УДК 534:624.04

ЯКІСНІ ВЛАСТИВОСТІ КОЛИВАНЬ ПРУЖНО ОБПЕРТОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

Бекшаєв С. Я.[1]
[1]*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

Анотація. У статті досліджуються вільні коливання абсолютно твердого тіла, яке підтримується набором лінійно пружних опор і здійснює плоскопаралельний рух. Пропонована система має два ступені свободи, що дозволяє елементарно визначати частоти і форми її власних коливань за допомогою точних аналітичних виразів. Однак ці вирази досить громіздкі, що ускладнює вивчення поведінки частот і форм при зміні характеристик системи. Тому метою роботи було з'ясування якісних властивостей форм вільних коливань в залежності від пружних, інерційних і геометричних характеристик системи, а також вивчення впливу зміни положення пружних опор на її власні частоти. Основною якісною характеристикою форми власних коливань розглянутої системи є положення її вузла – точки, яка залишається нерухомою при власних коливаннях. Для практично важливого випадку системи з двома опорами в роботі було встановлено, що в загальному випадку з двох форм, що відповідають двом різним власним частотам, одна має вузол, розташований всередині проміжку між опорами, а інша – за його межами. Знайдено аналітичні умови, яким повинні задовольняти інерційні та геометричні характеристики системи, які дозволяють визначити, яка з двох форм за номером відповідної частоти відповідає внутрішньому положенню вузла. Відзначено, що ці умови не залежать від значень коефіцієнтів жорсткості пружних опор. Також були отримані аналітичні результати, що дозволяють більш точно визначити якісну локалізацію вузла. Щоб з'ясувати поведінку власних частот при зміні положення опор, отримано явний аналітичний вираз, який дозволяє знаходити похідну від власної частоти системи по координаті, яка визначає положення будь-якої з опор. Цей результат може бути використано при розв'язанні різноманітних практичних задач, пов'язаних з управлінням і оптимізацією режимів роботи інженерних споруд, які зазнають динамічних, зокрема періодичних, впливів. Результати роботи отримані з використанням якісних методів математичної теорії коливань. Зокрема, систематично використовується теорема про вплив накладення в'язей на власні частоти пружної конструкції

Ключові слова: вільні коливання, тверде тіло, пружні опори, якісні властивості

QUALITATIVE PROPERTIES OF VIBRATIONS OF ELASTICALLY SUPPORTED RIGID BODY

S. Bekshaev[1]
[1]*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

Abstract. The paper investigates free vibrations of an absolutely rigid body, supported by a set of linearly elastic springs and performing a plane-parallel motion. The proposed system has two degrees of freedom, which makes it elementary to determine the frequencies and modes of its natural oscillations by using exact analytical expressions. However, these expressions are rather cumbersome, which makes it difficult to study the behavior of frequencies and modes when the characteristics of the model change. Therefore, the aim of the work was to find out the qualitative properties of the modes of free vibrations depending on the elastic, inertial and geometric characteristics of the system, as well as to study the effect of changing the position of elastic supports on its natural frequencies. The main qualitative characteristic of the mode of natural vibrations of the system in consideration is the position of its node – a point that remains stationary during natural vibrations. For the practically important case of a system with two supports, it has been established in the work that, in the general case, of two modes corresponding to two different natural frequencies, one has a node located inside the gap between the supports, and the other – outside this gap. Analytical conditions are found that must be satisfied by the inertial and geometric characteristics of the system, which make it possible to determine which of the two modes corresponds to the internal position of the node. It is noted that these conditions do not depend on the stiffness of the supports. Analytical results were also obtained, allowing to determine a more accurate qualitative localization of the node. To clarify the behavior of natural frequencies when the position of the supports changes, an explicit expression is obtained for the derivative of the square of the natural frequency of the system with respect to the coordinate defining the position of the support. This expression can be used to solve a variety of problems related to the control and optimization of the operating modes of engineering structures subjected to dynamic, in particular periodic, effects.

The results of the work were obtained using qualitative methods of the mathematical theory of oscillations. In particular, the theorem on the effect of imposing constraints on the natural frequencies of an elastic system is systematically used.

Keywords: free vibrations, rigid body, elastic supports, qualitative properties

1 ВСТУП

Відомо, що надійна робота інженерних споруд, що знаходяться під дією динамічних, зокрема періодичних, навантажень, може бути забезпечена за рахунок пружної віброізоляції як самих споруд, так і машин і механізмів, які розташовані на спорудах і є джерелами динамічних впливів. Особливу небезпеку становлять можливі резонанси при періодичних впливах на будь-якій з власних частот спектра споруди як пружної конструкції.

Одним з ефективних прийомів захисту від резонансу є управління спектром власних частот елементів споруди, які потребують захисту. Якщо задача визначення власних частот пружних конструкцій добре вивчена, і для її розв'язання запропоновано багато ефективних методів, то проблема управління спектром власних частот пружної конструкції менш вивчена, і навіть досвідчений проектувальник не завжди може передбачити, до яких змін спектра призведе зміна того чи іншого параметра конструкції.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

При проектуванні віброізоляції часто використовують модель пружно закріпленого абсолютно твердого тіла [1-6]. Це дозволяє звести проблему до вивчення руху системи з невеликим числом ступенів свободи. При деяких спрощуючих припущеннях іноді навіть вдається отримати явні аналітичні вирази для власних частот і форм споруди. Однак ці вирази мають, як правило, громіздкий вигляд, що ускладнює якісний аналіз проблеми. Схема конструкції, використана в даній роботі, розглядалася в [6-8], де основна увага була приділена визначенню її власних частот і форм, але недостатньо досліджувалися їх якісні особливості і їх реакція на варіації її параметрів.

В низці робіт [9, 10], присвячених проблемам управління та оптимізації характеристик коливань континуальних пружних систем було відзначено роль особливостей форм їх власних коливань, зокрема розташування вузлів форм. Подібні проблеми виникають і при управлінні коливаннями пружно опертих твердих тіл, але більшість літературних джерел з огляду на відносну елементарність задачі визначення їх власних частот залишають поза увагою деякі цікаві і практично важливі якісні питання щодо засобів впливу на коливальні процеси.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою роботи є дослідження зв'язків між пружними, інерційними та геометричними параметрами пружно закріпленої споруди, яка розглядається як тверде тіло, і якісними особливостями форм його власних коливань. Зокрема, розшукуються умови, що визначають якісну локалізацію вузла форми – точки, що залишається нерухомою при вільних коливаннях. Ставиться також задача дослідити вплив зміни положення в'язей на власні частоти.

Використовується модель споруди у вигляді абсолютно твердого тіла, обпертого на лінійно-пружні опори скінченої жорсткості. Коливання моделі передбачаються малими, що виправдовує використання лінійного наближення. У роботі використовуються якісні результати теорії коливань стрижневих систем [11].

4 РЕЗУЛЬТАТИДОСЛІДЖЕННЯ.

4.1. Основна система. Розглядається система, яка зображена на рис. 1 a . Точки спирання, як і центр мас G тіла розташовані на одній прямій, яка далі називається віссю системи. Передбачається, що при власних коливаннях переміщення точок тіла паралельні площині малюнка, а переміщення точок осі перпендикулярні осі, так що система має два ступені свободи. Маса тіла дорівнює M, момент інерції відносно осі, яка проходить через центр мас G й перпендикулярна площині рисунка, дорівнює J.

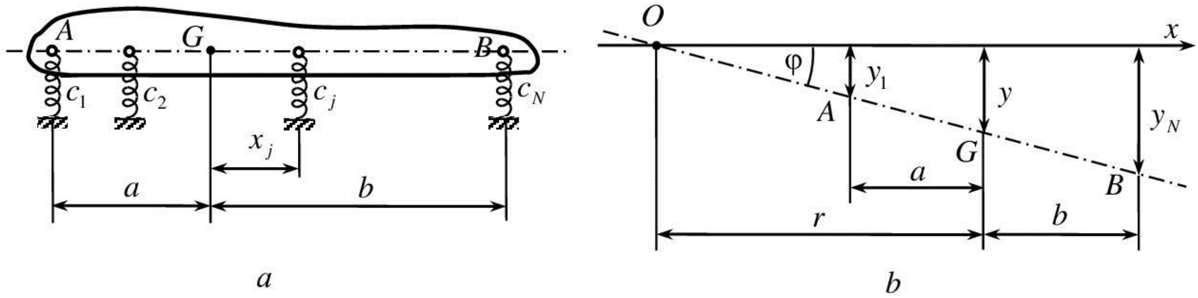

Рис. 1. Основна система (a) та її координати (b)

На осі системи введемо координатну вісь з початком в її центрі мас G. Опора з коефіцієнтом жорсткості c_j має координату x_j, Опори, розташовані зліва від центру мас, мають від'ємні координати.

4.2. Попередні відомості. Далі систематично використовується теорема про вплив накладення в'язей на власні частоти пружних систем [11]: Нехай λ_1 й λ_2 – відповідно перша (основна) та друга власні частоти пружної системи, λ^* – частота підсиленої системи, утвореної з вихідної накладанням одної в'язі. Тоді виконуються співвідношення

$$\lambda_1 \le \lambda^* \le \lambda_2 . \tag{1}$$

Рівності в (1) можуть здійснюватися тільки в тому випадку, коли в'язь встановлюється у вузлі форми коливань, яка відповідає одній з частот λ_1 або λ_2.

4.3. Рівняння руху. Лінеаризовані рівняння руху системи при довільному числі опор мають вид [2]

$$M\,\ddot{y} = -\sum c_j y_j\,, \quad J\,\ddot{\varphi} = -\sum c_j y_j x_j\,, \tag{2}$$

де використано позначення рис. 1.

Якщо в ролі узагальнених координат використовувати вертикальне переміщення y центра мас G і кут повороту φ осі системи, рівняння (2) можна привести до виду

$$\left.\begin{aligned} M\,\ddot{y} &= -\left(\sum c_j\right) y - \left(\sum c_j x_j\right)\varphi \\ J\,\ddot{\varphi} &= -\left(\sum c_j x_j\right) y - \left(\sum c_j x_j^2\right)\varphi \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Для двохопорної системи $(N = 2,\ x_1 = -a,\ x_2 = b)$

$$\left.\begin{aligned} M\,\ddot{y} &= (c_1 + c_2)\,y + (c_1 a - c_2 b)\,\varphi \\ J\,\ddot{\varphi} &= (c_1 a - c_2 b)\,y - (c_1 a^2 + c_2 b^2)\,\varphi \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Іноді в ролі узагальнених координат зручніше прийняти будь-які два з переміщень y_j. Зокрема, положення двохопорної системи можна визначати координатами y_1 й y_2 (див. рис. 1). Тоді поряд з (4) можна користуватись еквівалентною системою

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-85-94

$$\left.\begin{aligned} M(\beta\ddot{y}_1+\alpha\ddot{y}_2) &= -c_1y_1-c_2y_2 \\ \mu(\ddot{y}_2-\ddot{y}_1) &= c_1\alpha y_1-c_2\beta y_2 \end{aligned}\right\}, \qquad (5)$$

де $\alpha = a/\ell$, $\beta = b/\ell$, $\mu = J/\ell^2$, $\ell = a+b$.

Якщо система здійснює головні коливання (при яких переміщення y_j перебувають у постійних співвідношеннях), на осі системи в загальному випадку існує нерухома точка (точка O на рис. 1) – вузол відповідної форми. У зв'язку з цим виявляється корисною ще одна форма рівняння руху

$$(J+Mr^2)\ddot{\varphi} = -\sum c_j y_j (r+x_j) = -\sum c_j (r+x_j)^2\varphi, \qquad (6)$$

де r – відстань центра мас G від вузла. Це рівняння описує рух системи тільки при двох значеннях r, які відповідають власним формам. При довільному r йому відповідає рух системи з одним ступенем свободи, отриманої встановленням одної в'язі у вигляді шарнірної опори на відстані r від центру мас.

Розшукуючи власні коливання у вигляді $y = Y\sin\sqrt{\lambda}t$, $\varphi = \Phi\sin\sqrt{\lambda}t$, відповідно $y_j = B_j\sin\sqrt{\lambda}t$, де Y, Φ й B_j – константи, прийдемо до алгебраїчної системи

$$\left.\begin{aligned} \left(\sum c_j - M\lambda\right)Y + \left(\sum c_j x_j\right)\Phi = 0 \\ \left(\sum c_j x_j\right)Y + \left(\sum c_j x_j^2 - J\lambda\right)\Phi = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (7)$$

Зокрема, для двохопорної системи з (4) й (5) випливає

$$\left.\begin{aligned} (c_1+c_2-M\lambda)Y-(c_1a-c_2b)\Phi = 0 \\ -(c_1a-c_2b)Y+(c_1a^2+c_2b^2-J\lambda)\Phi = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} (c_1-\beta M\lambda)B_1+(c_2-\alpha M\lambda)B_2 = 0 \\ (c_1\alpha-\mu\lambda)B_1-(c_2\beta-\mu\lambda)B_2 = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (9)$$

4.4. Ортогональність. Розглянемо довільну пружну систему як сукупність матеріальних точок M_j, з'єднаних між собою та з іншими тілами за допомогою внутрішніх й зовнішніх пружних в'язей, і введемо її зміщення $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(M)$ – функцію, визначену на множині її точок M_j, значеннями якої є вектори $\boldsymbol{s}_j = \boldsymbol{s}(M_j)$ зміщень точок від їх рівноважних положень. Зміщення пружної системи з положення рівноваги породжує набір реактивних сил, зумовлених деформацією внутрішніх і зовнішніх пружних в'язей системи. Введемо у розгляд функцію $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(M)$ точок M_j системи, значеннями якої є рівнодіючі $\boldsymbol{F}_j$ цих сил, прикладених до точки M_j. Функція $\boldsymbol{F}$ визначається функцією зміщення $\boldsymbol{s}$, що прийнято виражати операторною рівністю $\boldsymbol{F} = C\boldsymbol{s}$. C – оператор жорсткості системи, який в силу малості зміщень точок вважається лінійним. Для двох будь-яких зміщень $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{u}$ й $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}$ виконується також теорема взаємності, яка виражається рівністю

$$(C\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (C\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}), \qquad (10)$$

де $(C\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ означає роботу сил $\boldsymbol{F}_j$, породжених зміщенням $\boldsymbol{u}$, на переміщеннях точок M_j, що відповідають зміщенню $\boldsymbol{v}$. Введемо також функцію $m\boldsymbol{s}$, визначену на множині точок системи, значеннями якої є вектори $m\boldsymbol{s}(M_j) = m_j\boldsymbol{s}_j$, де m_j – маса точки M_j. Робота сил, рівних $m_j\boldsymbol{u}_j$ й прикладених до точок M_j, на переміщеннях $\boldsymbol{v}_j$, які відповідають зміщенню v, дорівнює $(m\boldsymbol{u},v)=\sum m_j u_j v_j \cos\alpha_j$, де α_j – кут між векторами $m_j\boldsymbol{u}_j$ й v_j. Як видно, $(m\boldsymbol{u},v)=(mv,\boldsymbol{u})$.

При головних (власних) коливаннях з власною частотою $\sqrt{\lambda}$ зміщення точок дорівнюють $\boldsymbol{s}_j(t)=\boldsymbol{u}_j\sin\sqrt{\lambda}t$, а їх прискорення $\boldsymbol{a}_j(t)=-\lambda\boldsymbol{u}_j\sin\sqrt{\lambda}t$. При головних коливаннях з іншою частотою $\sqrt{\sigma}$ відповідно $\boldsymbol{s}_j(t)=v_j\sin\sqrt{\sigma}t$, $\boldsymbol{a}_j(t)=-\sigma v_j\sin\sqrt{\sigma}t$. Рівняння $\boldsymbol{F}_j=m_j\boldsymbol{a}_j$ дозволяють записати операторні рівності

$$\begin{aligned} &C\boldsymbol{u}=-\lambda m\boldsymbol{u},\\ &Cv=-\sigma mv, \end{aligned} \tag{11}$$

з яких, з урахуванням (10), випливає $(\lambda-\sigma)(m\boldsymbol{u},v)=(C\boldsymbol{u},v)-(Cv,\boldsymbol{u})=0$, звідки

$$\begin{aligned} &(m\boldsymbol{u},v)=0,\\ &(C\boldsymbol{u},v)=0. \end{aligned} \tag{12}$$

Останні рівності виражають важливу властивість ортогональності власних форм, яка міститься у таких двох твердженнях:
а) Робота сил інерції точок пружної системи, яка здійснює власні коливання, на зміщенні, що відповідає власним коливанням з іншою частотою, дорівнює нулю.
б) Робота реакцій зовнішніх й внутрішніх пружних в’язей, прикладених до точок пружної системи, яка здійснює власні коливання, на зміщенні, що відповідає власним коливанням з іншою частотою, дорівнює нулю.

Необхідно розрізняти *властивість* ортогональності та *співвідношення* ортогональності. Перша – фізична властивість пружних систем. Другі – аналітичні співвідношення, що виражають цю властивість. Співвідношень ортогональності можна записати багато, використовуючи різні набори координат (не обов’язково незалежних). Зокрема, взявши замість (11) рівняння (7), й повторюючи міркування, що привели до (12), можна отримати

$$MY_1Y_2+J\Phi_1\Phi_2=0, \tag{13}$$

де індекс означає номер форми.

Оскільки головною частиною розглядуваної системи є тверде тіло, в якому, як відомо, сума робіт внутрішніх сил при будь-яких переміщеннях дорівнює нулю, при обчисленні $(C\boldsymbol{u},v)$ належить враховувати лише зовнішні сили, тобто реакції пружних опор. Це приводить до наступної форми умови ортогональності

$$c_1B_1^{(1)}B_1^{(2)}+c_2B_2^{(1)}B_2^{(2)}+\ldots+c_NB_N^{(1)}B_N^{(2)}=0, \tag{14}$$

де верхній індекс означає номер форми. Для двохопорної системи

$$c_1B_1^{(1)}B_1^{(2)}+c_2B_2^{(1)}B_2^{(2)}=0. \tag{15}$$

4.5. Розширена система. Вузли. Розширена система (Р-система) – система в якій до неї приєднуються невагомі точки осі, продовженої довільно в обидві сторони. Поведінка Р-системи повністю визначається рівняннями (2 - 6) руху системи. Вузол власної форми Р-системи – точка перетину її осі з рівноважним положенням осі. В-формою будемо називати форму коливань Р-системи, яка має вузол, розташований в проміжку між опорами. У цьому випадку будемо говорити також, що форма має вузол. БВ-формою (безвузловою формою) будемо називати форму коливань, вузол якої розташований по одну сторону від всіх опор або не існує (в останньому випадку вісь системи при вільних коливаннях залишається горизонтальною). Форму, вузол якої

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-85-94

з однією з крайніх опор, назвемо особливою. Характерні форми вільних коливань двохопорної Р-системи схематично показані на рис. 2.

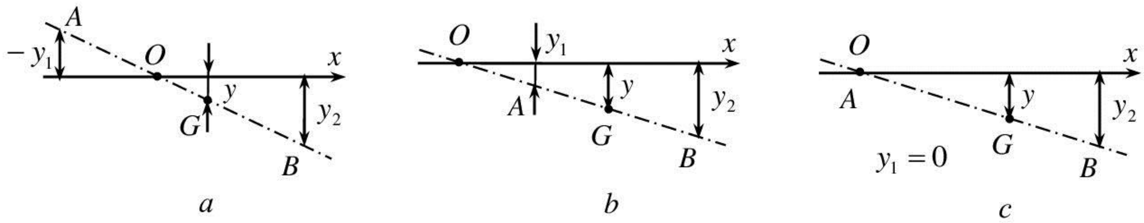

Рис. 2. Характерні форми вільних коливань двохопорної Р-системи:
a – В-форма, *b* –БВ-форма, *c* – особлива форма

З (14) й (15) випливають такі твердження:

1) З двох форм вільних коливань багатоопорної ($N>2$) системи принаймні одна є В-формою.

2) З двох форм вільних коливань двохопорної системи одна є В-формою, й одна – БВ-формою, або обидві формі особливі.

4.6. Критерій наявності вузла в основній формі двохопорної моделі.

Якщо $\mu=\alpha\beta M=\alpha(1-\alpha)M$, система (9) може бути приведена до виду

$$\left.\begin{aligned}&(c_1-\beta M\lambda)B_1+(c_2-\alpha M\lambda)B_2=0\\&(c_1-\beta M\lambda)\alpha B_1-(c_2-\alpha M\lambda)\beta B_2=0\end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

Її розв’язки мають вид:

$$B_1=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{c_2}{\alpha M},\;\; B_2=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{c_1}{\beta M}, \tag{17}$$

першому з яких відповідає особлива форма з вузлом на лівій опорі, а другому – на правій.

Підставимо в (9) замість μ вираз $\alpha\beta M+\varepsilon$ й приймемо $\lambda=c_2/\alpha M+\varepsilon_1$, $B_1=\varepsilon_2$, $B_2=1$. Відкидаючи степені ε вищі першої, знайдемо

$$\varepsilon_1=-\left(\frac{c_2}{\alpha^2M^2}\right)\varepsilon,\;\; \varepsilon_2=-\left[\frac{c_2}{(c_1\alpha-c_2\beta)M}\right]\varepsilon\,.$$

Якщо розглядувана частота λ є основною (найменшою), з (17) випливає $c_2/\alpha<c_1/\beta\Rightarrow c_1\alpha-c_2\beta>0$, звідки випливає, що ε й ε_2 мають різні знаки, тобто. при зростанні μ вище $\alpha\beta M$ відповідна основна форма має координати різних знаків: $B_1=\varepsilon_2<0$, $B_2=1>0$, і як наслідок має вузол.

Якщо при $\mu=\alpha\beta M=\alpha(1-\alpha)M$ частота λ є кратною, то, як видно з (17), $c_2/\alpha=c_1/\beta\Rightarrow c_1\alpha=c_2\beta$. В цьому випадку систему (9) (при довільних M й μ) можна записати у вигляді:

$$\left.\begin{aligned}&(c_1-\beta M\lambda)\left[B_1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)B_2\right]=0\\&(c_1\alpha-\mu\lambda)(B_1-B_2)=0\end{aligned}\right\}, \tag{18}$$

з якого визначаються дві власні частоти, рівні $c_1/\beta M$ і $c_1\alpha/\mu$. Якщо $\mu<\alpha\beta M$, перша з

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-85-94

них є основною і з другого рівняння (18) випливає $B_2 = B_1$, тобто. основна форма не має вузла. Якщо $\mu > \alpha\beta M$, друга з них є основною і з першого рівняння (18) випливає $B_1 + (\alpha/\beta)B_2 = 0$, тобто B_1 й B_2 мають різні знаки, внаслідок чого основна форма має вузол.

Таким чином, встановлено таке твердження:

Основна форма власних коливань двохопорної системи є БВ-формою, якщо $\mu < \alpha\beta M$, В-формою, якщо $\mu > \alpha\beta M$, та особливою формою, якщо $\mu = \alpha\beta M$.

4.7. Якісна локалізація вузла. Звернемо увагу на те, що наявність чи відсутність вузла основної форми двохопорної системи не залежить від значень c_1 й c_2 жорсткості опор.

В той же час локалізація вузла залежить від c_1 і c_2. З (8) випливає, що при $c_1 a = c_2 b$ форми визначаються рівностями $Y = 0$ та $\Phi = 0$, тобто що одна форма має вузол в центрі мас G, а інша є горизонтальною.

Нехай тепер $c_1 a - c_2 b > 0$. Друге з рівнянь (8) показує, що $\Phi = 0$ вже не є розв'язком системи (8). Тоді основна частота $\lambda_1 < \lambda^* = (c_1 + c_2)/M$, бо λ^* – частота конструкції, утвореної з вихідної системи накладанням жорсткої в'язі, яка перешкоджає її поворотам (див. розд. 4.2). В першому з рівнянь (8) вирази в дужках додатні, звідки випливає, що основній формі відповідають Y і Φ одного знаку. Це означає, що основна форма має вузол зліва від центра мас G.

4.8. Похідна від власної частоти системи по координаті опори. Рівняння (6) має розв'язок $\varphi = \Phi \sin\sqrt{\lambda^*}t$, де $\lambda^* = \lambda^*(r, x_1, \ldots, x_N)$ – квадрат частоти крутильних коливань системи з одним ступенем свободи, утвореної з основної системи введенням жорсткого шарніра в точці O,

$$\lambda^* = \frac{\sum c_j (r + x_j)^2}{J + Mr^2}. \tag{19}$$

Як випливає з розд. 4.2., $\lambda_1 = \lambda_1(x_1, \ldots, x_N) \le \lambda^* = \lambda^*(r, x_1, \ldots, x_N) \le \lambda_2 = \lambda_2(x_1, \ldots, x_N)$.

Якщо в (19) змінювати r, зафіксувавши решту змінних, тобто переміщувати введену опору по горизонталі, в загальному випадку знайдуться рівно два значення r, які відповідають мінімуму та максимуму λ^*. Ці значення визначають вузли двох форм основної системи й

$$\lambda^*_{\min}(r) = \lambda_1, \ \lambda^*_{\max}(r) = \lambda_2. \tag{20}$$

Тому при цих значеннях r

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial r} = 0. \tag{21}$$

Розглянемо тепер частоту $\sqrt{\lambda}$ системи як функцію положення однієї з опор, координату якої позначимо через x, й обчислимо похідну від λ по x. При цьому зазначимо, що $\lambda(x) = \lambda^*(r, x)$, де r є функцією x, яка забезпечує екстремум λ^*. Тоді у відповідності з (21) й (19)

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\partial \lambda^*}{\partial x} + \frac{\partial \lambda^*}{\partial r}\frac{dr}{dx} = \frac{\partial \lambda^*}{\partial x} = \frac{2c(r + x)}{J + Mr^2}, \tag{22}$$

де c – жорсткість переміщуваної опори.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Величина $r+x$ представляє собою відстань від переміщуваної опори до вузла O, взяте зі знаком «+», якщо опора знаходиться справа від O, й зі знаком «–», якщо зліва.

Отриманий вираз (22) розкриває практичне і теоретичне значення результатів роботи. Висновки розділів 4.6, 4.7 дозволяють отримати інформацію про наявність і розташування вузлів форм власних коливань, а вираз (22) показує як використати цю інформацію для ціленаправленої зміни власних частот. Зокрема, з нього випливає. що якщо опора не збігається з вузлом, для збільшення частоти її треба віддаляти від вузла.

6 ВИСНОВКИ.

В роботі встановлено залежність виду форм власних коливань пружно закріпленого твердого тіла від співвідношення параметрів, що визначають інерційні, пружні і геометричні характеристики системи. Зокрема, для двохопорної моделі виявлено, що наявність або відсутність вузла форми не залежить від жорсткості опор. Отримано результати, що дозволяють якісно локалізувати вузол форми в залежності від цих параметрів. Знайдено явні аналітичні вирази для похідних від квадратів власних частот системи по координатам опор, які дозволяють ставити і розв’язувати різноманітні задачі управління власними коливаннями пружно опертих тіл. Вивченню цих задач із застосуванням результатів, представлених в статті, будуть присвячені подальші дослідження.

Література

1. Левитский Н. И. Колебания в механизмах. М. : Наука, 1988. 336 с.
2. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. Т. 1. Колебания линейных систем / под ред. В. В. Болотина. М. : Машиностроение, 1978. 352 с.
3. Harris’ shock and vibration handbook / Editors Allan G. Piersol, Thomas L. Paez, 6th ed. The McGraw-Hill Companies, Inc. 2010. 1199 p.
4. Encyclopedia of vibration / Editor-in-chief S. Braun. Academic Press. 2002. 1685 p.
5. Karnovsky I., Lebed E. Theory of vibration protection. Springer International Publishing, 2016. 674 p.
6. Глейзер А. И. Колебания автомобиля. Тольятти, Изд-во ТГУ, 2014.78 с.
7. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Теоретическая механика, ч. III. М.-Л., ГТТИ, 1934. 624 с.
8. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Ленинград, Политехника, 1990. 272 с.
9. Бекшаев С. Я., Кошкин Л. В., Нудельман Я. Л. К вопросу об оптимальном расположении масс и опор вибрирующего стержня. Судостроение и судоремонт. М. : Рекламинформбюро ММФ. 1976. Вып. VII. С. 64 – 67.
10. Бекшаев С. Я. О возмущениях собственных частот вантово-стержневых систем, подкрепленных связями. Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. 2007. №26. С. 40 – 53.
11. Нудельман Я. Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем. М.-Л. ГТТИ, 1949. 176 с.

References

1 Levitsky, N. I. (1988). *Kolebaniya v mekhanizmakh* [Oscillations in mechanisms]. M.: Nauka [in Russian].
2 Bolotin, V. V. (red.) (1978). *Vibratsii v tekhnike* [Vibrations in technology]. T. 1. Kolebaniya lineinykh sistem. M.: Mashinostroenie. [in Russian].
3 Piersol, Allan G., Paez, Thomas L. (Editors) (2010). *Harris’ shock and vibration handbook*. 6th ed. The McGraw-Hill Companies, Inc. [in English].

4 Braun, S. (Editor-in-chief) (2002). *Encyclopedia of vibration*. Academic Press. [in English].
5 Karnovsky, I., Lebed E. (2016). *Theory of vibration protection*. Springer International Publishing. [in English].
6 Gleizer, A. I. (2014). *Kolebaniya avtomobilya* [Vibrations of the car]. Tol'yatti: Izd. TGU. [in Russian].
7 Loytsyansky, L. G., Lur'e, A. I. (1934). *Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical mechanics]. M.-L.: GTTI. [in Russian].
8 Panovko, Ya. G. (1990). *Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara* [Fundamentals of Applied Vibration and Impact Theory]. L.: Politekhnika. [in Russian].
9 Bekshaev, S, Ya. (1976). K voprosu ob optimal'nom raspolozhenii mass i opor vibriruyucshego sterzhnya [On the question of the optimal arrangement of masses and supports of a vibrating rod]. *Sudostroenie I sudoremont* [Shipbuilding and ship repair]. M.: Reklaminformburo MMF, 7, 64 – 67. [in Russian].
10 Bekshaev, S, Ya. (2007). O vozmuscheniyakh sobstvennykh chastot vantovo-sterzhnevykh sistem, podkreplennykh sviaziami [On perturbations of eigenfrequencies of cable-stayed rod systems, reinforced by constraints]. *Visnyk Odes'koi derzhavnoi akademii budivnitstva ta arkhitektury* [Bulletin of the Odessa State Academy of Education and Architecture], 26, 40 –53. [in Russian].
11 Nudelman, Ya. L. (1949) *Metody opredeleniia sobstvennykh chastot i kriticheskikh sil dlya sterzhnevykh system* [Methods for determining natural frequencies and critical forces for rod systems]. M.-L.: GTTI. [in Russian].

Бекшаєв Сергій Янович
Одеська державна академія будівництва та архітектури, ст. викладач
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029
s.bekshayev@gmail.com
ORCID: 0000-0002-5752-5321

Для посилань:
Бекшаєв С. Я. Якісні властивості коливань пружно обпертого твердого тіла / С. Я. Бекшаєв // Механіка та математичні методи. – 2020. – том 2, вип. 2. – с. 85–94.

For references:
Bekshaev S. (2020). Qualitative properties of vibrations of elastically supported rigid body. Mechanics and Mathematical Methods, 2 (2), 85–94