

УДК 539.3

ПРО ВПЛИВ СИЛ МАКСВЕЛЛА НА ДЕФОРМУВАННЯ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ У П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ БІМАТЕРІАЛІ

Онопрієнко О. Д.¹, Комаров О. В.², Лобода В. В.²

¹Дніпровський державний аграрно-економічний університет

²Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Анотація: Розглянуто тріщину, розташовану на межі поділу двох п'єзоелектричних напівнескінченних просторів. Вважається, що мають місце умови плоскої деформації, а на берегах тріщини враховується скінченна електрична проникність та напруження Максвелла, що виникають при переході заповнювача тріщини до п'єзоелектричних матеріалів верхнього та нижнього півпросторів. Рівномірне розподілене механічне навантаження та електричний потік прикладені на нескінченності. Припускаючи, що електричний потік рівномірно розподілений по області тріщини проблема зводиться до задачі Рімана-Гільберта, для якої знайдено точний аналітичний розв'язок. Це дозволило знайти у замкнутому вигляді всі необхідні електромеханічні характеристики на межі розділу та сформулювати рівняння для визначення електричного потоку. Аналітичне дослідження та рішення цього рівняння за формулою Кардано показують, що два його корені не узгоджуються з фізичним змістом. Наприклад, вони залишаються скінченними і відносно великими у випадку непроникної тріщини. Крім того, стрибок переміщення, який відповідає цим кореням, виявляється від'ємним. Тому легко вибрати фізично обгрунтований корінь вказаного рівняння. Аналіз рівняння підтверджує правильність припущення щодо рівномірного розподілу електричного потоку в області тріщини. Значення електричного потоку визначаються шляхом розв'язуванням отриманого кубічного рівняння. Після визначення електричного потоку, знаходяться коефіцієнти механічних напружень та електричного потоку, а також їх асимптотичні поля в околі вершини тріщини. Проаналізовано також випадок, який не враховує сили Максвелла в зоні тріщини. У цьому випадку знаходження електричного потоку зводиться до квадратного рівняння відносно цього параметра. Розглянуто окремий випадок тріщини в однорідному п'єзоелектричному матеріалі. Значення електричного потоку та параметри руйнування визначаються для цього випадку у простому вигляді. Проведено чисельний аналіз для тріщини між матеріалами PZT4 та PZT5 та для випадку тріщини в однорідному матеріалі. Електричний потік в області тріщини, коефіцієнти інтенсивності напружень та електричної індукції, відкриття тріщини та швидкість вивільнення енергії знайдені як функції від зовнішнього навантаження та електричної проникності середовища тріщини. Показано вплив Максвеллових сил на берегах тріщини на вказані параметри.

Ключові слова: п'єзоелектричний матеріал, міжфазна тріщина, сили Максвелла, скінченна електрична провідність.

ON THE INFLUENCE OF MAXWELL FORCES ON THE DEFORMATION OF THE INTERFACE CRACK IN PIEZOELECTRIC BI-MATERIAL

O. Onopriienko¹, O. Komarov², V. Loboda²

¹Dnipro State Agrarian And Economic University

²Oles Honchar Dnipro National University

Abstract: A crack located at the interface of two piezoelectric semi-infinite spaces is considered. Plane deformation conditions and the finite electric permeability of the crack are assumed. The



Maxwell stresses arising because of electric field transition from the crack filler to the piezoelectric materials of the upper and lower half-spaces are also taken into account on the crack faces. Evenly distributed mechanical load and electrical flow are applied at infinity. Assuming that the electric flux is evenly distributed over the crack region, the problem is reduced to the Riemann-Hilbert problem, for which an exact analytical solution is found. This allowed us to find in a closed form all the necessary electromechanical characteristics at the interface and to form an equation to determine the electric flux. Analytical investigation and the solution of this equation according to Cardano's formula show that its two roots do not agree with the physical meaning. For example, they remain finite and relatively large in the case of an impermeable crack. In addition, the jump that corresponds to these roots is negative. Therefore, it is easy to choose a physically sound root of the specified equation. The analysis of the equation confirms the correctness of the assumption about the uniform distribution of electric flux in the crack region. The values of the electric flux are determined by solving the obtained cubic equation. After determining the electric flux, the coefficients of mechanical stress and electric flux, as well as their asymptotic fields around the crack tip are also found. A case that does not take into account Maxwell's stresses in the crack zone is also analyzed. In this case, finding the electric flux is reduced to a quadratic equation with respect to this parameter. A separate case of a crack in a homogeneous piezoelectric material is considered. For this case, the values of the electric flux and the fracture parameters are relatively simply determined. Numerical analysis was performed for the crack between PZT4 and PZT5 materials and also for the case of cracks in a homogeneous material. The electric flux in the crack region, the stress intensity and electrical induction factors, the crack opening and the energy release rate were found as functions of the external load and the electrical permeability of the crack medium. The influence of the Maxwell forces acting to the crack faces on the above mentioned parameters is shown.

Keywords: piezoelectric material, interface crack, Maxwell forces, finite electrical permeability.

1 ВСТУП

П'єзоелектрична кераміка є пріоритетним матеріалом для найрізноманітніших електронних та механічних пристроїв через її яскраво виражені п'єзоелектричні, діелектричні та піроелектричні властивості. Однак п'єзоелектрична кераміка є крихкою і схильною до розтріскування на всіх масштабах від електричних доменів до повних пристроїв. Різні дефекти, наприклад доменні стінки, межі зерна, тріщини та пори, домішки та включення, тощо, виникають у п'єзоелектричній кераміці. Такі дефекти викликають високі напруження та/або концентрацію електричного поля, які можуть приводити до виникнення та зростання тріщин, електричних пробоїв і, як наслідок, до руйнування електронних та механічних пристроїв. Ці обставини викликають великий інтерес до вивчення проблем механіки руйнування п'єзоелектричних матеріалів та підвищення надійності функціонування п'єзоелектричних елементів електронних виробів.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Переважає більшість попередніх досліджень ґрунтувалася на традиційному припущенні, що тріщина є або електроізолююваною, або електропроникною і поверхні тріщини є вільними від напружень. В роботах [1, 2] була запропонована модель, що дозволила врахувати скінченну електричну проникність середовища тріщини. Крім того, якщо сусідні середовища (наприклад, тріщина та її наповнювач) мають різні фізичні властивості, то електричні поля індукують сили на межах їх поділу. В електростатиці ці сили називаються кулонівськими силами [3], тоді як в рамках механіки суцільного середовища використовується термін «Максвеллові напруження» [4]. У випадку тріщин в однорідних п'єзоелектричних матеріалах, тріщини зі скінченною електричною проникністю досліджувались у роботах [5-9], напруження Максвелла враховувались в роботах [10-11]. Що ж стосується тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами, то скінченна електрична проникність враховувалась в роботах [12-13] в статичному випадку та в [14] для випадку рухомої тріщини.

В даній роботі проведено аналіз тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами. Враховано як скінченну електричну проникність середовища тріщини, так і сили Максвелла, що викають між її берегами. Досліджено вплив цих сил на величину електричного потоку, розкриття тріщини та коефіцієнти інтенсивності напружень та електричного зміщення біля вершин тріщини.

3 ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО МАТЕРІАЛУ

Основні рівняння для п'єзоелектричного матеріалу у декартовій прямокутній системі координат (x_1, x_2, x_3) можуть бути записані у вигляді [1]

$$c_{ijrs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s \partial x_i} + e_{sji} \frac{\partial \phi}{\partial x_s \partial x_i} = 0, \quad (1a)$$

$$-\varepsilon_{ijrs} \frac{\partial \phi}{\partial x_s \partial x_i} + e_{irs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s \partial x_i} = 0, \quad (1б)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijrs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + e_{sji} \frac{\partial \phi}{\partial x_s}, \quad (2a)$$

$$D_i = -\varepsilon_{is} \frac{\partial \phi}{\partial x_s} + e_{irs} \frac{\partial u_r}{\partial x_s}, \quad (26)$$

де $u_k, \phi, \sigma_{ij}, D_i$ - пружні переміщення, електричний потенціал, напруження та електричні зміщення відповідно; c_{ijkl}, e_{lij} та ε_{ij} - пружні модулі, п'єзоелектричні та діелектричні константи, відповідно.

Згідно з [15] найбільш загальний дійсний розв'язок рівнянь (1), (2) можна записати у вигляді

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{f}(z) + \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{f}}(\bar{z}), \quad (3)$$

де $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4]$ - матриця, що складається з власних векторів \mathbf{a}_i , системи

$$[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2\mathbf{T}]\mathbf{a} = 0, \quad (4)$$

а $\mathbf{f}(z) = [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3), f_4(z_4)]^T$ - довільна вектор - функція, $z_i = x_1 + p_i x_3$,

($i = 1, 2, 3, 4$). У наведених вище рівняннях, риска позначає комплексне спряження;

$$\mathbf{U} = [u_1, u_2, u_3, \phi]^T.$$

Введемо наступний вектор

$$\mathbf{t} = [\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, D_3]^T \quad (5)$$

і за допомогою рівнянь (2), цей вектор можна представити у формі

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}\mathbf{f}'(z) + \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{f}}'(\bar{z}), \quad (6)$$

де матриця \mathbf{B} 4×4 може бути визначена як

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}^T + \mathbf{T}\mathbf{A} \text{diag}[p_1, p_2, p_3, p_4]$$

$$\text{та } \mathbf{f}'(z) = \left[\frac{df_1(z_1)}{dz_1}, \frac{df_2(z_2)}{dz_2}, \frac{df_3(z_3)}{dz_3}, \frac{df_4(z_4)}{dz_4} \right]^T.$$

4 ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ТА ВИВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ

Розглядається тунельна міжфазна тріщина $-b \leq x_1 \leq b$, $x_3 = 0$ (рис. 1) між двома напівскінченними керамічними просторами $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$, обидва з яких поляризовані у напрямку x_3 , ортогональному до берегів тріщини.

Матеріальні властивості верхнього та нижнього півпросторів визначаються матрицями $c_{ijkl}^{(1)}, e_{lij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}$ (для $x_3 > 0$) та $c_{ijkl}^{(2)}, e_{lij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}$ (для $x_3 < 0$). Навантаження, прикладене на нескінченності, задано наступним чином $\sigma_{33}^{(m)} = \sigma$, $\sigma_{13}^{(m)} = \tau$, $D_3^{(m)} = d$, ($m = 1$ для верхнього матеріалу, та $m = 2$ для нижнього). Крім того, припускаємо ще дію нормальних напружень по напрямку x_1 так, що це навантаження створює напруження та переміщення, які відповідають умовам неперервності на інтерфейсі. Оскільки навантаження не залежить від координати x_2 , то може розглядатися плоска задача у площині (x_1, x_3) , як показано на рис. 1.

Нехтуючи зонами осциляції, які зазвичай невеликі, ми припускаємо, що тріщина повністю відкрита і до її берегів не прикладено механічного навантаження та

електричних зарядів. Більше того, ми припускаємо, що електричне поле всередині тріщини можна визначити як $E_a = -(\varphi^+ - \varphi^-) / (u_3^+ - u_3^-)$, де ε_a - електрична проникність середовища тріщини. Беручи до уваги, що $D_3 = \varepsilon_a E_a$, приходимо до наступної електричної умови

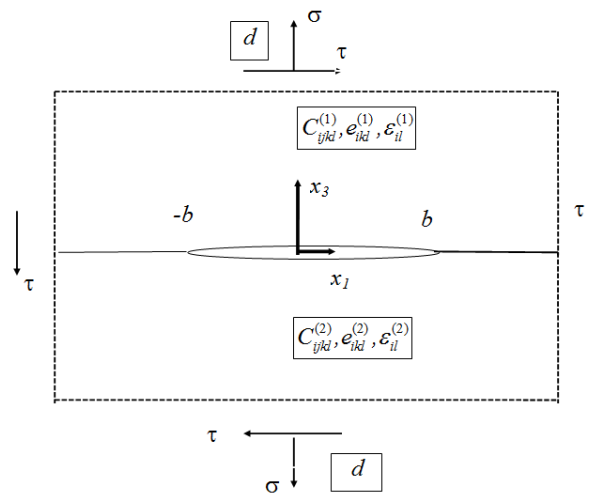


Рис. 1. Тунельна міжфазна тріщина $-b \leq x_1 \leq b$, $x_3 = 0$ між двома напівскінченними керамічними просторами

$$D_3 = -\varepsilon_a \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{u_3^+ - u_3^-}, \quad (7)$$

уздовж зони тріщини, яка була отримана раніше [2]. Це рівняння означає, що середовище тріщини можна розглядати як конденсатор з низькою ємністю [10]. Отже, згідно із Законом Кулона, електрична (Максвеллова) сила буде індукована з цієї ємності і її можна записати у формі [10, 11]

$$\sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^- = \frac{1}{2} \varepsilon_a \left(\frac{\varphi^+ - \varphi^-}{u_3^+ - u_3^-} \right)^2. \quad (8)$$

Умови на інтерфейсі можуть бути записані у наступній формі

$$\text{для } x_1 \notin (-b, b): [\mathbf{U}(x_1, 0)] = 0, [\mathbf{t}(x_1, 0)] = 0, \quad (9)$$

$$\text{для } x_1 \in (-b, b): \sigma_{13}^{(m)}(x_1, 0) = 0, \sigma_{33}^{(m)}(x_1, 0) = \frac{1}{2} \varepsilon_a \left(\frac{[\varphi(x_1, 0)]}{[u_3(x_1, 0)]} \right)^2, \quad (10)$$

$$[D_3(x_1, 0)] = 0, D_3[u_3(x_1, 0)] = -\varepsilon_a [\varphi(x_1, 0)],$$

де квадратні дужки означають стрибок відповідної функції при переході через інтерфейс матеріалу, $f^\pm(x_1) = f(x_1 \pm i \cdot 0)$.

Згідно з рівняннями (3) та (6) розв'язок для кожної області може бути записаний наступним чином

$$\mathbf{U}^{(j)}(x_1, x_3) = \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{f}^{(j)}(z) + \bar{\mathbf{A}}^{(j)} \bar{\mathbf{f}}^{(j)}(\bar{z}), \quad (11)$$

$$\mathbf{t}^{(j)}(x_1, x_3) = \mathbf{B}^{(j)} \mathbf{f}'^{(j)}(z) + \bar{\mathbf{B}}^{(j)} \bar{\mathbf{f}}'^{(j)}(\bar{z}), \quad (12)$$

де $j=1$ для $x_3 > 0$ та $j=2$ для $x_3 < 0$; вектор-функції $\mathbf{f}^{(1)}(z)$ та $\mathbf{f}^{(2)}(z)$ аналітичні у верхній ($x_3 > 0$) та нижній ($x_3 < 0$) областях, відповідно.

Застосовуючи підхід, представлений у [15], приходимо до наступних виразів

$$[\mathbf{U}'(x_1)] = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (13a)$$

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{G}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (13b)$$

$$[\mathbf{U}'(x_1)] = \mathbf{U}'^{(1)}(x_1, 0) - \mathbf{U}'^{(2)}(x_1, 0), \quad \mathbf{G} = \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{D}^{-1}, \quad (14)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}^{(1)} - \bar{\mathbf{L}}\mathbf{B}^{(1)}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{B}^{(2)})^{-1}, \quad \mathbf{W}^\pm(x_1) = \mathbf{W}(x_1 \pm i0), \quad (15)$$

де вектор-функція

$$\mathbf{W}(z) = \begin{cases} \mathbf{D}\mathbf{f}^{(1)}(z) & \text{for } x_3 > 0 \\ -\bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{f}}^{(1)}(z) & \text{for } x_3 < 0, \end{cases} \quad (16)$$

є аналітичною у всій площині з розрізом уздовж області тріщини $(-b, b)$.

Для прийнятого виду поляризації матриця \mathbf{G} має наступну структуру

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} ig_{11} & 0 & g_{13} & g_{14} \\ 0 & ig_{22} & 0 & 0 \\ g_{31} & 0 & ig_{33} & g_{34} \\ g_{41} & 0 & g_{43} & ig_{44} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

де $g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{44}$ - дійсні, g_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4; i \neq j$) - комплексні, та $g_{ij} = -\bar{g}_{ij}$, $i = \sqrt{-1}$.

Аналіз матриці (17) показує, що у цьому випадку напружено-деформований стан може бути розділений на плоский та антиплоский стани. Оскільки антиплоска задача досить проста, ми приділяємо основну увагу до знаходження плоского напруженого стану. Останній характеризується переміщеннями u_1, u_3 та електричним потенціалом ϕ .

Використовуючи представлення (13) та враховуючи аналітичні перетворення, виконані в роботі [16], ми отримуємо вирази для напружень, електричного зміщення та похідних від механічних переміщень та стрибків електричного потенціалу на інтерфейсі у наступному вигляді

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{j4}D_3^{(1)}(x_1, 0) + im_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (18)$$

$$n_{j1}[u_1'(x_1, 0)] + i(n_{j3}[u_3'(x_1, 0)] + n_{j4}[\phi'(x_1, 0)]) = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1), \quad j = 1, 3, 4, \quad (19)$$

де

$$F_j(z) = \sum_{k=1,3,4} Y_{jk} W_k(z) \quad (20)$$

- це аналітичні функції у всій площині з розрізом уздовж тріщини. Значення $m_{j4}, m_{j1}, n_{j1}, n_{j4}$ - дійсні. Останнє твердження є справедливим за умови, що γ_j - дійсні, що має місце для великої кількості практично важливих біматеріальних комбінацій. $\mathbf{Y}_j = [Y_{j1}, Y_{j3}, Y_{j4}] = \mathbf{S}_j \mathbf{G}$, а γ_j та $\mathbf{S}_j^T = [S_{j1}, S_{j3}, S_{j4}]^T$ є власними значеннями та власними векторами системи

$$(\gamma \mathbf{G}^T + \bar{\mathbf{G}}^T) \mathbf{S}^T = 0. \quad (21)$$

5 ВИЗНАЧЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОТОКУ В ОБЛАСТІ ТРІЩИНИ

Ми припускаємо, що електричний потік є постійним уздовж області тріщини, тобто

$$D_3^+(x_1, 0) = D_3^-(x_1, 0) = D \text{ для } x_1 \in (-b, b). \quad (22)$$

Це припущення буде обґрунтовано пізніше.

З (8) та виразу $D_3 = \varepsilon_a E_a$ випливає що

$$\sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^- = \frac{D^2}{2\varepsilon_a}. \quad (23)$$

Підставляючи рівняння (22), (23) у рівняння (18) та беручи до уваги умови на інтерфейсі (10), ми приходимо до наступної задачі Рімана [17]

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = \sigma_0 + m_{j4} D \quad (j=1,3,4) \text{ для } x_1 \in (-b, b), \quad (24)$$

де $\sigma_0 = D^2/2\varepsilon_a$.

Для $x_1 \notin (-b, b)$, справедливе співвідношення $F_j^+(x_1) = F_j^-(x_1)$. Тому, для електромеханічних навантажень, заданих на нескінченності, може бути записана наступна умова з використанням формули (18)

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_j - i\tilde{\tau}_j, \quad (25)$$

де

$$\tilde{\sigma}_j = \frac{1}{r_j}(\sigma_0 + m_{j4} D), \quad \tilde{\tau}_j = \frac{-m_{j1} \tau}{r_j}, \quad r_j = (1 + \gamma_j) \quad (j=1,3,4).$$

Аналогічно роботі [17] введемо нові функції

$$\Omega_j(z) = F_j(z) - \frac{\sigma_0 + m_{j4} D}{1 + \gamma_j}, \quad (26)$$

які мають ті ж властивості, що й $F_j(z)$. Рівняння (24), (25) приводиться до

$$\Omega_j^+(x_1) + \gamma_j \Omega_j^-(x_1) = 0 \quad (j=1,3,4) \text{ для } x_1 \in (-b, b), \quad (27)$$

$$\Omega_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = T_j - iQ_j, \quad (28)$$

де

$$T_j = \frac{1}{r_j}[\sigma_0 - \sigma_0 + m_{j4}(D - D)], \quad Q_j = \tilde{\tau}_j, \quad (j=1,3,4).$$

Розв'язок задачі (27) та (28), згідно з [17], має наступний вигляд

$$\Omega_j(z) = X_j(z)(T_j - iQ_j)(z - 2 - ib\varepsilon_j), \quad (29)$$

де $X_j(z) = (z+b)^{-1/2+i\varepsilon_j} (z-b)^{-1/2-i\varepsilon_j}$, $\varepsilon_j = \ln \gamma_j / 2\pi$.

З формул (31) та (34) витікає що

$$F_j(z) = X_j(z)(T_j - iQ_j)(z - 2ib\varepsilon_j) + \frac{\sigma_0 + m_{j4} D}{1 + \gamma_j}. \quad (30)$$

Згідно з рівнянням (27), $\Omega_j^-(x_1) = -\Omega_j^+(x_1) / \gamma_j$ для $x_1 \in (-b, b)$ і, таким чином, справедлива формула:



$$F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1) = \frac{\gamma_j + 1}{\gamma_j} \Omega_j^+(x_1).$$

Отже, з рівнянь (19) та (30) отримуємо

$$\begin{aligned} n_{j1}[u'_1(x_1, 0)] + i\{n_{j3}[u'_3(x_1, 0)] + n_{j4}[\phi'(x_1, 0)]\} = \\ = \frac{\gamma_j + 1}{\gamma_j} (T_j - iQ_j)(x_1 + b)^{-1/2+i\varepsilon_j} (x_1 - b)^{-1/2-i\varepsilon_j} (x_1 - 2ib\varepsilon_j). \end{aligned} \quad (31)$$

Інтегрування цього рівняння призводить до наступної формули для стрибків переміщення та електричного потенціалу

$$\begin{aligned} n_{j1}[u_1(x_1, 0)] + i\{n_{j3}[u_3(x_1, 0)] + n_{j4}[\phi(x_1, 0)]\} = \\ = \frac{\gamma_j + 1}{\gamma_j} (T_j - iQ_j) \left(\frac{x_1 + b}{x_1 - b}\right)^{i\varepsilon_j} \sqrt{x_1^2 - b^2} \text{ for } x_1 \in (-b, b). \end{aligned} \quad (32)$$

Слід зазначити, що для кераміки класу симетрії *bmm* з напрямком поляризації x_3 , мають місце співвідношення $n_{41} = 0$, $\varepsilon_4 = 0$, $\gamma_4 = 1$ [16]. Враховуючи цей факт, з рівняння (32) для $x_1 \in (-b, b)$, ми отримуємо

$$\begin{aligned} n_{13}[u_3(x_1, 0)] + n_{14}[\phi(x_1, 0)] = \text{Im} \left\{ \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} (T_1 - iQ_1) \left(\frac{x_1 + b}{x_1 - b}\right)^{i\varepsilon_1} \sqrt{x_1^2 - b^2} \right\}, \\ n_{43}[u_3(x_1, 0)] + n_{44}[\phi(x_1, 0)] = -2i(T_4 - iQ_4) \sqrt{x_1^2 - b^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Отримані рівняння (33) – це система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $[u_3(x_1, 0)]$ та $[\phi(x_1, 0)]$. Вони приводять до розв'язку

$$\begin{aligned} [u_3(x_1, 0)] = \Delta^{-1} \{n_{44}H_1(x_1) - n_{14}H_2(x_1)\}, \\ [\phi(x_1, 0)] = \Delta^{-1} \{-n_{43}H_1(x_1) + n_{13}H_2(x_1)\}, \end{aligned} \quad (34)$$

де

$$H_1(x_1) = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1} (T_1 \cos \alpha + Q_1 \sin \alpha) \sqrt{b^2 - x_1^2}, \quad H_2(x_1) = 2T_4 \sqrt{b^2 - x_1^2}, \quad \alpha = \varepsilon_1 \ln \left(\frac{b + x_1}{b - x_1}\right),$$

$$\Delta = n_{13}n_{44} - n_{43}n_{14}.$$

Підставляючи вирази (34) до рівняння (7), ми отримаємо наступні співвідношення

$$D = \varepsilon_a R(x_1) \text{ для } x_1 \in (-b, b), \quad (35)$$

де

$$R(x_1) = \frac{[\phi(x_1, 0)]}{[u_3(x_1, 0)]} = \frac{\gamma_0 T(x_1) n_{43} - 2T_4 n_{13}}{\gamma_0 T(x_1) n_{44} - 2T_4 n_{14}}, \quad T(x_1) = T_1 \cos \alpha + Q_1 \sin \alpha, \quad \gamma_0 = \gamma_1 + \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}. \quad (36)$$

Співвідношення (35) є кубічним рівнянням відносно D тому що T_1 квадратична функція D і Q_1 не залежить від D . Слід зазначити що $\cos(\alpha)$ та $\sin(\alpha)$ у рівняннях (35), (36) залежать від x_1 , тобто у загальному випадку $R(x_1)$ не є постійною величиною вздовж інтервалу $(-1, 1)$. Однак показано, що їх варіація в цьому інтервалі надзвичайно мала. Це означає, що електричний потік через область тріщини практично постійний, а

замість рівняння (35) для визначення електричного потоку D з достатньою точністю можна розглядати рівняння

$$D = \varepsilon_a \frac{\gamma_0 T_1 n_{43} - 2T_4 n_{13}}{\gamma_0 T_1 n_{44} - 2T_4 n_{14}}. \quad (37)$$

Це рівняння можна переформулювати як

$$\eta_0 D^3 + \eta_1 D^2 + \eta_2 D + \eta_3 = 0, \quad (38)$$

де

$$\eta_0 = \frac{2r_1 n_{14} - \gamma_0 r_4 n_{44}}{2\varepsilon_a}, \quad \eta_1 = s_0 + 2r_1 m_{44} n_{14} - \gamma_0 r_4 m_{14} n_{44},$$

$$\eta_2 = \gamma_0 r_4 (s_1 n_{44} + \varepsilon_a m_{14} n_{43}) - 2r_1 (s_4 n_{14} + \varepsilon_a m_{44} n_{13}), \quad \eta_3 = 2r_1 \varepsilon_a n_{13} s_4 - \gamma_0 r_4 \varepsilon_a n_{43} s_1,$$

$$s_0 = 0,5(\gamma_0 r_4 n_{43} - 2r_1 n_{13}), \quad s_1 = \sigma + m_{14} d, \quad s_4 = \sigma + m_{44} d.$$

Аналітичне дослідження та рішення рівняння (38) за формулою Кардано показують, що два корені цього рівняння не узгоджуються з фізичним змістом. Наприклад, вони залишаються скінченними і відносно великими для $\varepsilon_a \rightarrow 0$, тобто у випадку непроникної тріщини. Крім того, стрибок переміщення, який відповідає цим кореням, виявляється від'ємним. Тому легко вибрати фізично обґрунтований корінь (38). Цей корінь буде використаний у подальшому аналізі.

Варто зазначити, що припускаючи $\sigma_0 = 0$ ми отримуємо так звані "точні" [11] електричні граничні умови, запропоновані в [10], для яких електричне навантаження на берегах тріщини не береться до уваги. Для цих умов замість рівняння (38) маємо квадратне рівняння для визначення електричного потоку D . Це рівняння може бути отримане з (38), припускаючи що η_0 та s_0 рівні нулю.

6 НАПРУЖЕННЯ, ЕЛЕКТРИЧНІ ПЕРЕМІЩЕННЯ ТА ЇХ КОЕФІЦІЄНТИ ІНТЕНСИВНОСТІ

Підставляючи (30) у рівняння (18) для $j=1,4$ і беручи до уваги властивості матриці \mathbf{m} , ми приходимо до наступних рівнянь для напруження та електричного переміщення для $x_1 > b$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{14} D_3^{(1)}(x_1, 0) + im_{11} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = (1 + \gamma_1)(T_1 - iQ_1)(x_1 - 2ib\varepsilon_1)(x_1 + b)^{-1/2+i\varepsilon_1} (x_1 - b)^{-1/2-i\varepsilon_1} + \sigma_0 + m_{14} D, \quad (39)$$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{44} D_3^{(1)}(x_1, 0) = \frac{2T_4 x_1}{\sqrt{x_1^2 - b^2}} + \sigma_0 + m_{44} D. \quad (40)$$

Співвідношення (39), (40) - це система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно напружень та електричних зміщень. Відділяючи дійсну та умовну частини у (39) і розв'язуючи отриману систему, знайдемо вирази для $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$, $D_3^{(1)}(x_1, 0)$ та $\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)$ для $x_1 > b$.

Далі, представимо коефіцієнти інтенсивності у точці b наступним чином

$$K_1 + m_{14} K_4 - im_{11} K_2 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} (x_1 - b)^{i\varepsilon_1} [\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{14} D_3^{(1)}(x_1, 0) + im_{11} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)], \quad (41)$$

$$K_1 + m_{44}K_4 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} [\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{44}D_3^{(1)}(x_1, 0)]. \quad (42)$$

Використовуючи (39), (40), ми отримуємо для $x_1 \rightarrow b+0$

$$K_1 + m_{14}K_4 - im_{11}K_2 = \sqrt{\pi b}(1 - 2i\varepsilon_1)[\sigma - \sigma_0 + m_{14}(d - D) - im_{11}\tau]e^{i\psi}, \quad (43)$$

$$K_1 + m_{14}K_4 = \sqrt{\pi b}[\sigma - \sigma_0 + m_{14}(d - D)], \quad (44)$$

де $\psi = \varepsilon \ln l$, а $l = 2b$ є довжиною тріщини. З формул (43), (44), можуть бути отримані аналітичні вирази для K_1 , K_2 та K_4 . Виділяючи дійсну та уявну частини в (43) та розв'язуючи отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь отримуємо наступні вирази для коефіцієнтів інтенсивності K_1 , K_2 та K_4

$$K_1 = \sqrt{\pi b} \frac{m_{44}\Gamma_1 - m_{14}[\sigma - \sigma_0 + m_{44}(d - D)]}{m_{44} - m_{14}}, \quad K_2 = -\sqrt{\pi b} \frac{\Gamma_2}{m_{11}},$$

$$K_4 = \sqrt{\pi b} \frac{\sigma - \sigma_0 + m_{44}(d - D) - \Gamma_1}{m_{44} - m_{14}}, \quad (45)$$

де $\Gamma_1 = \omega_1 \cos \psi + \omega_2 \cos \psi$, $\Gamma_2 = \omega_1 \sin \psi - \omega_2 \sin \psi$, $\omega_1 = \sigma - \sigma_0 + m_{14}(d - D) - 2\varepsilon_1 m_{11} \tau$,

$\omega_2 = 2\varepsilon_1[\sigma - \sigma_0 + m_{14}(d - D)] + m_{11} \tau$.

Розглянемо тепер деякі чисельні результати, отримані для міжфазної тріщини. Аналіз проводився для біматеріалу PZT4 / PZT5 під дією механічного навантаження $\sigma = 10 \text{ MPa}$, $\tau = 0$ та електричного переміщення $d = 0,01 \text{ C/m}^2$ на нескінченності і $a = 10 \text{ mm}$. Значення електричного потоку D , коефіцієнти інтенсивності напружень K_1 , K_2 та електричний коефіцієнт інтенсивності K_4 обчислені з урахуванням кулонівських сил, представлені в Таблиці 1 як функція електричної проникності середовища тріщини. Значення електричної проникності визначається за формулою $\varepsilon_a = \varepsilon_r \varepsilon_0$, де $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C/Vm}$ - електрична проникність вакууму, а ε_r - відносна електрична проникність. Величина $\varepsilon_r = 10^{-6}$ відповідає електрично непроникній тріщині, $\varepsilon_r = 1$ - повітря, $\varepsilon_r = 2,5$ - силікон, $\varepsilon_r = 81$ - вода; та $\varepsilon_r = 4000$ може розглядатися як значення, що відповідає електрично проникній тріщині.

Таблиця 1.

Зміна електричного потоку $D \times 10^3$ (C/m^2), силових та електричних коефіцієнтів інтенсивності в залежності від електричної проникності тріщини для біматеріалу PZT4/PZT5 під дією електромеханічного навантаження

ε_r	$D \times 10^3$ (C/m^2)	$K_1 \times 10^{-6}$ ($\text{N/m}^{3/2}$)	$K_2 \times 10^{-5}$ ($\text{N/m}^{3/2}$)	$K_4 \times 10^4$ ($\text{C/m}^{3/2}$)
10^{-6}	$1,23 \times 10^{-5}$	1,7701	1,5140	17,727
1	6,3653	1,3655	0,76297	6,4438
2,5	6,8543	1,5830	0,77846	5,5771
81	7,2312	1,7647	0,79454	4,9092
4000	7,2441	1,7711	0,79513	4,8863

Цікаво зазначити, що врахування кулонівських сил призводить до помітних змін результатів для всіх обчислених значень. Наприклад, коефіцієнт інтенсивності напруження K_1 без врахування кулонівської сили не залежить від ε_a в той час як

врахування цієї сили призводить до відчутної залежності коефіцієнта інтенсивності напруження K_I від ε_a (див. Табл. 1)

7 ВИПАДОК ОДНОРІДНОГО П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО МАТЕРІАЛУ

Розглянемо тепер окремо випадок однорідного п'єзоелектричного матеріалу. Розв'язок для цього випадку можна знайти за допомогою рівнянь (13а), (13б) та (18), (19) для однорідного матеріалу, але ми отримуємо це рішення як окремий випадок розв'язку, отриманого вище для неоднорідного п'єзоелектричного матеріалу. У цьому випадку $\varepsilon_1 = 0$, $\gamma_1 = 1$. Крім того, оскільки співвідношення $\cos(\alpha) = 1$, $\sin(\alpha) = 0$ для $x_1 \notin (-b, b)$ у цьому випадку точні, величина D згідно з рівняннями (35), (36) повністю постійна уздовж інтервалу $(-b, b)$. Це означає, що у цьому випадку рівняння (37), (38) теж будуть точними.

Для однорідного матеріалу формули (18) та (30) дають наступні вирази

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{j4} D_3^{(1)}(x_1, 0) + i m_{j1} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \\ = 2(T_j - iQ_j) \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - b^2}} + \sigma_0 + m_{j4} D + \sigma_0 + m_{j4} D \quad \text{для } x_1 \notin (-b, b) \end{aligned} \quad (46)$$

Розглядаючи дійсну частину (46) для $j=1$ та $j=4$ і визначаючи $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$ та $D_3^{(1)}(x_1, 0)$ з отриманої системи лінійних алгебраїчних рівнянь отримуємо

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) = (\sigma - \sigma_0) \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - b^2}} + \sigma_0, \quad (47)$$

$$D_3^{(1)}(x_1, 0) = (d - D) \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - b^2}} + D \quad \text{для } x_1 \notin (-b, b). \quad (48)$$

Далі вводимо коефіцієнти інтенсивності напружень та електричних зміщень наступним класичним способом

$$K_1 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0), \quad K_2 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0), \quad (49)$$

$$K_4 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} D_3^{(1)}(x_1, 0) \quad (50)$$

Формули (46), (47) та (48) дають наступні вирази для цих коефіцієнтів інтенсивності:

$$K_1 = \sqrt{\pi b} (\sigma - \sigma_0), \quad K_2 = \sqrt{\pi b} \tau, \quad K_4 = \sqrt{\pi b} (d - D). \quad (51)$$

Варто зазначити, що визначення (49), (50) та формули (51) впливають з визначень (41), (42) та формул (43), (44) та з урахуванням, що $\varepsilon_1 = 0$, $\gamma_1 = 1$.

З формул (47), (51) випливає, що ані напруження $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$, ані коефіцієнт інтенсивності K_1 не залежать від електричного потоку d . Більш того, отримані вирази для коефіцієнтів інтенсивності формально збігаються з результатами статті [10].

Згідно з формулами (32) та (33) для однорідного матеріалу вирази для $[u_1(x_1, 0)]$, $[u_3(x_1, 0)]$ та $[\varphi(x_1, 0)]$ мають наступний вигляд

$$\begin{aligned} [u_1(x_1, 0)] &= -m_{11}n_{11}^{-1}\tau\sqrt{b^2 - x_1^2}, \\ [u_3(x_1, 0)] &= [H_{33}(\sigma - \sigma_0) + H_{34}(d - D)]\sqrt{b^2 - x_1^2}, \\ [\varphi(x_1, 0)] &= [H_{43}(\sigma - \sigma_0) + H_{44}(d - D)]\sqrt{b^2 - x_1^2}, \end{aligned} \quad (52)$$

де $H_{33} = \Delta^{-1}(n_{44} - n_{14})$, $H_{34} = \Delta^{-1}(m_{14}n_{44} - m_{44}n_{14})$, $H_{43} = \Delta^{-1}(n_{13} - n_{43})$,
 $H_{44} = \Delta^{-1}(m_{44}n_{13} - m_{14}n_{43})$.

Слід зазначити, що H_{ij} ($i, j = 3, 4$) – компоненти матриці \mathbf{H} , введеної в [14]. Ця матриця пов'язана з матрицею \mathbf{G} , яка використовувалась у (13б) як $i\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{H}$.

Використовуючи формули (47), (48), напруження та електричне зміщення можуть бути асимптотично представленими для $x_1 \rightarrow b+0$ у наступній формі

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) &= (\sigma - \sigma_0)\sqrt{\frac{b}{2(x_1 - b)}}, \quad \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \tau\sqrt{\frac{b}{2(x_1 - b)}}, \\ D_3^{(1)}(x_1, 0) &= (d - D)\sqrt{\frac{b}{2(x_1 - b)}}. \end{aligned} \quad (53)$$

Введемо також поняття швидкості вивільнення енергії, пов'язаної з точкою $x_1 = b$, згідно з [1]

$$\begin{aligned} G &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_b^{b+\Delta l} \left\{ \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)[u_3(x_1 - \Delta l, 0)] + \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)[u_1(x_1 - \Delta l, 0)] + \right. \\ &\left. + D_3^{(1)}(x_1, 0)[\phi(x_1 - \Delta l, 0)] \right\} dx_1. \end{aligned} \quad (54)$$

Підставляючи вирази (52), (53) у (54) і беручи до уваги, що $D_3^{(1)}(x_1, 0)$ не має особливості у точці $x_1 \rightarrow b-0$, приходимо до наступного виразу для швидкості вивільнення енергії

$$G = \frac{\pi b}{4} [H_{33}(\sigma - \sigma_0)^2 + (H_{34} + H_{43})(\sigma - \sigma_0)(d - D) + H_{44}(d - D)^2 - m_{11}n_{11}^{-1}\tau^2]. \quad (55)$$

8 ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДЛЯ ТРІЩИНИ У ОДНОРІДНОМУ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ МАТЕРІАЛІ

Проведено чисельний аналіз для частково проникної тріщини в матеріалі PZT4 під дією електромеханічного навантаження. У таблиці 2 (перший стовпчик) представлені значення швидкості вивільнення енергії G для різних значень електричної проникності середовища тріщини. Механічне навантаження $\sigma = 10 \text{ МПа}$ та електричне навантаження $d = 0,01 \text{ C/m}^2$ прикладені на нескінченності. Сила Максвелла при цьому не враховувалась. З іншого боку, значення швидкості вивільнення енергії G були обчислені з урахуванням сили Максвелла для одного і того ж електромеханічного навантаження та електричної проникності середовища тріщини, які представлені в таблиці 2 (друга колонка). Для цієї таблиці при розрахунках була використана довжина тріщини $a = 10 \text{ мм}$. Нагадаємо, що аналогічно Таблиці 1 значення $\varepsilon_r = 10^{-6}$ відповідають електрично непроникній тріщині, $\varepsilon_r = 1$ – повітря, $\varepsilon_r = 2,5$ – силікон,

$\varepsilon_r = 81$ - вода, та $\varepsilon_r = 4000$ можна вважати відповідаючим електрично проникній тріщині.

Таблиця 2

Зміна швидкості звільнення енергії в залежності від електричної проникності тріщини для п'єзоматеріалу PZT4 під дією електромеханічного навантаження.

ε_r	G (N/m)	G (N/m)
10^{-6}	-40,281	-40,281
1	31,046	17,709
2,5	35,289	27,937
81	36,291	36,011
4000	36,292	36,286

Варто зазначити, що урахування сили Максвелла призводить до суттєвих змін швидкості вивільнення енергії для $\varepsilon_r = 1$, $\varepsilon_r = 2,5$ і незначних змін для $\varepsilon_r = 81$, але для екстремальних значень електричної проникності (перший і останній рядки Таблиць) їх відмінності незначні.

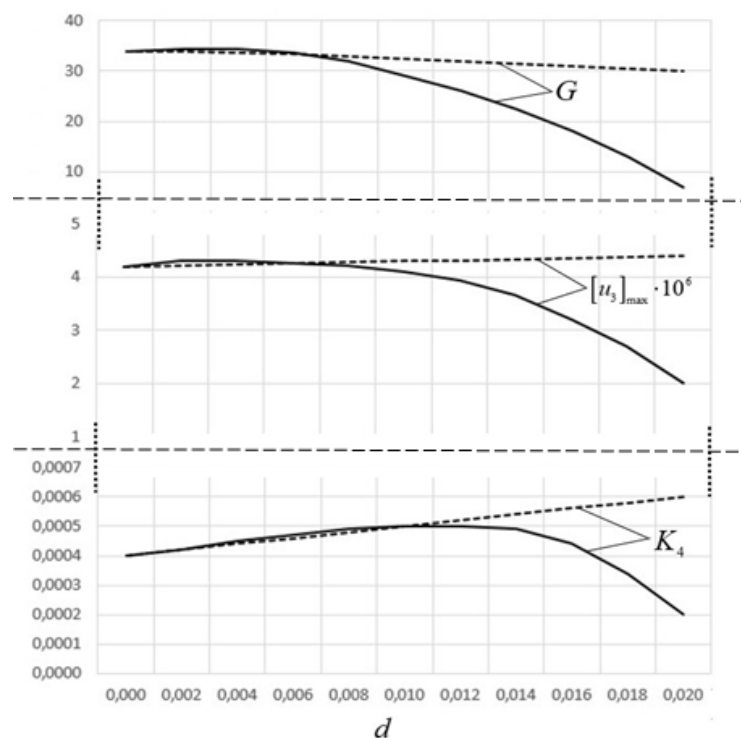


Рис. 2. Коефіцієнт інтенсивності електричного зміщення K_4 , максимальне розкриття тріщини $[u_3(0,0)]$ та швидкість вивільнення енергії G , відповідно, як функція інтенсивності електричного потоку d

На рисунку 2 представлені зміна коефіцієнта інтенсивності електричного зміщення K_4 (Кл/м^{3/2}), максимальне розкриття тріщини $[u_3(0,0)]$ (м) та швидкість вивільнення енергії G (Н/м), відповідно, як функція інтенсивності електричного потоку d (Кл/м²). Припускається, що механічне навантаження дорівнює $\sigma = 10 \text{ МПа}$, $\tau = 0$, а довжина тріщини вибирається рівною $a = 10 \text{ мм}$. Тріщина була заповнена силіконом, тобто

$\varepsilon_r = 2,5$. Показані результати обчислень з урахуванням сили Максвелла (суцільні лінії) та без його врахування (пунктирні лінії).

Звідси випливає, що залежність коефіцієнта інтенсивності електричного зміщення та максимального розкриття тріщини від інтенсивності електричного потоку для $\sigma_0 = 0$ майже лінійна. Використання енергетично узгоджених умов (урахування сили Максвелла σ_0) приводить до видимої різниці у результатах для K_4 та $[u_3(0,0)]$ для $d \geq 0,08 \text{ C/m}^2$ і ця різниця зростає зі зростанням d .

Залежність швидкості вивільнення енергії від d значно складніша, навіть для $\sigma_0 = 0$. В основному спостерігається, що G зменшується зі збільшенням інтенсивності електричного потоку d . Використання енергетично узгоджених граничних умов істотно зменшує швидкість вивільнення енергії G для великих значень електричного потоку d .

9 ВИСНОВКИ

Розглянуто плоску задачу для тріщини вздовж межі двох п'єзоелектричних напівнескінчених просторів. Вважається, що біматеріал піддається дії механічного навантаження та електричного потоку на нескінченності. Тріщина вважається механічно вільною і з електрично обмеженою проникністю. Крім того, враховується електрична взаємодія берегів тріщини, викликаних силами Максвелла в області тріщини.

Механічні переміщення та стрибки електричного потенціалу, а також напруження та електричні зміщення на межі розділу представляються через кусково голоморфну вектор-функцію. Припускається, що електричний потік є постійним по області. Тоді задача зводиться до задачі Рімана-Гільберта, яка має точний розв'язок. Всі електромеханічні характеристики на інтерфейсі представлені у замкнутому вигляді, а також виведені асимптотичні формули напружень та електричних зміщень в околі вершин тріщини.

Чисельні результати розраховуються для біматеріалу PZT4 / PZT5 і однорідного матеріалу PZT4 та представлені в Таблицях. Зокрема, показано, що електричний потік через зону тріщини та коефіцієнти інтенсивності залежать від електричної проникності середовища тріщини. На відміну від "точних" електричних граничних умов урахування сил Максвелла призводить до залежності коефіцієнта інтенсивності напружень K_1 від електричної проникності середовища тріщини.

Особлива увага приділяється окремому випадку однорідного п'єзоелектричного матеріалу. У цьому випадку електричний потік є постійним в області тріщини. Показано, що швидкість вивільнення енергії зменшується зі збільшенням електричного потоку для обох моделей тріщин. Максимальне розкриття тріщини збільшується зі збільшенням електричного потоку для електрично «точної» моделі тріщини. Для всіх розрахованих параметрів різниця в результатах, отриманих при використанні електрично «точних» та енергетично узгоджених моделей тріщин, незначна для малих значень електричного потоку. Однак ця різниця постійно зростає зі зростанням електричного навантаження.

Література

1. Parton V. Z. Electromagnetoelasticity / V. Z. Parton, B. A. Kudryavtsev // Gordon and Breach Science Publishers. New York, 1988.
2. Hao T. H. A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications / T. H. Hao, Z. Y. Shen // Eng. Fract. Mech, 1994, №47, p. 793–802.

3. Ricoeur A. Electrostatic traction at dielectric interfaces and their implication for crack boundary conditions / A. Ricoeur, M. Kuna // *Mech. Research Communications*, 2009, №36, p. 330-335.
4. Zhang A. B. The influence of Maxwell stresses on the fracture mechanics of piezoelectric materials / A. B. Zhang, B. L. Wang // *Mech. Mater.*, 2014, №68, p. 64–69.
5. Gruebner O. Finite element analysis of cracks in piezoelectric materials taking into account the permittivity of the crack medium / O. Gruebner, M. Kamlah, D. Munz // *Eng. Fract. Mech.*, 2003, №70, p. 1399–1413.
6. Wang B. L. On the electric boundary conditions on the crack surfaces in piezoelectric ceramics / B. L. Wang, Y.-W. May // *Int. J. Engng Sci.*, 2003, №4, p. 633-652.
7. Wang B. L. Applicability of the crack faces electromagnetic boundary conditions for fracture of magneto-electroelastic materials / B. L. Wang, Y.-W. May // *Int. J. Solids and Structures*. 2007, №44, p. 387–398.
8. Li W. On the crack face boundary conditions in electromechanical fracture and an experimental protocol for determining energy release rates. / W. Li, R. M. McMeeking, C. M. Landis // *European J. of Mechanics A/Solids.*, 2008, №27, p. 285-301.
9. Loboda V., Lapusta Y., Sheveleva A. Limited permeable crack in an interlayer between piezoelectric materials with different zones of electrical saturation and mechanical yielding. / V. Loboda, Y. Lapusta, A. Sheveleva // *Int. J. Solids Struct.*, 2010, №47, 1795-1806.
10. Li Q. Why traction free? Piezoelectric crack and Coulombic traction / Q. Li, Y. H. Chen // *Archive of Applied Mechanics*, 2008, №78, 559-573.
11. Landis C. M. Electrically consistent boundary conditions for electromechanical fracture / C. M. Landis // *Int. J. Solids Structures*, 2004, №41, 6291-6315.
12. Govorukha V. B. On the influence of the electric permeability on an interface crack in a piezoelectric bimaterial compound / V. B. Govorukha, V. V. Loboda, M. Kamlah // *Int. J. Solids and Structures*, 2006, №43, 1979-1990.
13. Li Q. Solution for a semi-permeable interface crack in elastic dielectric piezoelectric biomaterials / Q. Li, Y. H. Chen // *ASME, J. Appl. Mech.*, 2008, №75, 011010-1-13.
14. Lapusta Y. Limited permeable crack moving along the interface of a piezoelectric bi-material / Y. Lapusta A. Komarov, F. Labesse-Jied, R. Moutou Pitti, V. Loboda // *European J. Mechanics A/Solids.*, 2011, №30, p. 639-649.
15. Suo Z. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics / Suo Z., Kuo C. M., Barnett D. M., Willis J. R. // *J. Mech. Phys. Solids.*, 1992, №40, p. 739-765.
16. Herrmann K. P. On contact zone models for an electrically impermeable interface crack in a piezoelectric biomaterial / Herrmann K. P., Loboda V. V., Govorukha V. B. // *Int. J. Fracture.*, 2001, № 111, p. 203-227.
17. Muskhelishvili N. I. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity / Muskhelishvili N.I. // Noordhoff International Publishing, Leyden, 1963.

References

1. Parton, V. Z. and Kudryavtsev, B. A. (1988). *Electromagnetoelasticity*. Gordon and Breach Science Publishers. New York.
2. Hao, T. H., Shen, Z. Y. (1994). A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications. *Eng. Fract. Mech.* 47, 793–802.
3. Ricoeur, A., Kuna, M. (2009). Electrostatic traction at dielectric interfaces and their implication for crack boundary conditions. *Mech. Research Communications*. 36, 330-335.
4. Zhang, A. B., Wang, B. L. (2014). The influence of Maxwell stresses on the fracture mechanics of piezoelectric materials. *Mech. Mater.* 68, 64–69.
5. Gruebner, O., Kamlah, M., Munz, D. (2003). Finite element analysis of cracks in piezoelectric materials taking into account the permittivity of the crack medium. *Eng. Fract. Mech.* 70, 1399–1413.
6. Wang, B. L., May, Y.-W. (2003). On the electric boundary conditions on the crack surfaces in piezoelectric ceramics. *Int. J. Engng Sci.* 4, 633-652.
7. Wang, B. L., May, Y.-W. (2007). Applicability of the crack faces electromagnetic boundary conditions for fracture of magneto-electroelastic materials. *Int. J. Solids and Structures*. 44, 387–398.

8. Li, W., McMeeking, R. M., Landis, C. M. (2008). On the crack face boundary conditions in electromechanical fracture and an experimental protocol for determining energy release rates. *European J. of Mechanics A/Solids*. 27, 285-301.
9. Loboda, V., Lapusta, Y., Sheveleva, A. (2010). Limited permeable crack in an interlayer between piezoelectric materials with different zones of electrical saturation and mechanical yielding. *Int. J. Solids Struct.* 47, 1795-1806.
10. Li, Q., Chen, Y. H. (2008). Why traction free? Piezoelectric crack and Coulombic traction. *Archive of Applied Mechanics*. 78, 559-573.
11. Landis, C. M. (2004). Electrically consistent boundary conditions for electromechanical fracture, *Int. J. Solids Structures*. 41, 6291-6315.
12. Govorukha, V. B., Loboda, V. V., Kamlah, M. (2006). On the influence of the electric permeability on an interface crack in a piezoelectric bimaterial compound. *Int. J. Solids and Structures*. 43, 1979-1990.
13. Li, Q., Chen, Y. H. (2008). Solution for a semi-permeable interface crack in elastic dielectric/piezoelectric bimaterials. *ASME, J. Appl. Mech.* 75, 011010-1-13.
14. Lapusta, Y., Komarov A., Labesse-Jied, F., Moutou Pitti, R., Loboda, V. (2011). Limited permeable crack moving along the interface of a piezoelectric bi-material. *European J. Mechanics A/Solids*. 30, 639-649.
15. Suo, Z., Kuo, C. M., Barnett, D. M., Willis, J. R. (1992). Fracture mechanics for piezoelectric ceramics. *J. Mech. Phys. Solids*. 40, 739-765.
16. Herrmann, K. P., Loboda, V. V., Govorukha, V. B. (2001). On contact zone models for an electrically impermeable interface crack in a piezoelectric bimaterial. *Int. J. Fracture*. 111, 203-227.
17. Muskhelishvili, N. I. (1963). *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff International Publishing, Leyden.

Онопрієнко Олег Дмитрович

Дніпровський державний аграрно-економічний університет, асистент
вул. Сергія Єфремова, 25, Дніпро, Україна, 49600
onopriienko.oleg@gmail.com

ORCID: 0000-0002-3127-4616

Комаров Олександр Вікторович

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, к.ф.-м.н., доцент
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, Україна 49050
21_21@ukr.net

ORCID: 0000-0002-8532-2820

Лобода Володимир Васильович

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, д.ф.-м.н., професор
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, Україна 49050
loboda@dnu.dp.ua

ORCID: 0000-0002-0432-629X

Для посилань:

Онопрієнко О. Д. Про вплив сил Максвелла на деформування міжфазної тріщини у п'єзоелектричному біматеріалі / О. Д. Онопрієнко, О. В. Комаров, В. В. Лобода // *Механіка та математичні методи*. – 2020. – Том 2, Вип. 1. – С. 29–44.

For references:

Onopriienko, O., Komarov, O., Loboda, V. (2020). On the influence of Maxwell forces on the deformation of the interface crack in piezoelectric bi-material. *Mechanics and mathematical methods*, 2 (1), 29–44.