

УДК 539.3

КРУГЛІ ПЛИТИ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ЗІ ЗМІННИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ПОСТЕЛІ

Карнаухова Г. С.¹, Кіріченко Д. О.¹

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: В роботі розглядається застосування аналітичного методу - методу прямого інтегрування - до розрахунку будівельних конструкцій у формі круглих і кільцевих пластин і плит, що лежать на безперервній змінній пружній основі. Застосування запропонованого підходу дозволило отримати рішення широкого класу задач, математичним резюме яких являються диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами або системи таких рівнянь, та одночасно оцінити можливості та точність розрахунку розглянутих задач методом скінчених елементів. Реакція основи описується моделлю Вінклера зі змінним коефіцієнтом постелі. Стосовно до вигину круглих і кільцевих плит отримані формули для функції прогинів та її похідних, поперечної сили і згинальних моментів. Метод застосуємо при будь-яких заданих граничних умовах на контурах. Розрахунок зводиться до визначення із заданих граничних умов невідомих констант інтегрування й чисельної реалізації отриманих розв'язків. Знайдені формули загального виду перетворені для практично важливого випадку, коли коефіцієнт постелі й навантаження мають вигляд многочленів. Показане, що в такому випадку безрозмірні фундаментальні функції представляються статечними рядами. Для обчислення коефіцієнтів статечних рядів виведені відповідні рекурентні співвідношення.

Виконані розрахунки показують, що розбіжність в результатах обчислення прогинів МСЕ і авторським методом (АМ) незначна (не перевищує 1 %), а результати обчислення радіальних і окружних моментів відрізняються істотно, і ця відмінність іноді досягає 12-14 %. Однак при згущенні сітки в окружному напрямку картина змінюється, відбувається зближення результатів, отриманих двома методами. Це свідчить про неточність скінчено-елементного аналізу, виконаного на основі автоматичного розбиття скінчено-елементної сітки. А це, в свою чергу, веде до "сліпого" армування залізобетонних плит, при якому можливо, як переармування конструкції, так і її недостатнє армування.

Ключові слова: метод прямого інтегрування, плита на пружній основі, модель Вінклера, змінний коефіцієнт постелі, метод скінчених елементів, ПК ЛІРА-САПР.

ROUND SLABS ON A RESILIENT BASE WITH VARIABLE BEDDING RATIO

G. Karnauhova¹, D. Kirichenko¹

¹Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: The paper considers the application of the analytical method - the method of direct integration - to the calculation of building structures in the form of round and annular plates and slabs lying on a continuous variable elastic basis. The application of the proposed approach allowed to obtain solutions of a wide class of problems, the mathematical summary of which are differential equations with variable coefficients or systems of such equations, and at the same time to evaluate the possibilities and accuracy of calculation of finite elements. The base reaction is described by the Winkler model with a variable bed ratio. With respect to the bending of round and annular plates, formulas for the function of deflections and its derivatives, transverse force and bending moments are obtained. The method is applicable under any given boundary conditions on the contours. The calculation is reduced to determining from the given boundary conditions of the unknown constants of integration and numerical realization of the obtained solutions. The found formulas of the general form are transformed for practically important case when the factor of a bed and loading have



the form of polynomials. It is shown that in this case dimensionless fundamental functions are represented by static series. To calculate the coefficients of static series, the corresponding recurrent relations are derived.

The calculations show that the discrepancy in the results of the calculation of the deflections of the FEA and the author's method (AM) is insignificant (not more than 1%), and the results of the calculation of radial and circumferential moments differ significantly, and this difference sometimes reaches 12-14%. However, when the grid is condensed in the circumferential direction, the picture changes, there is a convergence of the results obtained by two methods. This indicates the inaccuracy of the finite element analysis performed on the basis of automatic partitioning of the finite element grid. And this, in turn, leads to "blind" reinforcement of reinforced concrete slabs, in which it is possible, both re-reinforcement of the structure and its insufficient reinforcement.

Keywords: direct integration method, elastic base plate, Winkler model, variable bed coefficient, finite element method, PC LIRA-CAD.

1 ВСТУП

Дослідження конструкцій, що лежать на пружній основі, являють собою одну з актуальних і найбільш складних проблем, пов'язаних з розрахунком будівельних конструкцій, оскільки з математичної точки зору її розв'язання зводиться до диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

До цих завдань останнім часом інтерес все більше зростає в зв'язку з переходом до будівництва споруд підвищеної поверховості. У практиці проектування доводиться стикатися з випадками, коли конструкція з тих чи інших причин не повністю спирається на пружну основу. Наприклад, наявність підземних комунікацій, розмивів ґрунту в результаті аварій трубопроводів або природних явищ, карстових утворень в зоні зведення об'єкта. У цих випадках використовується модель пружної основи зі змінним коефіцієнтом постелі. Існують різні моделі пружної основи. Найпростішою є модель Вінклера, або пружинна модель. Для балок на постійній пружній основі ця модель дозволяє отримати точне рішення, а для плит – ні. Коли ж пружна основа є змінною, завдання ускладнюється ще більше. Не існує єдиного підходу для побудови універсального аналітичного рішення. Тому застосовуються наближені методи розрахунку, засновані на дискретизації систем, в основному, метод скінчених елементів. Однак результати, отримані цим методом, вимагають перевірки, і найкращим варіантом такої перевірки є аналітичне рішення.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Багато досліджень проводилося з теорії та розрахунку круглих і кільцевих пластин на різних моделях пружної основи. Рішенням задачі для круглої плити займався академік А. Н. Динник. Відомі аналітичні рішення круглих пластин і оболонок обертання належать Е. Рейсснеру [1], Е. Мейсснеру [2], І. Я. Штайерману [3], Б. Н. Жемочкіну [4].

В роботі В. І. Дудинського [5] методом парних інтегральних рівнянь отримано рішення осесиметричної задачі про згин круглої пластини на пружній неоднорідній основі при неповному контакті, що дозволяє враховувати зміну по глибині коефіцієнта Пуассона матеріалу основи.

Е. Н. Шпітюк [6] вирішує задачу про взаємодію фундаментних плит з пружною двопараметричною основою. Розроблено алгоритм на основі авторського методу скінчено-елементного рішення. Ю. В. Немировським і Т. П. Романовою [7] отримане загальне рішення задачі про динамічний згин ідеальної жорстко-пластичної пластини змінної товщини з шарнірно-опертим або затисненим криволінійним контуром. Виведено рівняння динамічного деформування та проаналізовано умови реалізації.

Розробці аналітичних методів розрахунку пластин змінної товщини присвячені численні роботи Є. Б. Кореневої [8–10].

Якщо взагалі казати про сучасний стан проблеми, то він найкраще відбитий у досить великому огляді [11], автори якого розглядають стан справ в цій галузі, виділяють ключові аспекти розвитку, включаючи моделювання ґрунтових середовищ і різні аналітичні, а також чисельні підходи при аналізі процесу взаємодії між фундаментом і ґрунтом.

Але ж пропозиції щодо загального методу розрахунку плит на змінній пружній основі у літературі відсутні.

3 МЕТА ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даної роботи є застосування аналітичного методу розрахунку будівельних конструкцій у формі круглих і кільцевих пластин і плит, що лежать на безперервній змінній пружній основі.

У якості такого методу обраний метод прямого інтегрування, запропонований у роботах Ю. С. Крутія [12–15].

Застосування запропонованого підходу вже дозволило отримати рішення широкого класу задач, математичним резюме яких являються диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами або системи таких рівнянь [16–18]. А в даному випадку застосування методу прямого інтегрування дозволить ще й оцінити можливості та точність розрахунку розглянутого класу задач методом скінчених елементів.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Однією з моделей пружної основи, що найбільш часто застосовується, є модель Фусса-Вінклера, що з'явилася ще в XIX столітті. Її головною перевагою є її простота, яка заснована на припущенні прямої пропорційності між переданим на основу тиском і прогином, а недоліком – неможливість урахування розподіленої здатності та текстурних особливостей основи. Застосовуючи модель Фусса-Вінклера, можна отримати більш близькі до дослідів величини контактних напружень. Однак при цій моделі не враховується взаємний вплив фундаментів і будівель. При цьому у моделі існує ряд модифікацій, які в інтегральній формі дозволяють враховувати неоднорідні властивості основи, як в плані, так і по глибині. Застосування цієї моделі основи дає надійні результати при слабких і надто стиснутих ґрунтах і невеликих опорних площах фундаментів. Найбільш поширеною модифікацією моделі Вінклера є модель змінного коефіцієнта постелі. Зокрема, ця модель ґрунтової основи знайшла широке застосування при розрахунках напружено-деформованого стану фундаментів конструкцій, що лежать на лесових ґрунтах, для яких характерне просідання.

Розглянемо кільцеву плиту постійної циліндричної жорсткості D , що лежить на змінній пружній основі, й перебуває під дією безупинно розподіленого поперечного навантаження. Нехай a і b – радіуси зовнішньої й внутрішньої контурних окружностей плити, r – радіальна координата ($0 \leq r \leq a$). В окремому випадку, при $b=0$, одержимо суцільну круглу плиту. Будемо вважати, що реакція основи описується моделлю Вінклера.

Осесиметричний згин плити має місце у випадку, коли навантаження $q(r)$, реакція пружної основи $R(r)$ й умови закріплення плити не залежать від полярного кута θ . При цьому основними параметрами напружено-деформованого стану плити будуть прогин $w(r)$ і згинальні моменти – радіальний M_r і окружний M_θ .

Відповідно до моделі Вінклера, залежність між реакцією $R(r)$ пружної основи й прогином $w(r)$ має вигляд

$$R(r) = -k(r)w(r),$$

де $k(r)$ – безперервний змінний коефіцієнт постелі, який представимо як $k(r) = k_0 A(r)$. Тут k_0 – значення коефіцієнта постелі в деякій характерній точці плити; $A(r)$ – безрозмірна безперервна функція, що виражає закон зміни коефіцієнта постелі від радіальної координати.

Аналогічним чином представимо вираження для заданого навантаження $q(r) = q_0 B(r)$,

де q_0 – навантаження в деякій точці плити; $B(r)$ – безрозмірна безперервна функція, якою задана залежність навантаження від радіальної координати.

Диференціальне рівняння згину плити здобуває вид

$$D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right] + k_0 A(r) w = q_0 B(r). \quad (1)$$

Після визначення прогину $w(r)$, зусилля в плиті визначаються по відомих формулах:

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right); \quad (2)$$

$$M_\theta = -D \left(\mu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right); \quad (3)$$

$$Q_r = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right), \quad (4)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона.

Для побудови точного розв'язку диференціального рівняння будемо застосовувати метод прямого інтегрування. Опускаючи проміжні математичні перетворення, які докладно викладені в роботах [12-15], приведемо остаточні результати.

Визначено чотири фундаментальні розв'язки $X_n(r), Y_n(r)$ ($n=1,2$) однорідного рівняння, відповідного до рівняння (1), і приватний розв'язок $X_*(r)$ неоднорідного рівняння (1).

У результаті загальний розв'язок вихідного рівняння (1) можна записати так:

$$w(r) = C_1 X_1(r) + C_2 X_2(r) + C_3 Y_1(r) + C_4 Y_2(r) + \frac{q_0 a^4}{D} X_3(r), \quad (5)$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні константи, що мають розмірність прогину. З метою виділити в правій частині формули (5) безрозмірний множник, покладемо

$$C_n = (q_0 a^4 / D) \lambda_n \quad (n=1,2,3,4),$$

де λ_n – довільні безрозмірні константи.

Стосовно до вигину круглих і кільцевих плит були отримані наступні формули для функції прогинів $w(r)$:

$$w(r) = \frac{q_0 a^4}{D} W(r); \quad (6)$$

$$W(r) = \lambda_1 X_1(r) + \lambda_2 X_2(r) + \lambda_3 \left(X_1(r) \ln \frac{r}{a} + Z_1(r) \right) + \lambda_4 \left(X_2(r) \ln \frac{r}{a} + Z_2(r) \right) + X_3(r),$$

де $W(r)$ – безрозмірна функція, а λ_n – довільні безрозмірні константи.

При розгляді суцільної плити постійні інтегрування знаходяться з умов в її центрі та на зовнішньому контурі. У центрі плити при значенні $r=0$ прогин і внутрішні зусилля повинні мати кінцеві значення. Отже, в виразі (7) слід відкинути члени, що містять множник $\ln r/a$, тобто покласти $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Це призводить до значних спрощень при розрахунках.

У випадку суцільної плити замість формули (7) отримуємо

$$W(r) = \lambda_1 X_1(r) + \lambda_2 X_2(r) + X_3(r). \quad (8)$$

Відповідно, матимемо:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{q_0 a^3}{D} \tilde{W}(r); \quad (9)$$

$$\tilde{W}(r) = \lambda_1 \tilde{X}_1(r) + \lambda_2 \tilde{X}_2(r) + \tilde{X}_3(r); \quad (10)$$

$$\hat{W}(r) = \lambda_1 \hat{X}_1(r) + \lambda_2 \hat{X}_2(r) + \hat{X}_3(r); \quad (11)$$

$$\hat{W}(r) = \lambda_1 \hat{X}_1(r) + \lambda_2 \hat{X}_2(r) + \hat{X}_3(r). \quad (12)$$

Зазначена конкретизація формул призводить до значних спрощень при розрахунках суцільних круглих плит.

У подібному форматі представлені й формули для перших трьох похідних від функції прогину:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{q_0 a^3}{D} \tilde{W}(r).$$

З урахуванням цього записані й вираження для внутрішніх зусиль:

$$M_r = q_0 a^2 \left(\tilde{W}(r) + \mu \frac{a}{r} \tilde{W}(r) \right); \quad (13)$$

$$M_\theta = -q_0 a^2 \left(\mu \hat{W}(r) + \frac{a}{r} \tilde{W}(r) \right); \quad (14)$$

$$Q_r = -q_0 a \left(\hat{W}(r) + \frac{a}{r} \hat{W}(r) - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \tilde{W}(r) \right). \quad (15)$$

Формули для прогинів і внутрішніх зусиль, записані в аналітичному виді, повністю характеризують напружено-деформований стан плити у випадку, коли задана навантаження й коефіцієнт постелі являють собою довільні безперервні функції. Метод застосуємо при будь-яких заданих граничних умовах на контурах. Фактично розрахунки зводиться до визначення із заданих граничних умов невідомих констант інтегрування й чисельної реалізації отриманих розв'язків.

Знайдені формули загального виду перетворені для практично важливого випадку, коли коефіцієнт постелі й навантаження мають вигляд многочленів. Показане, що в такому випадку безрозмірні фундаментальні функції представляються статечними рядами. Для обчислення коефіцієнтів статечних рядів виведені відповідні рекурентні співвідношення.

У порівнянні з наближеними методами, запропонований аналітичний метод дозволяє одержати більш точні значення параметрів згину плит.

У якості приклада розглянемо бетонну плиту ($E = 1,5 \cdot 10^7 \text{ кПа}$, $\mu = 0$) товщиною $h = 0,12 \text{ м}$ і радіусом $a = 1,8 \text{ м}$, яка знаходиться під впливом рівномірно розподіленого постійного навантаження $q = 15 \text{ кПа}$.

Коефіцієнт постелі (рис. 1) змінюється за параболічним законом (увігнута парабола).

$$A_0 = 0; A_1 = 0; A_2 = 1; k(a) = 4 \cdot 10^6 \text{ кН} / \text{м}^3.$$

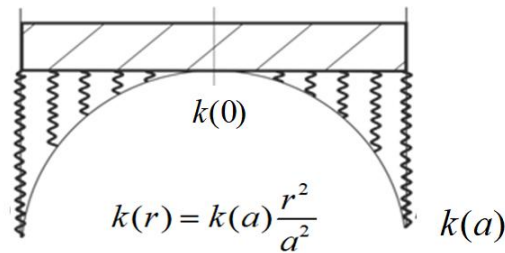


Рис. 1. Закон зміни коефіцієнта постелі

Результати розрахунку авторським метод (АМ) та методом скінчених елементів (МСЕ) у ПК ЛІРА-САПР наведені в табл. 1, а їх графічна інтерпретація – на рис. 2, 3.

Таблиця 1

Результати розрахунку бетонної плити (автоматичне розбиття сітки)

r, м	w, м		Розбіжність (%)	M _r		Розбіжність (%)	M _θ		Розбіжність (%)
	МСЕ	АМ		МСЕ	АМ		МСЕ	АМ	
0,0000	0,0659	0,0662	0,4026	0,4943	0,5001	1,1598	0,4923	0,5001	1,5706
0,0857	0,0651	0,0653	0,3975	0,4646	0,4797	3,1478	0,4806	0,4933	2,5758
0,1714	0,0626	0,0629	0,3900	0,3975	0,4211	5,6044	0,4553	0,4733	3,8013
0,2571	0,0588	0,0590	0,3802	0,3082	0,3318	7,1127	0,4195	0,4417	5,0337
0,3429	0,0538	0,0540	0,3691	0,1997	0,2230	10,4484	0,3759	0,4009	6,2507
0,4286	0,0480	0,0482	0,3578	0,0942	0,1076	12,4535	0,3275	0,3538	7,4489
0,5143	0,0419	0,0421	0,3446	-0,0022	-0,0019	13,6364	0,2773	0,3035	8,6266
0,6000	0,0358	0,0359	0,3295	-0,1106	-0,0952	13,9240	0,2282	0,2529	9,7821
0,6857	0,0300	0,0301	0,3128	-0,1794	-0,1653	7,8595	0,1824	0,2048	10,9110
0,7714	0,0248	0,0249	0,2918	-0,2180	-0,2088	4,1824	0,1417	0,1610	12,0010
0,8571	0,0202	0,0203	0,2701	-0,2242	-0,2265	1,0260	0,1069	0,1229	13,0245
0,9429	0,0165	0,0165	0,0000	-0,2123	-0,2216	4,1968	0,0785	0,0912	13,9140
1,0286	0,0134	0,0135	0,2177	-0,1866	-0,1991	6,2782	0,0564	0,0660	14,5184
1,1143	0,0111	0,0111	0,0000	-0,1531	-0,1644	6,8735	0,0401	0,0469	14,5104
1,2000	0,0093	0,0093	0,0000	-0,1121	-0,1221	8,1900	0,0289	0,0333	13,2533
1,2857	0,0079	0,0079	0,0000	-0,0687	-0,0762	9,8425	0,0220	0,0244	9,8398
1,3714	0,0067	0,0067	0,0000	-0,0254	-0,0291	12,7148	0,0180	0,0196	8,1633
1,4571	0,0057	0,0057	0,0000	0,0182	0,0163	10,4395	0,0193	0,0181	6,2176
1,5429	0,0046	0,0046	0,0000	0,0586	0,0554	5,4608	0,0200	0,0191	4,5000
1,6286	0,0033	0,0033	0,0000	0,0780	0,0790	1,1689	0,0224	0,0217	3,1250
1,7143	0,0018	0,0018	0,0000	0,0663	0,0699	5,4299	0,0249	0,0246	1,4924
1,8000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0256	0,0254	0,7812

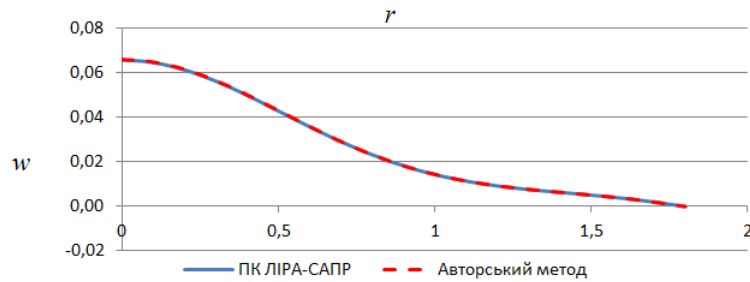


Рис. 2. Розподіл прогинів

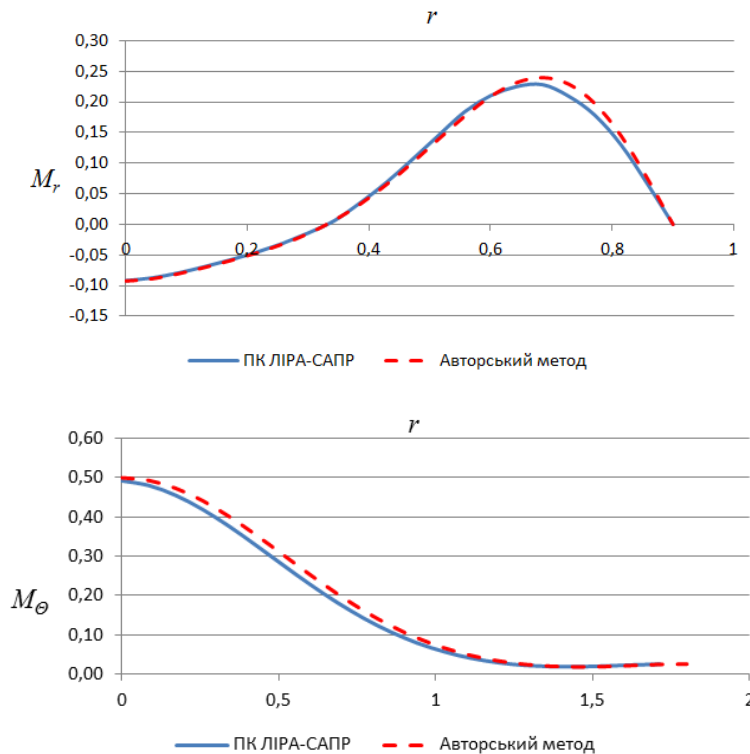


Рис. 3. Радіальний і окружний моменти

Як бачимо, значення прогинів при розрахунку авторським методом та за допомогою ПК ЛІРА-САПР [19-21] практично співпадають, а розбіжність згинальних моментів досить значна, і навіть досягає 14 %.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Результати розрахунків методом скінчених елементів, що наведені в табл. 1, отримані при напівавтоматичному розбитті скінчено-елементної сітки. При цьому по радіусу вибирався крок розбиття $0,1r$, а по колу розбиття відбувалося автоматично. Як вже зазначалося, при такому підході розбіжність в результатах обчислення прогинів МСЕ і авторським методом незначна, а результати обчислення радіальних і окружних моментів відрізняються істотно, і ця відмінність (у відсотках) іноді визначається двозначним числом. Аналогічна картина спостерігалася і у всіх інших виконаних нами численних розрахунках, в яких варіювалися геометричні та фізичні параметри конструкцій, закони зміни навантажень і коефіцієнта ліжку, граничні умови.

Однак при згущенні сітки в окружному напрямку картина змінюється, відбувається зближення результатів, отриманих двома методами. Ілюстрацією цього служить табл. 2, де наведені значення радіальних і окружних моментів, аналогічні тим, що представлені в табл. 1, але при згущенні скінчено-елементної сітки в 2 рази.

Таблиця 2
Результати розрахунку бетонної плити (згущення сітки в два рази)

$r, м$	M_r		Розбіжність (%)	M_θ		Розбіжність (%)
	МСЕ	АМ		МСЕ	АМ	
0,0000	0,4973	0,5001	1,1598	0,4923	0,5001	1,5706
0,0857	0,4746	0,4797	3,1478	0,4806	0,4933	2,5758
0,1714	0,4035	0,4211	5,6044	0,4553	0,4733	3,8013
0,2571	0,3212	0,3318	7,1127	0,4195	0,4417	5,0337
0,3429	0,2097	0,2230	10,4484	0,3759	0,4009	6,2507
0,4286	0,1042	0,1076	12,4535	0,3275	0,3538	7,4489
0,5143	-0,0020	-0,0019	13,6364	0,2773	0,3035	8,6266
0,6000	-0,1006	-0,0952	13,9240	0,2282	0,2529	9,7821
0,6857	-0,1694	-0,1653	7,8595	0,1824	0,2048	10,9110
0,8571	-0,2248	-0,2265	1,0260	0,1069	0,1229	13,0245
0,9429	-0,2183	-0,2216	4,1968	0,0785	0,0912	13,9140
1,0286	-0,1966	-0,1991	6,2782	0,0564	0,0660	14,5184
1,1143	-0,1631	-0,1644	6,8735	0,0401	0,0469	14,5104
1,2000	-0,1191	-0,1221	8,1900	0,0289	0,0333	13,2533
1,2857	-0,0717	-0,0762	9,8425	0,0220	0,0244	9,8398
1,3714	-0,0274	-0,0291	12,7148	0,0180	0,0196	8,1633
1,4571	0,0172	0,0163	10,4395	0,0193	0,0181	6,2176
1,5429	0,0566	0,0554	5,4608	0,0200	0,0191	4,5000
1,6286	0,0785	0,0790	1,1689	0,0224	0,0217	3,1250
1,7143	0,0693	0,0699	5,4299	0,0249	0,0246	1,4924
1,8000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0256	0,0254	0,7812

6 ВИСНОВКИ

Таким чином, розроблений аналітичний метод розрахунку будівельних конструкцій у формі круглих і кільцевих пластин і плит, що лежать на безперервній змінній пружній основі.

Виконані розрахунки показують, що розбіжність в результатах обчислення прогинів МСЕ і авторським методом (АМ) незначна (не перевищує 1%), а результати обчислення радіальних і окружних моментів відрізняються істотно, і ця відмінність іноді досягає 12-14%. однак при згущенні сітки в окружному напрямку картина змінюється, відбувається зближення результатів, отриманих двома методами. це свідчить про неточність скінчено-елементного аналізу, виконаного на основі автоматичного розбиття скінчено-елементної сітки. а це, в свою чергу, веде до "сліпого" армування залізобетонних плит, при якому можливо, як перearмування конструкції, так і її недостатнє армування.

Література

1. Reissner E. On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. The International Journal of Solids and Structures. 1975. № 11. (5). P. 569–573.
2. Meissner E. Das elasticitats problem fur dünne Schalen von Ringflächen. Kugel-oder Kegel form, Phyikalische Zeitschr. 1913. P. 41–52.

3. Штаерман И. Я. К теории симметричных деформаций анизотропных упругих оболочек. Изв. Киев, политех, и селхоз. ин-тов. 1924, кн.1, С. 38–47.
4. Жемочкин Б. Н., Синицын А. П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. М.: Стройиздат, 1962. 262 с.
5. Дудинский В. И. Изгиб круглой пластины на упругом неоднородном основании при неполном контакте с основанием. ПМТФ. 1989. № 1. С. 158–162.
6. Шпитюк Е. Н. Расчет фундаментных плит, взаимодействующих с деформируемым основанием : автореф. дис... канд. техн. Наук : 05.23.17. Ростов-на-Дону, 1997. 26 с.
7. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическое деформирование жесткопластических криволинейных пластин переменной толщины. Прикладная механика и техническая физика. 2007. Т. 48. № 5. С. 108–120.
8. Коренева Е. Б., Гросман В. Р. Аналитическое решение задачи об изгибе круглой ортотропной пластины, переменной толщины, лежащей на упругом основании. Вестник МГСУ. 2011. № 8. С. 156 – 159.
9. Коренева Е. Б. Усовершенствованный расчёт комбинированной фундаментной плиты специального сооружения. Матер. междунар. н.-т. конф. «Механика грунтов в геотехнике и фундаментостроении». Новочеркасск - Изд. ООО "Лик". 2018. С. 326–331.
10. Коренева Е. Б. Расчет комбинированных плит с учетом их контакта с упругим основанием International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2019. № 15 (4). С. 83–87.
11. Wang Y. H., Tham L. G., Cheung Y. K. Beams and plates on elastic foundations: A review. Progress in Structural Engineering and Materials. 2005. № 7 (4). P. 174–182.
12. Крутий Ю. С. Розробка методу розв'язання задач стійкості і коливань деформівних систем зі змінними неперервними параметрами : дис... докт. техн. наук : 01.02.04 Одеса, 2016. 272 с.
13. Крутий Ю. С., Сурьянинов Н. Г. Згин кругової циліндричної оболонки зі змінною товщиною. Вісник Хмельницького національного університету. Сер. Технічні науки. 2016. № 2 (235). С. 116–121.
14. Крутий Ю. С., Сур'янінов М. Г. Чисельна реалізація аналітичного розв'язку задачі про вільні колювання прямокутної пластини, що лежить на змінній пружній основі. Наукові нотатки: міжвуз. зб. Сер. Технічні науки. Луцьк. 2016. №2 (54) С. 167–171.
15. Крутий Ю.С., Сурьянинов Н. Г. Аналитическое решение задачи о свободных колебаниях пластины, лежащей на переменном упругом основании. Наукові нотатки. 2016. № 53. С. 84–92.
16. Крутий Ю. С., Сурьянинов Н. Г. Фундаментальные решения приведенного уравнения параметрических колебаний. Збірник наукових праць Українського державного університету залізничного транспорту. 2017. № 167. С. 17–24.
17. Крутий Ю. С., Сур'янінов М. Г., Сорока М.М., Карнаухова Г.С. Чисельний аналіз круглих пластин на пружній основі зі змінним коефіцієнтом постелі. Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. 2020. № 81. С.66–75.
18. Крутий Ю. С., Сурьянинов Н. Г., Сорока Н.Н., Карнаухова А.С. Аналитические и численные исследования напряженно-деформированного состояния круглых пластин на упругом основании с переменным коэффициентом постели. Science Reviu. 2020. №6 (33). С.30–39.
19. Водопьянов Р. Ю., Титок В. П., Артамонова А. Е. Программный комплекс ЛИРА-САПР 2015. Руководство пользователя. Обучающие примеры. Под редакцией академика РААСН Городецкого А. С. Электронное издание, 2015. 460 с.
20. Барабаш М. С., Козлов С. В., Медведенко Д. В. Комп'ютерні технології проектування металевих конструкцій. К.: НАУ, 2012. 572 с.
21. Барабаш М. С., Кір'язев П. М., Лапенко О. І., Ромашкіна М. А. Основи комп'ютерного моделювання. Навчальний посібник. К. : НАУ, 2019. 500 с.

References

1. Reissner, E. (1975). On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. *The International Journal of Solids and Structures*, 11, 5, 569–573. [in English].
2. Meissner, E. (1913). Das elasticitats problem fur dünne Schalen von Ringflächen. *Kugel-oder Kegel form, Phyikalische Zeitschr*, 41–52. [in English].

3. Shtaerman, Y. Ya. (1924). К теоры symmetrychnykh deformatsyi anizotropnykh uprudykh obolochek [On the theory of symmetric deformations of anisotropic elastic shells]. *Yzv. Kyev, polytekhn. y selkhoz. yn-tov* [Izvestia Kiev, polytechnic and agricultural institutes], kn.1, 38–47. [in Russian].
4. Zhemochkyn, B. N., Synytsyn, A. P. (1962). *Praktycheskiye metody rascheta fundamentnykh balok y plyt na uprugom osnovanyu* [Practical methods for calculating foundation beams and slabs on an elastic foundation]. Moskva, Stroiyzdat. [in Russian].
5. Dudynskiy, V. Y. (1989). Yzghyb kruhloi plastyny na uprugom neodnorodnom osnovanyu pry nepolnom kontakte s osnovanyem [Bending of a round plate on an elastic inhomogeneous base with incomplete contact with the base], *PMTF*, 1, 158–162. [in Russian].
6. Shpytiuk, E. N. (1997). Raschet fundamentnykh plyt, vzaymodeistvuiushchykh s deformatsionnoy osnovanyem [Calculation of foundation slabs interacting with a deformable base]. : *avtooref. dys... kand. tekhn. Nauk* : 05.23.17. Rostov-na-Donu. [in Russian].
7. Nemyrovskiy, Yu. V., Romanova, T. P. (2007). Dynamicheskoe deformatsionnoye zhestkoplastycheskykh kryvolynneinykh plastyn peremennoi tolshchiny [Dynamic deformation of rigid-plastic curved plates of variable thickness]. *Prykladnaia mekhanika y tekhnicheskaya fizyka* [Applied Mechanics and Technical Physics], 48, 5, 108–120. [in Russian].
8. Koreneva, E. B., Hrosman, V. R. (2011). Analyticheskoe reshenye zadachy ob yzghybe kruhloi ortotropnoi plastyny, peremennoi tolshchiny, lezhashchei na uprugom osnovanyu [Analytical solution of the problem of bending of a circular orthotropic plate of variable thickness lying on an elastic foundation]. *Vestnyk MHSU* [MGSU Bulletin], 8, 156 – 159. [in Russian].
9. Koreneva, E. B. (2018). Usovershenstvovanniy raschet kombinyrovannoi fundamentnoi plyty spetsyalnogo sooruzheniya [Improved calculation of the combined foundation slab of a special structure]. *Materyaly mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsyy «Mekhanika hruntov v heotekhnike y fundamentostroenyy»*. Novocheerkassk - Yzdatelstvo OOO "Lyk" [Materials of the International Scientific and Technical Conference "Soil Mechanics in Geotechnics and Foundation Engineering". Novocheerkassk - Publishing house LLC "Lik"]. 326–331. [in Russian].
10. Koreneva, E. B. (2019). Raschet kombinyrovannykh plyt s uchptom ykh kontakta s uprugym osnovanyem [Calculation of combined slabs taking into account their contact with an elastic foundation]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 15, 4, 83–87. [in Russian].
11. Wang, Y. H., Tham, L. G., Cheung, Y. K. (2005). Beams and plates on elastic foundations: A review. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 7, 4, 174–182. [in English].
12. Krutii, Yu. S. (2016). *Rozrobka metodu rozviazannia zadach stiiikosti i kolyvan deformivnykh system zi zminnyimi neperervnyimi parametramy* [Development of the method for solving the problems of durability and the number of deformation systems with variable permanent parameters] : dys... dokt. tekhn. nauk : 01.02.04 Odesa. [in Russian].
13. Krutyi, Yu. S., Surianynov, N. H. (2016). Zghyn kruhovoii tsylindrychnoi obolonky zi zminnoiu tovshchynoiu [Zgin of a circular cylindrical shell with a wintry trade]. *Visnyk Khmelnytskoho natsionalnogo universytetu. Ser. Tekhnichni nauky* [Visnik of Khmelnytsky National University. Technical Science Series], 2, 235, 116–121. [in Russian].
14. Krutii Yu. S., Surianinov M. H. Chyselna realizatsiia analitychnoho rozviazku zadachi pro vilni kolyvannia priamokutnoi plastyny, shcho lezhyt na zminnii pruzhnii osnovi [Numerical implementation of the analytical linkage of the problem of the straight-sided plate to lie on a springy basis]. *Naukovi notatky: mizhvuz. zb. Ser. Tekhnichni nauky* [Science notes: collection of the Series of Technical Sciences], 2, 54, 167–171. [in Russian].
15. Krutyi, Yu.S., Surianynov, N. H. (2016). Analyticheskoe reshenye zadachy o svobodnykh kolebaniyakh plastyny, lezhashchei na peremennom uprugom osnovanyu [Analytical solution of the problem of free vibrations of a plate lying on a variable elastic foundation]. *Naukovi notatky* [Science notes], 53, 84–92. [in Russian].
16. Krutyi, Yu. S., Surianynov, N. H. (2017). Fundamentalnye resheniya pryvedennogo uravneniya parametrycheskykh kolebaniy [Fundamental solutions of the reduced equation of parametric oscillations]. *Zbirnyk naukovykh prats Ukrainskoho derzhavnogo universytetu zaliznychnoho transportu* [Collection of scientific works of the Ukrainian State University of Railway Transport], 167, 17–24. [in Russian].

17. Krutii, Yu. S., Surianinov, M. H., Soroka, M.M., Karnaukhova, H.S. (2020). Chyselnyi analiz kruhlykh plastyn na pruzhnii osnovi zi zminnym koefitsientom posteli [Numerical analysis of round plates on an elastic basis with a variable bed ratio]. *Visnyk Odeskoi derzhavnoi akademii budivnytstva ta arkhitektury* [Bulletin of the Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture], 81, 66–75. [in Ukrainian].
18. Krutyi, Yu. S., Surianynov, N. H., Soroka N.N., Karnaukhova A.S. Analytycheskye y chyslennye yssledovaniya napriazhenno-deformirovannoho sostoiannya kruhlykh plastyn na uprugom osnovanyu s peremennym koefitsyentom postely [Analytical and numerical studies of the stress-strain state of round plates on an elastic base with a variable bed ratio]. *Science Reviu*, 6, 33, 30–39. [in Russian].
19. Vodopianov, R. Yu., Tytok, V. P., Artamonova, A. E. (2015). Prohrammnyi kompleks LYRA-SAPR 2015. Rukovodstvo polzovatelja. Obuchaiushchye primery [LIRA-CAD software package 2015. User's guide. Training examples]. Pod redaktsyei akademika RAASN Horodetskoho A. S. Elektronnoe yzdanye. [in Russian].
20. Barabash, M. S., Kozlov, S. V., Medvedenko, D. V. (2012). *Kompiuterni tekhnologii proektuvannia metalevykh konstruksii* [Computer technologies for designing metal structures]. Kyiv, NAU. [in Ukrainian].
21. Barabash, M. S., Kiriaziev, P. M., Lapenko, O. I., Romashkina, M. A. (2019). *Osnovy kompiuternoho modeliuвання* [Basics of computer modeling]. Navchalnyi posibnyk. Kyiv, NAU. [in Ukrainian].

Карнаухова Ганна Сергіївна

Одеська державна академія будівництва та архітектури, старший викладач
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029
karnauhovaanna@ukr.net
ORCID: 0000-0002-3542-4300

Кіріченко Дар'я Олексіївна

Одеська державна академія будівництва та архітектури, аспірантка
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029
sunnyderypeople123@gmail.com
ORCID: 0000-0002-8484-0925

Для посилань:

Карнаухова Г. С. Круглі плити на пружній основі зі змінним коефіцієнтом постелі / Г. С. Карнаухова, Д. О. Кіріченко // Механіка та математичні методи. – 2020. – Том 2, Вип. 2. – С. 63–74.

For references:

Karnaukhova, G., Kirichenko, D. (2020). Round slabs on a resilient base with variable bedding ratio. *Mechanics and Mathematical Methods*, 2 (2), 63–74.