

УДК 539.3

УТОЧНЕНИЙ РОЗРАХУНОК КОМПОЗИТНИХ ПЛИТ НА ПРУЖНИХ ОСНОВАХ ЗА ДІЇ ЛОКАЛЬНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Шваб'юк В. І.¹, Ротко С. В.¹, Бондарський О. Г.¹, Шваб'юк В. В.¹

¹Луцький національний технічний університет

Анотація: Якісний і достовірний розрахунок плит на пружних основах є одним із основних елементів проектування складних будівельних конструкцій. Існує надзвичайно велика кількість методів розрахунку, які не завжди досконалі і не дають чітких відповідей на важливі питання, що виникають у будівельній практиці. Ці питання стосуються як до проблеми вибору моделей пружних основ, так і розрахункових моделей оболонок і плит. Зокрема, у більшості випадків, використовувані у будівельних конструкціях оболонки і плити є анізотропними, тому вибір їх розрахункових моделей таких елементів є надзвичайно важливим питанням. У статті розглядається осесиметрична задача згину нескінченної трансверсально-ізоτροпної плити на пружній основі (пружному півпросторі), якою може бути плита дорожнього чи аеродромного покриттів під дією локальних навантажень. Визначаються контактні переміщення і напруження на поверхні розділу із врахуванням деформації поперечного зсуву і обтиснення.

Ключові слова: пружні основи, контактні напруження і переміщення, трансверсально-ізоτροпні плити, поперечний зсув і обтиснення, локальні навантаження.

SPECIFIED CALCULATION OF COMPOSITE PLATES ON THE ELASTIC BASIS UNDER THE ACTION OF LOCALIZED LOADS

V. Shvabyuk¹, S. Rotko¹, O. Bondarsky¹, V. Shvabyuk¹

¹Lutsk National Technical University

Abstract: The qualitative and reliable calculation of plates on elastic bases is one of the main elements of the design of complex building constructions. There is an extremely large number of calculation methods, that are not always perfect. These methods do not provide clear answers to important issues arising in building constructions. These questions relate to both problem. The first of this problem consists of the choosing models of elastic bases. The second problem consists of choosing of calculation models of shells and plates. In particular, in most cases, shells and plates, which are used in building structures, are anisotropic. So, the choice of their design models for such elements is an extremely important issue.

The paper is aimed at the axisymmetric problem of bending an infinite transversal-isotropic plate on an elastic basis (elastic half-space), which can be the models of road slabs or airfield pavement, which are under the action of localized loads. On the basis of the equations of the generalized model of transversally isotropic plates, the solution of problem for the case of the plates on elastic bases is obtained. This solution corresponds to the case of the influence of localized loads. The contact displacements and stresses on the section surface are determined with accounting for the deformation of the transverse shear and compression. Obtained results coincide with the results of the classical theory of thin plates, when in the obtained equations are neglected by the listed refinements. The obtained results coincide with S. Lukasevych's results, when in the given formulas the members, which are corresponded transverse compression deformations, do not account for. Values of the contact displacements and pressures in the boundary of the plate and the elastic basis, which depend on the ratios of their modulus of elasticity, is summarized in the comparative table and the corresponding figures.



The obtained results indicate that the classical theory of thin plates gives very low values of the contact displacements and pressures compared with the results of the refined theory of transtropic plates of medium thickness.

Keywords: elastic bases, contact displacements and stresses, transversal-isotropic plate, transverse shear and compression, localized loads

1 ВСТУП

Розглядаються контактні задачі згину трансверсально-ізотропних плит на пружних основах за дії локальних навантажень. Умови роботи таких плит відповідають умовам, у яких знаходяться плити дорожнього та аеродромного покриттів. Для отримання розв'язків задач найчастіше використовується інтегральне перетворення Ганкеля, або через функції Бесселя [1,2].

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Аналіз розв'язків подібних задач для різних основ і видів навантажень для пластинок Кірхгофа-Лява дається в книзі С. Тимошенка і С. Войновського-Крігера "Пластинки і оболонки" [3]. Розв'язок задачі для пластинки під дією симетрично розподіленого навантаження, що лежить напівнескінченній пружній основі, але вже у постановці уточненої теорії згину ізотропних пластин Нагді, наведено К. Пістером і Р. Вестманом в роботі [4]. Разом з тим, тільки у деяких роботах ведуться дослідження, які зв'язані з врахуванням впливу поперечної анізотропії на величини максимальних напружень і переміщень у плитах (наприклад, у монографії С. Лукасевича [6]).

Задачі для ізотропних та трансверсально-ізотропних плит на пружних основах розглянуті також у роботах авторів [5-9]. Разом з тим, тільки у деяких роботах ведуться дослідження, які зв'язані з врахуванням впливу поперечної анізотропії на величини максимальних напружень і переміщень у плитах.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даної роботи є врахування впливу поперечної анізотропії на величини максимальних напружень і переміщень в розрахунках композитних плит.

4 МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо згин нескінченної трансверсально-ізотропної плити товщиною $2h$, віднесеної до циліндричної системи координат r, θ, z . Плита лежить на пружній основі і згинається зосередженою силою P , прикладеною в початку системи координат ($r=0$). Для такого типу навантаження авторами [3] пропонується скористатися перетворенням Ганкеля [1,2], згідно якого вираз для тансформанти навантаження P можна записати у вигляді $\tilde{P} = P/2\pi$, а вираз для розподіленого (на нескінченно малій ділянці) зовнішнього тиску представити у вигляді:

$$q^-(\rho) = \frac{P}{2\pi l_0^2} \int_0^\infty (\lambda \rho) \cdot \lambda \cdot d\lambda,$$

де l_0 – характерний розмір, а $\rho = r/l_0$.

Прийmemo, що поверхня розділу плити і пружної основи є ідеально гладкою, тому дотичні напруження τ_{rz} , $\tau_{\theta z}$ на цій поверхні вважаються відсутніми. Таким чином граничні умови на зовнішніх поверхнях плити записуються в наступному вигляді:

$$\sigma_z = q^+(r) \text{ для } (0 \leq r \leq \infty, z = h); \quad \sigma_z = -q^-(r) \text{ для } (0 \leq r \leq R, z = -h); \quad (1)$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \tau_{\theta z}(r, z) = 0 \text{ для } z = \pm h,$$

де $\bar{q}(r)$ – вертикальне навантаження, яке прикладене до лицевої поверхні плити ($z = -h$), $q^+(r)$ – контактний тиск, який виникає між нижньою поверхнею плити і пружною основою.

Будемо виходити із співвідношень узагальненої моделі трансверсально-ізотропних плит, які стосовно до даного класу осесиметричних задач можна записати у вигляді [11]:

а) розрахункових рівнянь згину:

$$D\Delta^2\hat{w} = (1 - \varepsilon_1\Delta)q_2; \quad D\Delta\tilde{w}_r = -\frac{5}{4}\varepsilon_r q_2, \quad (2)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{h^2}{10(1-\nu)} \left(8\frac{G}{G'} - 3\nu'' \right), \quad \varepsilon_r = \frac{0,8h^2G}{(1-\nu)G'},$$

$$\varepsilon_2 = 0,05(1-\alpha)h^4 \frac{\tilde{E}}{E'}, \quad \hat{w} = w + \frac{\varepsilon_2}{D}q_2;$$

б) виразів для напружень і вертикального переміщення

$$\sigma_r = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2w_1}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dw_1}{dr} \right) + A'\sigma_z; \quad \tau_{rz} = G' \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \cdot \frac{dw_r}{dr}; \quad (3)$$

$$\sigma_z = q_1(r) + \frac{1}{4} \left(3\frac{z}{h} - \frac{z^3}{h^3} \right) \cdot q_2(r); \quad q_1(r) = \frac{1}{2}(q^+(r) - q^-(r));$$

$$W(r, z) = w(r) + \alpha_z z \cdot q_1/E' + A' \cdot \Delta w_b \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{\alpha_z z^2 q_2}{16E'h} \cdot B(z), \quad (4)$$

де $w_1 = w - w_r \left(1 - \frac{z^2(1-\alpha)}{3h^2} \right) + \frac{z^2(1-\alpha) \cdot q_2}{8E'h}; \quad \alpha = \frac{\nu''G'}{2G}, \quad B(z) = 6A_2 - \frac{z^2}{h^2},$

$$q_2 = q^+ + q^-, \quad \alpha_z = 1 - 2\nu' \cdot A', \quad A' = \frac{\nu''}{(1-\nu)}, \quad A_2 = 1 + \frac{A'E'}{\alpha_z G'}.$$

Якщо у приведених формулах покласти відношення $G/G' = E/E' = 0$, то отримуємо формули [3,9], знайдені за допомогою рівнянь класичної теорії тонких пластинок. У випадку, коли $A' = \alpha = \varepsilon_2 = 0$ – будемо мати результати, які відповідають гіпотезам уточненої теорії Е. Рейснера [12].

У співвідношеннях (2), (3) відсутні рівняння і члени, які враховують роботу плити як мембрани, тому вважається, що плита працює на згин у випадках, коли

$$W(0, h) - W(R, h) < (2/5 \div 2/3)h.$$

Вираз для вертикального переміщення (4) в області контакту плити з основою має вигляд

$$W(r, h) = w(r) + \frac{A'}{2}h^2\Delta w_b + \frac{\alpha_z h q_1}{E'} + \frac{\alpha_z h q_2}{16E'} B(h).$$

Застосовуючи до рівнянь (5), (6) перетворення Ганкеля нульового порядку і, розв'язуючи цю систему відносно трансформанти $\tilde{W}(\lambda, h)$, отримаємо

$$\tilde{W}(\lambda, h) = \int_0^\infty W(r, h) \cdot J_0(\lambda r) \cdot r \cdot dr = \tilde{q}_2(\lambda) \cdot \frac{f(\lambda)}{D\lambda^4} + \frac{\alpha_z h \tilde{q}_1(\lambda)}{2E'}, \quad (5)$$

де $f(\lambda) = (1 + \varepsilon_1\lambda^2 - \varepsilon_2\lambda^4)(1 - 0,5A'\lambda^2h^2) + \alpha_z D\lambda^4 h B(h) / 16E'$,

$$\tilde{q}_i(\lambda) = \int_0^\infty q_i(r) \cdot J_0(\lambda r) \cdot r dr, \quad (i=1,2);$$

Між вертикальним переміщенням і тиском на поверхні розділу існує зв'язок в формі [8,9]:

$$W(r, h) = -\int_0^\infty \tilde{q}^+(\lambda) \cdot K(\lambda) \cdot J_0(\lambda r) \lambda d\lambda. \quad (6)$$

Звідки можна записати, що

$$\tilde{W}(\lambda, r) = -K(\lambda) \tilde{q}^+(\lambda),$$

де $K(\lambda)$ – величина, за допомогою якої можна моделювати характер основи. Для випадку пружного півпростору $K(\lambda) = 1/k_0 \cdot \lambda$, а у випадку основи Вінклера – $K(\lambda) = 1/k$. Тут $k_0 = E_0/2(1-\nu_0^2)$, E_0 і ν_0 – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона для півпростору; k – коефіцієнт постелі пружної основи типу Вінклера.

Виходячи з рівнянь (5), (6) легко отримати залежності між трансформантами $\tilde{q}^+(\lambda)$ і $\tilde{q}^-(\lambda)$ у вигляді:

$$\tilde{q}^+(\lambda) = -\frac{f^-(\lambda) \cdot \tilde{q}^-(\lambda)}{f^+(\lambda) + D\lambda^4 \cdot K(\lambda)}; \quad f^\pm(\lambda) = f(\lambda) \pm \frac{\alpha_z h D \lambda^4}{2E'}$$

Ця залежність дозволяє, використавши формулу обернення Ганкеля (5), при відповідному значенні $K(\lambda)$, знайти вираз для контактної тиску, який виникає між плитою і пружним півпростором

$$q^+(r) = -\int_0^\infty \frac{\tilde{q}^-(\lambda) \cdot f^-(\lambda) J_0(\lambda r) \lambda d\lambda}{f^+(\lambda) + D\lambda^3 / k_0}. \quad (7)$$

5 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Отримані розв'язки (5)-(7) легко використати для випадку, коли плита навантажена зосередженою силою P , прикладеною в центрі плити ($r=0$). При такому навантаженні вираз для трансформанти $\tilde{q}^-(\lambda)$ дорівнює

$$\tilde{q}^-(\lambda) = \frac{P}{2\pi l_0^2}, \quad (8)$$

де $l_0 = \sqrt[3]{D/k_0}$ – характерний розмір; $l_0^2 = \sqrt[3]{D^2/k_0^2} = n^2 h^2$, $n = \sqrt[3]{4/3 \cdot \tilde{E}/\tilde{E}_0}$.

Підставивши значення трансформанти $\tilde{q}^-(\lambda)$ вирази (6), (7), отримаємо розрахункові формули для переміщення нижньої поверхні плити $W(r, h)$, а також контактної тиску $q^+(r)$ на поверхні розділу через параметр $t = \lambda l_0$:

$$W(r, h) = \frac{P l_0^2}{2\pi D} \cdot \int_0^\infty \psi(t) \cdot J_0\left(\frac{t \cdot r}{l_0}\right) dt, \quad q^+(r) = -\frac{P}{2\pi l_0^2} \cdot \int_0^\infty \psi(t) \cdot J_0\left(\frac{t \cdot r}{l_0}\right) t dt, \quad (9)$$

де
$$\psi(t) = \frac{f^-(t)}{f^+(t) + t^3}, \quad l_0 = \sqrt[3]{\frac{D}{k_0}} = nh, \quad f^\pm(t) = f(t) \pm \frac{\alpha_z \tilde{E} t^4}{3n^4 \cdot E'},$$

$$f(t) = (1 + \varepsilon_1 t^2 / n^2 - \varepsilon_2 t^4 / n^4)(1 - 0,5A't^2 / n^2) + \alpha_z \tilde{E} t^4 (6A_2 - 1) / (12n^4 E').$$

Аналіз формул (9) показує, що інтегралі, через які виражаються контактне переміщення і контактний тиск в точці $r=0$, розходяться. Розходяться вони і при врахуванні однієї тільки деформації поперечного зсуву, що підтверджується дослідженнями С. Лукасевича в монографії [6]. Разом з тим, при деяких значеннях коефіцієнта Пуассона ν'' можна отримати кінцевий результат для $W(0, h)$.

Наприклад, якщо в формулах (9) покласти коефіцієнт Пуассона $\nu'' = 0$, то підінтегральна функція $\psi(t)$ в них значно спроститься. Зокрема, функції $f^\pm(t)$ приймуть вигляд:

$$f^+(t) = 1 + 0,4 \frac{t^2}{n^2} \frac{\tilde{E}}{G'} + 0,49 \frac{t^4}{n^4} \frac{\tilde{E}}{E'}, \quad f^-(t) = 1 + 0,4 \frac{t^2}{n^2} \frac{\tilde{E}}{G'} - 0,175 \frac{t^4}{n^4} \frac{\tilde{E}}{E'}. \quad (10)$$

З формул (9), (10) видно, що неврахування ефектів поперечного зсуву і обчислення ($\tilde{E}/G' = \tilde{E}/E' = 0$) приводить до результатів класичної теорії тонких пластинок Кірхгофа [3,9], $f^+(t) = f^-(t) = 1$, а $\psi(t) = 1/(1+t^3)$. Тому, при $r=0$ у формулах (9) будемо мати:

$$w_{\max} = 0,192 \cdot P l_0^2 / D, \quad q_{\max}^+ = -0,192 P / l_0^2. \quad (11)$$

У випадку, коли

$$E = E_0, \quad \nu = \nu_0 = 1/3, \quad \tilde{E}/G' = 3, \quad \tilde{E}/E' = 9/8$$

(ізотропний матеріал), формули (10) спрощується до наступних виразів

$$f^+(t) = 1 + 0,99t^2 + 0,38t^4; \quad f^-(t) = 1 + 0,99t^2 - 0,134t^4. \quad (12)$$

У цьому випадку, використавши формули (12), можна обчислити інтегралі (9) для визначення контактного тиску $q^+(r)$ та переміщення нижньої поверхні ізотропної плити $W(r, h)$ у точці $r=0$, відкинувши при цьому останній член функції $f^-(t)$. У результаті, отримуємо значення

$$W(0, h) = 0,208 P l_0^2 / D,$$

що близьке до результату класичної теорії. Необхідно зауважити, що інтеграл для $q^+(0)$ у цьому випадку розходиться також.

Тому, для більш детального дослідження впливу зосередженого навантаження на розподіл контактних переміщень та контактного тиску, запишемо локальне зовнішнє навантаження у вигляді локального навантаження типу «дзвін»:

$$q^-(r) = \frac{P}{h^2} e^{-\pi \xi^2}, \quad \xi = r/h. \quad (13)$$

Такий тиск уже при $r=h$ складає $0,043P/h^2$. Вираз для трансформанти $\tilde{q}^-(\lambda)$, у випадку (13), буде наступним:

$$\tilde{q}^-(\lambda) = P / (2\pi e^{-(\lambda h)^2/4\pi}). \quad (14)$$

Підставивши вираз (14) в формули (6), (7), отримаємо

$$W(r, h) = \frac{Pl_0^2}{2\pi D} \cdot \int_0^\infty \psi(t) e^{-\frac{t^2}{4\pi n^2}} J_0\left(\frac{t \cdot r}{l_0}\right) dt ;$$

$$q^+(r) = \frac{-P}{2\pi l_0^2} \cdot \int_0^\infty \psi(t) e^{-\frac{t^2}{4\pi n^2}} J_0\left(\frac{t \cdot r}{l_0}\right) t dt , \quad (15)$$

де $\psi(t) = f^-(t) / (f^+(t) + t^3)$, функції $f^\pm(t)$ такі ж, як у (14).

Із формул (15) легко одержати результати класичної теорії тонких пластинок Кірхгофа, записавши функцію $\psi(t)$ у вигляді $\psi(t) = (1 + t^3)^{-1}$.

Результати підрахунків величин

$$\tilde{W}(0, h) = \frac{W(0, h)}{Ph^2 / D} \quad \text{і} \quad \tilde{q}^+(0) = -\frac{q^+(0)}{P / h^2}$$

для різних матеріалів і відношень \tilde{E} / \tilde{E}_0 можна звести у табл. 1. Дані, що розміщені у знаменнику, стосуються результатів класичної теорії тонких пластинок. Аналіз цих даних показує, що для ізотропного матеріалу за різних відношень \tilde{E} / \tilde{E}_0 результати уточненої теорії плит для переміщень та контактних тисків близькі (різниця менше 30%) до результатів класичної теорії тонких пластинок. Одночасно, на величини контактних переміщень і тисків дуже сильно впливає поперечна анізотропія плити, а також відношення модулів пружності \tilde{E} / \tilde{E}_0 .

Таблиця 1

Значення контактних переміщень і тисків

E / E_0		0,1	1	10	100
$\frac{\tilde{E}}{G'} = 3$	$\tilde{W}(0, h)$	<u>0,035</u> 0,038	<u>0,271</u> 0,213	<u>1,302</u> 1,052	<u>5,409</u> 4,983
	$\tilde{q}^+(0, h)$	<u>0,292</u> 0,333	<u>0,202</u> 0,109	<u>0,059</u> 0,029	<u>0,011</u> 0,007
$\frac{\tilde{E}}{E'} = \frac{9}{8}$	$\tilde{W}(0, h)$	0,039	0,378	2,837	10,85
	$\tilde{q}^+(0, h)$	0,381	0,363	0,248	0,063

Аналіз даних табл. 1 показує, що для ізотропного матеріалу за різних відношень \tilde{E} / \tilde{E}_0 результати уточненої теорії плит для переміщень та контактних тисків близькі (різниця менше 30%) до результатів класичної теорії тонких пластинок. Одночасно, на величини контактних переміщень і тисків дуже сильно впливає поперечна анізотропія плити, а також відношення модулів пружності \tilde{E} / \tilde{E}_0 .

Наприклад, для відношень $\tilde{E} / \tilde{E}_0 \geq 10$ величини контактних переміщень $\tilde{W}(0, h)$ трансропної плити більше ніж удвічі перевищують відповідні значення плити із ізотропного матеріалу. Подібні висновки можна зробити і на основі графіків, побудованих на рис. 1, 2 для величин контактних переміщень \tilde{W} і тисків \tilde{q}^+ .

Тут, штрихова крива 1 побудована для розв'язків класичної теорії тонких пластинок, крива 2 (штрих-пунктирна) на основі рівнянь уточненої теорії плит середньої товщини. Крива 3 стосується розподілу контактних переміщень та тисків для плит із трансропного матеріалу – ($\tilde{E} = 50G'$, $\tilde{E} = 10E'$).

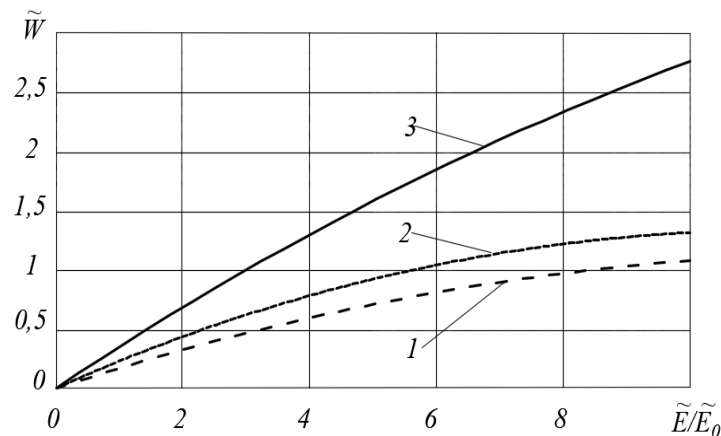


Рис. 1. Зміна контактної переміщення \tilde{W}

Із аналізу наведених рисунків видно, що класична теорія тонких пластинок дає дуже занижені значення контактних переміщень і тисків порівняно із результатами уточненої теорії транстропних плит середньої товщини. Отримані результати співпадають із результатами С. Лукасевича [6], якщо у наведених формулах знехтувати членами, що ураховують деформації поперечного обтиснення.

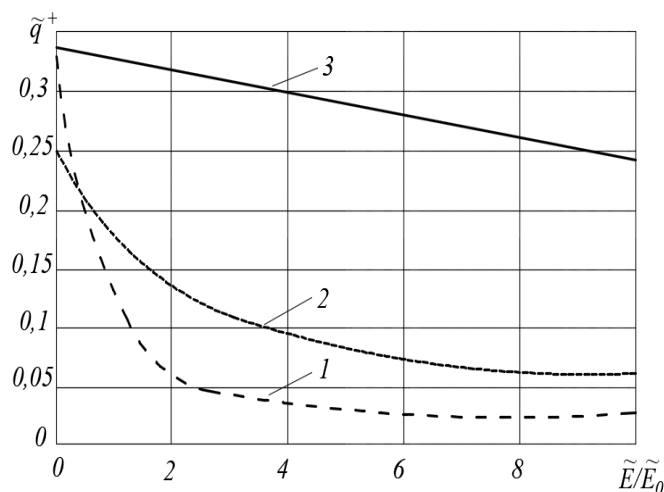


Рис. 2. Розподіл контактної тиску в точці $r = 0$ залежно від параметра \tilde{E} / \tilde{E}_0

Ще одним способом задання зовнішнього локального навантаження $q^-(r)$ може бути його задання у вигляді розподілу за законом Герца:

$$q^-(r) = \frac{3P}{2\pi h^2} \cdot \sqrt{1 - r^2 / h^2}. \quad (16)$$

Вираз для трансформанти $q^-(\lambda)$ при такому навантаженні буде наступним

$$\tilde{q}^-(\lambda) = 3P \cdot (8\pi h^3 \lambda^3)^{-1/2} \cdot J_{3/2}(\lambda h). \quad (17)$$

Підставивши (17) в формули (8), (9) для контактної переміщення та контактної тиску, будемо мати

$$W(r, h) = \frac{Pl_0^2}{2\pi D} \cdot \sqrt{4,5\pi n} \int_0^\infty \psi(t) J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{t}{n}\right) J_0\left(\frac{tr}{l_0}\right) \frac{dt}{t\sqrt{t}};$$

$$q^+(r) = -\frac{Pn^2}{2\pi l_0^2} \cdot \sqrt{4,5\pi n} \int_0^\infty \psi(t) J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{t}{n}\right) J_0\left(\frac{tr}{l_0}\right) \frac{dt}{\sqrt{t}}. \quad (18)$$

Аналогічним способом можна отримати розв'язки і для інших видів навантажень та пружних основ. Зокрема, для випадку навантаження нескінченної пластини, що лежить на пружній основі типу Вінклера із коефіцієнтом постелі k , зосередженою силою P , будемо мати:

$$W(r, h) = -\frac{1}{k} \cdot q^+(r);$$

$$q^+(r) = -\frac{P}{2\pi l^2} \cdot \int_0^\infty \psi_k(t) \cdot J_0\left(\frac{t \cdot r}{l}\right) t dt, \quad (19)$$

де $l = \sqrt[4]{\frac{D}{k}} = n_k h$, $n_k = \sqrt[4]{\frac{4}{3} \cdot \frac{\tilde{E}}{2kh}}$, $\psi_k(t) = f^-(t) [f^+(t) + t^4]^{-1}$,

$$f^+(t) = 1 + 0,4 \frac{t^2}{n_k^2} \frac{\tilde{E}}{G'} + 0,49 \frac{t^4}{n_k^4} \frac{\tilde{E}}{E'}, \quad f^-(t) = 1 + 0,4 \frac{t^2}{n_k^2} \frac{\tilde{E}}{G'} - 0,175 \frac{t^4}{n_k^4} \frac{\tilde{E}}{E'}.$$

6 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Якщо скористатись характеристиками пружної основи і плити, які приведені в роботі [25]: $k = 5 \text{ кГ/см}^3$, $E = 2 \times 10^5 \text{ кГ/см}^2$, $\nu = 0,15$, $10 \text{ см} \leq 2h \leq 100 \text{ см}$ то відповідні параметри формул (19) будуть наступними: $\tilde{E}/G' = 2,353$; $\tilde{E}/E' = 1,023$; $n_k(10 \text{ см}) = 8,594$; $n_k(100 \text{ см}) = 4,833$.

Необхідно зауважити, що безпосередньо у точці $r = 0$ інтеграл (19) для визначення контактного тиску $q^+(r)$ розходиться. Одночасно, якщо відійти від цієї точки на дуже малу відстань, то можна визначити і величину контактного тиску, і значення переміщення нижньої поверхні плити $W(r, h)$. Наприклад, для плити товщиною $2h = 10 \text{ см}$, в околі $r = 2h$ контактний тиск рівний $q^+(r) = -0,122P/l^2$, а при наближенні до осі прикладення сили P до відстані $r = 10^{-4}h$ контактний тиск зростає до значення $q^+(r) = -0,146P/l^2$. Одночасно, для плити товщиною $2h = 100 \text{ см}$ ці значення будуть дорівнювати $q^+(r) = -0,116P/l^2$ і $q^+(r) = -0,211P/l^2$, відповідно.

Випадок неврахування ефектів поперечного зсуву і обтиснення ($\tilde{E}/G' = \tilde{E}/E' = 0$) приводить до результатів класичної теорії тонких пластинок – розв'язку Герца [1-3], де $q^+(r) = -0,125P/l^2$.

Поклавши в попередніх формулах для $W(r, h)$, $q^+(r)$ відношення $D/k_0 = D/k$, будемо мати відповідну задачу для плити на абсолютно жорсткій основі.

7 ВИСНОВКИ

На основі співвідношень узагальненої моделі трансверсально-ізотропних плит отримано розв'язки задач для плит під дією локалізованих навантажень, що лежать на пружних основах. Значення контактних переміщень і тисків на межі плити і пружної основи залежно від відношень їх модулів пружності зведено у порівняльну таблицю та відповідні графіки.

Отримані результати свідчать класична теорія тонких пластинок дає дуже занижені значення контактних переміщень і тисків порівняно із результатами уточненої теорії

транстропних плит середньої товщини. На значення цих величин впливають також відношення модулів пружності плити і основи (\tilde{E}/\tilde{E}_0). Наприклад, для відношень $\tilde{E}/\tilde{E}_0 \geq 10$, величини контактних переміщень $\tilde{W}(0, h)$ транстропної плити більше ніж удвічі перевищують відповідні значення плити із ізотропного матеріалу.

Література

1. Коренев Б. Г. Расчёт плит на упругом основании / Б. Г. Коренев, Е. И. Черниговская – М.: Госстройиздат, 1962. – 355 с.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. – М.-Л.: Изд.-во АН СССР, 1963. – 402 с.
3. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.
4. Пистер К. Изгиб пластинок на упругом основании / К. Пистер, Р. Вестман // Труды Америк. Об-ва инж. механиков. Сер. Е. Прикл. механика. – 1962. – №2. – С. 165–171.
5. Крутий Ю. С. Аналітичний розв'язок задачі про вільні коливання пластини, що лежить на змінній пружній основі / Ю. С. Крутий, М. Г. Сур'янінов // Міжвузівський збірник «Наукові нотатки». – 2016. – № 1 (53). – С. 84 – 92.
6. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках / С. Лукасевич. – М.: Мир, 1982. – 544 с.
7. Піскунов В. Г. Контактна задача для трансверсально-ізотропної плити на пружному півпросторі / В. Г. Піскунов, В. І. Шваб'юк // Вісник Українського транспортного університету. – 1999. – Вип.3. – С. 218–223.
8. Піскунов В. Г. Задача контакту прямокутної плити жорсткого дорожнього одягу з на півпростором / В. Г. Піскунов, В. К. Присяжнюк, О. В. Марчук // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. – 1965. – В. 36. – С. 7–12.
9. Власов В. З. Балки, пластины и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М.: Госфизматлит, 1960. – 491 с.
10. Безелянский В. В. Расчет бесконечной плиты на упругом основании по схеме осесимметрической задачи без гипотезы прямых нормалей / В. В. Безелянский // Проектирование и эксплуатация аэропортов. Труды ГосНИИ гражданской авиации. – 1980. – №196. – С. 3–7.
11. Шваб'юк В. И. Учет эффекта сжимаемости нормали в контактных задачах для трансверсально изотропных плит / В. И. Шваб'юк // Прикл. механика. – 1980. – Т.16. №. 4. – С. 71–77.
12. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates / E. Reissner // J. Math. And Phys. – 1944. – 33. – P. 184–191.

References

1. Korenev, B. G., Chernigovskaya E. I. (1962). Raschet plit na uprugom osnovanii. M.: Gosstroyizdat, 355.
2. Uflyand, Ya. S. (1963). Integralnye preobrazovaniya v zadachakh teoryii uprugosti. M.-L.: AN SSSR, 402.
3. Tymochenko, S. P., Voyinovskiy-Kriher, S. (1963). Plastinki i obolochki. M.: Phizmathiz, 635.
4. Pister, K., Vestman, R. (1962). Izgib plastinok na uprugom osnovanii. Trudy Amer. Ob-va inzh. Mekhanikov. Ser. E. Prikl. Mekhanika, 165–171.
5. Krutiyy, Yu. S., Suryaninov, M. G. (2016). Analitychnyi rozv'iazok zadachi pro vil'ni kolyvannya plastyn scho lezhyat` na zminnii pruzhnii osnovi. Naukovi notatky, 1 (53), 84–92.
6. Lukasevych, S. (1982). Lokalnyie nagruzki v plastinah i obolochkah. M.: Myr, 544.
7. Piskunov, V. G., Shvab'yuk, V. I. (1999). Kontaktna zadacha dlya transversalno-izotropnoii plyty na pruzhnomu pivprostori. Visnyk Ukrayinskogo transportnogo universytetu, 3, 218–223.
8. Piskunov, V. G., Prisyazhnyuk, V. K., Marchuk, O. V. (1965). Zadacha kontaktu pryamokutnoyi plyty zhorstкого dorozhnogo odyahu z napivprostorum. Avtomobilni dorohy i dorozhnyje budivnyctvo, V.36, 7–12.

9. Vlasov, V. Z., Leontev, N. N. (1960). Balki, plastiny, obolochki na uprugom osnovanii. M.: Gosfizmatlyt, 491.
10. Bezelyanskiy, V. V. (1980). Raschet beskonechnoi plity na uprugom osnovanii po sheme osesimetricheskoi zadachi bez hipotezy priamyh normalii. Proektyrovanye i ekspluatatsia aeroportov, 196, 3–7.
11. Shvabyuk, V. I. (1980). Uchet efekta szhymaemosti normalii v kontaktnykh zadachah dlya transversalno izotropnykh plyt. Prykl. mekhanyka, V.16, 4, 71–77.
12. Reissner, E. (1944). On the theory of bending of elastic plates. J. Math. And Phys., 33, 184–191.

Шваб'юк Василь Іванович

Луцький національний технічний університет, д.т.н., професор
вул. Потебні, 56 Луцьк, Україна 43017
v.shvabyuk@gmail.com,
ORCID: 0000-0019-1800-5115

Ротко Світлана Володимирівна

Луцький національний технічний університет, к.т.н., доцент
вул. Потебні, 56 Луцьк, Україна 43017
svitlanarotko61@gmail.com,
ORCID: 0000-0003-1860-7890

Бондарский Олександр Георгійович

Луцький національний технічний університет, к.т.н., доцент
вул. Потебні, 56 Луцьк, Україна 43017
o.bondarskyu@gmail.com,
ORCID: 0000-0003-4624-8485

Шваб'юк Володимир Васильович

Луцький національний технічний університет, к.т.н., доцент
вул. Потебні, 56 Луцьк, Україна 43017
avto@lntu.edu.ua,
ORCID: 0000-0001-8294-5291

Для посилань:

Шваб'юк В. І. Уточнений розрахунок композитних плит на пружних основах за дії локальних навантажень / В. І. Шваб'юк, С. В. Ротко, О. Г. Бондарський, В. В. Шваб'юк // Механіка та математичні методи. – 2019. – №1. – С. 35-45.

For references:

Shvabyuk, V., Rotko, S., Bondarskyu, O., Shvabyuk, V. (2019). Specified calculation of composite plates on the elastic basis under the action of localized loads. Mechanics and Mathematical Methods, 1, 35-45.