УДК 539.3:624.046.3

ПРО ОПТИМАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ БУБНОВА

Бекшаєв С. Я.
Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: Розглядається задача максимального підвищення критичної сили прямолінійного стрижня змінної згинної жорсткості, шарнірно опертого кінцями на жорсткі або пружні опори і стиснутого постійною по довжині поздовжньою силою, за рахунок встановлення проміжних шарнірних опор кінцевої жорсткості, таких, що збільшення жорсткості будь-якої з опор не призводить до подальшого зростання критичної сили (узагальнена задача Бубнова). Ставиться задача: серед нескінченної кількості наборів проміжних і кінцевих опор, які розв'язують узагальнену задачу Бубнова, знайти такий, при якому сума витрат на встановлення системи цих опор буде мінімальною. В якості міри сумарних витрат приймається сума коефіцієнтів жорсткості всіх введених опор. Знайдено явні вирази шуканих оптимальних значень коефіцієнтів жорсткості. Проведено чисельне порівняння витрат при оптимальному розподілі жорсткостей опор і при однакових опорах. Розв'язок задачі отримано на основі використання якісних методів.

Ключові слова: підвищення стійкості, задача Бубнова, розподіл жорсткостей, оптимальний розподіл.

ON THE OPTIMAL SOLUTION OF THE BUBNOV PROBLEM

S. Bekshaev
Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: We consider a rectilinear rod of variable flexural stiffness, hinged at the ends on rigid or elastic supports and compressed by a longitudinal force constant along length. In order to increase its critical force, additional intermediate elastic or rigid supports are installed. It is known what conditions must satisfy the locations and coefficients of stiffness of the intermediate and end supports to critical force of formed multi-span rod has reached the maximum possible value for the given number of supports (the generalized Bubnov problem). These conditions are such that the maximum critical force can be realized at some finite values of the stiffness coefficients of the supports. Further increase in the stiffness of the supports and the associated costs will be useless, because it will not cause an increase in the critical force of the rod. At the same time, reducing the stiffness of at least one of the supports will reduce the stability of the rod. It is also known that the same maximum value of the critical force can be get at different distributions of stiffness (and, accordingly, the material) between the supports. The paper sets the task: among an infinite set of systems of supports (intermediate and end), solving the generalized Bubnov problem, to find one for which the total cost for installing the entire system of supports will be minimal. As a measure of the total cost, the sum of the stiffness coefficients of all supports is taken. The case when the stiffness of the end supports do not vary, in particular, are infinite, is considered especially. For it is searched the minimal sum of the stiffness coefficients for the intermediate supports only. In this paper, we developed explicit expressions of the desired optimal values of the stiffness coefficients (including the end ones, if they vary). The numerical comparison of costs at optimum distribution of stiffness of support and at identical supports is executed. The solution of the problem is obtained on the basis of the use of qualitative methods of the theory of stability of rod systems, in particular theorems on the influence of the imposition of constraints on their critical forces.

Keywords: stability increase; Bubnov problem; stiffness distribution; optimal distribution

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-1-83-91

1 ВСТУП

Забезпечення стійкості поздовжньо стиснутих елементів інженерних конструкцій, є важливим фактором їх експлуатаційної надійності. Одним із шляхів підвищення стійкості стиснутих стрижнів на практиці є накладення в'язей, зокрема, встановлення додаткових проміжних опор. При цьому результат залежить від пружних характеристик і локалізації опор, які вводяться. Відома верхня межа для критичної сили посилюваної стрижневої системи, яка може бути досягнута за рахунок встановлення заданої кількості додаткових в'язей. Досягнення цієї межі можливо, взагалі кажучи, різними способами і при різних витратах, зокрема, при різних витратах матеріалу і його розподілу між опорами, які вводяться. Як правило, критичні сили зростають разом із зростанням жорсткості в'язей, але іноді максимальне зростання основної (найменшої) критичної сили забезпечується вже при скінченій жорсткості опор і подальше їх посилення і пов'язані з цим додаткові витрати не підвищують стійкості конструкції.

Значний теоретичний і практичний інтерес представляє дослідження множини в'язей, що забезпечують максимальне підвищення критичної сили стрижня, і відшукання в цій множині такого набору, для якого вказане підвищення досягається при мінімальних витратах.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Бубновим [1] була поставлена і розв'язана наступна задача. Знайти таке значення $c_{кр}$ коефіцієнта жорсткості n однакових рівновіддалених проміжних пружних шарнірних опор (однакове для всіх опор), при якому основна критична сила прямолінійного призматичного $(n+1)$ - прогонового стрижня, шарнірно опертого по кінцях на жорсткі опори і стиснутого постійною по довжині осьовою силою, досягає максимально можливого (при даному числі опор) значення і не збільшується при подальшому збільшенні жорсткості, тобто при $c > c_{кр}$.

Пізніше були запропоновані різні розв'язання і узагальнення задачі Бубнова (зокрема Ф. Блейхом [2,3], П. Ф. Папковичем [4], М. Д. Дольбергом [5]), з яких особливий інтерес представляє розв'язання Я. Л. Нудельмана [6], яким був запропонований простий прийом, що дозволяє знайти нескінченно багато розв'язків узагальненої задачі Бубнова, в якій не накладається обмежень на співвідношення жорсткостей проміжних опор, зокрема не потрібна їх рівність. Незважаючи на простоту і витонченість підходу деякі деталі його застосування дають формальний привід для незадоволеності і спонукають до додаткових досліджень. Особливістю цього прийому є та обставина, що шукані коефіцієнти жорсткості виражаються через $2n$ числових параметрів, n з яких можуть вибиратися довільно в певних межах, обумовлених їх механічним змістом. Питання вибору конкретних значень цих параметрів, якщо необхідно, щоб коефіцієнти жорсткості опор, які вводяться, задовольняли будь-яким додатковим вимогам (наприклад, знаходились в заданих співвідношеннях або забезпечували екстремум певної цільової функції), не розглядалося. В окремих випадках, розглянутих в [6], розв'язання задачі Бубнова спиралися не на визначення, а на виключення цих параметрів. При цьому формально не можна гарантувати, що їх значення, які відповідають знайденим коефіцієнтам жорсткості, будуть перебувати в заданих межах, тобто зберігати вказаний механічний зміст.

По суті, залишається відкритим питання про повноту запропонованого розв'язку, тобто про існування та єдиність конкретного набору параметрів, що виключаються, для будь-якої системи опор, що розв'язують задачу Бубнова, і про можливе існування таких систем, які не включені в описану n-параметричну множину.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Основною метою цієї роботи є визначення в нескінченній множині n-опорних підсилень стиснутого стрижня такого розподілу жорсткостей введених опор, при якому витрати на їх встановлення будуть мінімальні. При цьому приймається, що сумарні витрати, пов'язані зі встановленням опор, пропорційні сумі їх коефіцієнтів жорсткості. Одночасно доводиться, що будь-який частинний розв'язок задачі Бубнова є одним з розв'язків, описаних в [6], тобто розв'язок Я.Л. Нудельмана є загальним.

4 МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

Розв'язання поставленої задачі здійснюється в основному із застосуванням якісних методів теорії стійкості стрижневих систем, використаних в [6] і детально описаних в [7].

Зокрема використовуються такі результати:

А. Нехай P_1^0, $P_2^0,\ldots$ − критичні сили стрижневої системи S^0, які занумеровані в порядку зростання. Тоді основна критична сила системи S^n, утвореної з S^0 введенням n в'язей, не перевищує величини P_{n+1}^0.

Б. Нехай P_j^0 − одна з старших критичних сил стрижневої системи $S^0(j>1)$.

Число критичних сил системи S^1, утвореної з S^0 введенням одної в'язі, строго менших за P_j^0, може зменшитися тільки за умови, що в'язь накладено у вузлі кожної з форм втрати стійкості системи S^0, що відповідають P_j^0.

В. Кратність критичної сили в спектрі системи S^1, посиленою одною в'яззю, не менше її кратності в спектрі S^0 лише в тому випадку, якщо в'язь накладено у вузлі кожної з форм втрати стійкості системи S^0, що відповідають цій критичній силі.

5 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

5.1. До розв'язання Я. Л. Нудельмана узагальненої задачі Бубнова. Ідея розв'язання використовує ту обставину, що при втраті стійкості однопрогонового шарнірно опертого на жорсткі опори стрижня по $(n+1)$-й формі всередині прогону існують рівно n внутрішніх вузлів (точок з нульовим прогином) і кожна його ділянка, обмежена двома сусідніми вузлами, деформується як окремий шарнірно опертий стрижень, так що вузли ділять цей стрижень на $(n+1)$ рівностійких ділянок. Якщо розрізати стрижень у вузлах $(n+1)$-ї форми на $(n+1)$ ізольованих стрижнів і кожен з них вільно оперти на пружні опори, то в спектрі кожного з них буде присутня критична сила P_{n+1}^0, яка дорівнює $(n+1)$-й критичній силі вихідного (нерозрізного однопрогонового) стрижня. Вона може бути основною або другою за номером в залежності від жорсткостей введених пружних опор, тому що їй може передувати критична сила, яка дорівнює

$$\bar{P} = \frac{l_j}{\dfrac{1}{c_{1j}} + \dfrac{1}{c_{2j}}},$$

де $j = 1, 2, \ldots, n+1$ – номер стрижня (номер прогону), l_j – його довжина, c_{1j} и c_{2j} – коефіцієнти жорсткості відповідно лівої та правої пружних опор j-го стрижня. Силі $\overline{P}$ відповідає прямолінійна форма втрати стійкості (рис. 1).

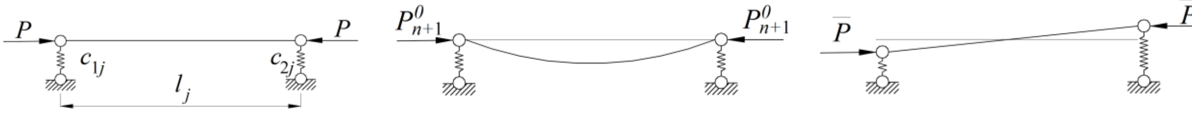

Рис. 1. Дві основні форми втрати стійкості пружно опертого стрижня

Якщо підібрати c_{1j} і c_{2j} так, щоб при будь-якому j виконувалося рівність $\overline{P} = P^0_{n+1}$, величина P^0_{n+1} стане основною і $2(n+1)$-кратною критичною силою утвореної розчленованої системи. Якщо тепер усунути розрізи, утвориться $(n+1)$-прогоновий стрижень, опертий у вузлах $(n+1)$ -ї форми на пружні опори, коефіцієнти жорсткості яких дорівнюють $c_j = c_{2j} + c_{1,j+1}$. Усунення розрізів є накладенням $2n$ в'язей, які урівнюють прогини і кути нахилу опорних перетинів суміжних прогонів. $2n$ в'язей можуть підняти основну критичну силу до $(2n+1)$-ї, а другу − до $2(n+2)$-ї, які в силу зазначеної $2(n+1)$-кратності критичної сили розчленованого стрижня обидві дорівнюють P^0_{n+1}. Таким чином, n проміжних опор з коефіцієнтами жорсткості $c_j = c_{2j} + c_{1,j+1}$, встановлені у вузлах $(n+1)$-ї форми вихідного стрижня, підвищують його основну критичну силу до максимально можливого значення P^0_{n+1}, роблячи її двократною, тим самим розв'язуючи задачу Бубнова, причому в узагальненій постановці, оскільки дозволяють знайти нескінченно багато її розв'язків з різними коефіцієнтами жорсткості введених опор при змінній по довжині стрижня згинальній жорсткості і при скінченній жорсткості крайніх опор, встановлюючи умови, яким повинні задовольняти коефіцієнти жорсткості c_0 і c_{n+1} цих опор.

При цьому для кожного номера j одне з чисел c_{1j}, c_{2j} можна вибирати довільно, дотримуючись умови $c_{1j} > P^0_{n+1}/l_j$ $(c_{2j} > P^0_{n+1}/l_j)$. Решта коефіцієнтів жорсткості визначаються системою рівнянь:

$$P^0_{n+1} = \frac{l_j}{\dfrac{1}{c_{1j}} + \dfrac{1}{c_{2j}}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n+1; \tag{1}$$

$$c_j = c_{2j} + c_{1,j+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad c_0 = c_{11}, \quad c_{n+1} = c_{2,n+1}. \tag{2}$$

В [6] не було дано прямого розв'язання цієї системи, тобто невідомі c_{ij} не розшукувалися, а виключалися, що залишало не з'ясованими дві обставини. Перше − чи немає серед виключених невідомих таких, які позбавлені фізичного змісту (наприклад, від'ємних). Друге − чи немає серед розв'язків задачі Бубнова таких, які взагалі не охоплюються запропонованою схемою, для яких не існує представлення через c_{1j} та c_{2j}. Обидва питання знімаються наступною теоремою.

Теорема. Для будь-якого набору $c_0, c_1, ..., c_{n+1}$, який розв'язує задачу Бубнова, тобто забезпечує підвищення критичної сили до P_{n+1}^0, роблячи її двократною, існує єдиний набір c_{1j} і c_{2j}, що задовольняє співвідношенням (1) і (2).

Для доведення розглянемо розрізний стрижень S^*, складений з $(n+1)$ абсолютно жорстких прямолінійних ланок довжини l_j, шарнірно з'єднаних між собою, опертий на пружні опори кінцями ланок і стиснутий постійною за довжиною стрижня осьовою силою (рис. 2).

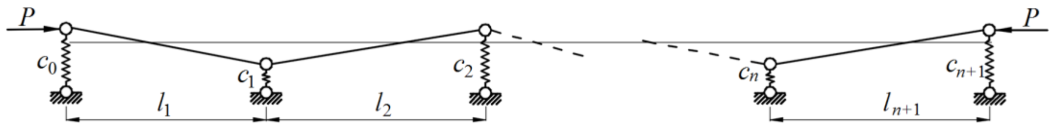

Рис. 2.Розрізний стрижень S^* з абсолютно жорсткими ланками

Мають місце наступні твердження.

Лема 1. Якщо коефіцієнти жорсткості c_j всіх опор, крім, можливо, крайніх, скінченні, всі критичні сили стрижня S^* є простими.

Щоб в цьому переконатися, припустимо, що існують дві форми втрати стійкості, що відповідають деякій критичній силі, і утворимо їх лінійну комбінацію з нульовою осадкою однієї з крайніх опор. При цьому реакція цієї опори дорівнює нулю і відповідна крайня ланка, завантажена двома силами на кінцях, може перебувати в рівновазі, тільки залишаючись горизонтальною, звідки випливає, що і друга опора цієї ланки має нульову осадку і все сказане щодо крайньої ланки залишається справедливим і для сусідньої і може бути повторене для всіх інших ланок. Таким чином, лінійна комбінація двох форм дорівнює нулю, і вони не є лінійно незалежними.

Лема 2. Для будь-якого набору додатних чисел $c_0, c_1, ..., c_{n+1}$ існують додатні числа c_{1j} і c_{2j}, $j = 1, 2, ..., n+1$ і P, які однозначно визначаються системою (1), (2), де P_{n+1}^0 слід замінити на P.

Для доведення позначимо через P основну критичну силу стрижня S^*. Подумки розріжемо його на j-й внутрішній опорі, розділивши її на дві пружини з коефіцієнтами жорсткості αc_j і $(1-\alpha)c_j$, $0 < \alpha < 1$, на які спираються відповідно ліва і права частини розрізаного стрижня. При зміні α від 0 до 1 критичні сили цих частин монотонно змінюються в протилежних напрямках, і знайдеться єдине значення α, при якому вони будуть рівні між собою. Їх загальне значення дорівнює P, тому що інакше після усунення розрізу і повернення до стрижня S^* його критична сила була б більшою або меншою P. Зафіксуємо це значення α і приймемо $c_{2j} = \alpha c_j$, $c_{2,j+1} = (1-\alpha)c_j$. Після цього виконаємо аналогічний розріз будь-якої з решти частин на дві рівностійкі частини, що також будуть мати критичні сили, які дорівнюють P. Продовжуючи цей процес, ми прийдемо до системи $n+1$ ізольованих однопрогонових стрижнів, опертих на пружні опори (як на рис. 1 справа), що мають однакові критичні сили, які дорівнюють P. При цьому на кожному його етапі для чергового номера j однозначно визначається пара чисел c_{2j} і $c_{1,j+1}$, що дають в сумі c_j (рівняння (2)), а рівностійкість однопрогонових стрижнів означає, що знайдені c_{2j} і $c_{1,j+1}$ задовольняють системі рівнянь (1) при P замість P_{n+1}^0.

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-1-83-91

Припущення про існування іншого розв'язку c'_{2j} і $c'_{1,j+1}$ системи (1), (2) призводить до протиріччя, тому що розрізання по *j*-й опорі, описане в попередньому абзаці, призведе до утворення двох частин з різними критичними силами, одна з яких більша, а друга – менша за P (в силу єдиності α, див. вище). Наступні розрізання можуть лише збільшити різницю між найбільшою і найменшою з основних критичних сил утворених ізольованих частин, так що співвідношення (1) не будуть виконані.

З а у в а ж е н н я . Формально лема 2 має чисто математичний зміст і може бути доведена без залучення механічних міркувань, проте таке доведення не відповідає цілям цієї роботи.

Згідно лемі 2 доведено існування і єдиність розв'язку системи, більш широкої, ніж (1), (2), тобто при довільних додатних числах $c_0, c_1, ..., c_{n+1}$. Якщо тепер в якості цих чисел взяти такі, які забезпечують значення основної критичної сили стрижня S^*, рівне P^0_{n+1}, твердження леми 2 залишиться в силі, звідки випливає справедливість теореми.

Відзначимо, що хоча співвідношення (1), (2) описують всі розв'язки задачі Бубнова в постановці Я. Л. Нудельмана, визначення конкретного розв'язку, що задовольняє будь-яким додатковим умовам, зокрема заданим співвідношенням між коефіцієнтами c_j з різними номерами, не є тривіальним.

Наприклад, у випадку Бубнова

$$l_1 = l_2 = ... = l_{n+1} = l, \quad c_1 = c_2 = ... = c_n = c_{\text{кр}}, \quad c_{11} = c_{2,n+1} = \infty,$$

розв'язок системи (1), (2) при довільній кількості n проміжних опор має вид

$$c_{1j} = \frac{P^0_{n+1}}{l}\left(1 + \frac{\sin j\varphi}{\sin(j-1)\varphi}\right), \quad c_{2j} = \frac{P^0_{n+1}}{l}\left(1 + 2\cos\varphi - \frac{\sin(j+1)\varphi}{\sin j\varphi}\right), \quad \varphi = \frac{\pi}{n+1}, \tag{3}$$

в чому можна переконатися прямою підстановкою, причому

$$c_{кр} = c_{2j} + c_{1,j+1} = \frac{4P^0_{n+1}}{l}\cos^2\frac{\pi}{2(n+1)}. \tag{4}$$

в повній згоді з результатами Бубнова в формі Ф. Блейха [2, 3].

5.2. Оптимальний розв'язок задачі Бубнова. У зв'язку з існуванням нескінченної кількості розв'язків узагальненої задачі Бубнова (нескінченної кількості наборів c_j, які забезпечують однакове максимальне підвищення критичної сили) можна ставити задачу пошуку в цій множині оптимального набору за тим чи іншим критерієм.

Приймемо, що витрати, пов'язані зі встановленням проміжних пружних опор, пропорційні їх жорсткості. Тоді оптимальним буде такий набір опор, для якого сумарна жорсткість $c_1 + c_2 + ... c_n$ досягає мінімуму. Прийом, застосований Я. Л. Нудельманом для розв'язання задачі Бубнова, дозволяє просто знайти величини c_j, що забезпечують цей мінімум.

Відома елементарна числова нерівність $(a+b)^2 \geq 4ab$, в якій рівність здійснюється тоді та тільки тоді, коли $a = b$. Тоді

$$a + b \geq \frac{4ab}{a+b} = \frac{4}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}. \tag{5}$$

Якщо підставити сюди c_{1j} і c_{2j} замість *a* і *b*, то з урахуванням (1) отримаємо

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-1-83-91

$$c_{1j} + c_{2j} \geq \frac{4P^0_{n+1}}{l_j} \ ,$$

звідки випливає, що при варіюванні c_{1j} і c_{2j} з дотриманням умови (1) ліва частина досягає свого мінімуму, який дорівнює

$$(c_{1j} + c_{2j})_{\min} = \frac{4P^0_{n+1}}{l_j} \text{ при } c_{1j} = c_{2j} = \frac{2P^0_{n+1}}{l_j} \ . \tag{6}$$

Сумарну жорсткість проміжних опор представимо в наступному вигляді:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j = \sum_{j=1}^{n}(c_{2j} + c_{1,j+1}) = c_{21} + \sum_{j=2}^{n} c_{2j} + \sum_{j=2}^{n} c_{1j} + c_{1,n+1} = c_{21} + c_{1,n+1} + \sum_{j=2}^{n}(c_{1j} + c_{2j}) \, . \tag{7}$$

Якщо коефіцієнти жорсткості c_{11} і $c_{2,n+1}$ крайніх опор задані, то величини c_{21} і $c_{1,n+1}$, що входять в (7), однозначно визначаються з (1) при $j = 1$ і $j = n+1$

$$c_{21} = \frac{1}{\dfrac{l_1}{P^0_{n+1}} - \dfrac{1}{c_{11}}}, \quad c_{1,n+1} = \frac{1}{\dfrac{l_{n+1}}{P^0_{n+1}} - \dfrac{1}{c_{2,n+1}}} \, . \tag{8}$$

Тому, як видно з (7), для мінімізації суми $c_1 + c_2 + \ldots c_n$ слід знайти мінімум тільки величини

$$\sum_{j=2}^{n}(c_{1j} + c_{2j}) \, ,$$

який повністю визначається рівностями (6).

Таким чином, оптимальні значення коефіцієнтів жорсткості проміжних опор дорівнюють

$$c_j = c_{2j} + c_{1,j+1} = 2P^0_{n+1}\left(\frac{1}{l_j} + \frac{1}{l_{j+1}}\right) \text{ при } j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1, \tag{9}$$

$$c_1 = \frac{2P^0_{n+1}}{l_2} + \frac{1}{\dfrac{l_1}{P^0_{n+1}} - \dfrac{1}{c_{11}}}, \quad c_n = \frac{2P^0_{n+1}}{l_n} + \frac{1}{\dfrac{l_{n+1}}{P^0_{n+1}} - \dfrac{1}{c_{2,n+1}}} \, , \tag{10}$$

а мінімальна сума

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right)_{\min} = 4P^0_{n+1}\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{l_j} + \frac{1}{\dfrac{l_1}{P^0_{n+1}} - \dfrac{1}{c_{11}}} + \frac{1}{\dfrac{l_{n+1}}{P^0_{n+1}} - \dfrac{1}{c_{2,n+1}}} \, . \tag{11}$$

У регулярному випадку $(l_1 = l_2 = \ldots = l_{n+1} = l)$ при жорсткому закріпленні кінців $(c_{11} = c_{2,n+1} = \infty)$ отримаємо

$$c_2 = c_3 = \ldots = c_{n-1} = \frac{4P^0_{n+1}}{l}, \quad c_1 = c_n = \frac{3P^0_{n+1}}{l}, \quad \left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right)_{\min} = \frac{(4n-2)P^0_{n+1}}{l} \, . \tag{12}$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-1-83-91

Цікаво порівняти витрати, одержувані в розв'язку Бубнова (4) з мінімальним результатом (12). Згідно (4) при рівних жорсткостях опор

$$\sum_{j=1}^{n} c_j = \frac{4nP_{n+1}^{0}}{l}\cos^2\frac{\pi}{2(n+1)}. \tag{13}$$

В таблиці 1 наведені результати обчислення величини

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right)\left(\frac{l}{P_{n+1}^{0}}\right)$$

за формулами (12) і (13) для ряду значень n, а також в рядку 4 − відносний виграш у витратах матеріалу, що отримується при оптимальному розподілі жорсткості між опорами.

Таблиця 1

Зіставлення запропонованого розв'язку з отриманим на основі розв'язку Бубнова

1	Число n проміжних опор	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	Ф-ла (13)	10,24	14,47	18,66	22,81	26,93	31,04	35,12	39,19	43,25
3	Ф-ла (12)	10	14	18	22	26	30	34	38	42
4	$\frac{\textit{Рядок}\,2-\textit{Рядок}\,3}{\textit{Рядок}\,2}\cdot 100$	2,37	3,26	3,54	3,56	3,47	3,34	3,19	3,04	2,89

6 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Як бачимо, максимальна економія при використанні оптимального розподілу жорсткості між опорами становить близько 3,5% і досягається при числі опор від 5 до 7.

З а у в а ж е н н я. В розглянутій постановці при оптимізації не варіювалися жорсткості c_{11} і $c_{2,n+1}$ крайніх опор. Якщо допустити можливість їх змінювання, то до суми (7) слід додати величину $c_{11}+c_{2,n+1}$, після чого мінімізувати суму $\sum_{j=1}^{n+1}(c_{1j}+c_{2j})$ замість (7). В результаті оптимальні значення коефіцієнтів жорсткості проміжних опор при $j=1, 2, \ldots, n$ визначатимуться співвідношеннями (9), а крайніх опор – співвідношеннями (6) при $j=1$ і при $j=n+1$.

7 ВИСНОВОК

Максимальне підвищення критичної сили стиснутого стрижня за рахунок встановлення проміжних пружних опор можливо при різних розподілах жорсткості і, отже, матеріалу між опорами. В роботі знайдено оптимальний за витратами розподіл жорсткості між опорами в припущенні, що витрати пропорційні величині коефіцієнта жорсткості опори. Проведене чисельне порівняння витрат в окремому випадку призматичного стрижня продемонструвало економію від використання запропонованого розподілу, а також близькість відомого регулярного розв'язку Бубнова до оптимального.

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2019-1-1-83-91

Література

1. Бубнов И. Г. Строительная механика корабля, ч. 1 / И. Г. Бубнов. – СПб, 1912. – 330 с.
2. Блейх Ф. Теория и расчет железных мостов / Ф. Блейх. – М.: Гострансиздат, 1931. – 640 с.
3. Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкций / Ф. Блейх. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 544 с.
4. Папкович П. Ф. Труды по строительной механике корабля, т. 4 / П. Ф. Папкович. – Л.: Судпромгиз, 1963. – 552 с.
5. Дольберг М. Д. Об одном обобщении задачи Бубнова / М. Д. Дольберг // Украинский математический журнал, т. 3. – 1951. – №4. – С. 433–448.
6. Нудельман Я. Л. Устойчивость упруго опертых балок / Я. Л. Нудельман // ПММ, т. 3. – 1939. – №4. – С. 33–48.
7. Нудельман Я. Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем / Я. Л. Нудельман. – М.-Л. ГТТИ, 1949. – 176 с.

References

1. Bubnov, I. G. (1912). Stroitel’naya mekhanika korablya, v. 1 S.-Pb, 330.
2. Bleich, F. (1931). Teoriya i raschet zheleznykh mostov. M.: Gostransizdat, 640.
3. Bleich, F. (1959). Ustoychivost’ metallicheskikh konstruktsiy. M.: GIFML, 544.
4. Papkovich, P. Ph. (1963). Trudy po stroitel’noy mekhanike korablya, v. 4. L.: Sudpromgiz, 552.
5. Dolberg, M. D. (1951). Ob odnom obobshchenii zadachi Bubnova. Ukrainian mathematical magazine, v. 3, 4, 433–448.
6. Nudelman, Ya. L. (1939). Ustoychivost’ uprugo opertykh balok. PMM, v. 3, 4, 33–48.
7. Nudelman, Ya. L. (1949). Metody opredelenia sobstvennyh chastot i kriticheskih sil dlya sterzhnevyh sistem, M.-L.: GTTI, 176.
8. Dolberg M.D. (1951) “On a some generalization of the Bubnov problem“ Ob odnom obobshchenii

Бекшаєв Сергій Янович
Одеська державна академія будівництва та архітектури, ст. викладач
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029
s.bekshayev@gmail.com
ORCID: 0000-0002-5752-5321

Для посилань:
Бекшаєв С. Я. Про оптимальне рішення задачі Бубнова / С. Я. Бекшаєв // Механіка та математичні методи. – 2019. – №1. – С. 83-91.

For references:
Bekshaev, S. (2019). On the optimal solution of the Bubnov problem. Mechanics and Mathematical Methods, 1, 83–91.