

УДК 62-50

КВАЗІОПТИМАЛЬНЕ ГАЛЬМУВАННЯ В СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ОБЕРТАНЬ ГІРОСТАТА З РУХОМОЮ МАСОЮ, З'ЄДНАНОЮ З ТІЛОМ ДЕМПФЕРОМ З КВАДРАТИЧНИМ ТЕРТЯМ

Лещенко Д. Д.¹, Єршков С. В.², Палій К. С.¹

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

²Державний астрономічний інститут ім. М.Д. Штернберга МДУ

Анотація: Аналіз об'єктів, які вміщують елементи з розподіленими та зосередженими параметрами, представляє інтерес у теоретичному та прикладному аспектах. Природний розвиток досліджень задач динаміки та керування рухом твердих тіл навколо нерухої точки полягає в урахуванні тієї обставини, що тіла не є абсолютно твердими, а в деякому розумінні є близькими до вказаних ідеальних моделей. Необхідність аналізу впливу різних неідеальностей обумовлена зростанням вимог до точності розв'язування практичних задач космонавтики, гіроскопії та ін. Вплив неідеальностей може бути виявлений на основі асимптотичних методів нелінійної механіки (сингулярних збурень, усереднення та ін.). Він зводиться до наявності доданків у рівняннях Ейлера для деякого фіктивного твердого тіла.

Раніше задачі оптимальної стабілізації (або гальмування) твердого тіла розглядалися при різних припущеннях відносно динамічних характеристик цих тіл, систем керування (обмежень на керуючий момент) і для різних критеріїв якості (швидкодії, витрати робочого тіла та ін.)

Досліджується задача квазіоптимального за швидкодією гальмування обертань твердого тіла зі сферичною порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості (для малих чисел Рейнольдса). Великий інтерес до задач про рух твердих тіл з порожнинами, які містять рідину, виник у зв'язку з розвитком ракетної та космічної техніки. Задачі динаміки твердого тіла з порожнинами, які вміщують в'язку рідину, представляють більші труднощі, ніж у випадку ідеальної рідини. Крім того, тіло з'єднано в точці на осі симетрії з масою відносно малих розмірів за допомогою пружної в'язі з квадратичною дисипацією. Наявність рухомої маси моделює присутність нежорстко закріплених елементів на космічному апараті, що чинить суттєвий вплив на його рух відносно центра мас. На тверде тіло діє також дисипативний момент сил лінійного опору середовища.

Задача синтезу квазіоптимального за швидкодією гальмування обертань динамічно симетричного тіла в середовищі з опором досліджена аналітично та чисельно. Було проведено асимптотичне розв'язування на основі процедури усереднення по фазі незбуреного прецесійного руху. Визначені якісні властивості квазіоптимального руху, наведені графіки.

Ключові слова: квазіоптимальне гальмування, в'язка рідина, рухома маса, середовище з опором, усереднення.

QUASI-OPTIMAL DECELERATION OF ROTATIONS OF A GYROSTAT WITH A MOVING MASS COUPLED TO IT THROUGH A QUADRATIC FRICTION DAMPER IN A RESISTIVE MEDIUM

D. Leshchenko¹, S. Ershkov², E. Palii¹

¹Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

²Sternberg Astronomical Institute MSU

Abstract: The analysis of objects containing elements with distributed and lumped parameters is of interest both for theory and applications.

The development of research in dynamics and control of rigid bodies moving about a fixed point implies that the bodies are not absolutely rigid but are rather close to ideal models. The need for the analysis of the influence of various deviations from perfectness is caused by growing accuracy requirements in space exploration, gyroscopy, etc. The effect of nonidealities can be analyzed by singular perturbation methods, averaging or other asymptotic methods of nonlinear mechanics. This influence reduced to the presence of additional perturbation torques in Euler's dynamic equations for a fictitious rigid body.

In this part the problem addresses of the time-optimal deceleration of rotations of a dynamically symmetric rigid body under a small control torque in the ellipsoidal domain with close unequal values of the ellipsoid's semiaxes. The problem is considered as a problem of a quasi-optimal control. It is assumed that the body contains a spherical cavity filled with a highly viscous fluid (at small Reynolds numbers).

A great interest to the problem of rotation of rigid bodies with fluid-containing cavities has arisen in connection with the development in the rocket and space technology. The problems of dynamics of rigid bodies with cavities, containing a viscous fluid, are significantly more difficult than in the case of ideal fluid. The body is assumed to have a moving mass connected to it through elastic coupling with quadratic dissipation. The situation simulates the presence of loosely fixed components on a spacecraft, having a significant influence on its motion relative to the center of mass.

In addition, the body is affected by a small medium resistance torque that is proportional to the angular momentum. The problem synthesizing the quasi-optimal deceleration of a dynamically symmetric body rotations in a resistive medium is investigated analytically and numerically. An asymptotic solution based on the procedure of averaging the unperturbed precession motion over the phase is performed. The qualitative properties of quasi-optimal motion are analyzed and the corresponding graphs are presented.

Keywords: Quasi-optimal deceleration, viscous fluid, moving mass, resisting medium, averaging.

1 ВСТУП

Розглядається задача квазіоптимального (близького до оптимального) за швидкодією гальмування обертань динамічно симетричного твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості. До точки на осі симетрії тіла прикріплена рухома точкова маса. Вважається, що при відносному русі на точку діє поворотальна пружна сила і сила опору, яка пропорційна квадрату швидкості (квадратичне тертя). На тіло також діє гальмуючий момент сил лінійного опору середовища.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Дослідженню руху твердих тіл з внутрішніми ступенями вільності присвячено ряд робіт (див., наприклад, [1-6]). Вивчення некерованих рухів твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, було проведено в роботах [2, 3, 6, 9, 10]. Аналізу пасивних рухів твердого тіла в середовищі з опором приділялася увага в [3, 6, 11-14]. Значна кількість робіт присвячена дослідженню руху твердого тіла з рухомими внутрішніми масами [1, 3, 4, 7, 8, 15, 16]. Проблема керування обертаннями квазітвердих тіл за допомогою зосереджених моментів сил, що мають значення для застосувань, менш досліджена [5, 6, 17-19].

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Досліджується задача про квазіоптимальне (близьке до оптимального) гальмування обертань в середовищі з опором динамічно симетричного твердого тіла. Розглядаються керовані обертання динамічно симетричного твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною, при малих числах Рейнольдса. До точки на осі симетрії тіла прикріплена рухома точкова маса відносно малих лінійних розмірів. Вважається, що при відносному русі на точку діє поворотальна пружна сила і сила опору, яка пропорційна квадрату швидкості (квадратичне тертя). На тверде тіло діє також дисипативний момент сил лінійного опору середовища. На основі підходу [5] асимптотично наближені рівняння керованих обертальних рухів в системі координат, зв'язаній з тілом (динамічні рівняння Ейлера), записуються у вигляді:

$$\mathbf{G} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} = \mathbf{M}^u + \mathbf{M}^p + \mathbf{M}^v + \mathbf{M}^r. \quad (1)$$

Тут \mathbf{M}^u – вектор керуючого зовнішнього реактивного моменту сил, \mathbf{M}^p – вектор внутрішнього збудуючого моменту сил, обумовлений наявністю в'язкої рідини в порожнині тіла, \mathbf{M}^v – вектор внутрішнього збудуючого моменту сил, обумовлений пружністю і квадратичним тертям демфера, \mathbf{M}^r – момент сил дисипації (опору середовища). Вектор $\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ – кінетичний момент тіла, $\mathbf{J} = \text{diag}(A_1 A_2 A_3)$ – сталий симетричний тензор інерції незбуреного тіла, зведений до головних осей, $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T$ – вектор кутової швидкості, представлений його проекціями на зв'язані осі. Модуль кінетичного моменту тіла має вигляд

$$G = |\mathbf{G}| = [A_1^2(p^2 + q^2) + A_3^2 r^2]^{1/2} \equiv [A_1^2 \omega_1^2 + A_3^2 r^2]^{1/2},$$

$$A_1 \neq A_3, \quad \omega_1^2 = p^2 + q^2.$$

Опишемо структуру керуючого впливу. Величина керуючого моменту сил \mathbf{M}^u передбачається малою порядку ε , де $\varepsilon \ll 1$ – малий безрозмірний параметр. Компоненти керуючих моментів представлені у вигляді добутоків $\varepsilon b_i u_i$, $i = 1, 2, 3$ [5, 20]:

$$M_i^u = \varepsilon b_i u_i, u_i = -G_i G^{-1}, i = 1, 2, 3 \quad |\mathbf{u}| \leq 1. \quad (2)$$

Тут сталі вирази b_i мають розмірність моменту сили і досить близькі, u_i – безрозмірні керуючі функції, які підлягають визначенню.

Для спрощення розв’язування задачі оптимального керування в систему (1) вноситься структурне обмеження. Вважається, що момент сил опору середовища малий і пропорційний кінетичному моменту тіла [3, 6, 11, 12, 17-19]

$$\mathbf{M}^r = -\varepsilon \lambda \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}, \quad (3)$$

де λ – деякий сталий коефіцієнт пропорційності, який визначається властивостями середовища і формою тіла, а також має розмірність кутової швидкості.

З урахуванням (2), (3) наближена система рівнянь керованого руху (1) в проекціях на головні осі інерції тіла має вигляд [2-6, 11, 12]:

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_1)qr &= -\varepsilon b_1 A_1 p G^{-1} + Lpr^2 + FG^2 qr + Spr^6 \omega_{\perp} - \varepsilon \lambda A_1 p; \\ A_1 \dot{q} + (A_1 - A_3)pr &= -\varepsilon b_2 A_1 q G^{-1} + Lqr^2 - FG^2 pr + Sqr^6 \omega_{\perp} - \varepsilon \lambda A_1 q; \\ A_3 \dot{r} &= -\varepsilon b_3 A_3 r G^{-1} + H(p^2 + q^2)r - A_1 A_3^{-1} S r^5 \omega_{\perp}^3 - \varepsilon \lambda A_3 r; \\ 0 < A_3 &\leq 2A_1, A_3 \neq A_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Зауважимо, що при рівності коефіцієнтів $b_1 = b_2 = b_3 = b$ ($b > 0$), де параметр b може бути функцією часу, керування (2) є оптимальним. Цією властивістю пояснюється припущення про близькість b_i та введення терміну «квазіоптимальне керування» [5, 20].

Коефіцієнти F, S, H, L в (4) виражаються через параметри системи таким чином [2-5]:

$$\begin{aligned} F &= m \rho^2 \Omega^{-2} A_1^{-3} A_3, \quad S = m \rho^3 \Lambda \Omega^{-3} d |d| A_1^{-4} A_3^4, \quad d = 1 - A_3 A_1^{-1}; \\ H &= \beta P_0 \nu^{-1} A_1^{-1} (A_3 - A_1), \quad L = \beta P_0 \nu^{-1} A_1^{-2} A_3 (A_1 - A_3), \quad \omega_{\perp}^2 = p^2 + q^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Введені в (5) позначення характеризують моменти сил, які обумовлені наявністю пружного елемента. Тут m – маса рухомої точки, ρ – радіус-вектор точки кріплення рухомої маси, що знаходиться на осі динамічної симетрії даного тіла, $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$. Сталі $\Omega^2 = c/m$, $\lambda_1 = \mu/m = \Lambda \Omega^3$, $\Omega \gg \omega_0$ визначають частоту коливань та швидкість їх згасання відповідно; c – жорсткість, μ – коефіцієнт квадратичного тертя, ω_0 – модуль початкового значення вектора кутової швидкості.

Нерівність $\Omega \gg \omega_0$ дозволяє ввести малий параметр у виразах F, S (5) і вважати відповідні збурюючі моменти малими з метою застосування методу усереднення. Коефіцієнти H, L в (5) визначають момент сил, обумовлений рухами сильно в’язкої рідини в порожнині тіла, β – густина рідини, ν – кінематичний коефіцієнт в’язкості, P_0 – коефіцієнт, які залежить від форми порожнини. У разі сферичної порожнини радіуса d він дорівнює $P_0 = 8\pi d^7 / 525$ [2, 3]. Основним є припущення про малість числа $Re \sim \varepsilon \ll 1$.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Спочатку виберемо момент інерції твердого тіла відносно осі $x_1 - A_1 = A_2$ та величину

ω_0 порядку початкової швидкості в якості характерних параметрів задачі. Введемо $\tau = \omega_0 t$ – безрозмірний час та безрозмірні коефіцієнти інерції $\tilde{A}_i = A_i/A_1$.

Система (4) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{p}}{d\tau} &= -(\tilde{A}_3 - 1)\tilde{q}\tilde{r} - \varepsilon\tilde{b}_1\tilde{p}\tilde{G}^{-1} + \varepsilon\tilde{L}\tilde{p}\tilde{r}^2 + \varepsilon\tilde{F}\tilde{G}^2\tilde{q}\tilde{r} + \varepsilon\tilde{S}\tilde{p}\tilde{r}^6(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2)^{1/2} - \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{p}; \\ \frac{d\tilde{q}}{d\tau} &= (\tilde{A}_3 - 1)\tilde{p}\tilde{r} - \varepsilon\tilde{b}_2\tilde{q}\tilde{G}^{-1} + \varepsilon\tilde{L}\tilde{q}\tilde{r}^2 - \varepsilon\tilde{F}\tilde{G}^2\tilde{p}\tilde{r} + \varepsilon\tilde{S}\tilde{q}\tilde{r}^6(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2)^{1/2} - \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{q}; \\ \frac{d\tilde{r}}{d\tau} &= -\varepsilon\tilde{b}_3\tilde{r}\tilde{G}^{-1} + \varepsilon\tilde{H}(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2)\tilde{r} - \varepsilon\tilde{A}_3^{-2}\tilde{S}\tilde{r}^5(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2)^{3/2} - \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{r}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут з урахуванням зроблених припущень введені позначення:

$$\begin{aligned} \varepsilon\tilde{F} &= m\rho^2\Omega^{-2}A_1^{-1}\tilde{A}_3\omega_0^2, \quad \varepsilon\tilde{S} = m\rho^3\Lambda\Omega^{-3}(1 - \tilde{A}_3)|1 - \tilde{A}_3|A_1^{-1}\tilde{A}_3^4\omega_0^6; \\ \varepsilon\tilde{L} &= \beta P_0\nu^{-1}A_1^{-1}\tilde{A}_3(1 - \tilde{A}_3)\omega_0, \quad \varepsilon\tilde{H} = \beta P_0\nu^{-1}\tilde{A}_3^{-1}(\tilde{A}_3 - 1)A_1^{-1}\omega_0; \\ \tilde{b}_i &= b_i/A_1\omega_0^2, \quad \tilde{\lambda} = \lambda/\omega_0, \quad \tilde{G} = G/A_1\omega_0, \quad \tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 = 1. \end{aligned}$$

Надалі, при використанні безрозмірних змінних, будемо опускати знак «~».

Використовуємо загальний породжувальний розв'язок системи (6) при $\varepsilon = 0$

$$p = a \cos \psi, \quad q = a \sin \psi, \quad a > 0, \quad r = \text{const} \neq 0, \quad (7)$$

де $\psi = (A_3 - 1)r\tau + \psi_0$ – фаза коливань екваторіальної складової вектора кутової швидкості.

Підставляючи (7) у третє рівняння системи (6) та враховуючи вирази $a^2 = p^2 + q^2$ та $\dot{a} = \dot{p} \cos \psi + \dot{q} \sin \psi$, усереднимо одержану систему рівнянь для a і r по фазі ψ . Після введення повільного аргументу $\theta = \varepsilon\tau$ та усереднення система приймає вигляд ($' = d/d\theta$):

$$\begin{aligned} a' &= -a[G^{-1}(b_1 + b_2)/2 - Lr^2 - Sr^6a + \lambda]; \\ r' &= -r(b_3G^{-1} - Ha^2 + A_3^{-2}Sr^4a^3 + \lambda). \end{aligned} \quad (8)$$

Середнє виразів, що містять множник F , дорівнює нулю. При $b_1 = b_2 = b_3 = b$ рівняння для a і r інтегруються повністю і ця задача оптимального керування розв'язана аналітично в [6].

Дослідимо окремий випадок

$$0,5(b_1 + b_2) = b_3 = b. \quad (9)$$

Помножимо перше рівняння (6) на p , друге – на q , третє – на A_3^2r та складемо їх. Проведемо усереднення та одержимо наступне рівняння

$$G' = -b - \lambda G$$

Враховуючи початкову $G(\theta_0) = G^0$ та кінцеву умови $G(T, \theta_0, G^0) = 0$, $T = T(\theta_0, G^0)$

після інтегрування одержимо

$$G(\theta) = -\frac{b}{\lambda} + \left(G^0 + \frac{b}{\lambda}\right) \exp(-\lambda\theta), \quad \Theta = \frac{1}{\lambda} \ln \left(G^0 \frac{\lambda}{b} + 1\right).$$

Зауважимо, що величина $\Theta \rightarrow \infty$ коли $G^0/b \rightarrow \infty$ для різних λ ; в свою чергу $\Theta \rightarrow 0$ при $G^0 \lambda/b \rightarrow 0$ (λ – будь-яке) або коли $\lambda \rightarrow \infty$.

Для системи (8) за умови (9) проведемо заміну змінних: $r = \eta G$, $a = \alpha G$ та поділимо перше рівняння системи (8) на друге. Одержимо рівняння вигляду

$$\frac{d\alpha}{d\eta} = \frac{\eta(L + SG^5 \alpha \eta^4)}{\alpha(H - A_3^2 SG^5 \alpha \eta^4)}. \quad (10)$$

Розв'язок цього рівняння (10) може бути знайдений чисельно.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

Для розв'язування системи (8) були проведені чисельні дослідження при різних початкових умовах та параметрах задачі. Перенормовані величини в початковий момент мають значення $\omega_0 = 1$; $A_2 = 1,2$; $A_3 = 1,5$ відповідно, а також коефіцієнти керуючого моменту $b_1 = 0,1625$; $b_2 = 0,1$; $b_3 = 0,15$, для яких має місце співвідношення $0,5(b_1 + b_2) \neq b_3$. Розглянуті два випадки, які відповідають початковим умовам:

$$a_0 = 0,35; \quad (11)$$

$$a_0 = 0,626. \quad (12)$$

Кутова швидкість обертання відносно осі динамічної симетрії визначається за формулою $r_0 = (\omega_0 - a_0^2)^{1/2}$ коли $\omega_0 = 1$. Розрахунки виконувалися для двох значень перенормованого коефіцієнта опору $\lambda = 0,2$; $0,5$ та коефіцієнтів $S = 0,5$; $0,8$ $H = 0,5$; $0,8$; $L = -0,72$; $-1,152$. Параметри були вибрані таким чином, щоб задовольнити умовам: $A_3 \leq 2$, $a_0 < r_0$. Для побудови графіка модуля кінетичного моменту був використаний вираз $G = |\mathbf{G}| = (a^2 + A_3^2 r^2)^{1/2}$. На рис. 1–4 зображені однотипні за формою графіки зміни функцій a , r и G , які одержані в результаті чисельного інтегрування.

Графіки функцій a , r , G , які відповідають значенням $\lambda = 0,2$ та початковим умовам (11), представлені на рис. 1 та 2. При різних значеннях коефіцієнтів S та H час гальмування дорівнює $T \approx 4,75$, але при збільшенні коефіцієнтів S та H графік функції $a(\theta)$ більш вигнутий (рис. 2).

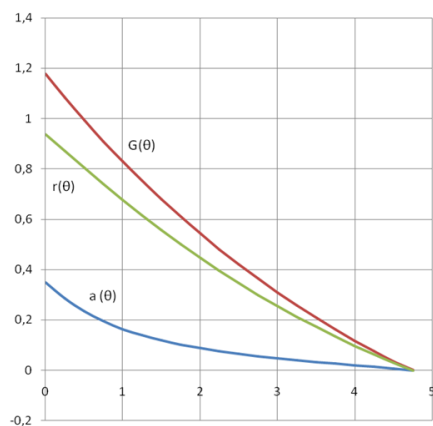


Рис. 1. $\lambda = 0,2$; $S = 0,5$; $H = 0,5$

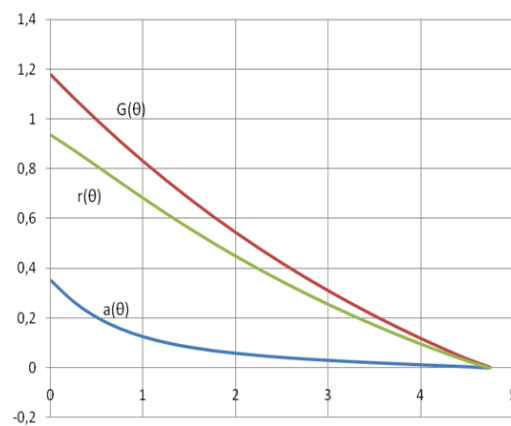


Рис. 2. $\lambda = 0,2$; $S = 0,8$; $H = 0,8$

Результат чисельного інтегрування системи (4) при початкових значеннях (12) та

$\lambda = 0,5$ представлений на рис. 3, 4. В цьому розрахунковому випадку $T \approx 3,51$. Як можна побачити з рисунків, збільшення коефіцієнтів моментів сил, обумовлених наявністю пружного елемента та в'язкої рідини в порожнині тіла, викликає зміну характеру спадання $a(\theta)$.

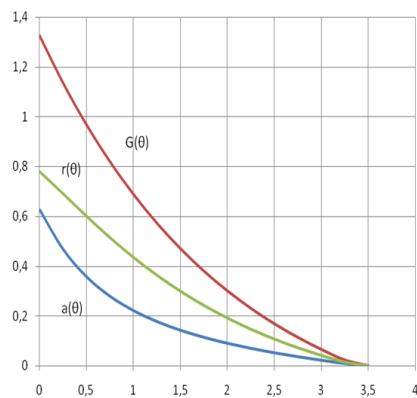


Рис. 3. $\lambda = 0,5$; $S = 0,5$; $H = 0,5$

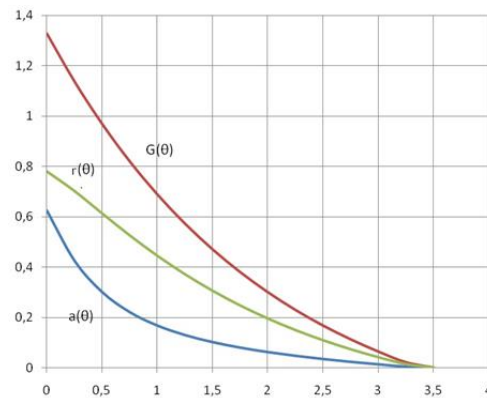


Рис. 4. $\lambda = 0,5$; $S = 0,8$; $H = 0,8$

З графіків бачимо, що на величину часу гальмування T впливають значення коефіцієнта опору λ , при збільшенні якого гальмування твердого тіла відбувається швидше, а також коефіцієнта A_3 . Вплив початкових значень a та r на час гальмування незначний. Поведінка змінних a , r , G носить монотонний характер. Таким чином, задача квазіоптимального гальмування розв'язана.

6 ВИСНОВКИ

Досліджена задача квазіоптимального за швидкістю гальмування обертань динамічно симетричного твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості, і рухомою масою, яка з'єднана з тілом демпфером з квадратичною дисипацією, в середовищі з опором. В рамках асимптотичного підходу одержана усереднена система рівнянь, визначено час швидкодії $T \approx 4,75$ и $T \approx 3,51$ для прийнятих чисельних значень безрозмірних параметрів. Побудовані графіки зміни кінетичного моменту тіла G і величин a , r – екваторіальної та осьової компонент вектора кутової швидкості квазітвердого тіла.

Литература

1. Черноушко Ф. Л. О движении твердого тела с подвижными массами / Ф. Л. Черноушко // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.-1973.-№4.-С.33-44.
2. Chernousko F. L. The Movement of a Rigid Body with Cavities Containing a Viscous Fluid / F. L. Chernousko //.-Washington: NASA, 1972.-204p.
3. Chernousko F. L. Evolution of Rotations of a Rigid Body About its Center of Mass / F. L. Chernousko, L. D. Akulenko, D. D. Leshchenko // Cham: Springer, 2017.-241p. doi.org/10.1007/978-3-319-53928-7
4. Akulenko L. D. Some problems of the motion of a solid with a moving mass / L. D. Akulenko, D. D. Leshchenko// Mech. Solids, - 1978.-13(5).-P.24-28.
5. Akulenko L. D. Problems and Methods of Optimal Control / L. D. Akulenko // Kluwer.-Dordrecht-Boston-London, 1994.-360p.
6. Акуленко Л. Д. Возмущенные и управляемые вращения твердого тела / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская, Я. С. Зинкевич // Одес. нац. ун-т им. И.И. Мечникова-О.: ОНУ, 2013.-288с.
7. Yehia H. M. New integrable problems of motion of a rigid body with a particle oscillating or bouncing in it / H. M. Yehia // Mechanics Research Communications.- 1997.-24(3).- P.243-246.

- [doi.org/10.1016/S0093-6413\(97\)00020-7](https://doi.org/10.1016/S0093-6413(97)00020-7)
8. Miller A. J. Nonlinear spacecraft dynamics with a flexible appendage, damping, and moving internal submasses / A. J. Miller, G. L. Gray, A. P. Mazzoleni // J. Guid. Contr. Dyn.-2001.-24 (3).-P.605 -615. doi.org/10.2514/2.4752
 9. Disser K. Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous fluid / K. Disser, G. R. Galdi, G. Mazzone, P. Zunino // Arch. Rational Mech. Anal.-2016.-221(1).-P.487-526. doi.org/10.1007/500205-016-0966-2
 10. Ramodanov S. M. Dynamics of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with viscous fluid / S. M. Ramodanov, V. V. Sidorenko // Int. J. Non-linear Mech.-2017.-95.-P.42-46. doi.org/10.1016/j.nonlinmec.201705.006
 11. Кошляков В. Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы / В. Н. Кошляков // М.: Наука, 1985. 288с.
 12. Routh E. J. Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part II / E. J. Routh // New York: Dover Publications, 1955.
 13. Akulenko L. D. Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case / L. D. Akulenko, D. D. Leshchenko, F. L. Chernousko // J. Appl. Math. Mech.-1979.-43(5).P. 829-837. [doi.org/10.1016/0021-8928\(79\)90171-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(79)90171-0)
 14. Ershkov S. V. Solving procedure for the Kelvin–Kirchhoff equations in case of buoyant (or the falling) ellipsoid of rotation / S. V. Ershkov, D. D. Leshchenko, A. R. Giniyatullin // European J. Mechanics/ B Fluids.-2020.-81.-P.23-27. doi.org/10.1016/j.euromechflu.2020.01.001
 15. El-Gohary A. On the control of programmed motion of a rigid body containing moving masses / A. El-Gohary // Int. J. Non-linear Mech.-2000.-35(1).-P.27-35 [doi.org/10.1016/S0020-7462\(98\)00084-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00084-5)
 16. Li Jianqing. Survey on moving mass control technology / Jianqing Li, Changsheng Gao, Chaoyong Li, Wuxing Jing // Aerosp. Sci. Technol.-2018.-82-83.-P.594-606. doi.org/10.1016/j.ast.09.033
 17. Akulenko L. D. Quasi-optimal deceleration of rotations of a rigid body with a moving mass in a resistive medium / L. D. Akulenko, D. D. Leshchenko, Yu. S. Shchetinina // J Comput. Syst. Sci. Int.-2017.-56(2).-P.186-191. doi.org/10.1134/S10642307020022
 18. Akulenko L. D. Quasi-optimal braking of rotations of a body with a moving mass coupled to it through a quadratic friction damper in a resisting medium / L. D. Akulenko, T. A. Kozachenko, D. D. Leshchenko // J. Comput. Syst. Sci. Int.-2018.-57(5).-P.689-694. doi.org/10.1134/S1064230718050027
 19. Akulenko L. D. Time quasi-optimal deceleration of rotations of a gyrostat with a moving mass in a resistive medium / L. D. Akulenko, T. A. Kozachenko, D. D. Leshchenko // J. Comput. Syst. Sci. Int.-2019.-58(5).-P. 667-673. doi.org/10.1134/S1064230719050022
 20. Черноуцько Ф. Л. Управление колебаниями / Ф. Л. Черноуцько, Л. Д. Акуленко, Б. Н. Соколов // М.: Наука, 1980.-384с.

References

1. Chernousko, F. L. (1973). On the motion of a rigid body with moving internal masses. Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela., 4, 33-44. [in Russian].
2. Chernousko, F. L. (1972). The Movement of a Rigid Body with Cavities Containing a Viscous Fluid. Washington: NASA, 204.
3. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). Evolution of Rotations of a Rigid Body About its Center of Mass. Cham: Springer, 241. doi.org/10.1007/978-3-319-53928-7
4. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (1978). Some problems of the motion of a solid with a moving mass. Mech. Solids., 13(5), 24-28.
5. Akulenko, L. D. (1994). Problems and Methods of Optimal Control. Kluwer.-Dordrecht-Boston-London, 360.
6. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Rachinskaya, A. L., Zinkevich, Ya. S. (2013). Perturbed and Controlled Rotations of a Rigid Body. Odessa: I.I. Mechnikov Odessa Nation. Univ., 288. [in Russian].
7. Yehia, H. M. (1997). New integrable problems of motion of a rigid body with a particle oscillating or bouncing in it. Mechanics Research Communications, 24(3), 243-246.

- [doi.org/10.1016/S0093-6413\(97\)00020-7](https://doi.org/10.1016/S0093-6413(97)00020-7)
8. Miller, A. J., Gray, G. L., Mazzoleni, A. P. (2001). Nonlinear spacecraft dynamics with a flexible appendage, damping, and moving internal submasses. *J. Guid.Contr.Dyn.*, 24 (3), 605 -615. doi.org/10.2514/2.4752
 9. Disser, K., Galdi, G. R., Mazzone, G., Zunino, P. (2016). Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 221(1), 487-526. doi.org/10.1007/500205-016-0966-2
 10. Ramodanov, S. M., Sidorenko, V. V. (2017). Dynamics of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with viscous fluid. *Int. J. Non-linear Mech.*, 95, 42–46. doi.org/10.1016/j.nonlinmec.201705.006
 11. Koshlyakov, V. N. (1985). *Problems in Dynamics of a Solid Bodies and Applied Gyroscope Theory: Analytical Methods*. Moscow: Nauka, 288. [in Russian]
 12. Routh, E. J. (1955). *Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part II*. New York: Dover Publications.
 13. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Chernousko, F. L. (1979). Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case. *J. Appl. Math. Mech.*, 43(5), 829-837. [doi.org/10.1016/0021-8928\(79\)90171-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(79)90171-0)
 14. Ershkov, S. V., Leshchenko, D. D., Giniyatullin, A. R. (2020). Solving procedure for the Kelvin–Kirchhoff equations in case of buoyant (or the falling) ellipsoid of rotation. *European J. Mechanics/ B Fluids.*, 81, 23-27. doi.org/10.1016/j.euromechflu.2020.01.001
 15. El-Gohary, A. (2000). On the control of programmed motion of a rigid body containing moving masses. *Int. J. Non-linear Mech.*, 35(1), 27-35. [doi.org/10.1016/S0020-7462\(98\)00084-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00084-5)
 16. Li, Jianqing, Gao, Changsheng, Li, Chaoyong, Jing, Wuxing (2018). Survey on moving mass control technology. *Aerosp. Sci. Technol.*, 82-83, 594-606. doi.org/10.1016/j.ast.09.033
 17. Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., Shchetinina, Yu. S. (2017). Quasi-optimal deceleration of rotations of a rigid body with a moving mass in a resistive medium. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 56(2), 186-191. doi.org/10.1134/S10642307020022
 18. Akulenko, L. D., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2018). Quasi-optimal braking of rotations of a body with a moving mass coupled to it through a quadratic friction damper in a resisting medium. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 57(5), 689-694. doi.org/10.1134/S1064230718050027
 19. Akulenko, L. D., Kozachenko, T. A., Leshchenko, D. D. (2019). Time quasi-optimal deceleration of rotations of a gyrostata with a moving mass in a resistive medium. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 58(5), 667-673. doi.org/10.1134/S1064230719050022
 20. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Sokolov, B. N. (1980). *Control of Oscillations*. Moscow: Nauka, 384. [in Russian].

Лещенко Дмитро Давидович

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.ф.-м.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
leshchenko_d@ukr.net, ORCID: 0000-0003-2436-221X

Єршков Сергій Володимирович

Державний астрономічний інститут ім. М. Д. Штернберга МДУ, к.ф.-м.н., ст. науковий співробітник
Університетський проспект, 13, Москва, Росія 119992
sergej-ershkov@yandex.ru, ORCID: 0000-0002-6826-1691

Палій Катерина Сергіївна

Одеська державна академія будівництва та архітектури, асистент
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
ESChernyakova@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5553-2405

Для посилань:

Лещенко Д. Д. Квазіоптимальне гальмування в середовищі з опором обертань гіростата з рухомою масою, з'єднаною з тілом демпфером з квадратичним тертям / Д. Д. Лещенко, С. В. Єршков, К. С. Палій // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 1.– С. 20-28.

For references:

Leshchenko, D., Ershkov, S., Palii, E. (2020). Quasi-optimal deceleration of rotations of a gyrostata with a moving mass coupled to it through a quadratic friction damper in a resistive medium. *Mechanics and Mathematical Methods*, 2 (1), 20-28