

УДК 539.3

## ВИКОРИСТАННЯ СИМЕТРІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДЕФОРМУВАННЯ ПЛИТ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ

Гуртовий О. Г.<sup>1</sup>, Тинчук С. О.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Національний університет водного господарства та природокористування

**Анотація.** Запропонована оптимізація розрахункової схеми деформування прямокутної багатошарової плити з трансверсально-ізотропними шарами, що опирається на жорстку (недеформівну) основу. Суть оптимізації полягає в розгляданні такої розрахункової схеми плити, в якій напружено-деформований стан (НДС) плити повністю описується лише одною складовою, а саме беззгиновою складовою симетричного НДС відносно серединної поверхні двосторонньо симетрично навантаженої плити. Для цього замість реальної конструкції багатошарової плити, що деформується без відриву від основи, пропонується розглядати розрахункову схему плити, яка утворена симетричною добудовою відносно поверхні контакту даної плити з основою. Плита буде двосторонньо симетрично навантаженою відносно серединної поверхні плити, а товщина плити збільшиться вдвоє. На серединній поверхні виконуються умови ковзного контакту верхньої і нижньої частин симетричної плити, тобто ковзкого контакту плити з основою. Для моделювання абсолютно жорсткого контакту на границі з основою в добудовану плиту вводиться додатковий тонкий шар великої жорсткості («недеформівний шар»), що не змінює суть розрахункової моделі. НДС плити буде беззгиновим, що суттєво спрощує його моделювання. Для беззгинового НДС побудована в пружній постановці двовимірна, високого ступеня ітераційного наближення, але тривимірна за характером відображення НДС модель деформування багатошарових прямокутних плит на жорсткій основі з ізотропними та трансверсально-ізотропними шарами, яка достатньо повно враховує деформації поперечного зсуву та поперечного обтиснення при поперечному навантаженні плити. Модель – континуальна, тобто кількість рівнянь та порядок диференціювання розрахункової системи рівнянь не залежить від кількості шарів в плиті. Цей порядок диференціювання і кількість розрахункових рівнянь може залежати лише від порядку ітераційного наближення моделі. Приведено виведення розрахункових диференціальних рівнянь в узагальнених зусиллях та в функціях переміщень, а також отримано граничні умови варіаційним методом Лагранжа. Приведено результати аналітичного розв'язку задачі деформування однорідної прямокутної плити при ковзному контакті з жорсткою основою при граничних умовах типу Нав'є під дією поперечного синусоїдального навантаження. Виконано порівняння результатів розрахунків з точним тривимірним розв'язком.

**Ключові слова:** багатошарова плита, жорстка основа, поперечний зсув, поперечне обтиснення, континуальна модель.

## USING SYMMETRY TO SOLVE PROBLEMS OF DEFORMATION OF PLATES ON A RIGID FOUNDATION

O. Gurtovyi<sup>1</sup>, S. Tynchuk<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National University of Water and Environmental Engineering

**Abstract.** The optimization of the design scheme of deformation of a rectangular multilayer plate with transversally isotropic layers resting on a rigid (non-deformable) foundation is proposed. The essence of optimization is to consider such a design diagram of the plate, in which the stress-strain state (SSS) of plate would be fully described by only one component, namely the unflexural component of symmetrical SSS relative to the middle surface of plate which is bilaterally symmetrically loaded. To do this, instead of the actual design of the multilayer plate, which is deformed without separation from the foundation, it is suggested to consider the design diagram of the

plate, which is formed by supplementing it with a symmetric one about the contact surface of the foundation. In this case, the plate will be symmetrically loaded with respect to the middle surface of the plate, and the thickness of the plate will double. On the middle surface, the conditions of sliding contact of the upper and lower parts of the symmetrical plate, i.e. sliding contact of the plate with foundation are fulfilled. To model absolutely rigid contact at the border with the foundation, an additional thin layer of high rigidity ("non-deformable layer") is introduced into the supplemented plate. This does not change the essence of the calculation model of plate. The SSS of plate will be unflexural, which significantly simplifies its modeling. A two-dimensional model of deformation of multilayer rectangular plates on a rigid foundation with isotropic and transversally-isotropic layers is constructed in an elastic formulation for a unflexural SSS, with a high degree of iterative approximation, but three-dimensional by the nature display of the SSS. This model sufficiently takes into account transverse shear deformations and of transverse compression of the plate under transverse loading. The model is continuous, that is, the number of equations and the order of differentiation of the solving system of equations does not depend on the number of layers in the plate. This order of differentiation and the number of solving equations can depend only on the order of iterative approximation of the model. The derivation of the solving differential equations in the generalized forces and displacement functions is given, as well as the boundary conditions are obtained by the variational Lagrange method. The results of the analytical solution of the problem of deformation of homogeneous rectangular plate in sliding contact with a rigid foundation with Navier-type boundary conditions under the action of a transverse sinusoidal load are given. A comparison of the calculation results with the exact three-dimensional solution ones was made.

**Keywords:** multilayered plate, rigid foundation, transverse shear, transverse compression, continual model.

## 1 ВСТУП

Застосування понять симетрія, кососиметрія досить поширене в практиці інженерних розрахунків конструкцій, так як дозволяє іноді суттєво спростити підходи до розв'язання задач. В даному дослідженні ці поняття застосовано до розв'язання задачі аналізу напружено-деформованого стану багатошарових прямокутних плит, що спираються на недеформівну, абсолютно жорстку основу. Моделі деформування плит на жорсткій основі мають свою специфіку, оскільки в них переважає беззгинова складова НДС і важливу роль відіграють, окрім деформацій поперечного зсуву, також деформації поперечного обтиснення.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Як показано численними дослідженнями, ефекти поперечного обтиснення та поперечного зсуву при згинанні трансверсально-ізотропних пластин та в пластинах на пружних основах суттєво впливають на напружено-деформований стан пластин. Підходи до побудови уточнених моделей, в тому числі ітераційних за своїм змістом, які враховують ці ефекти, викладено в [1, 2]. Проте ці моделі являються згинувими за своїм змістом. А при деформуванні плит на недеформівній основі переважає беззгинова компонента НДС. Тому актуальною є розробка та числова реалізація беззгинової уточненої моделі НДС багатошарових плит на жорстких основах, причому важливим фактором є її континуальна концепція. Задачі деформування плит на жорсткій основі розглядалися в уточненій постановці О. Г. Гуртовим [3], Гуртовим О. Г. і Тинчуком С. О. [4], а в тривимірній постановці О. В. Марчуком [5]. Саме беззгинова уточнена континуальна модель розглянута в [4]. Подальші дослідження в цьому напрямку представлено в даній роботі.

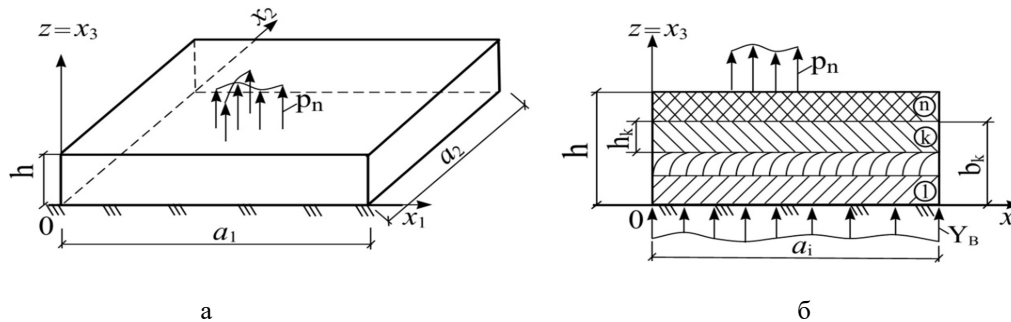
## 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою роботи є розробка уточненої моделі беззгинового НДС плит та її застосування для дослідження НДС багатошарових ізотропних та трансверсально-ізотропних плит, що опираються на жорсткі основи, за дії поперечних навантажень.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглядається лінійно-пружне деформування багатошарової прямокутної плити товщиною  $h$  і розмірами в плані  $a_1$  та  $a_2$ , яка опирається на жорстку основу. Шари плити  $k = \overline{1, n}$  трансверсально-ізотропні та ізотропні, кожний з довільною, але сталою товщиною  $h_k$ . В ортогональній системі координат  $x_1, x_2, x_3 = z$  площина  $x_1 0 x_2$  співпадає з площиною контакту плити та основи (рис. 1) і паралельна з площиною ізотропії матеріалу в кожному шарі, а вісь  $z$  направлена перпендикулярно до цієї поверхні контакту і до поверхонь міжшарового контакту. На плиту діє поперечне навантаження  $p_n(x_i)$ , прикладене до верхньої поверхні плити.

Застосовується наступна система позначень: верхній індекс в дужках позначає номер шару плити, а нижні індекси – напрямки координатних осей ( $i, j = \overline{1, 2}; \alpha, \beta = \overline{1, 3}$ ); частинні похідні позначені нижніми індексами після коми  $( )_{,\alpha} = \partial / \partial x_\alpha$ .



**Рис. 1.** Розрахункова схема багатошарової плити на основі:  
а) загальний вигляд; б) поперечний переріз плити

$Y_B(x_i)$  – реакція відпору основи, яка є невідомою функцією. Вводиться підсумовування за нижніми індексами, що повторюються. Сума інтегралів по  $z$  від довільної функції  $f(z)$  з розривами на межах шарів  $z = b_k$  позначена одним інтегралом

$$\text{від цієї функції } F^{(k)}(z) = \int_{b_{k-1}}^z f^{(k)}(z)dz + \sum_{r=1}^{k-1} \int_{b_{r-1}}^{b_r} f^{(r)}(z)dz = \int_{b_0}^z f^{(k)}(z)dz.$$

В довільній точці  $k$ -го шару компоненти вектора зміщень позначено функціями  $u_\alpha^{(k)}(x_i, z)$ , компоненти тензора деформацій –  $e_{\alpha\beta}^{(k)}(x_i, z)$ , компоненти тензора напруження –  $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}(x_i, z)$ .

На поверхні  $S$  контакту плити з основою при  $z = 0$  моделюється ковзкий контакт без тертя та без відриву від основи. Граничні умови для всіх компонентів вектора зміщень  $u_\alpha$  та для поперечних нормальних напруження  $\sigma_{33}$  і поперечних дотичних напруження  $\sigma_{i3}$  на поверхні  $S$  мають вигляд:

$$u_\alpha^{(1)} \neq 0; \sigma_{33}^{(1)} = -Y_B; \sigma_{i3}^{(1)} = 0; i = \overline{1, 2}; \alpha = \overline{1, 3}; z = 0. \quad (1)$$

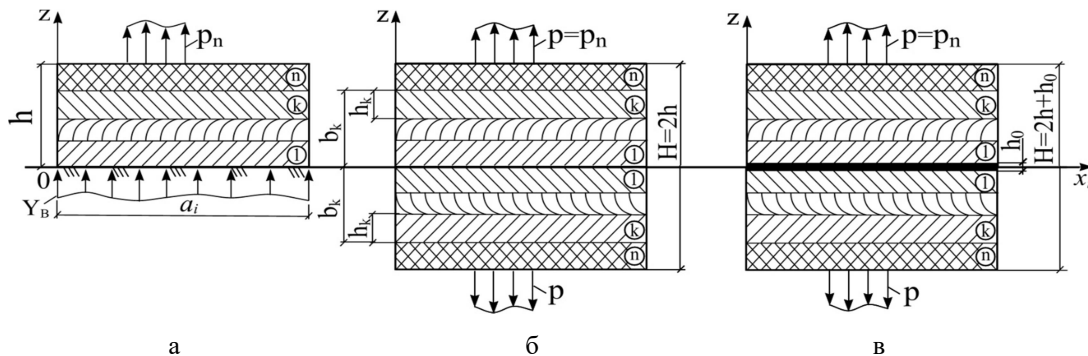
Між шарами плити виконуються умови жорсткого контакту без проковзування на поверхнях з координатою  $z = b_k$  ( $k = \overline{1, (n-1)}$ ):

$$u_\alpha^{(k)}(x_i, b_k) = u_\alpha^{(k-1)}(x_i, b_k); \sigma_{\alpha 3}^{(k)}(x_i, b_k) = \sigma_{\alpha 3}^{(k-1)}(x_i, b_k). \quad (2)$$

Розв'язання задачі з визначення НДС плити виконаємо наближено, зведенням тривимірної задачі до двовимірної. Застосуємо для цього метод гіпотез, зокрема континуальний підхід [1, 4], задавши гіпотетично функції розподілу НДС за поперечною координатою  $z$ .

Ґрунтуючись на розкладанні НДС плити на згинові та беззгинові складові, пропонується оптимізація розрахункової схеми деформування прямокутної багатошарової плити на жорсткій основі. Суть оптимізації полягає в розгляді такої розрахункової схеми плити, в якій НДС плити повністю описувався б лише одною складовою, а саме беззгиновою складовою НДС. Для цього замість реальної конструкції багатошарової плити (рис. 2, а), що деформується без відриву від основи, пропонується розглядати розрахункову схему плити, яка утворена симетричною добудовою відносно поверхні контакту даної плити з основою. У цьому випадку плита буде двосторонньо симетрично навантаженою відносно серединної поверхні плити, а товщина плити збільшиться вдвоє (рис. 2, б).

Оскільки у випадку жорсткої основи деформації основи відсутні, координатну поверхню  $x_1 0 x_2$  сумісно з поверхнею контакту плити і основи (рис. 2, б). Тоді функція прогину на цій поверхні  $w(x_j) \equiv 0$  при  $z = \delta_w = 0$ , і отже  $w$  не увійде у вираз, що апроксимує зміщення  $u_3^{(k)}$ .



**Рис. 2.** Схеми оптимізації розрахункової схеми плити:

- а) задана розрахункова схема; б) оптимізована розрахункова схема плити за умови ковзкого контакту з основою; в) оптимізована розрахункова схема плити за умови жорсткого контакту з основою

Для моделювання жорсткого контакту плити з основою без проковзування в розрахунковій схемі (рис. 2, в) всередині плити потрібно додатково вводити відносно тонкий, у порівнянні з іншими шарами, товщиною  $h_0$  „абсолютно” жорсткий прошарок, позначений  $k = 0$ . „Абсолютна” жорсткість прошарку (відносно жорсткості інших шарів) забезпечується прийняттям відносно великих модулів пружності  $E^{(0)} = E'^{(0)} = nE$ ;  $G^{(0)} = G'^{(0)} = nG$ ;  $\nu = \nu' \equiv 0$ , де  $n \approx 10^3$ , а  $E$  і  $G$  – найбільші значення модулів пружності та зсуву із усіх наявних матеріалів шарів у плити. У цьому випадку граничні умови при  $z = \pm h_0 / 2$  матимуть вигляд:

$$u_3^{(1)} = 0; u_i^{(1)} = 0; \sigma_{i3}^{(1)} \neq 0 \text{ (при } z = \pm h_0 / 2 \text{)}. \quad (3)$$

І хоча на поверхні  $z = 0$  залишаються справедливими умови (1), проте  $u_i^{(1)} \rightarrow 0$  внаслідок відносно великої жорсткості прошарку.

В результаті континуального наближеного моделювання за методикою, викладеною в [4], отримано компоненти вектора переміщень і кінематична модель (модель 1) має вигляд:

$$\begin{aligned} u_3^{(k)} &= \psi_{3t_3}^{(k)}(z)\gamma_t + \psi_{33_3}^{(k)}(z)p; \quad t = \overline{1, 2}; \\ u_i^{(k)} &= v_i - \psi_{3t_i}^{(k)}(z)\gamma_{t_i} - \psi_{33_i}^{(k)}(z)p_{3_i} - \psi_{ir}^{(k)}(z)\beta_{ir}; \quad r = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (4)$$

При цьому компоненти зміщень представлені сумами добутоків гіпотетично заданих степеневих функцій  $\psi_{3t}^{(k)}$ ,  $\psi_{ir}^{(k)}$  поперечної координати  $z$ , представлених в [4], та шуканих функцій  $\gamma_t$  – функцій поперечного обтиснення,  $\beta_{ir}$  – функцій поперечного зсуву і  $v_i$  – горизонтальних переміщень координатної поверхні  $x_1 0 x_2$ .

Таким чином, тривимірна задача НДС зведена до уточненої двовимірної задачі НДС з шуканими функціями двох координат  $x_1, x_2$ .

Проте, при застосуванні числових методів розрахунку, зокрема ВРМ, виявляється необхідним замінити  $p(x_i)$  в (4) невідомою функцією обтиснення  $\gamma_3(x_i)$ . Таким чином, далі реалізується також модель 2 у вигляді, що містить лише невідомі функції координатної поверхні  $x_1 0 x_2$ :

$$\begin{aligned} u_3^{(k)} &= \psi_{3t,3}^{(k)}(z)\gamma_t; \quad t = \overline{1, 3}; \\ u_i^{(k)} &= v_i - \psi_{3t}^{(k)}(z)\gamma_{t,i} - \psi_{ir}^{(k)}(z)\beta_{ir}; \quad r = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (5)$$

Шукана функція  $\gamma_3(x_i)$  – гладка й відповідає умовам нерозривності й диференційованості так само, як і функції  $v_i, \gamma_1, \gamma_2, \beta_{ir}$ .

Для підвищення точності апроксимації беззгинового НДС у моделі (4), (5) включені запропоновані в [4, 6, 7] функції, що моделюють ефекти від поперечних зсувних деформацій та від деформацій поперечного обтиснення у вищих наближеннях. Ці апроксимуючі за координатою  $z$  функції мають вигляд:

$$\begin{aligned} \psi_{3t,3}^{(k)} &= \int_0^z a_{3333}^{(s)} f_t^{(s)} dz; \quad \psi_{33,3}^{(k)} = \int_0^z a_{3333}^{(s)} dz; \\ \psi_{ir}^{(k)} &= -\int_0^z a_{i3i3}^{(s)} f_{ir}^{(s)} dz; \quad \psi_{3l}^{(k)} = \int_0^z \psi_{3l,3}^{(s)} dz; \quad s = \overline{1, k}; \quad l = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Функції  $[\psi_{3l,3}] = a_t^{(k)} z^{2t+1}$  – непарного степеню  $z$ , а функції  $[\psi_{3l}; \psi_{ir}] = a_t^{(k)} z^{2t}$  – парного степеню  $z$ .

Зокрема, для однорідної пластини функції (6) запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \psi_{31,3} &= A_{jjj} a_{3333} H^5 (48\xi^5 - 40\xi^3 + 15\xi) / 5760; \quad \psi_{33,3} = a_{3333} H \xi; \quad \xi = \frac{z}{H}; \\ \psi_{31} &= A_{jjj} a_{3333} H^6 (16\xi^6 - 20\xi^4 + 15\xi^2) / 11520; \quad \psi_{33} = a_{3333} H^2 \xi^2 / 2; \quad j = \overline{1, 2}; \\ \psi_{32,3} &= A_{jjj}^2 a_{3333} a_{j3j3} H^7 (192\xi^7 - 336\xi^5 + 196\xi^3 - 63\xi) / 967680; \quad -0,5 \leq \xi \leq 0,5; \\ \psi_{32} &= A_{jjj}^2 a_{3333} a_{j3j3} H^8 (48\xi^8 - 112\xi^6 + 98\xi^4 - 63\xi^2) / 1935360; \\ \psi_{i1} &= -A_{iii} a_{i3i3} H^4 (2\xi^4 - \xi^2) / 48; \quad \psi_{i2} = -A_{iii}^2 a_{i3i3}^2 H^6 (16\xi^6 - 20\xi^4 + 7\xi^2) / 11520; \\ \psi_{i3} &= -A_{iii}^3 a_{i3i3}^3 H^8 (48\xi^8 - 112\xi^6 + 98\xi^4 - 31\xi^2) / 1935360; \\ \psi_{i4} &= -A_{iii}^4 a_{i3i3}^4 H^{10} (2560\xi^{10} - 960\xi^8 + 1568\xi^6 - 1240\xi^4 + 381\xi^2) / 928972800. \end{aligned} \quad (7)$$

Розрахункову систему рівнянь та граничні умови для варіанту моделі 1 отримаємо із варіаційного принципу Лагранжа, за яким варіація повної потенціальної енергії складає:

$$\delta U = \delta \Pi - \delta H_{1n} - \delta H_{1L} = 0. \quad (8)$$

Тут  $\delta \Pi$  – варіація потенціальної енергії деформації має вигляд:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \iint_S \left\{ \int_{-b_n}^{b_n} \left[ \sigma_{ij}^{(k)} \cdot \delta \left( v_{i,j} - \psi_{3t}^{(k)}(z)\gamma_{t,ij} - \psi_{ir}^{(k)}(z)\beta_{ir,j} \right) + \sigma_{i3}^{(k)} \cdot \delta \left( -\psi_{ir,3}^{(k)}(z)\beta_{ir} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma_{33}^{(k)} \cdot \delta \left( \psi_{3t,33}^{(k)}(z)\gamma_t \right) \right] dz \right\} dS. \end{aligned} \quad (9)$$

Для навантаження, прикладеного на зовнішніх горизонтальних поверхнях плити, варіація роботи має вигляд:

$$\delta H_{1n} = \iint_S \left( \overline{\psi}_{3t,3}^{(-n)} + \overline{\psi}_{3t,3}^{(-n)} \right) p \cdot \delta \gamma_t dS, \quad (10)$$

де  $\psi_{3t,3}^{(-n)}$  та  $\psi_{3t,3}^{(-n)}$  – значення функції  $\psi_{3t,3}^{(k)}$  при  $z = \pm b_n$  (рис. 2, б, в) в точках на поверхнях плити ( $k = \pm n$ ).

Варіацію роботи поверхневих сил на торцях плити зведемо до роботи контурних сил на контурі плити  $L$  в площині  $x_1 x_2$ . Запишемо її у вигляді

$$\delta H_{1L} = \int_L \left\{ \int_{-b_n}^{b_n} \left[ \sigma_{mm}^{(k)} (\delta v_m - \psi_{3t}^{(k)}(z) \delta \gamma_{t,m} - \psi_{mr}^{(k)}(z) \delta \beta_{mr}) + \sigma_{m3}^{(k)} (\psi_{3t,3}^{(k)}(z) \delta \gamma_t) + \sigma_{ml}^{(k)} (\delta v_l - \psi_{3t}^{(k)}(z) \delta \gamma_{t,l} - \psi_{lr}^{(k)}(z) \delta \beta_{lr}) \right] dz \right\} dL; \quad t = \overline{1, 2}; \quad r = \overline{1, 4}. \quad (11)$$

Для отримання із функціонала повної енергії (8) розрахункової системи диференціальних рівнянь введемо наступні узагальнені зусилля:

$$N_{ij} = \int_{-b_n}^{b_n} \sigma_{ij}^{(k)} dz; \quad M_{ij}^{[\alpha s]} = \int_{-b_n}^{b_n} \sigma_{ij}^{(k)} \psi_{\alpha s}^{(k)} dz; \quad \alpha = \overline{1, 3}; \quad s = \overline{1, 4};$$

$$Q_i^{[\alpha s]} = \int_{-b_n}^{b_n} \sigma_{i3}^{(k)} \psi_{\alpha s,3}^{(k)} dz; \quad N_3^{[3t]} = \int_{-b_n}^{b_n} \sigma_{33}^{(k)} \psi_{3t,33}^{(k)} dz. \quad (12)$$

Із варіаційного рівняння отримуємо систему диференціальних рівнянь в узагальнених зусиллях, вигляд якої і кількість рівнянь не залежить від числа шарів у плиті:

$$N_{ij,j} = 0 \quad (\delta v_i); \quad i, j = \overline{1, 2};$$

$$M_{ij,ij}^{[3t]} - N_3^{[3t]} + p \cdot (\psi_{3t,3}^{(n)} + \psi_{3t,3}^{(-n)}) = 0 \quad (\delta \gamma_t); \quad t = \overline{1, 2};$$

$$M_{ij,j}^{[ir]} - Q_i^{[ir]} = 0 \quad (\delta \beta_{ir}); \quad r = \overline{1, 4}, \quad (13)$$

де в дужках вказано відповідні множники варіацій шуканих функцій в  $\delta \Pi$ .

Граничні умови на краях та на торцях плити  $x_m = 0$ ,  $x_m = a_m$  ( $m, l = \overline{1, 2}$ ) мають вигляд:

$$(N_{mm} - N_{mm}^*) \delta v_m = 0; \quad (N_{ml} - N_{ml}^*) \delta v_l = 0;$$

$$(M_{mm,m}^{[3t]} + 2M_{ml,l}^{[3t]} - M_{ml,l}^{[3t]*} - Q_m^{[3t]*}) \delta \gamma_t = 0; \quad (M_{mm}^{[3t]} - M_{mm}^{[3t]*}) \delta \gamma_{t,m} = 0;$$

$$(M_{mm}^{[mr]} - M_{mm}^{[mr]*}) \delta \beta_{mr} = 0; \quad (M_{ml}^{[lr]} - M_{ml}^{[lr]*}) \delta \beta_{lr} = 0. \quad (14)$$

Для їх виконання достатньо щоб один із множників дорівнював нулю в кожній умові.

Розрахункова система диференціальних рівнянь відносно функцій зміщень у частинних похідних зі сталими коефіцієнтами отримана із системи (13) підстановкою виразів для зусиль (12) та з використанням кінематичних гіпотез (4) моделі 1, співвідношень Коші й закону Гука. Система має вигляд:

$$[L] \cdot [u] = [p], \quad (15)$$

де  $[u]$  – матриця шуканих функцій, яка має вигляд

$$[u] = [v_1, v_2, \gamma_t, \beta_{1r}, \beta_{2r}]^T. \quad (16)$$

$[L]$  – матриця диференціальних операторів

$$[L] = \begin{pmatrix} L_{v_1}^{v_1} & L_{v_1}^{v_2} & L_{v_1}^{\gamma_t} & L_{v_1}^{\beta_{1r}} & L_{v_1}^{\beta_{2r}} \\ L_{v_2}^{v_1} & L_{v_2}^{v_2} & L_{v_2}^{\gamma_t} & L_{v_2}^{\beta_{1r}} & L_{v_2}^{\beta_{2r}} \\ L_{\gamma_t}^{v_1} & L_{\gamma_t}^{v_2} & L_{\gamma_t}^{\gamma_q} & L_{\gamma_t}^{\beta_{1r}} & L_{\gamma_t}^{\beta_{2r}} \\ L_{\beta_{1r}}^{v_1} & L_{\beta_{1r}}^{v_2} & L_{\beta_{1r}}^{\gamma_t} & L_{\beta_{1r}}^{\beta_{1g}} & L_{\beta_{1r}}^{\beta_{2g}} \\ L_{\beta_{2r}}^{v_1} & L_{\beta_{2r}}^{v_2} & L_{\beta_{2r}}^{\gamma_t} & L_{\beta_{2r}}^{\beta_{1g}} & L_{\beta_{2r}}^{\beta_{2g}} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

де в диференціальних операторах  $L_k^f$  верхній індекс  $f$  вказує на невідомі функції зміщень, що підлягають диференціюванню. В цих операторах множник типу  $(\cdot)_{,ij}$  потрібно розуміти як диференціювання  $(\cdot)_{,ij} = \partial^2(\cdot) / \partial x_i \partial x_j$  відповідних функцій  $f$  (позначені в операторі верхнім індексом), а індекс  $k$  позначає функцію, при варіюванні якої отримано даний оператор;

$[p]$  – матриця, що враховує задане зовнішнє навантаження  $p$  і має вигляд

$$[p] = [p_{v_1}, p_{v_2}, p_{\gamma_t}, p_{\beta_{1r}}, p_{\beta_{2r}}]^T \cdot p. \quad (18)$$

Диференціальні оператори в (17) мають вигляд:

$$\begin{aligned} L_{v_i}^{v_j} &= B_0 \cdot (\cdot)_{,ii} + F_0 \cdot (\cdot)_{,jj}; \quad L_{v_i}^{\gamma_t} = B_0' \cdot (\cdot)_{,ji} + F_0 \cdot (\cdot)_{,ji}; \\ L_{v_i}^{\gamma_t} &= -B_{3t} \cdot (\cdot)_{,iii} - (B_{3t}' + 2F_{3t}) \cdot (\cdot)_{,ijj} + P_t \cdot (\cdot)_{,i}; \quad L_{v_i}^{\beta_{1r}} = -B_{ir} \cdot (\cdot)_{,ii} - F_{ir} \cdot (\cdot)_{,jj}; \\ L_{v_i}^{\beta_{jr}} &= -B_{jr}' \cdot (\cdot)_{,ji} - F_{jr} \cdot (\cdot)_{,ji}; \quad L_{\gamma_t}^{v_i} = B_{3t} \cdot (\cdot)_{,iii} + (B_{3t}' + 2F_{3t}) \cdot (\cdot)_{,ijj} - P_t \cdot (\cdot)_{,i}; \quad t, q = \overline{1, 2}; \\ L_{\gamma_q}^{\gamma_t} &= -D_{qt}^{33} \cdot (\cdot)_{,iii} - (2D_{qt}'^{33} + 4K_{qt}^{33}) \cdot (\cdot)_{,ijj} + (J_{qt}^3 + H_{qt}^3) \cdot (\cdot)_{,ii} + R_{qt} \cdot (\cdot); \\ L_{\gamma_t}^{\beta_{1r}} &= -D_{rt}^{i3} \cdot (\cdot)_{,iii} - (D_{rt}'^{i3} + 2K_{rt}^{i3}) \cdot (\cdot)_{,ijj} + J_{rt}^i \cdot (\cdot)_{,i}; \quad r, g = \overline{1, 4}; \\ L_{\beta_{1g}}^{\beta_{1r}} &= -D_{gr}^{ii} \cdot (\cdot)_{,ii} - K_{gr}^{ii} \cdot (\cdot)_{,jj} + T_{gr}^i \cdot (\cdot); \quad L_{\beta_{1g}}^{\beta_{jr}} = -D_{gr}'^{ij} \cdot (\cdot)_{,ij} - K_{gr}^{ij} \cdot (\cdot)_{,ij}. \end{aligned} \quad (19)$$

Диференціальні оператори  $p_k$  в (18) мають вигляд:

$$\begin{aligned} p_{v_i} &= B_{33} \cdot (\cdot)_{,iii} + (B_{33}' + 2F_{33}) \cdot (\cdot)_{,ijj} - P_3 \cdot (\cdot)_{,i}; \\ p_{\gamma_t} &= D_{33}^{33} \cdot (\cdot)_{,iii} + (2D_{33}'^{33} + 4K_{33}^{33}) \cdot (\cdot)_{,ijj} - (J_{33}^3 + H_{33}^3) \cdot (\cdot)_{,ii} - R_{qt} \cdot (\cdot) - (\psi_{3t,3}^{(n)} + \psi_{3t,3}^{(-n)}) \cdot (\cdot); \\ p_{\beta_{1r}} &= D_{r3}^{i3} \cdot (\cdot)_{,iii} + (D_{r3}'^{i3} + 2K_{r3}^{i3}) \cdot (\cdot)_{,ijj} - J_{r3}^i \cdot (\cdot)_{,i}. \end{aligned} \quad (20)$$

Сталі коефіцієнти в диференціальних операторах (19) і (20) є узагальненими фізико-геометричними характеристиками плити і визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} B_0 &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} dz; \quad B_0' = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1122} dz; \quad B_{\alpha s} = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} \psi_{\alpha s} dz; \quad B_{\alpha s}' = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1122} \psi_{\alpha s} dz; \\ P_t &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{3t,33} dz; \quad F_0 = \int_{-b_n}^{b_n} G dz; \quad F_{\alpha s} = \int_{-b_n}^{b_n} G \psi_{\alpha s} dz; \quad \alpha, \mu = \overline{1, 3}; \\ K_{fs}^{\alpha\mu} &= \int_{-b_n}^{b_n} G \psi_{\alpha f} \psi_{\mu s} dz; \quad D_{fs}^{\alpha\mu} = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} \psi_{\alpha f} \psi_{\mu s} dz; \quad s, f = \overline{1, 4}; \quad D_{fs}'^{\alpha\mu} = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1122} \psi_{\alpha f} \psi_{\mu s} dz; \\ J_{ft}^\alpha &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{\alpha f} \psi_{3t,33} dz; \quad H_{ts}^\alpha = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{3t,33} \psi_{\alpha s} dz; \end{aligned}$$



$$R_{tq} = \int_{-b_n}^{b_n} A_{3333} \psi_{3t,33} \psi_{3q,33} dz; \quad t, q = \overline{1, 3}; \quad T_{rg}^i = \int_{-b_n}^{b_n} G' \psi_{ir,3} \psi_{ig,3} dz; \quad r, g = \overline{1, 4}. \quad (21)$$

Загальний порядок диференціювання системи (15) не залежить від кількості шарів і визначається як  $n = 2 \cdot 2 \cdot (1 + r) + 4 \cdot t$ .

Для варіанту 2 моделі (5) кількість шуканих функцій обчислення збільшується з двох до трьох  $\gamma_t$  ( $t = \overline{1, 3}$ ), а вплив зовнішнього навантаження на НДС плити в функціоналі повної енергії (8) враховується функціоналом роботи зовнішнього навантаження (10).

Система розрахункових рівнянь в узагальнених зусиллях та граничні умови для моделі варіанту 2 аналогічні (13) та (14), проте збільшується кількість невідомих функцій обчислення ( $t = \overline{1, 3}$ ). Система розрахункових рівнянь в зміщеннях має вигляд (15), проте для варіанту моделі 2 спрощується права частина (18) до вигляду:

$$p_{v_i} = 0; \quad p_{\gamma_t} = -p \cdot (\psi_{3t,3}^{(n)} + \psi_{3t,3}^{(-n)}); \quad p_{\beta_r} = 0; \quad t = \overline{1, 3}. \quad (22)$$

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для обґрунтування достовірності отриманої моделі розглянуто задачу плоскої деформації товстої однорідної плити на жорсткій основі під дією синусоїдального навантаження  $p = p_0 \sin(\pi x_1 / a_1)$ . Матеріал плити ізотропний з коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,3$ ;  $h = 0,6$  м;  $a_1 = 1,8$  м ( $a_1 / h = 3$ ;  $a_1 / H = 1,5$ ). На контурі ( $x_1 = 0$ ;  $a_1$ ) виконуються граничні умови Нав'є:  $u_2 = u_3 = 0$ ;  $\sigma_{11} = 0$ . Контакт плити з основою ковзкий.

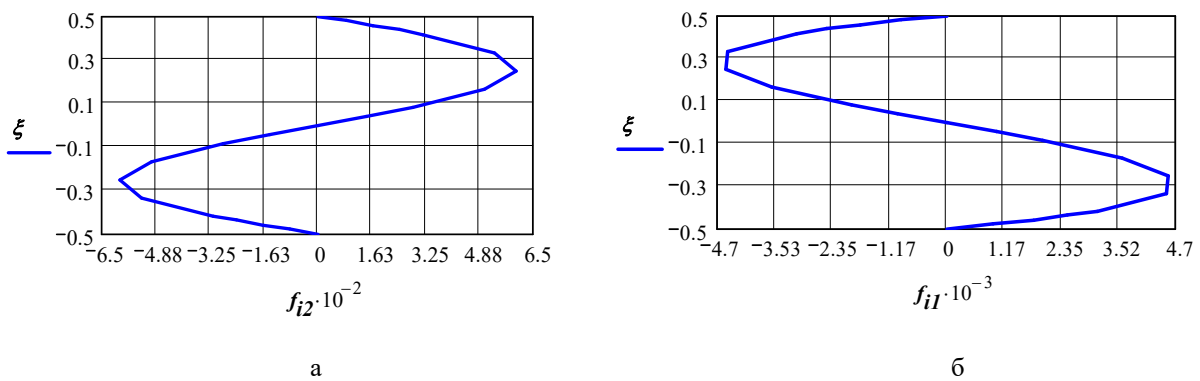


Рис. 3. Графіки функцій розподілу напруження  $\sigma_{13}$  по висоті однорідної плити

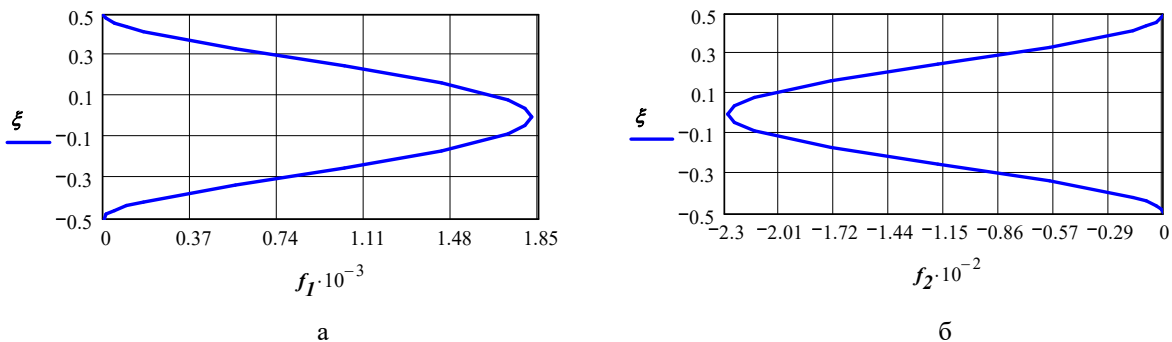


Рис. 4. Графіки функцій розподілу напруження  $\sigma_{33}$  по висоті однорідної плити

Гіпотетичні функції розподілу напруження по висоті для симетрично добудованої (рис. 2, б) однорідної плити за ковзкого контакту з основою мають вигляд ( $-0,5 \leq \xi \leq 0,5$ ;  $\xi = z/H$ ) представлені на рисунках 3 і 4.

Гіпотетичні функції розподілу зміщень (6), (7) по висоті плити представлені на рисунках 5 і 6.

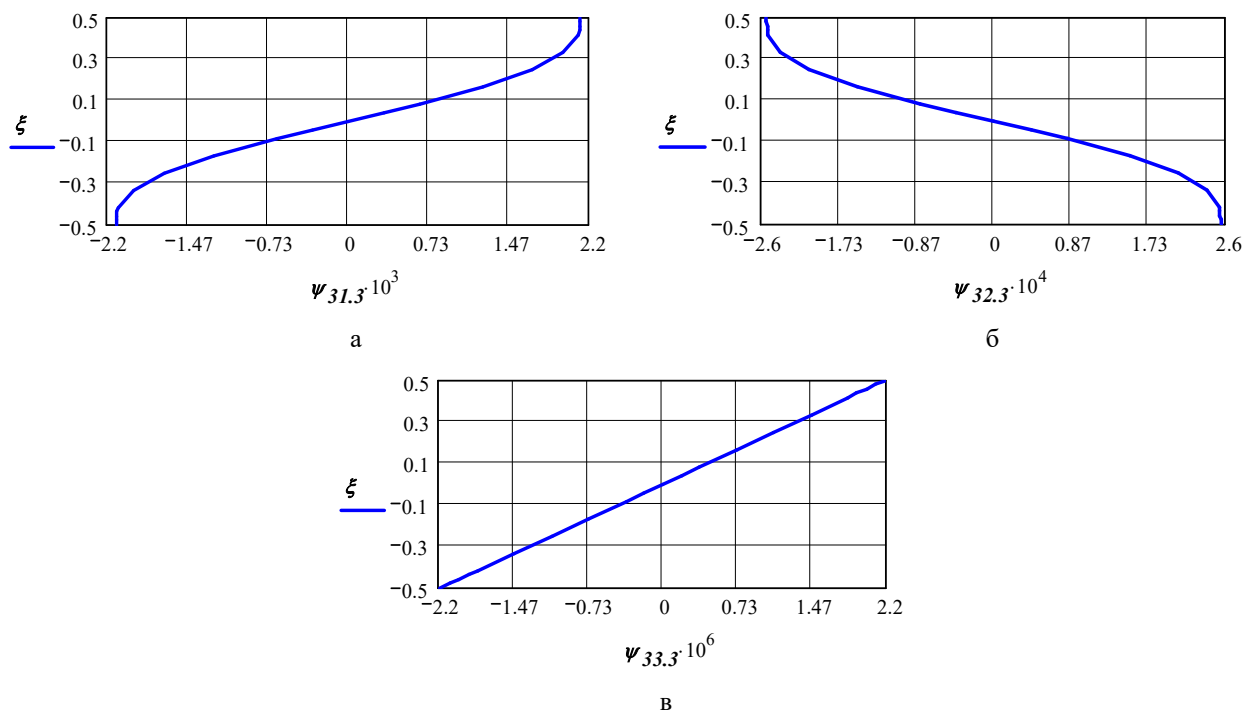
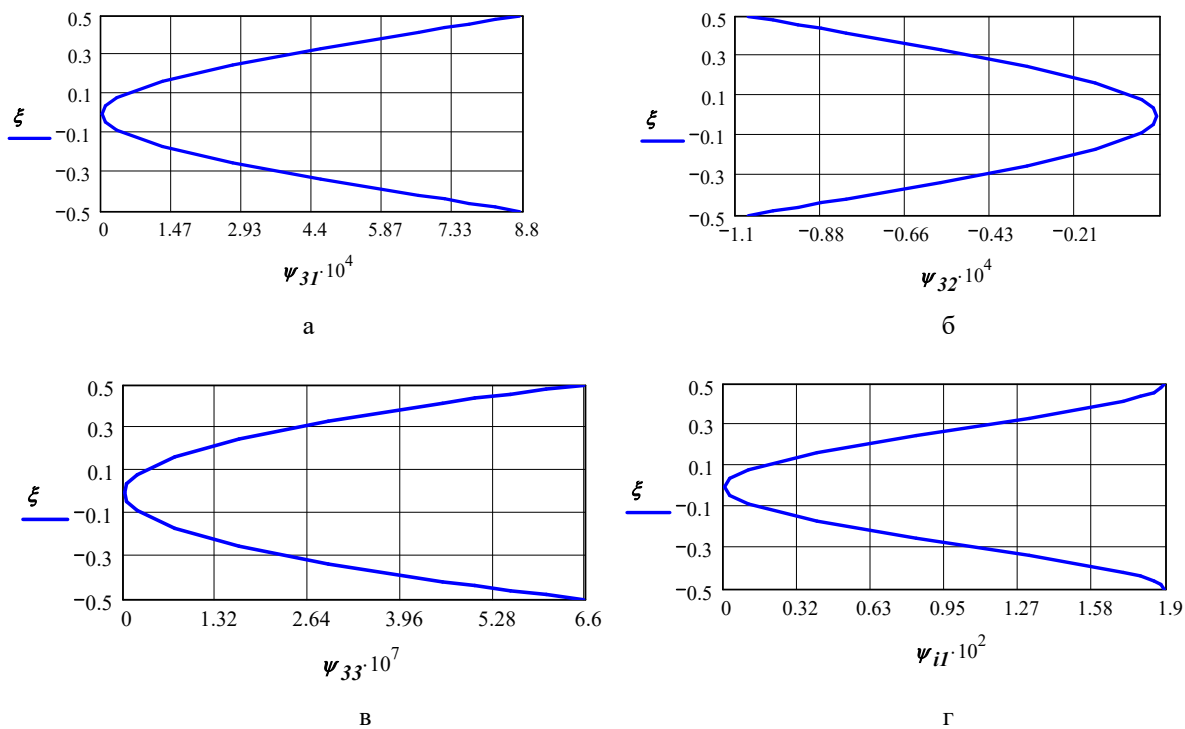


Рис. 5. Функції розподілу зміщень  $u_3$  по висоті плити



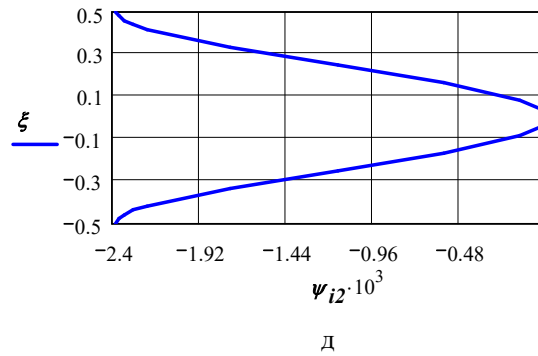


Рис. 6. Функції розподілу зміщень  $u_i$  по висоті плити

В результаті розрахунку ізотропної плити отримано розподіл відносних нормальних зміщень  $u_3^\# = u_3 E / (p_0 h)$  посередині плити ( $x_1 = a_1 / 2$ ) та відносних тангенціальні зміщень  $u_1^\# = u_1 E / (p_0 h)$  на краю плити ( $x_1 = a_1$ ) (рис. 7). Розрахунки виконані за моделлю (4) при утриманні в ній двох невідомих функцій поперечного обтиснення та двох функцій поперечного зсуву.

В дужках курсивом (рис. 7, рис. 8) показані результати за тривимірним розв'язком (T), отримані нами з використанням підходу [8].

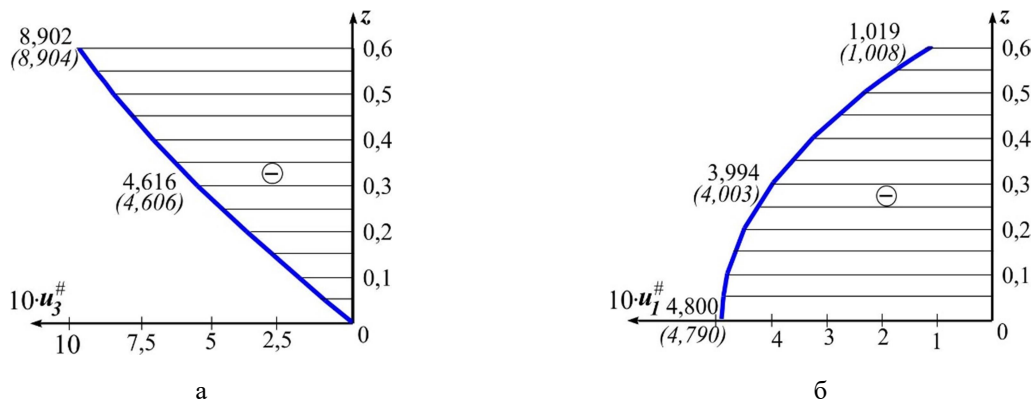


Рис. 7. Відносні зміщення по висоті однорідної ізотропної плити:  
а) нормальні зміщення  $u_3^\#$ ; б) тангенціальні зміщення  $u_1^\#$

Епюри розподілу відносних напруження  $\sigma_{\alpha\alpha}^\# = \sigma_{\alpha\alpha} / p_0$  посередині плити ( $x_1 = a_1 / 2$ ) показано на рис. 8.

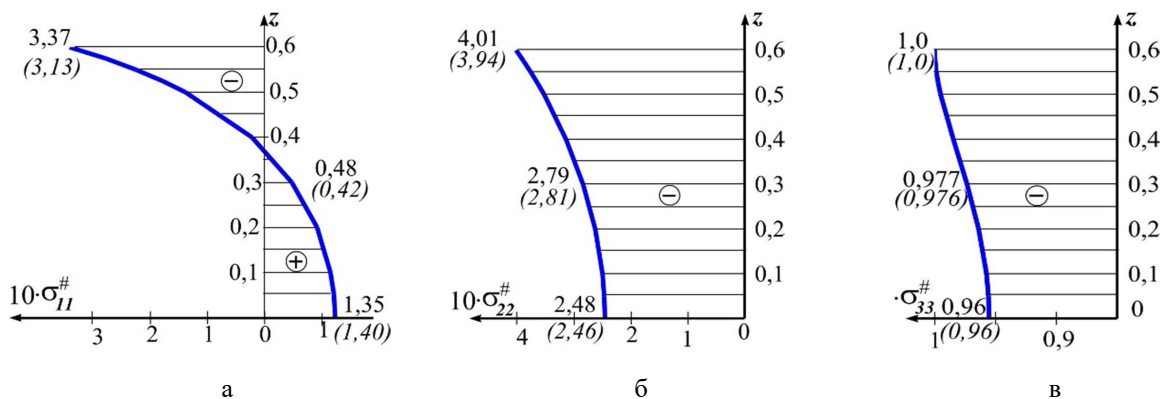


Рис. 8. Епюри відносних напруження  $\sigma_{\alpha\alpha}^\#$  по висоті однорідної ізотропної плити

З результатів розрахунків (рис. 7, рис. 8) видно, що запропонована оптимізована модель (4) якісно і кількісно практично точно відображає НДС в однорідній ізотропній плиті в порівнянні з тривимірним розв'язком ( $T$ ).

## 6 ВИСНОВКИ

Побудовано варіант уточненої структурно-континуальної моделі з гіпотезами ітераційного типу та реалізовано методіку високоточного розрахунку в пружній постановці НДС поперечно навантажених багатошарових прямокутних товстих плит на жорсткій основі з ізотропними та трансверсально-ізотропними шарами. Модель беззгинового НДС враховує деформації поперечного зсуву та поперечного обтиснення. З варіаційного принципу Лагранжа отримано систему розрахункових рівнянь відносно невідомих функцій переміщень.

Встановлено певні особливості НДС: в ізотропній плиті максимуми напруження  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  знаходяться біля навантаженої верхньої поверхні плити. Тангенціальні переміщення  $u_i$  набувають максимуму біля поверхні контакту з основою, що може в деяких конструкціях перевищувати допустимі деформації.

При стиску плити і ковзкому контакті з основою в плиті біля основи з'являються напруження розтягу, що може бути небезпечним для плити або шару з крихкого матеріалу.

## Література

1. Пискунов В. Г., Рассказов А. О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек. Прикладная механика, 2002. Т. 38. № 2. С. 22–57.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1987. 360 с.
3. Гуртовий А. Г. Контактная задача для анизотропной слоистой плиты с упругим и с абсолютно жестким основаниями. В зб.: Теоретическая и прикладная механика. Харьков: «Основа», 2002. Вып. 35. С. 163–169.
4. Гуртовий О. Г., Тинчук С. О. Дослідження деформування багатошарової трансверсально-ізотропної плити на жорсткій основі за беззгиною уточненою континуальною моделлю. Механіка та математичні методи. Том IV. №1, 2022. С.64–74.
5. Марчук А. В. Применение вариационного подхода для исследования напряженно-деформированного состояния слоистых пластин на жестком основании в трехмерной постановке. Проблемы прочности, 1997. № 6. С. 86–94.
6. Гуртовий А. Г. Высокоточное моделирование деформирования слоистых структур. Механика композит. Материалов, 1999. Т. 35. № 1. С. 13–28.
7. Гуртовий А. Г. Континуальные аппроксимации перемещений в толстых слоистых пластинах при разделении термомеханических нагрузок на двухсторонние симметрические и косо-симметрические составляющие. Механика композит. Материалов, 1999. Т. 35. № 6. С. 743–756.
8. Пискунов В. Г., Сипетов В. С., Туйметов Ш. Ш. Изгиб толстой трансверсально-изотропной плиты поперечной нагрузкой. Прикладная механика, 1987. Т. 23, № 11. С.21–26.
9. Пискунов В. Г., Вериженко В. Е., Присяжнюк В. К., Сипетов В. С., Карпиловский В. С. Расчет неоднородных оболочек и пластин методом конечных элементов. К.: Вища школа, 1987. 200 с.
10. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.

## References

1. Piskunov V. G., Rasskazov A. O. (2002). Razvitiye teorii sloistykh plastin i obolochek [Development of the theory of layered plates and shells]. *Prikladnaya mekhanika*. 38. 2. 22–57. [in Russian].

2. Ambartsumyan S. A. (1987). *Teoriya anizotropnykh plastin. Prochnost', ustoychivost' i kolebaniya* [Theory of anisotropic plates. Strength, stability and fluctuations]. 2nd ed., revised. and add. Moskva: Nauka. [in Russian].
3. Gurtovyi A. G. (2002). Kontaktnaya zadacha dlya anizotropnoy sloistoy plyty s uprugim i s absolutno zhestkim osnovaniyami [Contact problem for an anisotropic layered plate with elastic and absolutely rigid foundations]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*. Kharkov: "Osнова". 35. 163–169. [in Russian].
4. Gurtovyi O. G., Tynchuk S. O. (2022). Doslidzhennya deformuvannya bahatosharovoyi transversalno-izotropnoyi plyty na zhorstkiy osnovi za bezzhynovoyu utochnenoyu kontynualnoyu modellyu. [Investigation deformation of a multilayered transversal-isotropic plate on a rigid foundation by unflexural refined continual model]. *Mekhanika ta matematychni metody*. 4. 1. 64–74. [in Ukraine].
5. Marchuk A. V. (1997). Primeneniye variatsionnogo podkhoda dlya issledovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya sloistyykh plastin na zhestkom osnovanii v trekhmernoy postanovke [Application of the variational approach for the study of the stress-strain state of layered plates on a rigid foundation in a three-dimensional setting]. *Problemy prochnosti*. 6. 86–94. [in Russian].
6. Gurtovyi A. G. (1999). Vysokotochnoye modelirovaniye deformirovaniya sloistyykh struktur [High-precision modeling of deformation of layered structures]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 35. 1. 13–28. [in Russian].
7. Gurtovyi A. G. (1999). Kontinual'nyye approksimatsii peremeshcheniy v tolstykh sloistyykh plastinakh pri razdelenii termomekhanicheskikh nagruzok na dvukhstoronniye simmetricheskiye i kososimmetricheskiye sostavlyayushchiye [Continuous approximations of displacements in thick layered plates during the separation of thermomechanical loads into bilateral symmetric and obliquely symmetric components]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 35.6. 743–756. [in Russian].
8. Piskunov V. G., Sipetov V. S., Tuimetov Sh. Sh. (1987). Izgib tolstoy transversal'no-izotropnoy plyty poperechnoy nagruzkoy [Bending of a thick transversally isotropic plate by a transverse load]. *Prikladnaya mekhanika*. 23. 11. 21–26. [in Russian].
9. Piskunov V. G., Verizhenko V. E., Prisyazhnyuk V. K., Sipetov B. C., Karpilovsky B. C. (1987). Raschet neodnorodnykh obolochek i plastin metodom konechnykh elementov [Calculation of inhomogeneous shells and plates by the finite element method]. Kyiv: Higher school. [in Russian].
10. Ambartsumyan S.A. (1974). *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek*. Moskva: Nauka. [in Russian].

**Гуртовий Олексій Григорович**

Національний університет водного господарства та природокористування  
к.т.н., доцент  
вул. Соборна, 11, Рівне, Україна, 33028  
o.g.gurtovyi@nuwm.edu.ua  
ORCID 0000-0002-2651-948X

**Тинчук Сергій Олександрович**

Національний університет водного господарства та природокористування  
к.т.н., доцент  
вул. Соборна, 11, Рівне, Україна, 33028  
s.o.tynchuk@nuwm.edu.ua  
ORCID 0000-0002-1763-8620

*Для посилань:*

Гуртовий О. Г., Тинчук С. О. Використання симетрії для розв'язування задач деформування плит на жорсткій основі. Механіка та математичні методи, 2023. Т. V. №. 1. С. 84–96.

*For references:*

Gurtovyi O., Tynchuk S. (2023). Using symmetry to solve problems of deformation of plates on a rigid foundation. *Mechanics and Mathematical Methods*. V(1). 84–96.