УДК 539.3

ПОБУДОВА ЗОН ДИНАМІЧНОЇ НЕСТІЙКОСТІ ДЛЯ ВИСОТНИХ БУДІВЕЛЬ У РАЗІ СЕЙСМІЧНИХ ДІЙ

Фомін В. М.[1], Фоміна І. П.[1]
[1]*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація: Сейсмічні дії створюють можливість виникнення параметричних резонансів, тобто можливість появи інтенсивних поперечних коливань елементів контрукцій (зокрема, висотних) від дії періодичних поздовжніх сил. В якості розрахункової моделі висотної споруди використовується модель, прийнята при розрахунку висотних споруд на сейсмічні впливи, - невагомий жорстко затиснений в основі вертикальний стержень (колона) з системою зосереджених мас (вантажів), розташованих на ньому (рис. 1).

За допомогою вирішення диференціального рівняння зігнутої осі проводиться побудова функції впливу стержня, із застосуванням якої визначаються коефіцієнти впливу для точок стержня, в яких знаходяться зосереджені маси. Ці коефіцієнти є елементами матриці податливості $\boldsymbol{V}$. Далі визначаються елементи матриці жесткостей $\boldsymbol{H}$ шляхом звернення матриці $\boldsymbol{V}$. Із застосуванням діагональної матриці мас вантажів $\boldsymbol{M}$ і матриці $\boldsymbol{H}$ відбувається побудова системи диференціальних рівнянь коливань механічної системи, що складається з зосереджених мас, визначаються частоти і форми цих коливань. З вертикальної складової сейсмічного впливу проводиться виділення найбільш суттєвої її частини у вигляді гармонійних коливань з переважною частотою впливу.

Коливання колони розглядаються в рухомий системі координат, початок якої знаходиться в підставі колони. До сил, що діють на точки механічної системи, додаються сили інерції мас, пов'язані з переносним рухом системи координат. Сили ваги вантажів і сили інерції створюють в колоні поздовжні зусилля, які періодично залежать від часу. Далі записується інтегро-диференціальне рівняння динамічної стійкості стержня, запропоноване В. В. Болотіним в [8]. Рішення цього рівняння розшукується у вигляді лінійної комбінації форм власних коливань з множниками, залежними від часу. Підстановка цього рішення в інтегро-диференціальне рівняння динамічної стійкості дозволяє звести його до системи диференці альних рівнянь щодо зазначених множників з коефіцієнтами, періодично залежними від часу. При деяких значеннях параметрів вертикальної складової сейсмічного впливу, а саме частоти і амплітуди, рішення цих рівнянь є необмежено зростаючою функцією, тобто при цих значеннях зазначених параметрів виникає параметричний резонанс. Ці значення утворюють області в площині параметрів, іменовані областями динамічної нестійкості. Далі проводиться побудова цих областей. Розглянуто конкретний приклад.

Ключові слова: сейсмічні впливи, динамічна стійкість споруд, параметричний резонанс.

CONSTRUCTION OF DYNAMIC INSTABILITY ZONES FOR HIGH STUCTURES UNDER SEISMIC IMPACT

V. Fomin[1], I. Fomina[1]
[1]*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract: Seismic impacts create the possibility of parametric resonances, i.e. the possibility of the appearance of intense transverse vibrations of structure elements (in particular, of high-rise structures) from the action of periodic longitudinal forces. As a design model of a high-rise structure, a model is used which adopted in the calculation of high-rise structures for seismic effects, - a weightless vertical rod (column) rigidly restrained at the base with a system of concentrated masses (loads) located on it (Fig. 1).

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-42-50

By solving the differential equation of the curved axis influence function for a rod is constructed by means of which influence coefficients are determined for the rod points, in which the concentrated masses are situated. These coefficients are elements of the compliance matrix $\boldsymbol{V}$. Next, the elements of the stiffness matrix $\boldsymbol{H}$ are determined by inverting the matrix $\boldsymbol{V}$. Using a diagonal matrix of the load masses $\boldsymbol{M}$ and matrix $\boldsymbol{H}$ a system of differential equations of free vibrations of a mechanical system, consisting of concentrated masses, is constructed, and the frequencies and forms of these vibrations are determined. From the vertical component of the seismic impact, its most significant part is picked out in the form of harmonic vibrations with the predominant frequency of the impact.

Column vibrations are considered in a moving coordinate system, the origin of which is at the base of the column. The forces acting on the points of the mechanical system (concentrated masses) are added by the forces of inertia of their masses associated with the translational motion of the coordinate system. The forces of the load weights and forces of inertia create longitudinal forces in the column, periodically depending on time. Further, the integro-differential equation of the dynamic stability of the rod, proposed by V. V. Bolotin in [8], is written. The solution to this equation is sought in the form of a linear combination of free vibration forms with time-dependent factors. Substitution of this solution into the integro-differential equation of dynamic stability allows it to be reduced to a system of differential equations with respect to the mentioned above factors with coefficients that periodically depend on time. For some values of the vertical component parameters of the seismic action, namely the frequency and amplitude, the solutions of these equations are infinitely increasing functions, i.e. at these values of the indicated parameters, a parametric resonance arises. These values form regions in the parameter plane called regions of dynamic instability. Next, these regions are being constructed. A concrete example is considered.

Keywords: seismic impacts, dynamic stability of structures, parametric resonance

1 ВСТУП

У нормативних розрахунках будівельних конструкцій на сейсмічні впливи можливість виникнення параметричних резонансів, тобто можливість появи інтенсивних поперечних коливань елементів конструкцій від дії періодичних поздовжніх сил не розглядається. При розрахунках висотних споруд, розміри яких в плані не перевищують 20 м, на сейсмічні впливи вертикальні складові землетрусів не враховуються. Для висотних споруд, у яких розміри в плані багаторазово менше висоти, джерелом виникнення періодичних поздовжніх сил є саме вертикальні складові сейсмічних впливів. У даній роботі показано, що у таких споруд, при сейсмічних впливах існує можливість появи параметричних резонансів.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Перша робота в області дослідження динамічної стійкості конструкцій була опублікована Н. М. Бєляєвим в 1924 р [1]. У ній була поставлена і вирішена проблема динамічної стійкості стержня, шарнірно опертого по кінцях, тобто були досліджені умови появи і розгойдування поперечних коливань стержня при дії періодичної поздовжньої сили. Було показано, що значення частоти і амплітуди поздовжньої сили, при яких спостерігається необмежене зростання амплітуди поперечних коливань стержня, утворюють суцільні області в просторі цих параметрів, які іменуються областями нестійкості. У 1935 р Н. М. Крилов і М. М. Боголюбов [2] продовжили дослідження Н.М. Бєляєва, дослідивши проблему динамічної стійкості стержня при довільному закріпленні його кінців. У книзі В. Н. Челомея [3], що вийшла в 1939 р. були розглянуті проблеми динамічної стійкості для стержнів змінного перерізу, для стержнів, що мають початковий вигин, а також для багатопрогонових стержнів. За кордоном перші роботи по динамічної стійкості стержнів з'явилися на початку сорокових років [4]. Згодом В. В. Болотіним був опублікований ряд фундаментальних робіт [5-10], присвячених динамічної стійкості стержнів, балок, рам, пластин і оболонок.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

У цій статті в якості розрахункової моделі використовується модель, прийнята при розрахунку висотних споруд на сейсмічні впливи – невагомий жорстко затиснений в основі вертикальний стержень з системою зосереджених мас (вантажів), розташованих на ньому (рис. 1). Надалі цей стержень будемо називати колоною.

Використовуючи диференціальне рівняння зігнутої осі стержня, неважко побудувати функцію впливу $K(x,s)$ колони:

$$K(x,s)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2EJ}(s-\dfrac{x}{3}) \text{ при } x\le s,\\ \dfrac{s^2}{2EJ}(x-\dfrac{s}{3}) \text{ при } x> s.\end{cases} \tag{1}$$

Використовуючи (1) визначаємо коефіцієнти впливу, які є елементами матриці податливості $\boldsymbol{V}$:

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-42-50

$$V_{i,j} = K(x_i, x_j) = \begin{cases} \dfrac{x_i^2}{2EJ}(x_j - \dfrac{x_i}{3}) \ (i \le j), \\ \dfrac{x_j^2}{2EJ}(x_i - \dfrac{x_j}{3}) \ (i > j). \end{cases} \tag{2}$$

(x_i и x_j – абсциси точок M_i і M_j ; $i, j = 1,2,\ldots,n$).

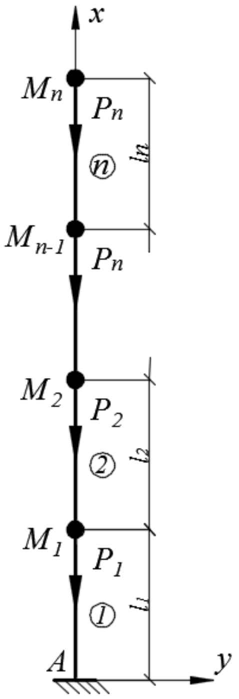

Рис. 1. Розрахункова модель конструкції

Система диференціальних рівнянь вільних коливань механічної системи, що складається з точок M_k (k=1,2,…,n), має наступний вигляд:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{y} = 0, \tag{3}$$

тут $\boldsymbol{y}$ - вектор-стовпець переміщень точок системи, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{V}^{-1}$ - матриця жорсткості, $\boldsymbol{M}$ - матриця мас:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & m_n \end{bmatrix}.$$

Помноживши (2) на $\boldsymbol{M}^{-1}$, записуємо рівняння вільних коливань таким чином:

$$\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{y} = 0, \tag{4}$$

Тут $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{H}$.

Рішення системи (3) будемо розшукувати у наступному вигляді:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{u} \cdot \cos \omega t, \tag{5}$$

$\boldsymbol{u}$ – вектор-стовпець порядку n .

Вільні коливання, описувані рівністю (5), називаються власними, при цьому вектор $\boldsymbol{u}$ визначає форму коливання, а ω є його частотою.

Після підстановки виразу (5) в векторну рівність (4) і елементарних перетворень отримуємо:

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{u} - \omega^2 \boldsymbol{u} = 0.$$

Звідси випливає, що для того щоб у системи рівнянь (4) існувало рішення виду (5) необхідно, щоб ω^2 було власним числом матриці U , а вектор $\boldsymbol{u}$ − відповідним власним вектором цієї матриці. Для даної конструкції існує n частот (з урахуванням кратності) ω_j $(j = 1,2,\ldots n)$ і n власних векторів $\boldsymbol{u}^{(j)}$ $(j = 1,2,\ldots n)$ матриці U , що визначають форми власних коливань конструкції.

Будемо вважати, що вертикальна складова сейсмічного впливу (тобто вертикальні коливання основи A колони) представляють собою гармонійні коливання з переважною частотою впливу θ [11]. Тоді прискорення $\boldsymbol{a}(t)$ основи теж буде змінюватися за гармонійним законом:

$$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a_0} \cos(\theta t). \tag{6}$$

Якщо розглядати рух колони щодо рухомої системи координат, початок якої знаходиться в точці A, а осі x і y зберігають свої початкові напрямки, то необхідно до сил, що діють на точки механічної системи, додати сили інерції $\boldsymbol{J}_k(t)$ $(k=1,2,...,n)$ (рис. 2), пов'язані з переносним рухом системи координат:

$$\boldsymbol{J}_k(t) = -m_k\boldsymbol{a}(t) \ (k=1,2,...,n).$$

Сили $\boldsymbol{P}_k$ і $\boldsymbol{J}_k(t)$ $(k=1,2,...,n)$ створюють в колоні поздовжні зусилля $N(x,t)$. Запишемо інтегро-диференціальне рівняння динамічної стійкості колони [1]:

$$y(x,t) + \int_0^L m(s)K(x,s)\frac{\partial^2 y(s,t)}{\partial t^2}ds - \int_0^L N(s,t)\frac{\partial K(x,s)}{\partial s}\frac{\partial y(s,t)}{\partial s}ds = 0 \ \ (L = \sum_{k=1}^{n} l_k).$$

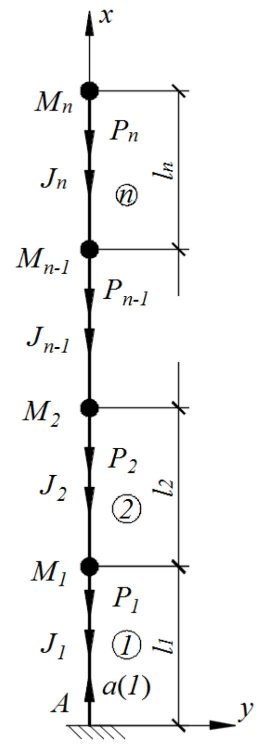

Рис. 2. Активні сили, які діють на конструкцію

У розглянутій задачі $m(x) = \sum_{k=1}^{n}\delta(x - x_k)m_k$ (x_k – абсциса маси m_k, $x_k = \sum_{j=1}^{k} l_j$, $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака), поздовжнє зусилля $N(x,t)$ визначається наступним чином:

$$N(x,t) = N_0(x) + N_1(x)\cos(\theta t),$$

причому $N_0(x)$ і $N_1(x)$ являють собою кусково-постійні функції. На ділянці колони з номером k (номера ділянок проставлені в гуртках) $N_0(x)$ і $N_1(x)$ приймають постійні значення $N_{0,k}$ і $N_{1,k}$:

$$N_{0,k} = \sum_{j=k}^{n} P_j, \ \ N_{1,k} = \sum_{j=k}^{n} J_j = a_0\sum_{j=k}^{n} m_j = \frac{a_0}{g}N_{0,k}, \tag{7}$$

g – прискорення вільного падіння. Таким чином, на ділянці з номером k $N(x,t)$ є функцією однієї змінної t:

$$N_k(t) = N_{0,k} + N_{1,k}\cos(\theta t) = \left(1 + \frac{a_0}{g}\cos\theta t\right)N_{0,k}. \tag{8}$$

Після підстановки виразів для $m(x)$, $N_0(x)$ і $N_1(x)$ рівняння динамічної стійкості колони приймає наступний вигляд:

$$y(x,t) + \sum_{k=1}^{n} m_k K(x,x_k)\ddot{y}(x_k,t) - \sum_{k=1}^{n} N_k(t)\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{\partial K(x,s)}{\partial s}\frac{\partial y(s,t)}{\partial s}ds = 0, \tag{9}$$

точка означає похідну за часом.

Будемо шукати рішення рівняння (9) у вигляді суми

$$y(x,t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)\phi_j(x), \tag{10}$$

де $f_j(t)$ $(j=1,2,...,n)$ - шукані функції часу, $\phi_j(x)$ $(j=1,2,...,n)$ – форми власних коливань, тобто $\phi_j(x_i) = \boldsymbol{u}_i^{(j)}$ $(i,j=1,2,...,n)$ ($\boldsymbol{u}^{(j)}$ – власні вектори матриці $\boldsymbol{U}$). Підставляя сумму (10) в рівняння (9) і враховуючи співвідношення (8), отримуємо при $x = x_i$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-42-50

$$\sum_{j=1}^{n}\Phi_{i,j}f_j(t)+\sum_{j=1}^{n}R_{i,j}\ddot{f}_j(t)-(1+\beta\cos\theta t)\sum_{j=1}^{n}S_{i,j}f_j(t)=0, \tag{11}$$

де

$$\beta=\frac{a_0}{g},\ \Phi_{i,j}=\phi_j(x_i),\ R_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}m_kK(x_i,x_k)\phi_j(x_k),\ S_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}N_{0,k}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{\partial K(x_i,s)}{\partial s}\frac{\partial\phi_j(s,t)}{\partial s}ds.$$

Зауважимо, що (11) можна розглядати як систему рівнянь вважаючи, що i змінюється від 1 до n. Ця система може бути записана в матричному вигляді:

$$\Phi\boldsymbol{f}+\boldsymbol{R}\ddot{\boldsymbol{f}}-(1+\beta\cos\theta t)\boldsymbol{S}\boldsymbol{f}=0. \tag{12}$$

Зауважимо, що

$$\Phi_{i,j}=u_i^{(j)},\ R_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}m_kV_{i,k}u_k^{(j)}, \tag{13}$$

тобто j-й стовпець матриці Φ дорівнює вектору $\boldsymbol{u}^{(j)}$, а матриці $\boldsymbol{R}$ – вектору $\boldsymbol{VMu}^{(j)}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{u}^{(j)}=...=(1/\omega_j^2)\boldsymbol{u}^{(j)}$, тому що $\boldsymbol{u}^{(j)}$ є власним вектором матриці $\boldsymbol{U}$ з власним числом ω_j^2.

Тому

$$\boldsymbol{R}=\Phi\boldsymbol{C},\ \ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\omega_1^{-2} & 0 & 0 & ... & 0\\ 0 & \omega_2^{-2} & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & ... & \omega_n^{-2}\end{bmatrix}. \tag{14}$$

Помноживши матричну рівність (12) на Φ^{-1}, отримуємо

$$\boldsymbol{C}\ddot{\boldsymbol{f}}+[\boldsymbol{E}-(1+\beta\cos\theta t)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{f}=0. \tag{15}$$

Тут $\boldsymbol{E}$ – одинична матриця порядку n, $\boldsymbol{A}=\Phi^{-1}\boldsymbol{S}$

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Матрична рівність (15) являє собою систему диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами щодо функцій $f_i(t)$ $(i=1,2,...,n)$. Відомо [1], що при деяких значеннях параметрів β і θ рішення цих рівнянь є необмежено зростаючі функції, тобто при цих значеннях зазначених параметрів виникає параметричний резонанс. Ці значення утворюють області в площині параметрів β і θ, іменовані областями динамічної нестійкості. Проблема полягає в побудові меж цих областей. При прагненні β до нуля ці області звужуються до точок [8]:

$$\theta_{i,k}^{*}=\frac{2\Omega_i}{k}\ (i=1,2,...,n;\ k=1,2...), \tag{16}$$

розташованих на осі Θ. У формулі (16) Ω_i − частоти колони з урахуванням поздовжніх сил, створюваних вагою вантажів, розташованих на ній. Вони є корінням багаточлена

$$Q(\Omega_1,\Omega_2,...,\Omega_n)=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-\Omega^2\boldsymbol{C}|, \tag{17}$$

де Ω − вектор $[\Omega_1,\Omega_2,...,\Omega_n]$.

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-42-50

Головними називаються ті області динамічної нестійкості, яким у формулі (16) відповідає $k = 1$. У першому наближенні кордону цих областей визначаються рівняннями [8]

$$\left| \boldsymbol{E} - \left(1 \pm \frac{1}{4}\beta\right)\boldsymbol{A} - \frac{1}{4}\theta^2 \boldsymbol{C} \right| = 0, \tag{18}$$

причому знак плюс в двузначії ± відповідає нижнім межам областей, а знак мінус - верхнім.

Приклад. Досліджується динамічна стійкість висотної будівлі (вежі) при наступних значеннях параметрів розрахункової моделі (колони): $n = 4,\ l_i = 4м,\ m_i = 3$ $T\ \ (i = 1, 2, 3, 4),\ EJ = 23400 кНм^2$.

Циклічні частоти вільних коливань колони з урахуванням поздовжніх постійних стискають сил, викликаних силами тяжіння зосереджених мас, $\Omega_1 = 1{,}06 c^{-1}$, $\Omega_2 = 11{,}347 c^{-1}$, $\Omega_3 = 34{,}302 c^{-1}$, $\Omega_4 = 62{,}809 c^{-1}$. Найбільша вірогідність виникнення резонансів як звичайних, так і параметричних, при сейсмічних впливах пов'язана з частотами Ω_1 і Ω_2. Тому на рис. 3 представлені головні області динамічної нестійкості, пов'язані саме з цими частотами.

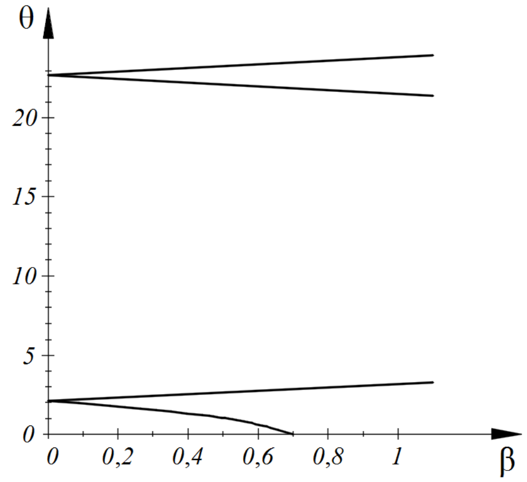

Рис. 3. Головні області динамічної нестійкості

При попаданні точки з координатами, рівними значенням параметрів β і θ для однієї з переважаючих частот землетрусу, в область нестійкості виникають інтенсивно наростаючі поперечні коливання споруди.

5 ВИСНОВКИ

При розрахунку висотних споруд на сейсмічні дії необхідно враховувати не тільки можливість виникнення звичайних резонансів, але й параметричних, тобто досліджувати динамічну стійкість споруд. Для побудови областей дінамічної нестійкості висотних споруд необхідно обов'язково враховувати вертикальну компоненту землетрусів.

Література

1. Беляев Н. М. Устойчивость призматических стержней под действием переменных продольных сил. Инженернерные сооружения и строительная механика. 1924. С. 149–167.

2. Крылов Н. Н., Боголюбов Н. Н. Исследование явления резонанса при поперечных колебаниях под воздействием периодических нормальных сил, приложенных к одному из концов стержня. Исследование колебаний конструкции. 1935. С. 25–42.
3. Челомей В. Н. Динамическая устойчивость элементов авиационных конструкций. Москва : Изд. Аэрофлота, 1939. 80 с.
4. Mettler E. Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Axiallast. Mitt.Forschungsabt Anst.GHH-Konzern, 1940. 8 p.
5. Болотин В. В. О параметрическом возбуждении поперечных колебаний. Поперечные колебания и критические скорости. Изд. АН СССР. 1953. № 2. С. 5–44.
6. Болотин В. В. Определение амплитуд поперечных колебаний, вызываемых периодическими продольными силами. Поперечные колебания и критические скорости. Изд. АН СССР. 1953. № 2. С. 45–64.
7. Болотин В .В. О взаимодействии вынужденных и параметрически возбуждаемых колебаний. Известия АН СССР. ОТН. 1954. № 4. С. 3–15.
8. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Москва : Гостехиздат, 1956. 500 с.
9. Болотин В. В. Вопросы общей теории упругой устойчивости. Прикладная математика и механика, 1956. Т. 20 № 5. С. 561–577.
10. Болотин В. В. К устойчивости параметрически возбуждаемых систем. Изв. АН СССР. МТТ. 1974. №5, С. 83–88.
11. Егупов К. В., Бондаренко А. С., Егупов В. К. Инструментальные записи для оценки сейсмической опасности Одесского региона. Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. 2013. №.49. С.143–149.

References

1. .Beliaev, N. M. (1924). Ustoichyvost pryzmatycheskykh sterzhnei pod deistvyem peremennykh prodolnykh syl [Stability of prismatic rods under the action of variable longitudinal forces]. *Ynzhenernernye sooruzhenyia y stroytelnaia mekhanyka* [Engineering structures and structural mechanics], 149–167. [in Russian].
2. Krylov, N. N., Bogolubov, N. N. (1935). Yssledovanye yavlenyia rezonansa pry poperechnykh kolebanyiakh pod vozdeistvyem peryodycheskykh normalnykh syl, prylozhennykh k odnomu yz kontsov sterzhnia. [Investigation of the phenomenon of resonance in transverse vibrations under the impact of periodic normal forces applied to one of the ends of the rod]. *Yssledovanye kolebanyi konstruktsyy* [Investigation of design vibrations], 25–42. [in Russian].
3. Chelomei, V. N. (1939). *Dynamycheskaia ustoichyvost elementov avyatsyonnykh konstruktsyi* [Dynamic stability of elements of aircraft structures]. Moskva : Yzd. Aeroflota. [in Russian].
4. Mettler, E. (1940). *Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Axiallast*. Mitt.Forsch., Anst.Gffii-Konzern. [in Deutsch].
5. Bolotyn, V. V. (1953). O parametrycheskom vozbuzhdenyy poperechnykh kolebanyi [On the parametric excitation of transverse vibrations]. *Poperechnye kolebanyia y krytycheskye skorosty Yzd AN SSSR* [Transverse vibrations and critical velocities. Ed. USSR Academy of Sciences], no. 2, 5–44. [in Russian].
6. Bolotyn, V. V. (1953). Opredelenye amplytud poperechnыkh kolebanyi, vыzыvaemыkh peryodycheskymy prodolnыmy sylamy [Determination of the amplitudes of transverse oscillations caused by periodic longitudinal forces]. *Poperechnye kolebanyia y krytycheskye skorosty. Yzd. AN SSSR* [Transverse vibrations and critical velocities. Ed. USSR Academy of Sciences], no. 2, 45–64. [in Russian].
7. Bolotyn, V. V. (1954). O vzaymodeistvyy vynuzhdennykh y parametrychesky vozbuzhdaemykh kolebanyi. [On the interaction of forced and parametrically excited vibrations]. *Yzvestyia AN SSSR. OTN* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences. OTN], no. 4, 3–15. [in Russian].
8. Bolotyn, V. V. (1956). Dynamycheskaia ustoichyvost upruhykh system [Dynamic stability of elastic systems]. Moscow : Hostekhyzdat. [in Russian].
9. Bolotyn, V. V. (1956). *Voprosy obshchei teoryy upruhoi ustoichyvosty*. [Questions of the general theory of elastic stability]. Moskva : App. mathematics and mechanics., no. 20, 5, 561–577. [in Russian].

10. Bolotyn, V. V. (1974). K ustoichyvosty parametrychesky vozbuzhdaemykh system. [Stability of parametrically excited systems]. *Yzv. AN SSSR. MTT* [Izv. Academy of Sciences of the USSR. MTT], no. 5, 83–88. [in Russian].
11. Ehupov, K. V., Bondarenko, A. S., Ehupov, V. K. Ynstrumentalnye zapysy dlia otsenky seismycheskoi opasnosty Odesskoho rehyona. [Instrumental records for the assessment of seismic hazard in the Odessa region]. *Visnyk Odeskoi derzhavnoi akademii budivnytstva ta arkhitektury* [Bulletin of the Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture], no. 49, 143–149. [in Russian].

Фомін Володимир Михайлович
Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.т.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
vmfomin39@gmail.com
ORCID: 0000-0003-4814-6415
Фоміна Інна Петрівна
Одеська державна академія будівництва та архітектури, старший викладач
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
fomina@ogasa.org.ua
ORCID: 0000-0001-7366-1537

Для посилань:
Фомін В. М. Побудова зон динамічної нестійкості для висотних будівель у разі сейсмічних дій / В. М. Фомін, І. П. Фоміна // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 2. – С. 42–50.
For references:
Fomin, V., Fomina, I. (2020). Construction of dynamic instability zones for high stuctures under seismic impact. Mechanics and Mathematical Methods, 2 (2), 42 – 50