013. 65(2). 020801.
7. *Modal Analysis of Nonlinear Mechanical Systems* (Ed. G. Kerschen). Springer: Vienna. 2014. 340p.
8. Manevitch L. I., Smirnov V. V. Limiting Phase Trajectories and the Origin of Energy Localization in Nonlinear Oscillatory Chains. *Phys. Rev. E*. 2010. 82(3). 036602, 9p. DOI:https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.036602.
9. Vakakis A. F., Gendelman O. V., Bergman L. A., McFarland D. M. *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*. Springer Netherlands. 2018. 156.
10. Nayfeh A. H., Mook D. T. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons. 2008.
11. Mikhlin Yu. V., Shmatko T. V., Manucharyan G. V. Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions [*Computer & Structures*]. 2004. 82. 2733–2742.

References

1. Polczyński, K., Wijata, A., Awrejcewicz, A., Wasilewski, G. (2019). Numerical and experimental study of dynamics of two pendulums under a magnetic field. *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*. 233. 441–453.
2. Wijata, A., Polczyński, K., Awrejcewicz, J. (2021). Theoretical and numerical analysis of regular one-side oscillations in a single pendulum system driven by a magnetic field. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 150. DOI:10.1016/j.ymssp.2020.107229.
3. Polczyński, K., Skurativskiy, S., Bednarek, M., Awrejcewicz, J. (2021) Nonlinear oscillations of coupled pendulums subjected to an external magnetic stimulus. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 154(2). DOI:10.1016/j.ymssp.2020.107560.
4. Sarganova, Yu. E., Mikhlin, Yu. V. (2022) Localized and non-localized nonlinear normal modes in a system of two connected pendulums under a magnetic field. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 147. 104182.

5. Mikhlin, Yu. V., Avramov, K. V. (2010) Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments. *Appl. Mech. Rev.* 63(6). 060802.
6. Avramov, K.V., Mikhlin, Yu.V. (2013) Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. *Appl. Mech. Rev.* 65 (2). 020801.
7. *Modal Analysis of Nonlinear Mechanical Systems* (Ed. G. Kerschen). Springer: Vienna (2014).
8. Manevitch, L. I., Smirnov, V. V. (2010) Limiting Phase Trajectories and the Origin of Energy Localization in Nonlinear Oscillatory Chains. *Phys. Rev. E.* no 82 (3). 036602. 9.
9. Vakakis A. F., Gendelman O. V., Bergman L. A., McFarland D. M. *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*. Springer Netherlands. 2018. 156.
10. Nayfeh A. H., Mook D. T. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons. (2008).
11. Mikhlin Yu. V., Shmatko T. V. Manucharyan G.V. (2004) Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions. *Computer & Structures*. 82.2733–2742.

Сурганова Юлія Едуардівна

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
аспірант, асистент
вул. Кирпичова, 2, Харків, Україна, 61000
surganova.julia@gmail.com
ORCID: 0000-0002-6540-3025

Міхлін Юрій Володимирович

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
д.ф.-м.н., професор
вул. Кирпичова, 2, Харків, Україна, 61000
yuri.mikhlin@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1780-9346

Для посилань:

Сурганова Ю. Е., Міхлін Ю. В. Регулярна та складна поведінка маятникової системи у магнітному полі. *Механіка та математичні методи*, 2023. Т. V. № 1. С. 44–60.

For references:

Surhanova Y., Mikhlin Yu. (2023). Regular and complex behavior of a pendulum system in a magnetic field. *Mechanics and Mathematical Methods*. V(1). 44–60.