

УДК 539.3

## ПРО ВЗАЄМОДІЮ ДВОХ ТРІЩИН НА МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

Костенко М. В.<sup>1</sup>, Шевельова А. Є.<sup>1</sup>, Лобода В. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

**Анотація:** Розглянута задача плоскої деформації про взаємодію двох колінеарних тріщин між ізотропними різнорідними півпросторами, навантаженими на нескінченності нормальними та дотичними напруженнями. Для побудови розв'язку використано представлення напружень та переміщень через функцію, яка аналітична у всій комплексній площині за виключенням областей тріщин. За допомогою цих представлень проблема зведена до задачі Рімана-Гільберта, для вказаної кусково-аналітичної функції зі стрибками по відрізкам тріщин. Виписано аналітичне представлення розв'язку з невідомими коефіцієнтами, що визначаються з умов на нескінченності та умов однозначності переміщень при обході контурів тріщин. Реалізація останніх приводить до необхідності обчислення інтегралів від функцій з осцилюючими кореневими особливостями. На основі отриманого розв'язку виписані аналітичні вирази для напружень на різних відрізках поза тріщиною та стрибків переміщень на берегах тріщин. Встановлено характер поведінки напружень та похідних від стрибків переміщень на різних частинах межі поділу матеріалів. Знайдені комплексні коефіцієнти інтенсивності напружень та швидкості звільнення енергії біля вершин правої тріщини. Проаналізовано залежності вказаних факторів від механічних характеристик матеріалів, розміру та взаємного розташування тріщин, а також від інтенсивностей віддалених нормального та дотичного напружень. Результати представлено у вигляді таблиці та графіків. Зокрема, показаний ріст швидкості звільнення енергії для вершини тріщини при наближенні до неї іншої тріщини. Продемонстровані також графіки зміни стрибка переміщень для різних співвідношень модулів пружності верхнього та нижнього матеріалів і різних відношеннях інтенсивностей зовнішніх нормального та дотичного напружень. Виявлено, зокрема, що при значній різниці у модулях пружності та при суттєвому зсувному полю напружень стає помітним взаємопроникнення матеріалів, пов'язане із осцилюючою особливістю, що має місце біля вершин тріщини.

**Ключові слова:** тріщини, взаємодія, коефіцієнт інтенсивності напружень, осцилююча особливість

## ON THE INTERACTION OF TWO CRACKS ALONG THE MATERIAL INTERFACE

M. Kostenko<sup>1</sup>, A. Sheveleva<sup>1</sup>, V. Loboda<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Oles Honchar Dnipro National University

**Abstract:** Plane deformation problem of the interaction of two collinear cracks between isotropic heterogeneous half-spaces loaded at infinity by normal and tangential stresses is considered. To find the solution, the representation of stresses and displacements through a function that is analytical in the entire complex plane except of the crack regions is used. With the help of these representations, the problem is reduced to the Riemann-Hilbert problem, for the specified piecewise analytical function with jumps along the segments of cracks. An analytical representation of the solution with unknown coefficients, which is determined from the conditions at infinity and the conditions of unambiguous displacements when traversing the contours of cracks, is written. The implementation of the latter leads to the need of calculation on the integrals from the functions with oscillating root singularities. Based on the obtained solution, analytical expressions are written for stresses at different segments outside the crack and jumps of displacements on the cracks. The behavior of stresses and derivatives of the displacements jumps at different parts of the material interface are established. Complex



coefficients of stress intensity and energy release rate near the vertices of the right crack are found. The dependences of these factors on the mechanical characteristics of materials, size and mutual location of cracks, as well as on the intensities of the remote normal and tangential stresses are analyzed. The results are presented in the form of tables and graphs. In particular, an increase of the energy release rate for the crack tip when another crack approaches is shown. Graphs of changes in the jump of displacements for different ratios of modulus of elasticity of the upper and lower materials and different ratios of intensities of external normal and tangential stresses are also shown. It was found, in particular, that with a significant difference in the modulus of elasticity and with a significant shear stress field, the interpenetration of materials occurring because of the oscillating singularity near the crack vertices becomes noticeable.

**Keywords:** cracks, interaction, stress intensity factor, oscillating singularity

## 1 ВСТУП

Дослідження тріщин між двома матеріалами (міжфазних тріщин) має важливе значення для практики, оскільки такого роду дефекти є найчастіше основною причиною руйнування композитних конструкцій. Задача для тріщини, яка розташована на межі поділу двох різних пружних ізотропних матеріалів, була поставлена в [1] в припущенні, що тріщина повністю відкрита. В результаті було встановлено, що в рамках цієї моделі біля вершин тріщини має місце осцилююча особливість напружень. У подальшому, міжфазна тріщина в рамках цієї моделі розглядалася в [2-4] та інших роботах. Взаємодія періодичної системи відкритих міжфазних тріщин вивчалась в роботах [5, 6]. Розв'язок для довільної системи тріщин між двома ізотропними матеріалами представлений в [7]. Для його знаходження застосований метод сингулярних інтегральних рівнянь.

В даній роботі з використанням комплексних представлень компонент пружно-деформівного стану розглянуто задачу про взаємодію двох відкритих тріщин на межі поділу матеріалів. Проблему зведено до крайової задачі Гільберта, для якої виписано аналітичний розв'язок. Одержано досить прості аналітичні формули для всіх необхідних факторів на межі поділу матеріалів.

## 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо дві відкриті  $c \leq x_1 \leq a$ ,  $b < x_1 < d$  тріщини на межі поділу  $x_2 = 0$  двох пружних матеріалів (рис. 1).

Будемо вважати, що вектор  $\mathbf{P}^\infty = [\sigma^\infty, \tau^\infty]^T$  задає умови на нескінченності. Вважається також відсутність напружень на берегах тріщин і умови неперервності на іншій частині межі поділу матеріалів (біматеріального інтерфейсу). Отже, граничні умови на різних частинах інтерфейсу мають вигляд

$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = 0 \quad \text{для } x_1 \in [c, a] \cup [b, d], \quad x_1 \in [b, d], \quad (1)$$

$$\langle u_1(x_1, 0) \rangle = 0, \quad \langle u_2(x_1, 0) \rangle = 0,$$

$$\langle \sigma_{12}(x_1, 0) \rangle = 0, \quad \langle \sigma_{22}(x_1, 0) \rangle = 0 \quad \text{для } x_1 \notin \{[c, a] \cup [b, d]\}, \quad (2)$$

де вважається, що  $c < a < b < d$ ,  $\langle \cdot \rangle$  означає стрибок відповідної функції при переході через інтерфейс.

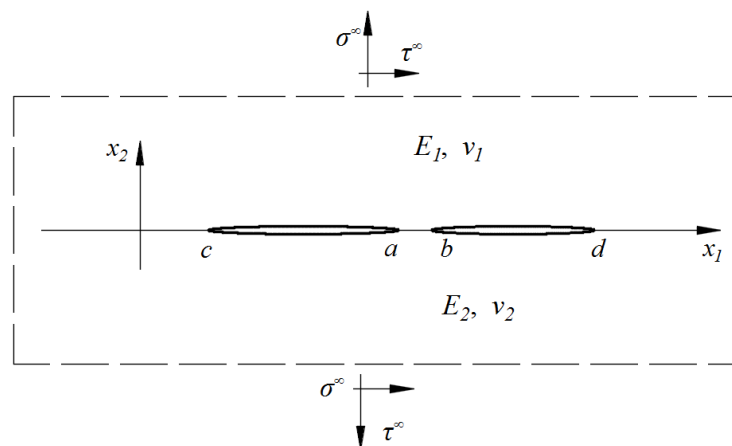


Рис. 1. Відкриті  $c \leq x_1 \leq a$ ,  $b < x_1 < d$  тріщини на межі поділу  $x_2 = 0$  двох пружних матеріалів

В роботі [9] отримані представлення

$$\sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) = g \left[ F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1) \right], \quad (4)$$

$$\langle u_1'(x_1, 0) \rangle + i \langle u_2'(x_1, 0) \rangle = F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1), \quad (5)$$

де

$$g = \frac{2\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}, \quad \gamma_1 = \frac{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}{\mu_2 + \kappa_2 \mu_1},$$

функція  $F_1(z)$  аналітична у всій площині комплексної змінної  $z = x_1 + ix_2$  за виключенням відрізків  $[c, a]$  і  $[b, d]$  межі поділу матеріалів. При цьому рівняння (4), (5) забезпечують виконання умов неперервності напружень уздовж усього інтерфейсу.

### 3 АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОБЛЕМИ

Співвідношення (4), (5) задовольняють третю і четверту умови (2), що витікає із виконання рівняння  $\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{P}^{(2)}(x_1, 0)$  ( $\mathbf{P}^{(m)} = [\sigma_{22}^{(m)}, \sigma_{12}^{(m)}]^T$ ) для всього інтерфейсу. Подальше врахування першої і другої умов (3) забезпечує аналітичність функції для всієї площини з розрізом уздовж відрізків  $x_1 \in [c, a]$  і  $x_1 \in [b, d]$  інтерфейсу.

Задовольняючи граничні умови (1) з використанням (4), отримуємо таке рівняння:

$$F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in [c, a] \cup [b, d]. \quad (6)$$

Беручи до уваги, що для  $x_1 \notin [c, a]$  і  $x_1 \notin [b, d]$  співвідношення

$$F_1^+(x_1) = F_1^-(x_1) = F_1(x_1) \quad \text{є справедливим, маємо з (4):}$$

$$(1 + \gamma_1)F_1(x_1) = \sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) \quad \text{для } x_1 \rightarrow \infty.$$

Використовуючи той факт, що функція  $F_1(z)$  є аналітичною у всій площині, яка розрізана вздовж  $x_1 \in \{[c, a] \cup [b, d]\}$  і застосовуючи умови на нескінченності, приходимо з останнього рівняння до такої умови на нескінченності

$$F_1(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}^\infty - i\tilde{\tau}^\infty, \quad (7)$$

де  $\tilde{\sigma}^\infty = \sigma^\infty / g(1 + \gamma_1)$ ,  $\tilde{\tau}^\infty = \tau^\infty / g(1 + \gamma_1)$ ,  $\sigma^\infty$  і  $\tau^\infty$  – напруження, задані на нескінченності.

Співвідношення (6) з умовою на нескінченності (7) є задача Гільберта-Рімана. Враховуючи відсутність навантаження на берегах тріщин її розв'язок будемо розшукувати у вигляді [9]:

$$F_1(z) = P_2(z)X(z) = \frac{c_0 z^2 + c_1 z + c_2}{\sqrt{(z-c)(z-a)(z-b)(z-d)}} \left( \frac{z-c}{z-a} \cdot \frac{z-b}{z-d} \right)^{i\varepsilon_1}, \quad (8)$$

де  $\varepsilon_1 = (1/2\pi) \ln \gamma_1$ ;  $P_2(z) = c_0 z^2 + c_1 z + c_2$ ;  $c_0, c_1, c_2$  – довільні константи, що визначаються з рівняння (7) та з умов однозначності переміщень при обході контурів тріщин.

На основі [9] умови однозначності переміщень при обході контурів тріщин мають вигляд

$$\int_c^a \frac{c_0 t^2 + c_1 t + c_2}{\sqrt{(t-c)(t-a)(t-b)(t-d)}} \left( \frac{(t-c)(t-b)}{(t-d)(t-a)} \right)^{i\epsilon_1} dt = 0, \quad (9)$$

$$\int_b^d \frac{c_0 t^2 + c_1 t + c_2}{\sqrt{(t-c)(t-a)(t-b)(t-d)}} \left( \frac{(t-c)(t-b)}{(t-d)(t-a)} \right)^{i\epsilon_1} dt = 0. \quad (10)$$

Ці співвідношення можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} c_0 I_2 + c_1 I_1 + c_2 I_0 &= 0, \\ c_0 \tilde{I}_2 + c_1 \tilde{I}_1 + c_2 \tilde{I}_0 &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$I_k = \int_c^a R(t) dt, \quad \tilde{I}_k = \int_b^d R(t) dt, \quad (12)$$

$$R(t) = \frac{t^k}{\sqrt{(t-c)(t-a)(t-b)(t-d)}} \left( \frac{(t-c)(t-b)}{(t-d)(t-a)} \right)^{i\epsilon_1}.$$

Розкладаючи функцію  $F_1(z)$  в ряд при  $z \rightarrow \infty$  і розглядаючи коефіцієнт цього розкладення при  $z^0$ , з рівняння (7) одержуємо:

$$c_0 = \tilde{\sigma}^\infty - i\tilde{\tau}^\infty. \quad (13)$$

Із системи (11) знаходимо

$$c_1 = \frac{c_0(I_2 \tilde{I}_0 - \tilde{I}_2 I_0)}{D}, \quad c_2 = \frac{c_0(I_1 \tilde{I}_2 + \tilde{I}_1 I_2)}{D}, \quad (14)$$

де  $D = -(I_1 \tilde{I}_0 + \tilde{I}_1 I_0)$ .

Якщо тріщини однакові і розташовані симетрично відносно початку координат, тобто  $c = -d$ ,  $a = -b$ , то

$$F_1(z) = P_2(z)X(z) = \frac{c_0 z^2 + c_1 z + c_2}{\sqrt{(z^2 - b^2)(z^2 - d^2)}} \left( \frac{(z+d)(z-b)}{(z-d)(z+b)} \right)^{i\epsilon_1}, \quad (15)$$

У цьому випадку  $c_0$  не змінюється, а формули для  $c_1, c_2$ , можна подати у наступному більш простому вигляді:

$$c_1 = \frac{c_0(I_2^+ I_0^- - I_2^- I_0^+)}{D_s}, \quad c_2 = \frac{c_0(I_1^+ I_2^- + I_1^- I_2^+)}{D_s}, \quad (16)$$

де

$$D_s = -(I_1^+ I_0^- + I_1^- I_0^+), \quad I_k^\pm = \int_b^d \frac{t^k}{\sqrt{(t^2 - b^2)(t^2 - d^2)}} \left( \frac{(t+d)(t-b)}{(t-d)(t+b)} \right)^{\pm i\epsilon_1} dt. \quad (17)$$

У частковому випадку однакових матеріалів інтеграли у формулах (12), (17) зводяться до еліптичних інтегралів. Зокрема, для випадку симетрично розташованих тріщин відносно початку координат формула (15) приймає вигляд:

$$F_1(z) = \frac{\tilde{\sigma}^\infty - i\tilde{\tau}^\infty}{2g} \left\{ \frac{z^2 - d^2 E(q) / K(q)}{\sqrt{(z^2 - c^2)(z^2 - d^2)}} \right\}, \quad (18)$$

де  $q = d^2 - c^2/d^2$ ,  $K(q)$ , і  $E(q)$  – повні еліптичні інтеграли першого і другого роду, відповідно. Коефіцієнт  $g$  у цьому випадку приймає вигляд  $g = 2\mu/1 + \kappa$ .

#### 4 НАПРУЖЕННЯ ТА ЇХ КОЕФІЦІЄНТИ ІНТЕНСИВНОСТІ

Враховуючи, що  $F_1^+(x_1) = F_1^-(x_1) = F_1(x_1)$  для  $x_1 \notin [c, a]$  і  $x_1 \notin [b, d]$ , на основі формули (4) одержуємо

$$\begin{aligned} & \sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) = \\ & = g(1 + \gamma_1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{c_0x^2 + c_1x + c_2}{\sqrt{(x-c)(x-a)(x-b)(x-d)}} \left( \frac{(x-c)(x-b)}{(x-d)(x-a)} \right)^{i\varepsilon_1}, \quad x_1 > d \\ - \frac{c_0x^2 + c_1x + c_2}{\sqrt{(x-c)(x-a)(b-x)(d-x)}} \left( \frac{(x-c)(b-x)}{(d-x)(x-a)} \right)^{i\varepsilon_1}, \quad a < x_1 < b \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Комплексні коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) біля вершин правої тріщини вводимо наступними формулами

$$\begin{aligned} K_1^b - iK_2^b &= \lim_{x_1 \rightarrow b-0} \sqrt{2\pi(b-x_1)}(b-x_1)^{-i\varepsilon_1} \left[ \sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) \right], \\ K_1^d - iK_2^d &= \lim_{x_1 \rightarrow d+0} \sqrt{2\pi(x_1-d)}(x_1-d)^{i\varepsilon_1} \left[ \sigma_{22}^{(1)}(x_1, 0) - i\sigma_{12}^{(1)}(x_1, 0) \right]. \end{aligned}$$

На основі формул (19) отримуємо:

$$K_1^b - iK_2^b = -g\sqrt{2\pi}(1 + \gamma_1) \frac{c_0b^2 + c_1b + c_2}{\sqrt{(b-c)(b-a)(d-b)}} \left( \frac{(b-c)}{(d-b)(b-a)} \right)^{i\varepsilon_1}, \quad (20)$$

$$K_1^d - iK_2^d = \sqrt{2\pi}g(1 + \gamma_1) \frac{c_0d^2 + c_1d + c_2}{\sqrt{(d-c)(d-a)(d-b)}} \left( \frac{(d-c)(d-b)}{(d-a)} \right)^{i\varepsilon_1}. \quad (21)$$

Відомо, що швидкість звільнення енергії (ШЗЕ) для тріщини між двома матеріалами наступним чином виражається через коефіцієнти інтенсивності напружень:

$$G = \Omega(K_1^2 + K_2^2), \quad (22)$$

де

$$\Omega = \frac{1}{16\text{ch}^2(\pi\varepsilon)} \left( \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right) \text{ або } \Omega = \frac{\gamma}{4(\gamma + 1)^2} \left( \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right). \quad (23)$$

На основі цієї формули ШЗЕ для вершин тріщини  $b$  і  $d$ , відповідно, виражаються формулами:

$$G_b = \Omega(K_1^b + iK_2^b)(K_1^b - iK_2^b) = 2\pi\Omega g^2(1 + \gamma_1)^2 \frac{(c_0b^2 + c_1b + c_2)(\bar{c}_0b^2 + \bar{c}_1b + \bar{c}_2)}{(b-c)(b-ab-a)(d-b)}, \quad (24)$$

$$G_d = 2\pi\Omega g^2(1 + \gamma_1)^2 \frac{(c_0d^2 + c_1d + c_2)(\bar{c}_0d^2 + \bar{c}_1d + \bar{c}_2)}{(d-c)(d-a)(d-b)}, \quad (25)$$

де рисочки зверху означають комплексне спряження.

## 5 РОЗКРИТТЯ ТРІЩИН

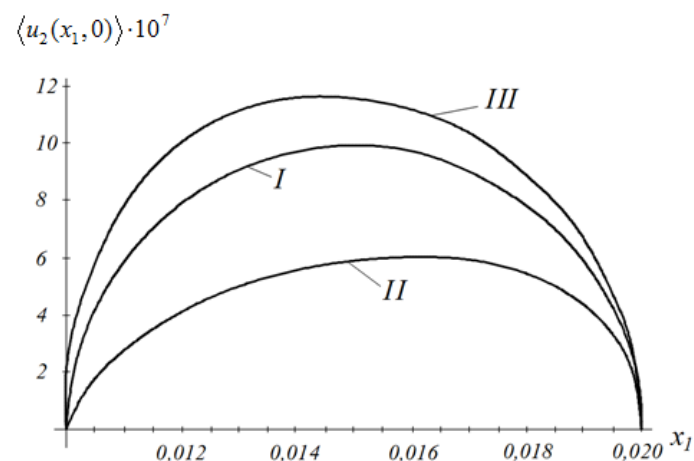
З урахуванням співвідношення  $F_1^-(x_1) = (-1/\gamma_1)F_1^+(x_1)$  для  $x_1 \in [c, a] \cup [b, d]$ , яке витікає з (6), на основі формули (5) отримуємо

$$\begin{aligned} & \langle u_1'(x_1, 0) \rangle + i \langle u_2'(x_1, 0) \rangle = \\ & = i \frac{1 + \gamma_1}{\sqrt{\gamma_1}} \begin{cases} \frac{c_0 x_1^2 + c_1 x_1 + c_2}{\sqrt{(x_1 - c)(a - x_1)(b - x_1)(d - x_1)}} \left( \frac{(x_1 - c)(b - x_1)}{(d - x_1)(a - x_1)} \right)^{i\epsilon_1} & x_1 \in (c, a) \\ \frac{-(c_0 x_1^2 + c_1 x_1 + c_2)}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)(x_1 - b)(d - x_1)}} \left( \frac{(x_1 - c)(x_1 - b)}{(d - x_1)(x_1 - a)} \right)^{i\epsilon_1} & x_1 \in (b, d). \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

При отриманні останньої формули враховано, що  $(-1)^{i\epsilon_1} = \sqrt{\gamma_1}$ .

## 6 ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Чисельний аналіз проводився для різних варіантів розташування тріщин, різних механічних характеристик верхнього та нижнього матеріалів і різних зовнішніх навантажень.



**Рис. 2.** Стрибки переміщень правої тріщини при  $E_1 = 10 \text{ ГПа}$ ,  $E_2 = 100 \text{ ГПа}$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ,  $b = 10 \text{ мм}$ ,  $d = 20 \text{ мм}$  та різних положеннях лівої тріщини

На рис. 2 показані графіки відкриття (стрибків переміщень) правої тріщини при  $E_1 = 10 \text{ ГПа}$ ,  $E_2 = 100 \text{ ГПа}$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ,  $b = 10 \text{ мм}$ ,  $d = 20 \text{ мм}$ , різних положеннях лівої тріщини. Крива I побудована для  $c = -20 \text{ мм}$ ,  $a = -10 \text{ мм}$ ,  $\sigma^\infty = 1 \text{ МПа}$ ,  $\tau^\infty = 0$ . Крива II побудована для того ж положення лівої тріщини, але при наявності зсувного поля ( $\sigma^\infty = 0,6 \text{ МПа}$ ,  $\tau^\infty = 0,8 \text{ МПа}$ ), а крива III відповідає  $c = -1 \text{ мм}$ ,  $a = 9 \text{ мм}$ ,  $\sigma^\infty = 1 \text{ МПа}$ ,  $\tau^\infty = 0$ , тобто випадку суттєвого наближення лівої тріщини до правої. Видно, що таке наближення при збереженні усіх інших зовнішніх чинників призводить до помітного росту розкриття тріщини.

Відповідні зміни ШЗЕ, отримані за формулами (24), (25), наведені в таблиці 1.

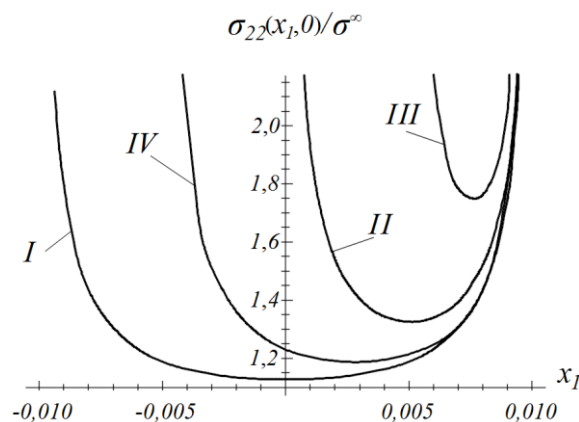
**Таблиця 1.**

Швидкість звільнення енергії (ШЗЕ) при зближенні тріщин

$b-a$ , мм	100	20	10	5	2	1	0,5
$G_b$	0,772	0,788	0,837	0,944	1,254	1,703	2,467
$G_d$	0,771	0,780	0,804	0,843	0,908	0,960	1,011

Видно ріст вказаного фактору для обох вершин тріщини, але більш швидкий ріст спостерігається для внутрішньої вершини тріщини.

На рис. 3 показана варіація напруження  $\sigma_{22}(x_1, 0)$  на проміжку  $(a, b)$  між тріщинами при  $b = 10$  мм,  $d = 20$  мм і  $a = -10$  мм (крива I),  $a = 0$  (II),  $a = 5$  мм (III),  $a - c = 10$  мм під дією нормального напруження  $\sigma^\infty = 1$  МПа. Крива IV побудована для змішаного навантаження  $\sigma^\infty = \tau^\infty = 1$  МПа при тих же значеннях  $b$  і  $d$ , та  $c = -15$  мм,  $a = -5$  мм. Характеристики матеріалів вибирались такі ж, як і для рис. 2.



**Рис. 3.** Варіація напруження  $\sigma_{22}(x_1, 0)$  на проміжку  $(a, b)$  між тріщинами

На рис. 4 показна поведінка стрибків переміщень в околі лівої вершини правої тріщини при  $c = -20$  мм,  $a = -10$  мм,  $b = 10$  мм,  $d = 20$  мм,  $\sigma^\infty = 1$  МПа,  $\tau^\infty = 5$  МПа,  $E_1 = 10$  ГПа,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$  і різних значеннях модуля пружності нижнього матеріалу, а саме  $E_2 / E_1 = 1$  (крива I),  $E_2 / E_1 = 2$  (II) і  $E_2 / E_1 = 10$  (III). Слід відзначити, що крива I побудована для однорідного матеріалу і в цьому випадку результати повністю узгоджуються з відповідними значеннями, отриманими на основі формули (18). Ця обставина підтверджує правильність результатів, отриманих для загального випадку характеристик біматеріалу. Ріст модуля Юнга нижнього матеріалу приводить до падіння величини стрибка переміщень. Для достатньо великих значень відношення  $E_2 / E_1$  візуально стає помітним взаємопроникнення берегів тріщини, яке має місце для відкритої моделі тріщини між двома різними матеріалами [1-4]. Але така ситуація суттєво проявляється лише для великих значень зовнішнього зсувного поля та значної різниці в механічних характеристиках матеріалів. У більшості ж випадків зони взаємопроникнення берегів тріщини є вкрай малими і вони суттєво не впливають на основні результати розрахунків.



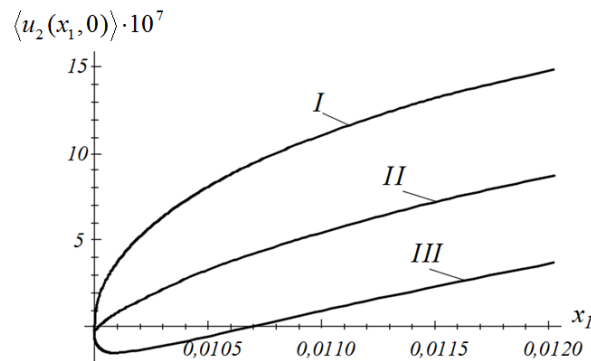


Рис. 4. Поведінка стрибків переміщень в околі лівої вершини правої тріщини

## 7 ВИСНОВКИ

В результаті розв'язання задачі про дослідження пружно-деформівного стану ізотропного біматеріального тіла з двома колінеарними тріщинами на межі поділу матеріалів отримані аналітичні вирази для напружень на різних частинах інтерфейсу та знайдені стрибки переміщень на берегах тріщин, тобто їх розкриття. Підтверджено існування осцилюючої кореневої особливості в вершинах тріщини та знайдені комплексні коефіцієнти інтенсивності напружень і швидкості звільнення енергії у вказаних вершинах. Проаналізовано залежності вказаних факторів від механічних характеристик матеріалів, розміру та взаємного розташування тріщин, а також від інтенсивностей віддалених нормального та дотичного напружень. Показано, що при досить великому значенні відношення модулів пружності верхнього і нижнього матеріалів і значному зсувному полю стає візуально помітним взаємопроникнення берегів тріщини, що вказує на необхідність використання у таких випадках контактної моделі тріщини. Проаналізована поведінка швидкості звільнення енергії правої тріщини при наближенні до неї лівої тріщини. Встановлено ріст вказаного фактору для обох вершин тріщини, але більш швидкий ріст спостерігався для внутрішньої вершини тріщини.

## Література

1. Williams M. L. The stresses around a fault or cracks in dissimilar media. Bulletin of the Seismological Society of America. 1959. № 49. P. 199–204.
2. Моссаковский В. И., Рыбка М. Т. Обобщение критерия Гриффитса-Снеддона на случай неоднородного тела. Прикладная математика и механика. 1964. № 6. С. 1061–1069.
3. Черепанов Г. П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 1. С. 131–137.
4. England A. N. A crack between dissimilar media. Journal of Applied Mechanics. 1965. № 32. P. 400–402.
5. Rice J. R., Sih G. C. Plane problem of cracks in dissimilar media. Journal of Applied Mechanics. 1965. № 32. P. 418–423.
6. Parihar K. S., Garg A. C. An infinite row of collinear cracks at the interface of two bonded dissimilar elastic half planes. Eng. Fract. Mech. 1975. № 7 (4). P. 751–759.
7. Noda N. A., Oda K. Interaction effect of stress intensity factors for any number of collinear interface cracks. International Journal of Fracture. 1997. № 84. P. 117–128.
8. Лобода В. В., Харун І. В. Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил та моментів. Мат. методи та фізико-механічні поля. 2002. № 45 (2). С. 103–113.
9. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва : Наука, 1966. 707 с.

## References

1. Williams, M. L. (1959). The stresses around a fault or cracks in dissimilar media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, no. 49, 199–204. [in English].
2. Mossakovsky, V. I., Rybka, M. T. (1964). Obobshchenye kryteryya Hryffytza-Sneddona na sluchay neodnorodnogo tela [Generalization of the Griffiths-Sneddon criterion to the case of an inhomogeneous body]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], no. 6, 1061-1069. [in Russian].
3. Cherepanov, G. P. (1962). O napryazhenom sostoyany v neodnorodnoy plastynke s razrezamy [On the stress state in an inhomogeneous plate with cuts]. *Yzv. AN SSSR. OTN. Mekhanyka y mashynostroenye* [News USSR Academy of Sciences. DTSc. Mechanics and mechanical engineering], no. 1, 131–137. [in Russian].
4. England, A. N. (1965). A crack between dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*, no. 32, 400–402. [in English].
5. Rice, J. R., Sih, G. C. (1965). Plane problem of cracks in dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*, no. 32, 418–423. [in English].
6. Parihar, K. S., Garg, A. C. (1975). An infinite row of collinear cracks at the interface of two bonded dissimilar elastic half planes. *Eng. Fract. Mech.*, no. 7, 4, 751–759. [in English].
7. Noda, N., Oda, K. (1997). Interaction effect of stress intensity factors for any number of collinear interface cracks. *International Journal of Fracture*, no. 84, 117–128. [in English].
8. Loboda, V. V., Kharun, I. V. (2002). Mizhfazni trishchyny z zonamy kontaktu v poli zoseredzhenykh syl ta momentiv. [Interface cracks with contact zones in the field of concentrated forces and moments]. *Mat. metody ta fizyko-mekhanichni polya* [Mat. methods and physical-mechanical fields], no. 45, 2, 103–113. [in Ukrainian].
9. Muskhelishvili, N. I. (1977). *Nekotorye osnovnye zadachy matematycheskoy teoryi uprugosti*. [Some basic problems of mathematical theory of elasticity]. Moskva : Nauka. [in Russian].

### **Костенко Микита Вікторович**

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, аспірант  
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, Україна 49050  
neutralunit1187@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-1644-7857

### **Шевельова Алла Євгенівна**

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, д.ф.-м.н., професор  
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, Україна 49050  
sheveleva@dnua.dp.ua  
ORCID: 0000-0001-6688-0942

### **Лобода Володимир Васильович**

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, д.ф.-м.н., професор  
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, Україна 49050  
loboda@dnua.dp.ua  
ORCID: 0000-0002-0432-629X

### *Для посилань:*

Костенко М. В. Про взаємодію двох тріщин на межі поділу матеріалів / М. В. Костенко, А. Є. Шевелева, В. В. Лобода // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 2. – С. 32–41.

### *For references:*

Kostenko, M., Sheveleva, A., Loboda, V. (2020). On the interaction of two cracks along the material interface. *Mechanics and Mathematical Methods*, 2 (2), 32–41.