

УДК 539.3

## ОСНОВНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНОГО КРУГОВОГО КОЛЬЦА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЗАИМНО ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ НОРМАЛЬНЫХ СИЛ

Ковальчук С. Б.<sup>1</sup>, Горик А. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Полтавская государственная аграрная академия*

**Аннотация:** Представлено аналитическое решение задачи растяжения-сжатия многослойного кольца, с произвольным количеством ортотропных слоев, взаимно противоположными нормальными силами, действующими в плоскости кольца вдоль одного диаметра. Решение построено на основе общего решения теории упругости для задачи изгиба многослойного бруса с круговой осью и нагрузкой на торцах. Полученные соотношения, соответствуют точному решению задачи на большей части кольца, а вблизи точек приложения нагрузки дают упрощенное описание напряженно-деформированного состояния (НДС) без учета локального искажения возле сосредоточенной силы. Для демонстрации возможностей и апробации полученных решений приведены результаты определения НДС четырехслойного кольца с отношением среднего радиуса к высоте сечения равным 1,75, а также результаты дополнительных расчетов при увеличении указанного отношения до 5,5 и 10,5.

**Ключевые слова:** многослойное кольцо, ортотропный слой, сосредоточенная сила, напряжения, перемещения

## BASIC STRESS-STRAIN STATE OF A MULTILAYER CIRCULAR RING UNDER THE ACTION OF MUTUALLY OPPOSITE NORMAL FORCES

S. Koval'chuk, A. Goryk

<sup>1</sup> *Poltava State Agrarian Academy*

**Abstract:** Closed circular rings are widely used in engineering structures both as individual parts and as reinforcing elements of thin-walled structures. One of the important cases of the load of such elements is tension-compression by mutually opposite forces acting along one diameter. For homogeneous isotropic rings, exact solutions of this plane problem are known, and various applied calculation methods are developed. At the same time, for composite and, in particular, multilayer rings, this problem is studied much worse. The purpose of this work is to develop an analytical solution of the problem of tension-compression of a composite ring with an arbitrary number of orthotropic layers with mutually opposite normal forces acting in the plane of the ring along one diameter. Using the symmetry of the problem, its solution comes to the auxiliary problem of determining the stress-strain state (SSS) of a half ring separated on loaded sections with corresponding static and kinematic conditions at the ends. The SSS of such an element, with the exception of small areas near the ends, is similar to the SSS of a circular multilayer bar with loads on the ends. This allowed us to use the exact solution of the theory of elasticity obtained by the authors for the problem of bending a multilayer circular bar with a load on the ends to develop the solution of the problem under consideration. The relations obtained in this way correspond to the exact solution of the problem for the greater part of the ring and close to the points of application of the load, give a simplified description of the SSS without local distortion near the concentrated force. This enables to determine the main SSS of multilayer rings with different sizes of the inner and outer radius, however, the



solution loses its meaning for a solid disk or a disk with a small hole in the center. For thin multilayer rings made of materials that hardly respond to lateral shear and compression, a simplified solution obtained using the plane-sections hypothesis is proposed. To demonstrate the possibilities and approbation of the solutions obtained, the results of determining the SSS of a four-layer ring with the ratio of the mean radius to the height of the cross section equal to 1.75 as well as the results of additional calculations with an increase in the specified ratio to 5.5 and 10.5 are presented.

**Keywords:** multilayer ring; orthotropic layer; concentrated force; stress; displacement

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Замкнутые круговые кольца, нагруженные в собственной плоскости, широко применяются в машиностроительных конструкциях в виде отдельных деталей или в качестве подкрепляющих элементов тонкостенных конструкций. Одним из важных случаев нагрузки таких элементов является растяжение-сжатие взаимно противоположными силами, действующими вдоль одного диаметра. Задача сопротивления однородных изотропных колец действию взаимно противоположных сил хорошо исследована. Значительно менее исследованной эта задача является для композитных колец, в частности, многослойных.

## 2 АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРНЫХ ДАННЫХ И ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Возможность решения указанной задачи для изотропных однородных колец в рамках плоской задачи теории упругости показана еще Тимпе в [1]. В дальнейшем, с использованием различных подходов были получены завершённые частные решения [2-6] для отдельных случаев отношения внутреннего и внешнего радиуса кольца. Менее строгое решение получено в [7] на основе решения для кругового бруса с нагрузкой на торцах. Такой подход не позволяет точно описать напряженно-деформированное состояние (НДС) поблизости точек приложения нагрузки, однако довольно точен на некотором удалении от них.

Кроме указанных решений, для однородных колец хорошо развиты прикладные методы расчета, построенные с использованием гипотезы линейного распределения окружных напряжений в поперечном сечении кольца или гипотезы плоских недеформированных сечений [2, 8].

Работ, посвященных исследованию задачи растяжения-сжатия композитных колец значительно меньше. Известны прикладные методы расчета однородных ортотропных [9] и многослойных [10] колец, построенные с использованием различных гипотез о распределении перемещений и напряжений. Более строгим, с точки зрения теории упругости, является решение [11] для ортотропного кольца, построенное путем рассмотрения четверти кольца с эквивалентными условиями на торцах. Однако данное решение не позволяет учитывать неоднородное строение многослойных колец.

Такое состояние исследований рассматриваемой задачи для композитных колец усложняет внедрение таких элементов в практику проектирования конструкций различного назначения.

## 3 ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Целью данной работы является построение аналитического решения задачи деформирования композитного многослойного кольца под действием диаметрально противоположно направленных сосредоточенных нормальных сил, на основе общего решения теории упругости для многослойной консоли с круговой осью и нагрузкой на свободном торце [12].

## 4 МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

Рассмотрим многослойное кольцо, которое состоит из  $m$  концентрических слоев  $P_k (k = \overline{1, m})$ , выполненных из различных материалов и жестко связанных на поверхностях контакта (рис. 1). Внутренний радиус кольца –  $r_1$ , внешний –  $r_2$ .

Поперечные сечения кольца (рис. 1, б) имеет форму узкого прямоугольника шириной  $b$  и высотой  $h$ , причем  $b \ll h \ll 2\pi r_c$ . Структура и размеры сечения неизменны вдоль оси кольца.

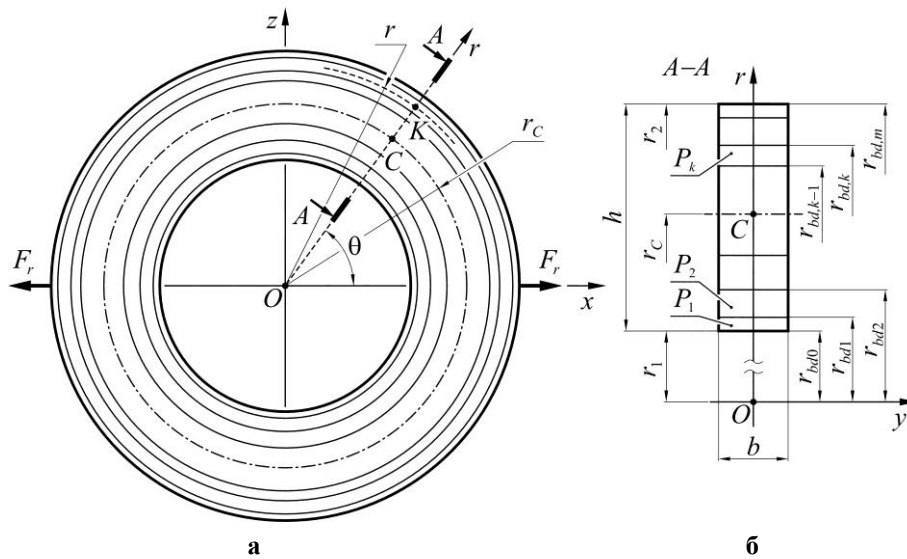


Рис. 1. Схема многослойного кольца и его поперечного сечения

Кольцо отнесено к круговой цилиндрической системе координат  $r\theta y$ , начало  $O$  которой лежит в плоскости круговой оси и совпадает с центром ее кривизны.

Слои кольца выполнены из однородных материалов с цилиндрической ортотропией [13]. В произвольной точке  $K(r\theta y)$  слоя одна из плоскостей упругой симметрии совпадает с поперечным сечением, а вторая проходит параллельно плоскости  $xOz$ . Известны упругие характеристики материалов всех слоев кольца, которые для произвольного  $k$ -го слоя представлены совокупностью констант

$$\|S_a^{[k]}\| = \|E_r^{[k]}, E_\theta^{[k]}, E_y^{[k]}, G_{r\theta}^{[k]}, G_{\theta y}^{[k]}, G_{yr}^{[k]}, \nu_{r\theta}^{[k]}, \nu_{\theta r}^{[k]}, \nu_{y\theta}^{[k]}, \nu_{\theta y}^{[k]}, \nu_{ry}^{[k]}, \nu_{yr}^{[k]}\|,$$

Для всего многослойного кольца упругие характеристики материала будут кусочно-постоянными функциями  $\mu_a^S(r)$ , которые аналогично [12] представим с помощью функций Хевисайда  $H(r)$ :

$$\mu_a^S = \sum_{k=1}^m (S_a^{[k]} (H(r - r_{bd,k-1}) - H(r - r_{bd,k}))), \quad (1)$$

где  $r_{bd,0} = r_1$ ,  $r_{bd,m} = r_2$  – радиусы кривизны внутренней и внешней цилиндрических поверхностей.

Кольцо в собственной плоскости растягивают (сжимают) нормальные сосредоточенные силы  $F_r$ , приложенные в диаметрально противоположных сечениях, с координатами  $\theta_1 = 0$  и  $\theta_2 = \pi$  (рис. 1, а). Продольные цилиндрические и боковые поверхности, кроме указанных сечений, свободны от нагрузок.

Рассмотрим НДС описанного многослойного кольца при упругой работе материалов ее слоев.

Точное решение для основного НДС. Симметричность нагрузки и деформаций целого кольца позволяет исходную задачу заменить эквивалентной, – для половины кольца, отделенной по сечениям в которых действуют силы  $F_r$  (рис. 2). При этом для

обеспечения эквивалентности деформаций, отброшенную половину кольца заменим соответствующей нормальной и касательной нагрузками, сведенной к поперечной силе  $Q_r$  и изгибающему моменту  $M_y$  в сечениях  $\theta_1 = 0$  и  $\theta_2 = \pi$ .

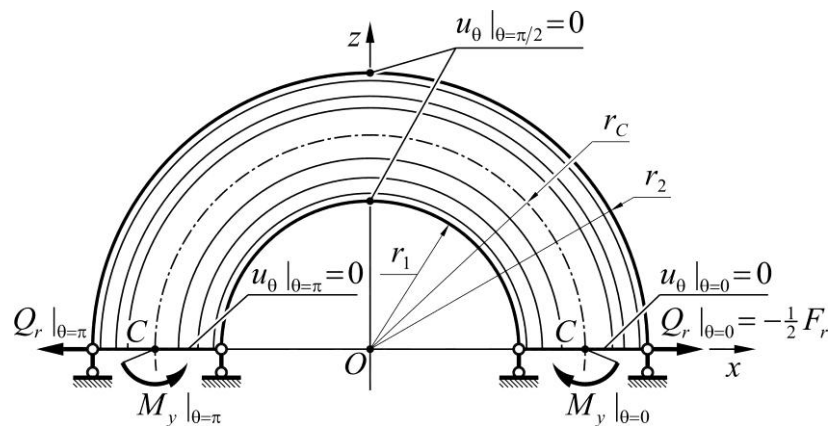


Рис. 2. Расчетная схема многослойного кольца

Такая постановка задачи позволяет отметить, что в большей части полукольца НДС будет подобным НДС многослойного кругового бруса с нагрузками на торцах. Исключение составляют лишь небольшие участки полукольца вблизи торцов, в которых распределение компонент НДС искажается действием сосредоточенной силы. Таким образом, используя решение для кругового бруса можно приближенно определить НДС кольца, который по аналогии с прямыми балками в работе [14] и теорией оболочек [15], будем называть основным.

На основе решения [12] для многослойной консоли с круговой осью, для полукольца на рис. 2 можем записать следующие соотношения для компонент НДС:

$$\sigma_r = -R_{r\theta}^{\tau 2} \sin \theta + R_r^\sigma, \quad \sigma_\theta = -\frac{1}{r} \frac{d(r^2 R_{r\theta}^{\tau 2})}{dr} \sin \theta + \frac{d}{dr}(r R_r^\sigma), \quad \tau_{r\theta} = R_{r\theta}^{\tau 2} \cos \theta, \quad (2)$$

$$u_r = \sin \theta \int_{r_1}^r \left( \frac{\mu_{\theta r}^v}{\mu_\theta^E} \frac{1}{r} \frac{d(r^2 R_{r\theta}^{\tau 2})}{dr} - \frac{R_{r\theta}^{\tau 2}}{\mu_r^E} \right) dr + \int_{r_1}^r \left( \frac{R_r^\sigma}{\mu_r^E} - \frac{\mu_{\theta r}^v}{\mu_\theta^E} \frac{d(r R_r^\sigma)}{dr} \right) dr + u_r|_{r=r_1},$$

$$u_\theta = \left( \frac{1}{\mu_\theta^E} \frac{d(r^2 R_{r\theta}^{\tau 2})}{dr} - \frac{\mu_{r\theta}^v}{\mu_r^E} (r R_{r\theta}^{\tau 2}) + \int_{r_1}^r \left( \frac{\mu_{\theta r}^v}{\mu_\theta^E} \frac{1}{r} \frac{d(r^2 R_{r\theta}^{\tau 2})}{dr} - \frac{R_{r\theta}^{\tau 2}}{\mu_r^E} \right) dr \right) (\cos \theta - 1) +$$

$$+ \theta \left( r \left( \frac{1}{\mu_\theta^E} \frac{d(r R_r^\sigma)}{dr} - \frac{\mu_{r\theta}^v R_r^\sigma}{\mu_r^E} \right) + \int_{r_1}^r \left( \frac{\mu_{\theta r}^v}{\mu_\theta^E} \frac{d(r R_r^\sigma)}{dr} - \frac{R_r^\sigma}{\mu_r^E} \right) dr \right) - \int_0^\theta u_r|_{r=r_1} d\theta + u_\theta|_{\theta=0}, \quad (3)$$

$$u_r|_{r=r_1} = \frac{1}{2} K_2 (\theta \cos \theta + \sin \theta) + \frac{1}{E^{[1]}} \left( \int R_r^{\sigma[1]} dr \right) |_{r=r_1} + K_4 \sin \theta + K_7 \cos \theta,$$

$$u_\theta|_{\theta=0} = \frac{1}{\mu_\theta^E} \frac{d(r^2 R_{r\theta}^{\tau 2})}{dr} - \frac{\mu_{r\theta}^v}{\mu_r^E} (r R_{r\theta}^{\tau 2}) + \int_{r_1}^r \left( \frac{\mu_{\theta r}^v}{\mu_\theta^E} \frac{1}{r} \frac{d(r^2 R_{r\theta}^{\tau 2})}{dr} - \frac{R_{r\theta}^{\tau 2}}{\mu_r^E} \right) dr + r K_6 + K_4. \quad (4)$$

Соотношения (2)-(4) зависят от 2-х определяющих функций  $R_{r\theta}^{\tau 2} = R_{r\theta}^{\tau 2}(r)$ ,  $R_r^\sigma = R_r^\sigma(r)$  и 4-х постоянных:  $K_2, K_4, K_6, K_7$ . Здесь сохранены обозначения работы [12], и поскольку  $N_\theta|_{\theta=0} = 0$ , то соответствующая составляющая касательных напряжений  $R_{r\theta}^{\tau 1} = 0$ .

Общие решения для функций  $R_{r\theta}^{\tau 2}, R_r^\sigma$  в пределах однородного ортотропного слоя получены в виде:

$$R_{r\theta}^{\tau 2[k]} = C_{12}^{[k]} r^{\kappa_1^{[k]}} + C_{22}^{[k]} r^{\kappa_3^{[k]}} + \frac{K_2}{\frac{1-2\nu_{\theta r}^{[k]}}{E_\theta^{[k]}} + \frac{1}{E_r^{[k]}} + \frac{1}{G_{r\theta}^{[k]}}} \frac{1}{r},$$

$$R_r^{\sigma[k]} = C_{13}^{[k]} r^{\kappa_3^{[k]}-1} + C_{23}^{[k]} r^{\kappa_4^{[k]}-1} + K_5 \frac{E_r^{[k]} E_\theta^{[k]}}{E_r^{[k]} - E_\theta^{[k]}},$$

$$\kappa_{1,2}^{[k]} = -1 \pm \sqrt{1 - 2\nu_{\theta r}^{[k]} + \frac{E_\theta^{[k]}}{E_r^{[k]}} + \frac{E_\theta^{[k]}}{G_{r\theta}^{[k]}}}, \quad \kappa_{3,4}^{[k]} = \pm \sqrt{\frac{E_\theta^{[k]}}{E_r^{[k]}}}, \quad k = \overline{1, m}, \quad (5)$$

где учтено равенство  $E_r^{[k]} \nu_{\theta r}^{[k]} = E_\theta^{[k]} \nu_{r\theta}^{[k]}$  для ортотропного материала.

В случае изотропного слоя форма определяющих уравнений задачи и, соответственно, их решений меняется

$$R_{r\theta}^{\tau 2[k]} = C_{12}^{[k]} r + C_{22}^{[k]} \frac{1}{r^3} + \frac{K_2 E^{[k]}}{4} \frac{1}{r}, \quad R_r^{\sigma[k]} = C_{13}^{[k]} + C_{23}^{[k]} \frac{1}{r^2} + \frac{K_5 E_\theta^{[k]}}{2} \ln r. \quad (6)$$

Содержащиеся в соотношениях (5) или (6) неизвестные постоянные  $C_{12}^{[k]}, C_{22}^{[k]}, C_{13}^{[k]}, C_{23}^{[k]}$  для внутреннего и наружного слоев должны обеспечивать выполнение краевых условий на цилиндрических поверхностях

$$R_{r\theta}^{\tau 2[1]}|_{r=r_1} = 0, \quad R_{r\theta}^{\tau 2[m]}|_{r=r_2} = 0, \quad R_r^{\sigma[1]}|_{r=r_1} = 0, \quad R_r^{\sigma[m]}|_{r=r_2} = 0, \quad (7)$$

а на границах слоев – выполнение условий жесткого контакта

$$R_{r\theta}^{\tau 2[k]}|_{r=r_{bd,k}} = R_{r\theta}^{\tau 2[k+1]}|_{r=r_{bd,k}}, \quad R_r^{\sigma[k]}|_{r=r_{bd,k}} = R_r^{\sigma[k+1]}|_{r=r_{bd,k}}, \quad k = \overline{1, m-1},$$

$$\frac{1}{E_\theta^{[k]}} \left( r \frac{dR_{r\theta}^{\tau 2[k]}}{dr} + (2 - \nu_{\theta r}^{[k]}) R_{r\theta}^{\tau 2[k]} \right) \Big|_{r=r_{bd,k}} = \frac{1}{E_\theta^{[k+1]}} \left( r \frac{dR_{r\theta}^{\tau 2[k+1]}}{dr} + (2 - \nu_{\theta r}^{[k+1]}) R_{r\theta}^{\tau 2[k+1]} \right) \Big|_{r=r_{bd,k}},$$

$$\frac{1}{E_\theta^{[k]}} \left( r \frac{dR_r^{\sigma[k]}}{dr} + (1 - \nu_{\theta r}^{[k]}) R_r^{\sigma[k]} \right) \Big|_{r=r_{bd,k}} = \frac{1}{E_\theta^{[k+1]}} \left( r \frac{dR_r^{\sigma[k+1]}}{dr} + (1 - \nu_{\theta r}^{[k+1]}) R_r^{\sigma[k+1]} \right) \Big|_{r=r_{bd,k}}. \quad (8)$$

Кроме условий (7) и (8), решения для функций  $R_{r\theta}^{\tau 2}, R_r^\sigma$  должны удовлетворять условия на торцах, которые в пределах данного решения возможно выполнить только интегрально

$$\int_{r_1}^{r_2} R_{r\theta}^{\tau 2} dr = Q_r|_{\theta=0} = -\frac{F_r}{2b}, \quad \int_{r_1}^{r_2} (r R_r^\sigma) dr = -\frac{1}{b} M_y|_{\theta=0}. \quad (9)$$

В рассматриваемом случае  $F_r$  известная величина, а  $M_y|_{\theta=\pi} = M_y|_{\theta=0}$  – неизвестный момент, который должен обеспечивать выполнение кинематических условий на торцах. Однако, без изменения соотношений (2)-(9) возможна упрощенная постановка задачи сжатия кольца между параллельными жесткими или упругими полупространствами, когда сила  $F_r$ , как и момент  $M_y|_{\theta=0}$ , будет неизвестной величиной реакции полупространств.

Для всего пакета слоев искомые функции  $R_{r\theta}^{\tau 2}$ ,  $R_r^\sigma$  могут быть построены, с использованием решений (5) и (6), подобно функциям механических характеристик (1):

$$\begin{aligned} R_{r\theta}^{\tau 2} &= \sum_{k=1}^m \left( R_{r\theta}^{\tau 2[k]} (H(r - r_{bd,k-1}) - H(r - r_{bd,k})) \right), \\ R_r^\sigma &= \sum_{k=1}^m \left( R_r^{\sigma[k]} (H(r - r_{bd,k-1}) - H(r - r_{bd,k})) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Вместе условия (7), (8) и (9) позволяют определить  $4m$  неизвестных  $C_{12}^{[k]}$ ,  $C_{22}^{[k]}$ ,  $C_{13}^{[k]}$ ,  $C_{23}^{[k]}$ , а также постоянные  $K_2$ ,  $K_5$ . Однако этого недостаточно для определения всех компонент напряженного состояния в рассматриваемой задаче, поскольку соотношение для функции  $R_r^\sigma$  содержит неизвестный момент  $M_y|_{\theta=0}$ . Для его определения, а также определения постоянных  $K_4$ ,  $K_6$ ,  $K_7$  необходимо воспользоваться кинематическими условиями.

Полное соответствие деформаций полукольца на рис. 2 и целого кольца на рис. 1, а, если считать неподвижным центр кольца, будет в случае выполнения следующих условий

$$u_\theta|_{\theta=0} = 0, \quad u_\theta|_{\theta=\pi} = 0, \quad u_\theta|_{\theta=\pi/2} = 0. \quad (11)$$

Однако имея всего 4 неизвестных постоянных  $K_4$ ,  $K_6$ ,  $K_7$  и  $M_y|_{\theta=0}$ , условия (11) можно выполнить лишь приблизительно, совместив, как и в работе [14], перемещения только крайних волокон кольца

$$u_\theta|_{\theta=0, r=r_1} = 0, \quad u_\theta|_{\theta=0, r=r_2} = 0, \quad u_\theta|_{\theta=\pi/2, r=r_1} = 0, \quad u_\theta|_{\theta=\pi/2, r=r_2} = 0. \quad (12)$$

В (12) нет условий для сечения с координатой  $\theta = \pi$ , поскольку, вследствие симметричности нагрузки, деформации левой четверти полукольца на рис. 2 будут симметричны деформациям правой четверти. Также, условия (12) не могут обеспечить отсутствие искривления крайних сечений полукольца. Поэтому в этих сечениях совместимость перемещений будет обеспечена только для внутреннего и внешнего волокон.

Следует отметить, что первые два условия (12) не являются исключительными и в качестве кинематических условий можно принять ограничения перемещения двух других точек сечения  $\theta = 0$ . Однако, обоснование выбора различных вариантов кинематических условий, выходит за рамки данной работы и является предметом отдельного исследования.

#### Упрощение решения с использованием гипотезы плоских сечений.

Соотношения полученного решения можно существенно упростить, если пренебречь деформациями поперечного сдвига и обжатия, приняв  $E_r^{[k]}, G_r^{[k]} \rightarrow \infty$ ,  $v_{r\theta}^{[k]}, v_{\theta r}^{[k]} \rightarrow 0$ ,  $k = \overline{1, m}$ . Такое упрощение исключает искривление поперечных сечений кольца и соответствует гипотезе плоских сечений, широко применяемой на практике. Оно допустимо в случае тонких колец с относительно большим отношением  $(r_1 + r_2)/2h$ , а также колец, слои которых изготовлены из изотропных материалов. Однако, в случае толстых колец изготовленных из материалов с большими отношениями  $E_\theta/G_{r\theta}$  и  $E_\theta/E_r$ , использование гипотезы плоских сечений может привести к большим погрешностям при определении перемещений.





В случае применения гипотезы плоских сечений решения для функций  $R_{r\theta}^{\tau^2}$ ,  $R_r^\sigma$  можно получить сразу для всего пакета слоев

$$R_{r\theta}^{\tau^2} = -\frac{F_r}{2bD_{-1}} \frac{1}{r^2} \left( \int_{r_1}^r \mu_\theta^E dr - \frac{B_0}{B_1} \int_{r_1}^r (\mu_\theta^E r) dr \right), \quad R_r^\sigma = -\frac{M_y|_{\theta=0}}{bD_0} \frac{1}{r} \left( \int_{r_1}^r \frac{\mu_\theta^E}{r} dr - \frac{B_{-1}}{B_0} \int_{r_1}^r \mu_\theta^E dr \right). \quad (13)$$

Соотношения для напряжений (2) с учетом (13) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{F_r}{2b} \mu_\theta^E \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\sin\theta}{D_{-1}} - \frac{2B_0}{\pi B_{-1} D_0} \right) + \frac{2 - \pi \sin\theta}{\pi D_0} \right), \\ \sigma_r &= -\frac{F_r}{2bD_0} \frac{1}{r} \left( \frac{\sin\theta}{r} \int_{r_1}^r (\mu_\theta^E r) dr - \left( \frac{B_1 \sin\theta}{B_0 r} + \frac{2}{\pi} \right) \int_{r_1}^r \mu_\theta^E dr + \frac{2B_0}{\pi B_{-1}} \int_{r_1}^r \frac{\mu_\theta^E}{r} dr \right), \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{F_r}{2bD_{-1}} \frac{\cos\theta}{r^2} \left( \int_{r_1}^r \mu_\theta^E dr - \frac{B_0}{B_1} \int_{r_1}^r (\mu_\theta^E r) dr \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Решения для перемещений и искомый момент в сечении с нагрузкой, с учетом условий (12) принимают такой вид

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{F_r}{2bD_{-1}} \left( \frac{2\theta - \pi}{4} \cos\theta - \frac{\sin\theta}{2} + \frac{2B_0^2}{\pi B_{-1} B_1} \right), \\ u_\theta &= -\frac{F_r}{2bD_{-1}} \left( \frac{B_0}{B_1} r \left( 1 - \frac{2\theta}{\pi} - \cos\theta \right) + \frac{\pi - 2\theta}{4} \sin\theta \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$M_y|_{\theta=0} = \frac{F_r B_0}{\pi B_{-1}}. \quad (16)$$

В соотношениях (13)-(15) введены обозначения определенных интегралов

$$\begin{aligned} B_0 &= \int_{r_1}^{r_2} \mu_\theta^E dr, \quad B_1 = \int_{r_1}^{r_2} (\mu_\theta^E r) dr, \quad B_{-1} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_\theta^E}{r} dr, \\ D_{-1} &= \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \mu_\theta^E dr - \frac{B_0}{B_1} \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r (\mu_\theta^E r) dr \right) dr, \quad D_0 = \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_{r_1}^r \frac{\mu_\theta^E}{r} dr - \frac{B_{-1}}{B_0} \int_{r_1}^r \mu_\theta^E dr \right) dr, \\ D_{-1} &= \frac{1}{B_1} (B_{-1} B_1 - B_0^2), \quad D_0 = \frac{1}{B_0} (B_{-1} B_1 - B_0^2), \quad \frac{B_1}{B_0} = \frac{D_0}{D_{-1}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Согласно первому соотношению (15) прогиб кольца в продольном направлении, в сечении с нагрузкой, будет равен

$$u_r|_{\theta=0} = -\frac{F_r}{2bD_{-1}} \left( \frac{2B_0^2}{\pi B_{-1} B_1} - \frac{\pi}{4} \right), \quad (18)$$

а в поперечном направлении

$$u_r|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{F_r}{2bD_{-1}} \left( \frac{2B_0^2}{\pi B_{-1} B_1} - \frac{1}{2} \right). \quad (19)$$

В случае однослойного кольца, соотношения для напряжений и перемещений упрощаются к виду



$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{F_r}{4b(\ln(\Delta_r)\bar{r}-h)} \frac{1}{r} \left( \frac{4h}{\pi \ln(\Delta_r)} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) - (r-r_1) \left( \frac{4}{\pi} + \frac{r_2-r}{r} \sin\theta \right) \right), \\ \sigma_\theta &= -\frac{F_r}{4b(\ln(\Delta_r)\bar{r}-h)} \left( \frac{4}{\pi} \left( \frac{h}{r \ln(\Delta_r)} - 1 \right) - 2 \frac{\bar{r}-r}{r} \sin\theta \right), \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{F_r(r-r_1)(r_2-r)}{4b(\ln(\Delta_r)\bar{r}-h)r^2} \cos\theta, \\ u_r &= -\frac{F_r\bar{r}}{2bE_\theta(\ln(\Delta_r)\bar{r}-h)} \left( \frac{2\theta-\pi}{4} \cos\theta - \frac{\sin\theta}{2} + \frac{2h}{\pi \ln(\Delta_r)\bar{r}} \right), \\ u_\theta &= -\frac{F_r\bar{r}}{2bE_\theta(\ln(\Delta_r)\bar{r}-h)} \left( \frac{r}{\bar{r}} \left( 1 - \frac{2\theta}{\pi} - \cos\theta \right) + \frac{\pi-2\theta}{4} \sin\theta \right). \end{aligned} \quad (20)$$

$$\quad (21)$$

Соотношения для прогибов кольца (18) и (19) примут такой вид

$$\begin{aligned} u_r|_{\theta=0} &= -\frac{F_r\bar{r}}{2bE_\theta(\ln(\Delta_r)\bar{r}-h)} \left( \frac{2h}{\pi \ln(\Delta_r)\bar{r}} - \frac{\pi}{4} \right), \\ u_r|_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= -\frac{F_r\bar{r}}{2bE_\theta(\ln(\Delta_r)\bar{r}-h)} \left( \frac{2h}{\pi \ln(\Delta_r)\bar{r}} - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Момент в сечении с нагрузкой

$$M_y|_{\theta=0} = \frac{F_r h}{\pi \ln(\Delta_r)}. \quad (23)$$

В соотношениях (20)-(23) использованы обозначения

$$(r_2 + r_1)/2 = \bar{r}, \quad r_2/r_1 = \Delta_r.$$

Следует отметить, что, несмотря на использование гипотезы плоских сечений, соотношения (20)-(23) отличаются от соотношений, приведенных в литературе [8,10], поскольку в рассматриваемом упрощенном решении не использовались допущения о распределении нормальных окружных напряжений. Сравнение результатов расчета по указанным соотношениям показало, что (23) дает несколько заниженное значение момента по сравнению с соотношением  $M_y|_{\theta=0} = F_r \bar{r} / \pi$  в [8,10]. В то же время соотношения (22) дают большие значения перемещений, чем в [8], однако меньшие – чем в [10], поскольку в последнем случае также учитывается дополнительный поворот сечений за счет деформаций поперечного сдвига. Однако с увеличением отношения  $\bar{r}/h$ , разница между результатами расчета по соотношениям (20)-(23) и соотношениям в [8,10] быстро уменьшается, что косвенно подтверждает правильность подхода, использованного для решения задачи.

## 5 РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассмотрим применение построенных решений на примере композитного четырехслойного кольца с поперечным сечением, размеры и строение которого, приведены на рис. 3, а. Радиусы внутренней и внешней цилиндрических поверхностей кольца:  $r_1 = 75\text{мм}$ ,  $r_2 = 135\text{мм}$ .

Следует отметить, что кольцо с такими размерами согласно известной классификации [8] для криволинейных брусьев, относится к толстым кольцам или кольцам большой кривизны ( $\bar{r}/h = 1,75 < 5$ ).

Кольцо состоит из цилиндрически ортотропных и изотропных слоев со следующими упругими свойствами:

- стеклопластик ( $P_1, P_3$ ):

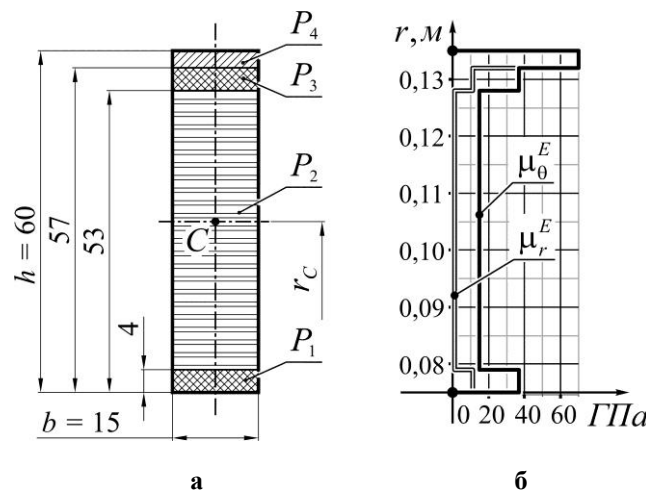
$$E_{\theta}^{[1]} = E_{\theta}^{[3]} = 36,8 \text{ ГПа}, \quad E_r^{[1]} = E_r^{[3]} = 11,0 \text{ ГПа}, \quad G_{r\theta}^{[1]} = G_{r\theta}^{[3]} = 4,5 \text{ ГПа}, \quad \nu_{\theta r}^{[1]} = \nu_{\theta r}^{[3]} = 0,351;$$

- фанера ФБС ( $P_2$ ):  $E_{\theta}^{[2]} = 14,8 \text{ ГПа}, \quad E_r^{[2]} = 1,13 \text{ ГПа}, \quad G_{\theta r}^{[2]} = 1,35 \text{ ГПа}, \quad \nu_{\theta r}^{[2]} = 0,445$ ;

- алюминиевый сплав ( $P_4$ ):  $E_{\theta}^{[4]} = E_r^{[4]} = 70 \text{ ГПа}, \quad G_{\theta r}^{[4]} = 26,9 \text{ ГПа}, \quad \nu_{\theta r}^{[4]} = 0,34$ .

Функции механических характеристик  $\mu_a^S$  для сечения на рис. 3, а, согласно (1) могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mu_a^S = & S_a^{[1]}(H(r-0,075) - H(r-0,079)) + S_a^{[2]}(H(r-0,079) - H(r-0,128)) + \\ & + S_a^{[3]}(H(r-0,128) - H(r-0,132)) + S_a^{[4]}(H(r-0,132) - H(r-0,135)). \end{aligned} \quad (1)$$



**Рис. 3.** Схема поперечного сечения (а) и распределение модулей упругости (б) многослойного кольца

Графики функций продольного  $\mu_{\theta}^E$  и поперечного  $\mu_r^E$  модулей упругости, построенные по соотношениям (24) приведены на рис. 3, б.

К кольцу приложены сосредоточенные силы интенсивностью  $F_r = -9\kappa H$  согласно схеме на рис. 1. Отрицательное значение силы  $F_r$  указывает на то, что рассматриваемое кольцо сжато.

Общие решения для функций  $R_{r\theta}^{\tau 2[k]}$  и  $R_r^{\sigma[k]}$  для ортотропных слоев  $P_1 - P_3$  были построены с использованием соотношений (5), а для изотропного слоя  $P_4$  - с использованием (6). После подстановки полученных решений в условия (7), (8) и (9) была получена система  $4m$  уравнений, из которых определены неизвестные постоянные  $C_{12}^{[k]}, C_{22}^{[k]}, C_{13}^{[k]}, C_{23}^{[k]}$ . Далее на основе полученных решений  $R_{r\theta}^{\tau 2[k]}$  и  $R_r^{\sigma[k]}$  согласно (10) были сформированы функции  $R_{r\theta}^{\tau 2}$  и  $R_r^{\sigma}$  для всего пакета слоев.

Содержащиеся в полученных соотношениях неизвестные  $K_2$  и  $K_5$  были определены с использованием интегральных условий (9). После этого были получены общие решения для составляющих перемещений  $u_r|_{r=r_1}$ ,  $u_\theta|_{\theta=0}$  (4) и самих перемещений  $u_r, u_\theta$  (3). Последним шагом было определение неизвестных  $K_4, K_6, K_7$  и момента  $M_y|_{\theta=0}$  с использованием кинематических условий (12) и получение окончательных соотношений для перемещений и функций  $R_{r\theta}^{\tau^2}$ ,  $R_r^\sigma$  (рис. 4).

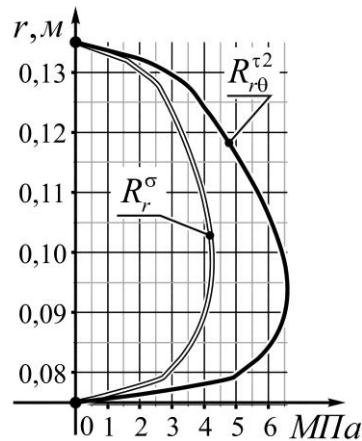


Рис. 4. Графики определяющих функций

Подстановкой полученных определяющих функций в (2), были получены функции распределения нормальных  $\sigma_r, \sigma_\theta$  и касательных  $\tau_{r\theta}$  напряжений, графики которых для характерных сечений приведены на рис. 5. Для сравнения на графики распределения напряжений двойными линиями нанесены кривые, построенные упрощенным решением (13), полученным с использованием гипотезы плоских сечений.

Графики на рис. 5 показывают скачкообразное изменение окружных нормальных напряжений  $\sigma_\theta$  и выполнение условий непрерывности полученных решений для функций  $\sigma_r, \tau_{r\theta}$  на границах слоев. Также, построенные графики показывают, что применение гипотезы плоских сечений вносит незначительное изменение в распределения напряжений  $\sigma_r$  и  $\tau_{r\theta}$ , причем для касательных напряжений кривые, построенные с использованием точного и упрощенного решений, практически совпадают для всех сечений кольца.

В то же время, использование гипотезы плоских сечений ощутимо искажает распределение нормальных окружных напряжений  $\sigma_\theta$ . В сечении с координатой  $\theta = 0$  для внутренних ( $r_1 = 0,075\text{ м}$ ) и внешних ( $r_2 = 0,135\text{ м}$ ) волокон упрощенное решение дает значения, заниженные на 5% и 15% соответственно, в сечении с координатой  $\theta = 0,709$  – на 40% и 25%, а в сечении с координатой  $\theta = \pi/2$  – на 18% и 17%.

Следует отметить, что использование гипотезы плоских сечений также привело к незначительному уменьшению полученного значения момента  $M_y|_{\theta=0}$  на 2,6%.

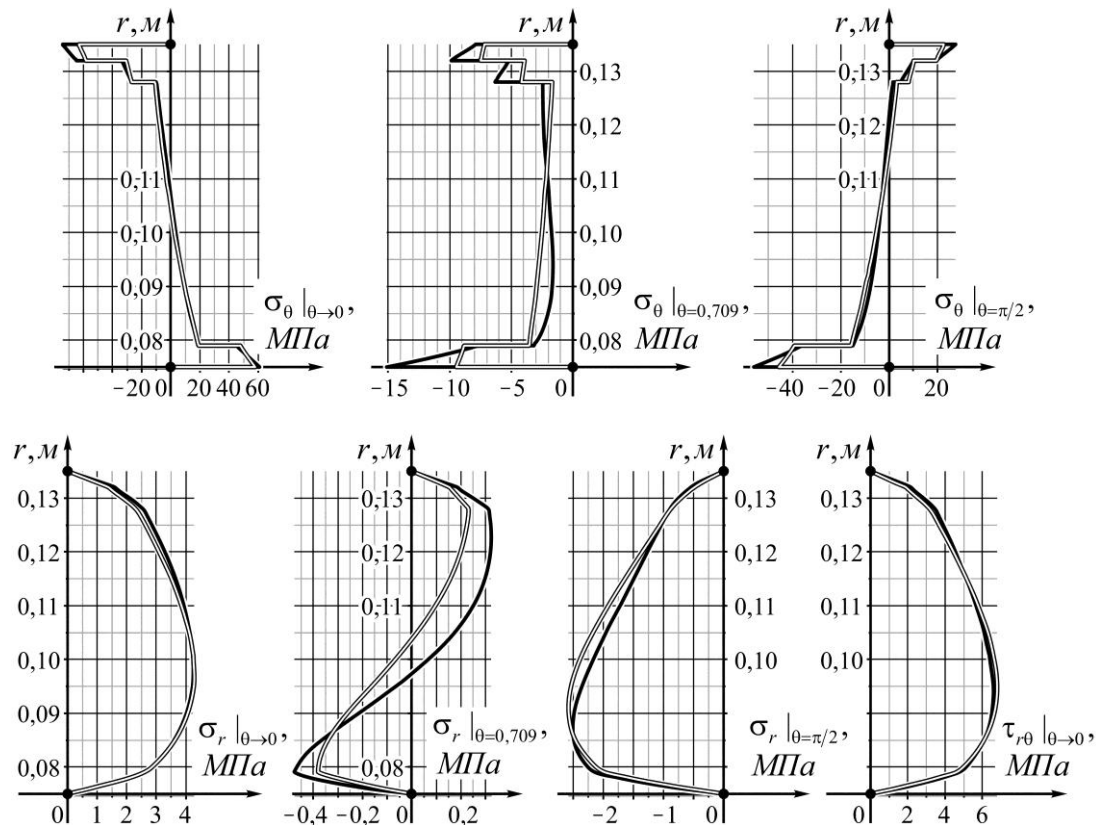


Рис. 5. Графики распределения компонент напряженного состояния

Распределение перемещений для отдельных сечений приведены на рис. 6, где сплошными линиями построены графики перемещений согласно точному решению (3), а двойными линиями – с использованием соотношений (15) упрощенного решения.

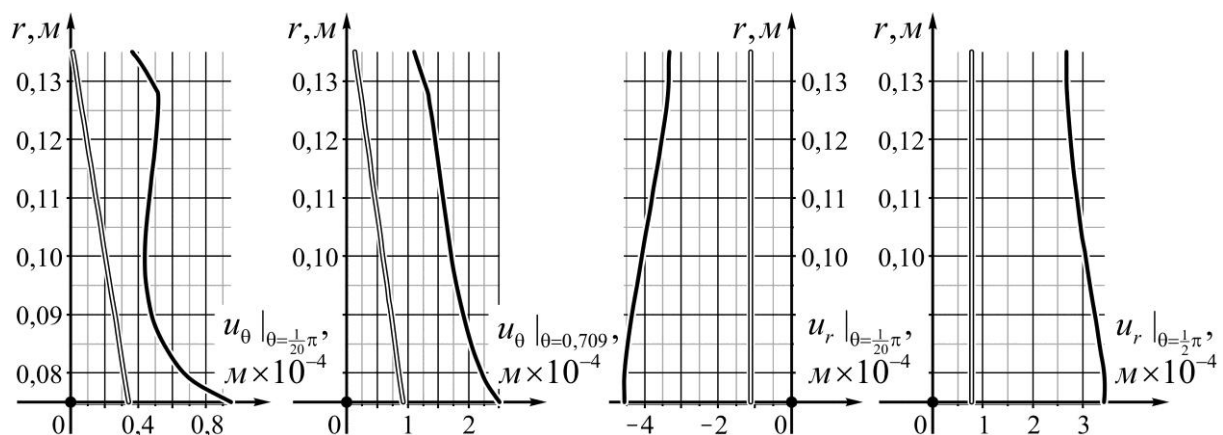


Рис. 6. Графики перемещений в отдельных сечениях

Графики на рис. 6 показывают существенное изменение распределения перемещений при использовании гипотезы плоских сечений. Упрощенное решение не позволяет учитывать влияние искривления (депланации) поперечных сечений кольца, что приводит к заниженным значениям перемещений. Радиальные перемещения внутреннего волокна в сечениях  $\theta = 0, \pi$  по упрощенному решению оказываются меньше на 78,1%, а в сечении  $\theta = \pi/2$  – на 49,4%.

Влияние деформаций сдвига и обжатия на общее деформированное состояние рассматриваемого кольца можно оценить по графикам на рис. 7. Здесь сплошными линиями показаны с увеличением в 60 раз полные перемещения внешних поверхностей кольца и границ его слоев согласно точному (рис. 7, а) и упрощенному (рис. 7, б) решениям, а штриховыми – их положение до деформации.

Графики на рис. 7 показывают существенное изменение характера деформаций и величины полных перемещений кольца при использовании упрощенного решения, полученного на основе гипотезы плоских сечений.

## 6 ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ

Приведенные выше результаты расчета показывают значительное влияние податливости материалов слоев деформациям поперечного сдвига и обжатия на характер распределения и величину компонент НС и, особенно, перемещений многослойного кольца. Однако, такое влияние имеет место для относительно толстых колец с малым отношением  $(r_1 + r_2)/(2h)$ . Дополнительные расчеты показали, что при увеличении этого отношения до 5,5, путем увеличения внутреннего радиуса кольца  $r_1$ , применение упрощенного решения дает значение радиального перемещения в сечении  $\theta = 0$  заниженным на 26,6%, а в сечении  $\theta = \pi/2$  – на 18,1%. В то же время разница между распределениями напряжений  $\sigma_\theta$ , в этих сечениях уже не превышает 3%.

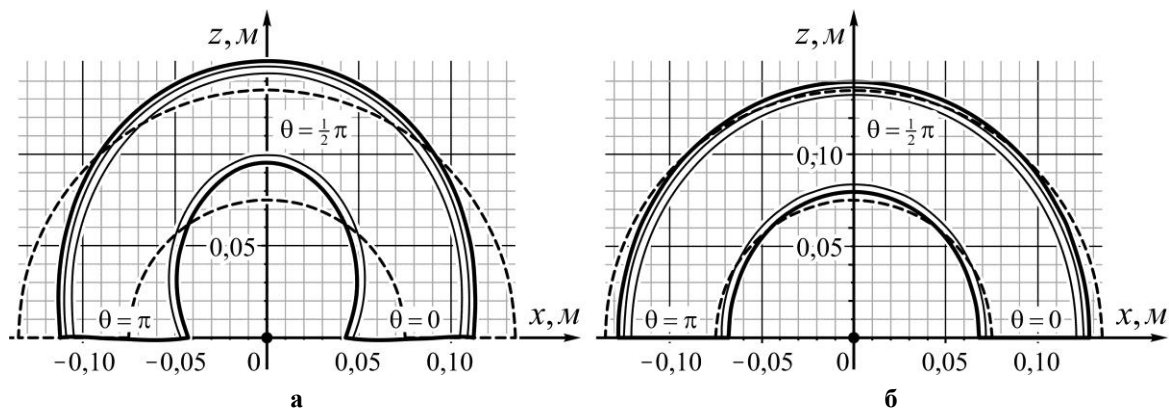
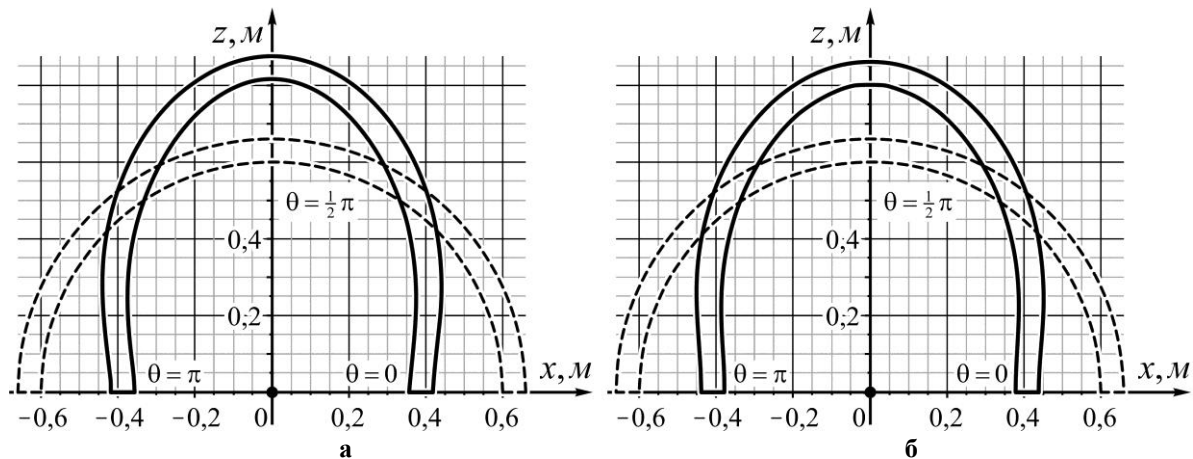


Рис. 7. Графики полных перемещений поверхностей кольца (перемещения увеличены в 60 раз):  
 а – точное решение; б – упрощенное решение (гипотеза плоских сечений)

В случае, когда отношение  $(r_1 + r_2)/(2h) = 10,5$ , применение упрощенного решения дает значение радиального перемещения в сечении  $\theta = 0$  заниженным на 8,8%, в сечении  $\theta = \pi/2$  – только на 6,0%, а разница между распределениями напряжений оказывается меньше 1%. Деформированное состояние кольца по точному (рис. 8, а) и упрощенному решению (рис. 8, б) в этом случае уже мало отличается.





**Рис. 8.** Графики полных перемещений поверхностей кольца (перемещения увеличены в 10 раз):  
а – точное решение; б – упрощенное решение (гипотеза плоских сечений)

## 7 ВЫВОДЫ

Таким образом, на основе точного решения теории упругости для многослойного бруса с круговой осью построено аналитическое решение диаметрального растяжения (сжатия) многослойного кольца взаимно противоположными сосредоточенными нормальными силами. Соотношения (2)-(12) позволяют определять основное НДС композитных колец с произвольным количеством цилиндрически ортотропных слоев, с учетом податливости их материалов деформациям поперечного сдвига и обжатия.

Результаты применения соотношений точного и упрощенного решения для тестовой задачи определения основного НДС четырехслойного толстого кольца  $((r_1 + r_2)/(2h) = 1,75)$  показали, что применение гипотезы плоских сечений приводит к незначительному изменению распределений  $\sigma_r$  и  $\tau_{r\theta}$ . Однако, при определении напряжений  $\sigma_\theta$  такое упрощение приводит к значительному занижению их величины в опасных точках. Еще большие изменения применение гипотезы плоских сечений вносит в распределения перемещений, занижая их величину, в некоторых сечениях, в несколько раз.

Дополнительные расчеты показали, что при увеличении отношения  $(r_1 + r_2)/(2h)$  до определенных значений применение гипотезы плоских сечений уже не вносит значительных изменений при определении НДС, а при дальнейшем увеличении указанного отношения – и перемещений. Это позволяет использовать упрощенное решение для расчета тонких многослойных колец.

## Литература

1. Timpe A. Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion / A. Timpe // Z. Math. Physik. – 1905. – 52. – P. 348–383.
2. Тимошенко С. П. Прочность и колебания элементов конструкций / С. П. Тимошенко. – М.: Наука, 1975. – 704 с.
3. Chianese R. B. The general solution to the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter / R. B. Chianese, R J. Erdlac // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – 1988. – Vol. 41, Iss. 2. – P. 239–247.
4. Batista M. Technical note: Stresses in a circular ring under two forces acting along a diameter / M. Batista, J. Usenik // Journal of Strain Analysis for Engineering Design. – 1996. – 31 (1). – P. 75–78.

5. Batista M. Stresses and displacements in a circular ring loaded by symmetrically spaced radial forces / M. Batista // *The IES Journal Part A: Civil & Structural Engineering*. – 2015. – 8 (4). – P. 296–303.
6. Durelli A. J. Stresses and Displacements on the Boundaries of Circular Rings Diametrically Loaded / A. J. Durelli, Y. H. Lin // *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme* – 1986. – 53 (1). – P. 213–219.
7. Bagci C. Exact elasticity solutions for stresses and deflections in curved beams and rings of exponential and t-sections / C. Bagci // *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*. – 1993. – 115(3). – P. 346–358.
8. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1 / Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 831 с.
9. Шваб'юк В. І. Лінійне деформування, міцність стійкість композитних оболонок середньої товщини: монографія / В. І. Шваб'юк, С. В. Ротко. – Луцьк: РВВ ЛНТУ. – 2015. – 264 с.
10. Композиционные материалы: Справочник / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др.; Под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
11. Tutuncu N. Plane Stress Analysis of End-Loaded Orthotropic Curved Beams of Constant Thickness With Applications to Full Rings / N. Tutuncu // *J. Mech. Des.* – 1998. – 120 (2). – P. 368–374.
12. Koval'chuk S. B. Elasticity Theory Solution of the Problem on Bending of a Narrow Multilayer Cantilever with a Circular Axis by Loads at its End / S. B. Koval'chuk, A. V. Goryk // *Mechanics of Composite Materials*. – 2018. – Vol. 54, Iss. 5. – P. 605–620.
13. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
14. Kovalchuk S. B. Major stress-strain state of double support multilayer beams under concentrated load. Part 1. Model construction / S. B. Kovalchuk, A.V. Gorik // *Journal of mechanical engineering*. – 2018. – Vol. 21. Iss. 4. – P. 30–36.
15. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек / А. Л. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.

## References

1. Timpe, A. (1905). Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion, *Z. Math. Physik*, 52, 348–383.
2. Timoshenko, S. P. (1975). *Prochnost i kolebaniya elementov konstruktsiy*. М.: Nauka, 704.
3. Chianese, R. B., Erdlac, R. J. (1988). The general solution to the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 41(2), 239–247.
4. Batista, M., Usenik, J. (1996). Technical note: Stresses in a circular ring under two forces acting along a diameter. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 31(1), 75–78.
5. Batista, M. (2015). Stresses and displacements in a circular ring loaded by symmetrically spaced radial forces. *The IES Journal Part A: Civil & Structural Engineering*, 8(4), 296–303.
6. Durelli, A. J., Lin, Y. H. (1986). Stresses and Displacements on the Boundaries of Circular Rings Diametrically Loaded. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 53(1), 213–219.
7. Bagci, C. (1993). Exact elasticity solutions for stresses and deflections in curved beams and rings of exponential and t-sections. *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 115(3), 346–358.
8. Birger, I. A., Panovko, Ya. H. (1968). *Prochnost, ustoychivost, kolebaniya. Spravochnik v treh tomah. Tom 1*. М.: Mashinostroenie, 831.
9. Shvabiuk, V. I., Rotko, S. V. (2015). *Liniine deformuvannia, mitsnist stiikist kompozytnykh obolonok serednoi tovshchyny: monohrafiia*. Lutsk: RVV LNTU, 264.
10. Vasilev, V. V., Protasov, V. D., Bolotin, V. V. (1990). *Kompozitsionnyie materialyi: Spravochnik*. М.: Mashinostroenie, 512.
11. Tutuncu, N. (1998). Plane Stress Analysis of End-Loaded Orthotropic Curved Beams of Constant Thickness With Applications to Full Rings. *J. Mech. Des.*, 120 (2), 368–374.



12. Koval'chuk, S. B., Goryk, A. V. (2018). Elasticity Theory Solution of the Problem on Bending of a Narrow Multilayer Cantilever with a Circular Axis by Loads at its End. *Mechanics of Composite Materials*, 54 (5), 605–620.
13. Lehnitskiy, S. G. (1977). *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela*. M.: Nauka, 416.
14. Kovalchuk, S. B., Gorik, A. V. (2018). Major stress-strain state of double support multilayer beams under concentrated load. *Journal of mechanical engineering*, 21 (4), 30–36.
15. Goldenveyzer, A. L. (1976). *Teoriya uprugih tonkih obolochek*. M.: Nauka, 515.

**Ковальчук Станислав Богданович**

Полтавская государственная аграрная академия, к.т.н., доцент  
Ул. Сковороды, 1/3, Полтава Украина 36003  
stanislav.kovalchuk@pdaa.edu.ua,  
ORCID: 0000-0003-4550-431X

**Горик Алексей Владимирович**

Полтавская государственная аграрная академия, д.т.н., профессор  
Ул. Сковороды, 1/3, Полтава Украина 36003  
oleksii.goruk@pdaa.edu.ua,  
ORCID: 0000-0001-8274-9266

*Для посилань:*

Ковальчук С. Б. Основний напружено-деформований стан багат шарового кругового кільця під дією взаємно протилежних нормальних сил / С. Б. Ковальчук, А. В. Горик // Механіка та математичні методи. – 2019. – №1. – С. 56-71.

*For references:*

Koval'chuk, S., Goryk, A. (2019). Basic stress-strain state of a multilayer circular ring under the action of mutually opposite normal forces. *Mechanics and Mathematical Methods*, 1, 56-71.