

УДК 624.072.45: 539.384

## ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ У КЛЕЙОВОМУ З'ЄДНАННІ. СПРОЩЕНА ДВОВИМІРНА МОДЕЛЬ

Курєннов С. С.<sup>1</sup>, Барахов К. П.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ»

**Анотація:** В деяких випадках при розрахунку напруженого стану клейового з'єднання необхідно враховувати деформації в площині з'єднання, обумовлені коефіцієнтами Пуассона деталей, що з'єднуються. Знаходження напруженого стану з'єднання в загальній двовимірній постановці є надзвичайно складною проблемою і аналітичний розв'язок даної задачі досі невідомий. Р. Адамс запропонував ввести в модель деякі спрощення, наприклад вважати дотичні напруження у шарах, що з'єднуються, рівними нулю, тобто вважати пластини абсолютно піддатливими до зсуву. Ця гіпотеза дозволяє знехтувати похідними від дотичних напружень в рівняннях рівноваги і звести задачу до системи двох диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно нормальних напружень в одному шарі, але ж не дає загального розв'язку задачі. Пізніше було отримано розв'язок зазначеної системи диференціальних рівнянь у вигляді подвійних рядів Фур'є. Ця методика також була застосована в деяких подальших роботах для розв'язання аналогічних задач. В даній роботі побудовано аналітичний розв'язок задачі з визначення напруженого стану клейового з'єднання в наближеній двовимірній постановці в прямокутній області. Використовується двовимірне узагальнення класичної моделі Фолькерсена. Для побудови розв'язку застосовано гіпотезу про малість похідних від дотичних напружень у шарах, що з'єднуються. Це накладає обмеження на крайові умови на бічних сторонах пластинки – нормальні напруження вважаються рівномірно розподіленими уздовж сторін, а дотичні – дорівнюють нулю. Розв'язок будується за допомогою методу відокремлення змінних і має вигляд ряду Фур'є за однією з координат. Збіжність метода обґрунтовано. Розв'язано модельні задачі, які ілюструють вплив пружних характеристик на поперечні напруження в клею. Досліджено температурні напруження у клейовому шарі і встановлено що класична одновимірна модель дає дещо занижені значення напружень.

**Ключові слова:** клейове з'єднання, двовимірна модель, температурні напруження, відокремлення змінних.

## THE TEMPERATURE STRESSES IN THE ADVERSIVE JOINT. A SIMPLIFIED TWO-DIMENSIONAL MODEL

S. Kurennov<sup>1</sup>, K. Barakhov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National Aerospace University H.E. Zhukovsky «Kharkiv Aviation Institute»

**Abstract:** In some cases, when calculating the stress state of the adhesive joint, it is necessary to take into account deformations in the joint plane caused by the Poisson's coefficients of the connecting parts. Finding a tense connection state in a two-dimensional overall formulation is an extremely difficult problem and the analytical solution to this problem is still unknown. R. Adams suggested introducing some simplifications into the model, for example, to consider the tangent stresses in the connecting layers to be equal to zero, that is, to consider the plates absolutely susceptible to shear. This hypothesis allows one to neglect derivatives of tangent stresses in equilibrium equations and reduce the problem to a system of two differential equations in partial derivatives relative to normal stresses in one layer, but does not give a general solution to the problem. Later, the solution of the specified system of differential equations in the form of double Fourier series was obtained. This technique has also been applied in some further work to solve similar problems. In this work, an analytical solution to the problem of determining the stress state of the adhesive joint in the approximate two-dimensional formulation in a rectangular region is constructed. A two-dimensional



generalization of the classic Volkersen model is used. The hypothesis of the smallness of the derivatives of tangent stresses in the connecting layers was applied to construct the solution. This places a boundary on the boundary conditions on the sides of the plate - normal stresses are considered to be uniformly distributed along the sides, and tangents are zero. The solution is constructed using separation of variables method and has the form of the Fourier series in one of the coordinates. The convergence of the method is substantiated. It solves model problems, which illustrate the influence of elastic characteristics of the transversed stresses in glue. The fact of temperature strain in adhesive joint is analyzed and it was found that classical one-dimensional model gives somewhat lower values of stresses.

**Key words:** adhesive joint, two-dimensional model, temperature strain, separation of variables.

## 1 ВСТУП

Розглядається задача знаходження напружено-деформованого стану з'єднання внапуск двох прямокутних пластин. Згин пластин нехтується. Досліджується взаємний вплив поздовжніх та поперечних деформацій на напруження у клейовому шарі. Для побудови аналітичного розв'язку пластини вважаються абсолютно піддатливими до зсуву у площині, а додані нормальні навантаження – рівномірними вздовж бічних сторін пластинок.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Першою і найбільш простою моделлю клейового з'єднання є модель Фолькерсена [1]. Подальше уточнення одновимірних моделей з'єднання було направлено на врахування взаємного впливу вигину несучих шарів і дотичних напружень в клеї [2], моделювання несучих шарів балками Тимошенко, вивчення впливу нелінійного поведіння клейового прошарку [3], узагальнення моделей на більше число шарів [4]. Сучасний розвиток цього напрямку орієнтований на розв'язання задач зі знаходження напруженого стану з'єднань при дії динамічних навантажень, знаходження напружень у з'єднаннях, що мають тріщини чи відшарування в клеї, уточнення напруженого стану клейового прошарку [5], впливу форми і розміру фасок на напруження поблизу краю клейового шва, тощо. Всі перелічені моделі є одновимірними, тобто досліджують розподіл напруженого стану вздовж з'єднання. При цьому розподіл напружень за товщиною вважається заданим (модель стрижня чи балки) а за шириною – рівномірним. Тобто у моделях нехтується вплив напружень у поздовжньому напрямку на поперечні деформації та взаємний вплив поздовжніх та поперечних деформацій при складному напруженому стані.

Однак в деяких випадках при розрахунку напруженого стану необхідно враховувати деформації в площині з'єднання, обумовлені коефіцієнтами Пуассона деталей, що з'єднуються. Знаходження напруженого стану з'єднання в загальній двовимірній постановці є надзвичайно складною проблемою і аналітичний розв'язок даної задачі досі невідомий [6]. В зв'язку з цим було запропоновано ввести в модель деякі спрощення, наприклад вважати дотичні напруження у шарах, що з'єднуються, рівними нулю, тобто пластини вважаються абсолютно піддатливими до зсуву [7]. Ця гіпотеза дозволяє знехтувати похідними від дотичних напружень в рівняннях рівноваги і звести задачу до системи двох диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно нормальних напружень в одному шарі. Але загальний розв'язок задачі в роботі [7] не отримано. В роботі [8] отримано розв'язок зазначеної системи диференціальних рівнянь у вигляді подвійних рядів Фур'є. Ця методика також була застосована в подальших роботах [9-11] для розв'язання аналогічних задач.

У даній роботі отримано аналітичний розв'язок задачі (в рамках описаної наближеної теорії), який будується за допомогою методу відокремлення змінних і має вигляд ряду Фур'є за однією координатою. Вперше вказаний підхід було запропоновано одним з авторів у роботі [12], але автором досліджувалися лише напруження, які викликані навантаженням. В даній роботі модель розвинуто на дослідження температурних деформацій, які можуть суттєво впливати на міцність композитних конструкцій.

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою роботи є дослідження температурних напружень у клейовому з'єднанні. Для досягнення мети застосовано спрощену двовимірну модель клейового з'єднання.

### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянемо склеєні прямокутні пластинки (рис. 1)  $D = \{(x, y) \in [0, l_1] \times [0, l_2]\}$ , які мають товщину  $\delta_1$  та  $\delta_2$  відповідно. До бічних сторін пластинок прикладені рівномірні нормальні зусилля.

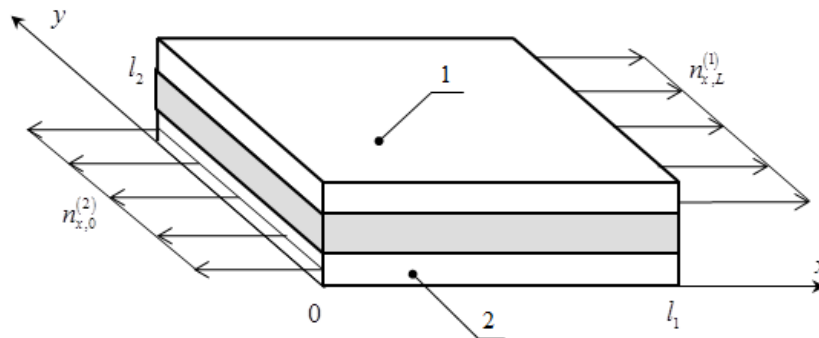


Рис. 1. Схема з'єднання

Розв'язання задачі базується на наступних гіпотезах [6-8]: клейовий прошарок працює тільки на зсув; напруження рівномірно розподілені за товщиною шарів; напрямки ортотропії шарів збігаються з напрямками координатних осей; ефекти, пов'язані з вигином, не враховуються; дотичні напруження в несучих шарах вважаються відсутніми або постійними у площині з'єднання, тобто похідні від них дорівнюють нулю.

Рівняння рівноваги диференціальних елементів верств мають вигляд [7]:

$$\tau_x + \frac{\partial N_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial q^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad \tau_y + \frac{\partial N_y^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial q^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad -\tau_x + \frac{\partial N_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial q^{(2)}}{\partial y} = 0, \quad -\tau_y + \frac{\partial N_y^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial q^{(2)}}{\partial x} = 0,$$

де  $\tau_x, \tau_y$  - дотичні напруження в клейовому шарі в напрямках  $x, y$ ;  $N_x^{(k)}, N_y^{(k)}$  - нормальні зусилля в несучому шарі  $k$  ( $k=1,2$ ) у відповідному напрямку ( $N_x^{(k)} = \delta_k \sigma_{xx}^{(k)}$ ,  $N_y^{(k)} = \delta_k \sigma_{yy}^{(k)}$ );  $q^{(k)}$  - дотичні зусилля в  $k$ -м шарі ( $q^{(k)} = \delta_k \tau_{xy}^{(k)}$ ).

Відповідно до прийнятої вище гіпотези про рівність нулю похідних від дотичних зусиль в несучих шарах, рівняння рівноваги можна записати у вигляді:

$$\tau_x + \frac{\partial N_x^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad \tau_y + \frac{\partial N_y^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad \tau_x - \frac{\partial N_x^{(2)}}{\partial x} = 0, \quad \tau_y + \frac{\partial N_y^{(2)}}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Граничні умови

$$N_x^{(k)} \Big|_{x=0} = n_{x,0}^{(k)}, \quad N_x^{(k)} \Big|_{x=l_1} = n_{x,1}^{(k)}, \quad N_y^{(k)} \Big|_{y=0} = n_{y,0}^{(k)}, \quad N_y^{(k)} \Big|_{y=l_2} = n_{y,1}^{(k)}, \quad (2)$$

повинні задовольняти умовам загальної рівноваги з'єднання

$$\begin{aligned} N_x^{(1)} + N_x^{(2)} &= n_{x,0}^{(1)} + n_{x,0}^{(2)} = n_{x,1}^{(1)} + n_{x,1}^{(2)} = F_x, \\ N_y^{(1)} + N_y^{(2)} &= n_{y,0}^{(1)} + n_{y,0}^{(2)} = n_{y,1}^{(1)} + n_{y,1}^{(2)} = F_y. \end{aligned} \quad (3)$$

Напруження в клейовий прошарку пропорційні різниці переміщень шарів

$$\tau_x = \frac{G_0}{\delta_0} (U_x^{(2)} - U_x^{(1)}), \quad \tau_y = \frac{G_0}{\delta_0} (U_y^{(2)} - U_y^{(1)}), \quad (4)$$

де  $U_x^{(k)}, U_y^{(k)}$  - переміщення у відповідному напрямку  $k$ -го шару;  $G_0, \delta_0$  - модуль зсуву і товщина клейового шару.

Закон Гука для деталей, що з'єднуються, має вигляд

$$\varepsilon_x^{(k)} = \frac{N_x^{(k)}}{\delta_k E_x^{(k)}} - \frac{\mu_{xy}^{(k)} N_y^{(k)}}{\delta_k E_y^{(k)}} + \alpha_x^{(k)} T_k, \quad \varepsilon_y^{(k)} = \frac{N_y^{(k)}}{\delta_k E_y^{(k)}} - \frac{\mu_{yx}^{(k)} N_x^{(k)}}{\delta_k E_x^{(k)}} + \alpha_y^{(k)} T_k,$$

де  $E_x^{(k)}, E_y^{(k)}, \mu_{xy}^{(k)}, \mu_{yx}^{(k)}, \alpha_x^{(k)}, \alpha_y^{(k)}$  - модулі пружності, коефіцієнти Пуассона і коефіцієнти лінійного температурного розширення у відповідних напрямках;  $T_k$  - різниця середньої за товщиною температури формування з'єднання і температури експлуатації.

Диференціюючи перші два рівняння (1) і залежності (4), потім застосовуючи співвідношення Коші  $\varepsilon_x^{(k)} = \partial U_x^{(k)} / \partial x$  та  $\varepsilon_y^{(k)} = \partial U_y^{(k)} / \partial y$ , закон Гука і умови рівноваги з'єднання (3) для виключення зусиль у другому шарі, отримаємо систему диференціальних рівнянь щодо зусиль в одному (наприклад, в першому) несучому шарі

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 N_x^{(1)}}{\partial x^2} - c_{11} N_x^{(1)} + c_{12} N_y^{(1)} + c_{13} = 0, \\ \frac{\partial^2 N_y^{(1)}}{\partial y^2} + c_{21} N_x^{(1)} - c_{22} N_y^{(1)} + c_{23} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$c_{11} = \frac{P_0}{\delta_1 E_x^{(1)}} + \frac{P_0}{\delta_2 E_x^{(2)}}, \quad c_{12} = \frac{\mu_{xy}^{(1)} P_0}{\delta_1 E_y^{(1)}} + \frac{\mu_{xy}^{(2)} P_0}{\delta_2 E_y^{(2)}}, \quad c_{21} = \frac{\mu_{yx}^{(1)} P_0}{\delta_1 E_x^{(1)}} + \frac{\mu_{yx}^{(2)} P_0}{\delta_2 E_x^{(2)}}, \quad c_{22} = \frac{P_0}{\delta_1 E_y^{(1)}} + \frac{P_0}{\delta_2 E_y^{(2)}},$$

$$c_{13} = P_0 \left( \frac{F_x}{\delta_2 E_x^{(2)}} - \frac{\mu_{xy}^{(2)} F_y}{\delta_2 E_y^{(2)}} + \alpha_x^{(2)} T_2 - \alpha_x^{(1)} T_1 \right), \quad c_{23} = P_0 \left( \frac{F_y}{\delta_2 E_y^{(2)}} - \frac{\mu_{yx}^{(2)} F_x}{\delta_2 E_x^{(2)}} + \alpha_y^{(2)} T_2 - \alpha_y^{(1)} T_1 \right),$$

$$P_0 = \frac{G_0}{\delta_0}.$$

Напружений стан першого шару в точці в даній постановці задачі описується двома нормальними напруженнями. На границі заданий лише один з компонентів тензора напружень, а другий знаходиться з рівнянь рівноваги (5). При цьому одне з рівнянь на границі набуває вигляду звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{\partial^2 B_{x,j}}{\partial x^2} - c_{11} B_{x,j} + c_{13} + c_{12} n_{y,j}^{(1)} = 0; \quad \frac{\partial^2 B_{y,j}}{\partial y^2} - c_{22} B_{y,j} + c_{23} + c_{21} n_{x,j}^{(1)} = 0, \quad (6)$$

де  $j = 0, 1$ ; для зусиль вздовж границь введені позначення  $B_{x,0} = N_x^{(1)}|_{y=0}$ ,  $B_{x,1} = N_x^{(1)}|_{y=l_2}$ ,

$B_{y,0} = N_y^{(1)}|_{y=l_2}$ ,  $B_{y,1} = N_y^{(1)}|_{x=l_2}$ . Розв'язки рівнянь (6) мають вигляд:

$$B_{x,j}(x) = S_{1,j} \sinh(a_{11}x) + S_{2,j} \cosh(a_{11}x) + \frac{c_{12}n_{y,j}^{(1)} + c_{13}}{c_{11}};$$

$$B_{y,j}(y) = S_{3,j} \sinh(a_{22}y) + S_{4,j} \cosh(a_{22}y) + \frac{c_{21}n_{x,j}^{(1)} + c_{23}}{c_{22}},$$
(7)

де  $a_{11} = \sqrt{c_{11}}$ ,  $a_{22} = \sqrt{c_{22}}$ .

Сталі знаходяться з крайових умов (2). Вирази (7) являють собою класичні одномірні розв'язки задачі про напружений стан з'єднання [1, 3]. Зусилля (7) є крайовими умовами на бічних сторонах пластинки у сукупності з умовами (2). Відповідно напруження у клейовому шарі за одномірною моделлю визначаються наступним чином:

$$T_x(x) = (-1)^j \frac{d}{dx} B_{x,j}(x), \quad T_y(y) = (-1)^j \frac{d}{dy} B_{y,j}(y).$$

Виключивши одну з невідомих в системі (5), отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial^4 N_x^{(1)}}{\partial x^2 \partial y^2} - A_1 \frac{\partial^2 N_x^{(1)}}{\partial x^2} - A_2 \frac{\partial^2 N_x^{(1)}}{\partial y^2} + A_3 N_x^{(1)} = A_4;$$
(8)

$$\frac{\partial^4 N_y^{(1)}}{\partial x^2 \partial y^2} - B_1 \frac{\partial^2 N_y^{(1)}}{\partial x^2} - B_2 \frac{\partial^2 N_y^{(1)}}{\partial y^2} + B_3 N_y^{(1)} = B_4,$$
(9)

де  $A_1 = C_{22}$ ,  $A_2 = C_{11}$ ,  $A_3 = C_{22}C_{11} - C_{21}C_{12}$ ,  $A_4 = C_{22}C_{13} + C_{12}C_{23}$ ;

$B_1 = C_{22}$ ,  $B_2 = C_{11}$ ,  $B_3 = C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21}$ ,  $B_4 = C_{11}C_{23} + C_{21}C_{13}$ .

Рівняння є незалежними і дозволяють знайти зусилля  $N_x^{(1)}$ ,  $N_y^{(1)}$ . Втім, можна знайти зусилля в одному напрямку, а зусилля в іншому знайти з рівнянь (5). Обидва шляхи призводять до однакових результатів [12].

Розглянемо побудову розв'язку рівняння (8). Крайові умови (2) на границях  $x = 0$  та  $x = l_1$  та рівняння (8) є неоднорідними. Для виключення цих неоднорідностей поздовжні зусилля представимо у вигляді

$$N_x^{(1)} = R(x) + N(x, y),$$
(10)

де функція  $R(x)$  задовольняє відповідні неоднорідні крайові умови (2), тобто функція  $N(x, y)$  на границях  $x = 0$  та  $x = l_1$  має однорідні крайові умови.

Підставивши вираз (10) в рівняння (8), отримаємо рівняння

$$-A_1 \frac{d^2 R}{dx^2} + A_3 R = A_4,$$
(11)

$$\frac{\partial^4 N}{\partial x^2 \partial y^2} - A_1 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - A_2 \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + A_3 N = 0.$$
(12)

Розв'язок рівняння (11) має вигляд

$$R(x) = V_1 \sinh\left(\sqrt{\frac{A_3}{A_1}} x\right) + V_2 \cosh\left(\sqrt{\frac{A_3}{A_1}} x\right) + \frac{A_4}{A_3}.$$
(13)

Константи  $V_1$  і  $V_2$  визначаються з відповідних крайових умов (2). Потрібно відзначити, що функція (13) була запропонована в роботі [7] як наближений розв'язок системи (5). Слід зауважити, що поздовжні зусилля (13) мають вигляд, аналогічний



зусиллям (7), але відрізняється від класичного розв'язку (7) тим, що враховує жорсткість шарів також і у поперечному до навантаження напрямку.

Оскільки неоднорідні крайові умови (2) при  $x = 0$  і  $x = l_1$  враховано за допомогою функції (13), то відповідні крайові умови для  $N(x, y)$  будуть однорідними. Це дозволяє застосувати метод відокремлення змінних. Розв'язок рівняння (12) шукаємо у вигляді добутку  $N = Y(y)X(x)$ . Розділивши змінні, отримаємо систему рівнянь

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0, \quad (A_2 + \lambda^2) \frac{d^2 Y}{dy^2} - (A_3 + \lambda^2 A_1) Y = 0.$$

Розв'язок першого рівняння має вигляд

$$X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x.$$

Оскільки крайові умови для  $N(x, y)$  на сторонах  $x = 0$  і  $x = l_1$  однорідні, то вони однорідні і для  $X(x)$ . Функція  $X(x)$  задовольняє крайові умови і тотожно не дорівнює нулю, тільки якщо  $\lambda_n = \pi n / l_1$  і  $C_2 = 0$ . Розв'язок другого рівняння системи має вигляд:

$$Y(y) = C_3 \sinh(\mu_n y) + C_4 \cosh(\mu_n y), \quad \mu_n = \sqrt{\frac{A_3 l_1^2 + \pi^2 n^2 A_1}{A_2 l_1^2 + \pi^2 n^2}}.$$

Підсумувавши по  $n$  і підставивши отримані результати в (10), отримаємо

$$N_x^{(1)} = R(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{l_1} \cdot [C_{3,n} \sinh(\mu_n y) + C_{4,n} \cosh(\mu_n y)]. \quad (14)$$

Задовольнивши крайові умови (7) на сторонах  $y = 0$  і  $y = l_2$ , отримаємо рівняння

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{4,n} \sin \frac{\pi n x}{l_1} = B_{x,0}(x) - R(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{l_1} [C_{3,n} \sinh(\mu_n l_2) + C_{4,n} \cosh(\mu_n l_2)] = B_{x,1}(x) - R(x).$$

Використовуючи повноту та ортогональність системи функцій  $\sin \pi n x / l_1$  на відріжку  $[0; l_1]$ , отримаємо

$$C_{4,n} = \frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} (B_{x,0} - R) \sin \frac{\pi n y}{l_1} dx, \quad C_{3,n} = \frac{\frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} (B_{x,1} - R) \sin \frac{\pi n y}{l_1} dx - C_{4,n} \cosh(\mu_n l_2)}{\sinh(\mu_n l_2)}.$$

Обидва інтеграла обчислюються аналітично. Зусилля  $N_y^{(1)}$  мають вигляд

$$N_y^{(1)} = T(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n y}{l_2} \cdot [C_{5,n} \sinh(v_n x) + C_{6,n} \cosh(v_n x)], \quad (15)$$

де  $T(y) = V_3 \sinh\left(\sqrt{(B_3/B_2)}y\right) + V_4 \cosh\left(\sqrt{(B_3/B_2)}y\right) + B_4/B_3$ , сталі  $V_3$  і  $V_4$  знаходяться із відповідних крайових умов (2). В свою чергу

$$v_n = \sqrt{\frac{B_3 l_2^2 + \pi^2 n^2 B_2}{B_1 l_2^2 + \pi^2 n^2}}, \quad C_{5,n} = \frac{2 \int_0^{l_2} (B_{y,1} - T) \sin \frac{\pi n y}{l_2} dy - C_{6,n} \cosh(v_n l_1)}{\sinh(v_n l_1)},$$

$$C_{6,n} = \frac{2 \int_0^{l_2} (B_{y,0}(y) - T(y)) \sin \frac{\pi n y}{l_2} dy}{l_2}.$$

Формули для напружень в клейовому шарі можна отримати з рівнянь (1), диференціюючи (13) і (14). Зусилля в другому шарі знаходяться із співвідношень (3).

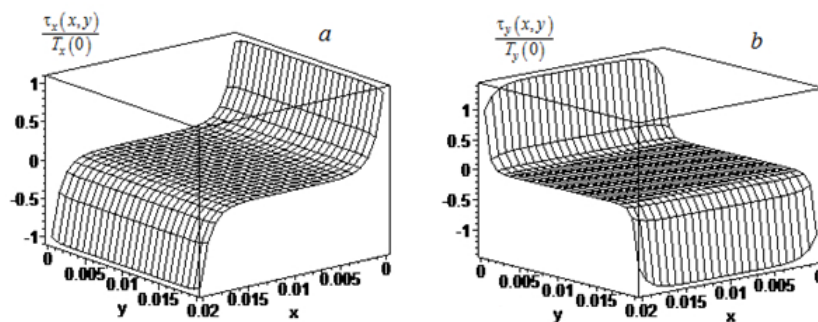
Авторами також доведено, що коефіцієнти рядів Фур'є в виразах (14) і (15) зменшуються пропорційно  $n^{-3}$ , і оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = const$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = const$ , то вирази (14) і (15) допускають дворазове диференціювання і є розв'язками рівнянь (5), (8), (9).

Розглянемо напружений стан з'єднання:  $l_1 = l_2 = 20$  мм,  $\delta_1 = 1$  мм,  $\delta_2 = 0,5$  мм,  $\delta_0 = 0,15$  мм,  $G_0 = 4,2$  ГПа. Перший шар виготовлений з вуглепластика з напрямком армування вздовж осі  $x$  ( $E_x^{(1)} = 181$  ГПа,  $E_y^{(1)} = 10$  ГПа,  $\mu_{yx}^{(1)} = 0,28$ ,  $\alpha_x^{(1)} = -0,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ,  $\alpha_y^{(1)} = 34 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ), другий шар виготовлений із алюмінію ( $E_x^{(2)} = E_y^{(2)} = 72$  ГПа,  $\mu_{xy}^{(2)} = 0,32$ ,  $\alpha_x^{(1)} = \alpha_y^{(1)} = 23,8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ). Навантаження відсутні:

$$N_x^{(k)} \Big|_{x=l_1} = N_x^{(k)} \Big|_{x=0} = 0, \quad N_y^{(k)} \Big|_{y=0} = N_y^{(k)} \Big|_{y=l_2} = 0, \quad k = 1, 2.$$

Вважаємо що з'єднання має рівномірний нагрів до деякої температури. Внаслідок різниці коефіцієнтів лінійного температурного розширення шарів у з'єднанні виникнуть напруження. Графіки дотичних напружень у клейовому шарі наведено на рис. 2. Для того, щоб виключити з дослідження вплив температури, графіки наведено в безрозмірній формі, як відношення діючих напружень до напружень, які розраховано за одновимірною моделлю  $T_{(x)}(x)$  і  $T_{(y)}(y)$ , (7) на краю з'єднання, у зоні де напруження досягають максимальних значень. Таке подання результатів дає можливість оцінити вплив врахування нерівномірності напруженого стану за шириною з'єднання.

Другий розрахунковий випадок – з'єднані дві прямокутні пластини ( $l_1 = 20$  мм,  $l_2 = 30$  мм,  $\delta_1 = 1$  мм,  $\delta_2 = 0,5$  мм,  $\delta_0 = 0,15$  мм,  $G_0 = 4,2$  ГПа) з алюмінію ( $E_x^{(2)} = E_y^{(2)} = 72$  ГПа,  $\mu_{xy}^{(2)} = 0,32$ ,  $\alpha_x^{(1)} = \alpha_y^{(1)} = 23,8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ), які мають різну температуру та вільні від навантаження границі. Напруження наведено в безрозмірній формі на рис. 3.





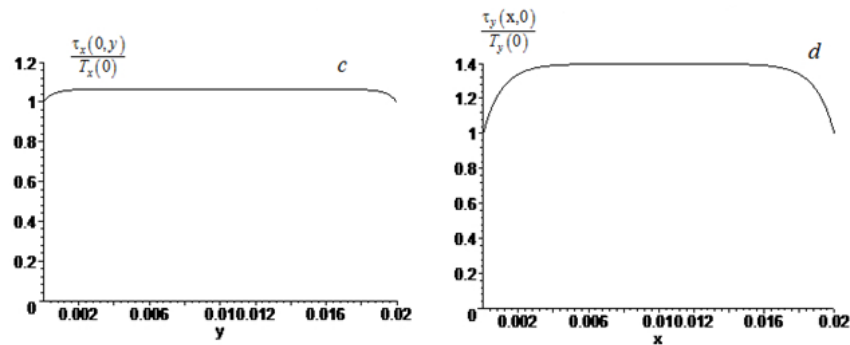


Рис. 2. Дотичні напруження в клеї у площині з'єднання (а), (b), і на границі (с), (d) у з'єднанні алюмінієвої пластини з вуглепластиком

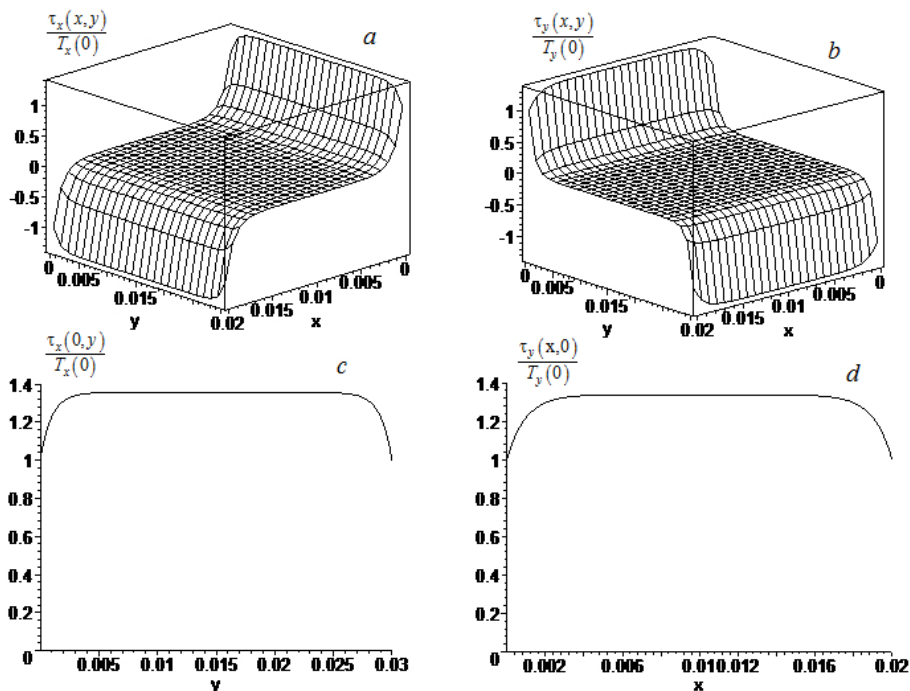


Рис. 3. Дотичні напруження в клеї у площині з'єднання (а), (b), і на границі (с), (d) у з'єднанні двох алюмінієвих пластин.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Аналізуючи результати обчислень можна зробити наступні висновки:

1) Одновимірний модель дає дещо занижені значення максимальних температурних напружень у з'єднанні. Напруження у клейовому шарі, розраховані за двовимірною моделлю можуть перевищувати відповідні напруження, які розраховані за однолінійною моделлю більш ніж на 30%.

2) Розмір з'єднання майже не впливає на максимальні значення напружень, оскільки нерівномірність напруженого стану має місце лише поблизу краю з'єднання.

3) Температурні напруження у клейовому шарі досягають максимальних значень на краю області склеювання, а в середині області – близькі до нуля.

## 6 ВИСНОВКИ

Отримано аналітичний розв'язок задачі про термонапружений стан клейового з'єднання в наближеній двовимірній постановці. Розв'язок отримано за допомогою

методу відокремлення змінних и доведено його збіжність. Отримані результати показали, що температурні напруження, розраховані за одномірною моделлю суттєво нижче, ніж знайдені за запропонованою двовимірною моделлю.

### Література:

1. Volkersen O. Die Niekraft in Zugbeanspruchten mit Konstanten Laschenquersritten / O. Volkersen // Luftfahrtforschung. – 1938. – Vol. 5. – P. 41–47.
2. Goland M. The stress in cemented joints / M. Goland, E. Reissner // Journal of Applied Mechanics. – 1944. – Vol. 11. – A17–A27.
3. da Silva L. F. M. Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey / L. F. M. da Silva, P. J. C. das Neves, R. D. Adams, J. K Spelt // International Journal of Adhesion & Adhesives. – 2009. - Vol. 29. - P. 319–330. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.06.005
4. Kurennov S. S. Through-thickness stress distribution in the adhesive joint for the multilayer composite material / S. S. Kurennov, A. G. Koshevoi, A. G. Polyakov // Russian Aeronautics (Iz VUZ). – 2015. – Vol. 58, Issue 2. – P. 145–151. DOI: 10.3103/S1068799815020026.
5. Wang J. Three-parameter elastic foundation model for analysis of adhesively bonded joints / J. Wang, C. Zhang // Int. J. Adhes. & Adhes. – 2009. – Vol. 29. – P. 495–502.
6. Rapp P. Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends / P. Rapp // Archives of Civil and Mechanical Engineering. – 2015. - V. 15, I. 2. - P. 603–619. DOI: 10.1016/j.acme.2014.06.004.
7. Adams R. D. Effect of Poisson's ratio strains in adherends on stresses of an idealized lap joint / R. D. Adams, N. A. Peppiatt // J. of Strain Analysis. – 1973. – Vol. 8 (2). – P. 134–139.
8. Mathias J. D. On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches / J. D. Mathias, M. Grédiac, X. Balandraud // Int. J. of Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43. – P. 6921–6947. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.02.016
9. Deheeger A. A closed-form solution for the thermal stress distribution in rectangular metal/composite bonded joints / A. Deheeger, J. D. Mathias, M. Grédiac // Int. J. of Adhesion & Adhesives. – 2009. – Vol. 29. – P. 515–524. DOI: 10.1016/j.ijadhadh.2008.10.004
10. Randrianalisoa J. On the thermomechanical behavior of two-dimensional foam/metal joints with shear-deformable adherends – Parametric study / J. Randrianalisoa, R. Dendievel, Y Bréchet // Composites: Part B. – 2011. – Vol. 42. – P. 2055–2066. DOI: 10.1016/j.compositesb.2011.04.011
11. Kima H. S. Three dimensional stress analysis of a composite patch using stress functions / H. S. Kima, M. Cho, J. Lee, A. Deheeger, J. D. Mathias, M. Grédiac // Int. J. of Mechanical Sciences. – 2010. – Vol. 52. – P. 1646–1659. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2010.08.006
12. Kurennov S. S. An Approximate Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Analytical Solution / S. S. Kurennov // Mechanics of Composite Materials. – 2014. – V. 50, Issue 1. – P. 105–114, DOI: 10.1007/s11029-014-9397-z.

#### **Куреннов Сергій Сергійович**

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», д.т.н., професор  
вул. Чкалова, 17, Харків, Україна 61070  
ss.kurennov@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-3835-3288

#### **Барахов Костянтин Петрович**

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», ст. викладач  
вул. Чкалова, 17, Харків, Україна 61070  
krbarakhov@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-1714-7917

#### *Для посилань:*

Куреннов С. С. Температурні напруження у клейовому з'єднанні. спрощена двовимірна модель / С. С. Куреннов, К. П. Барахов // Механіка та математичні методи. – 2019. – №2. – С. 36-45.

#### *For references:*

Kurennov, S., Barakhov, K., (2019). The temperature stresses in the adhesive joint. A simplified two-dimensional model. Mechanics and Mathematical Methods, 2, 36-45