

УДК 624.012.4:624.072.4

НЕЛІНІЙНА ДЕФОРМАЦІЙНО-СИЛОВА МОДЕЛЬ БЕТОННОГО СТЕРЖНЯ З НЕМЕТАЛЕВОЮ КОМПОЗИТНОЮ АРМАТУРОЮ У ЗАГАЛЬНОМУ ВИПАДКУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

Карпюк І. А.¹, Клименко Є. В.¹, Карпюк В. М.¹, Карпюк М. В.¹

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: У статті розглядається нелінійна деформаційно-силова модель бетонної стержневої конструкції з неметалевою композитною арматурою (НКА-FRP) у загальному випадку напруженого стану, коли в її будь-якому поперечному перерізі одночасно можуть виникнути всі чотири внутрішні силові фактори від зовнішнього навантаження, а саме: згинальний і крутний моменти, поперечна і поздовжня сили. Приведений достатньо глибокий і змістовний аналіз відомих досліджень за обраною тематикою. Встановлено, що запропонована нелінійна деформаційно – силова модель стержневої конструкції з FRP у загальному випадку напруженого стану може бути практично корисною завдяки можливості її застосування при проектуванні або підсиленні балок, ригелів, колон і елементів розкільних ферм прямокутного перерізу, які експлуатуються в умовах агресивного впливу оточуючого середовища. Вказану модель можна використовувати також при перевірці несучої здатності існуючих стержневих бетонних конструкцій з FRP, які працюють не тільки під впливом агресивного середовища, а й в умовах складного напружено-деформованого стану. В ході досліджень розроблений алгоритм визначення несучої здатності розрахункового перерізу бетонного стержня з FRP при його складному напруженому стані. Загальні фізичні співвідношення для розрахункового перерізу приведені у вигляді матриці жорсткостей. Алгоритм розрахунку бетонного стержня з FRP складається із блоку вводу вихідних даних, основної частини, допоміжних підпрограм перевірки умов збільшення вектора навантаження та вичерпання несучої здатності, а також блоку роздрукування результатів розрахунків. На кожному етапі простого статичного ступенево зростаючого навантаження розрахунок здійснюється шляхом виконання деякої кількості ітерацій до тих пір, доки точність визначення всіх компонент вектора деформацій не буде задовольняти деякій наперед заданій величині. Розглядаються також особливості та закономірності зміни нормальних і дотичних напружень, узагальнених лінійних і кутових деформацій, а також рівняння рівноваги бетонного стержня з FRP, який працює під впливом агресивного середовища в умовах складного напруженого стану.

Ключові слова: бетонний стержневий елемент з FRP, напруження, деформації, деформаційно-силова модель, жорсткість, рівняння рівноваги, розрахунковий поперечний переріз, просторова тріщина.

NONLINEAR DEFORMATION-FORCE MODEL OF A CONCRETE BAR WITH NON-METALLIC COMPOSITE REINFORCEMENT IN THE GENERAL CASE OF A STRESSED STATE

I. Karpiuk¹, Ye. Klymenko¹, V. Karpiuk¹, M. Karpiuk¹

¹Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: The article discusses a nonlinear deformation-force model of a concrete bar structure with a non-metallic composite reinforcement (NKA-FRP) in the general case of a stressed state, when all four internal force factors from an external load (namely, bending and twisting moments, transverse



and longitudinal forces). A sufficiently deep and meaningful analysis of well-known studies on the selected topic is given. It has been established that the proposed nonlinear deformation-force model of a bar structure with FRP in the general case of a stressed state can be practically useful due to the possibility of its application in the design or reinforcement of beams, girders, columns and elements of rosette trusses of rectangular cross-section, which are operated under aggressive environmental conditions. This model can also be used to check the bearing capacity of existing FRP concrete bar structures, which operate not only under the influence of an aggressive environment, but also under conditions of a complex stress-strain state. In the course of the research, an algorithm was developed for determining the bearing capacity of the design section of a concrete rod with FRP under its complex stress state. General physical relations for the design section are given in the form of a stiffness matrix. The algorithm for calculating a concrete bar with FRP consists of a block for inputting the initial data, the main part, auxiliary subroutines for checking the conditions for increasing the load vector and depletion of the bearing capacity, as well as a block for printing the calculation results. At each stage of a simple static stepwise increasing load, the calculation is carried out by performing a certain number of iterations until the accuracy of determining all components of the deformation vector satisfies a certain predetermined value. The features and patterns of changes in normal and tangential stresses, generalized linear and angular deformations, as well as the equations of equilibrium of a concrete bar with FRP, which operates under the influence of an aggressive environment under conditions of a complex stress state, are also considered.

Keywords: concrete bar element with FRP, stress, strain, deformation-words model, stiffness, equilibrium equations, design cross-section, spatial crack.

1 ВСТУП

Загальний випадок напруженого стану бетонного стержня з FRP передбачає виникнення в його довільних перерізах сумісної дії поздовжніх та поперечних сил, згинальних і крутних моментів (рис. 1).

Основи сучасних уявлень про теорію міцності бетону, а також бетону зі сталеву або композитною (КА) арматурою при тривісному напружено-деформованому стані були закладені М. М. Філоненко-Бородичем, Г. О. Генієвим, В. М. Киссюком, Г. О. Тюпіним, Г. С. Писаренком, А. А. Лебедевим, Т. А. Баланом, С. Ф. Клованичем, М. І. Карпенком та його учнями, Dei Poli, K. H. Gerstle, H. V. Kupfer та ін.

Розвиток сучасних ЕОМ у вигляді персональних комп'ютерів дозволяє здійснювати розв'язок задач зі складними розрахунковими моделями чисельними методами, в тому числі бетонних стержнів з FRP.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Основні гіпотези і передумови.

Розглянемо бетонний стержень з FRP прямокутного перерізу сталої по довжині жорсткості, в розрахункових перерізах якого виникає загальний випадок напруженого стану (рис. 1).

Представимо собі, що стержень виготовлений із важкого бетону на гранітному щебені і кварцовому піску. Він армований взаємно перпендикулярними поздовжніми (вздовж осі Z) та поперечними стержнями неметалевої композитної арматури FRP, орієнтованими вздовж осей X і Y.

Ураховуючи рекомендації [1, 2, 3, 4] основні припущення розрахунку бетонних елементів з композитною арматурою можна представити так:

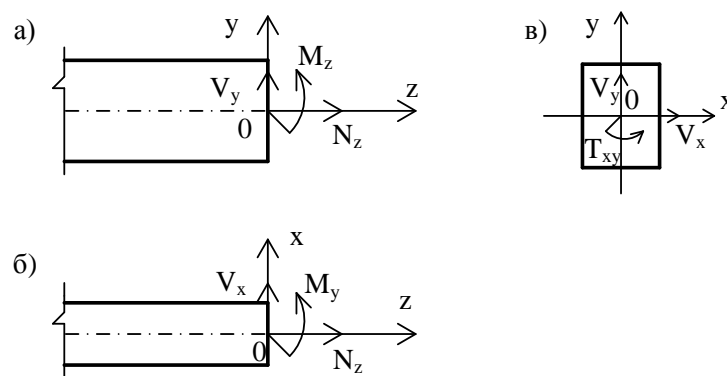


Рис. 1. Внутрішні зусилля в нормальному, перерізі складнонапруженого стержня в силових площинах ZOY(а), ZOX(б), XOY(в).

- бетонний стержень з FRP являється негнучким, тобто достатньо коротким і масивним. Тому його руйнування відбувається внаслідок втрати міцності, а не стійкості;

- розглядаються тільки нормальні перетини;

- зв'язки між внутрішніми зусиллями і деформаціями в бетоні, а також стержнях FRP визначаються за діаграмами $\sigma_c - \varepsilon_c$, $\sigma_f - \varepsilon_f$, $\tau_c - \gamma_c$, $\tau_f - \gamma_f$;

- вважається справедливою гіпотеза Бернуллі, тобто перерізи плоскі і перпендикулярні до поздовжньої осі до деформації стержня залишаються такими ж і після її здійснення;

- дотичні напруження у розрахунковому перетині стержня при вільному його крученні визначаються згідно рекомендацій [5], [6];
- дотичні та нормальні напруження у розрахункових перерізах елемента при його стисненому крученні обчислюються згідно рішення [7, 8];
- бетонна частина і поздовжні FRP стержні сприймають нормальні $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ та дотичні $\tau_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{xy}$ напруження;
- у стержнях поперечної FRP появляються тільки дотичні зусилля τ_{zx}, τ_{zy} в залежності від орієнтації цих стержнів. Розподіл вказаних напружень по довжині стержнів поперечної арматури вважається таким, що змінюється по їх довжині;
- експериментально отримана умова міцності [9, 10, 11] слугує критерієм виникнення макротріщин і руйнування бетону;
- вважається, що має місце сумісна робота бетону і арматури аж до появи макротріщин в ньому. Після їх появи всі внутрішні зусилля у розрахунковому перетині з тріщиною сприймаються тільки арматурою FRP;
- арматурні стержні виключаються із роботи з досягненням в них характеристичного опору на розтяг f_{rk} або $0,2f_{rk}$ при їх роботі на стиск;
- при переході від елементарних внутрішніх зусиль до узагальнених внутрішніх силових факторів (M_x, M_y, T_{xy}, N_z) застосовується процедура числового інтегрування елементарних внутрішніх зусиль по всій площі поперечного перетину стержневої конструкції. Для його здійснення розрахунковий перетин стержневої конструкції уявно розбивається на елементарні частки, в межах яких внутрішні зусилля не змінюються.

Керувачі [9, 12] міцність бетону, що знаходиться у тривісному напружено-деформованому стані, може бути описана симетричною відносно головних напружень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ поверхнею, яку доцільно будувати за рекомендаціями М. М. Філоненка-Бородича з використанням [1, 2, 3, 4]:

$$f(\sigma_{oc}, \tau_{oc}, \theta_c) = \tau_{oc} - \tau_{olc}(\sigma_{oc}) \cdot \rho(\theta_c) = 0, \quad (1)$$

де τ_{oc}, σ_{oc} – елементарні октаедричні дотичні і нормальні внутрішні зусилля (напруження);

θ_c – кут виду напруженого стану;

$\rho(\theta_c)$ – інтерполяційна функція [12] між $\tau_{o1}(\theta_c = 60^\circ)$ і $\tau_{o2}(\theta_c = 0^\circ)$, яка визначається за формулою:

$$\rho(\theta_c) = \frac{2a_c \cos \theta_c + b_c \sqrt{a_c (4 \cos^2 \theta_c - 1) + b_c^2}}{4a_c \cos^2 \theta_c + b_c^2}, \quad (2)$$

де $a_c = 1 - c_c^2$, $b_c = 2c_c - 1$, $c_c = \tau_{o2c} / \tau_{o1c}$.

Зв'язок між октаедричними напруженнями при кутах виду напруженого стану $\theta_c = 60^\circ$ і $\theta_c = 0^\circ$ згідно з [12] можна представити:

$$\sigma_{oc} = A_1 \tau_{o1c}^2 + B_1 \tau_{o1c} + C_1, \quad \sigma_{oc} = A_2 \tau_{o2c}^2 + B_2 \tau_{o2c} + C_1. \quad (3)$$

Коефіцієнти A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 отриманні шляхом «прив'язки» характерних точок на поверхні міцності бетону. Використовуючи експериментальні залежності В. М. Бондаренка і В. І. Колчунова [13] з урахуванням вимог чинних норм їх пропонується визначати за такими спрощеними формулами:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{4,14}{f_{ck} - f_{ctk}}; & B_1 &= \frac{5,38f_{ck}^2 + f_{ck}f_{ctk} - 6,38f_{ck}^2}{4,24(f_{ck} - f_{ctk})^2}; \\
 A_2 &= \frac{4,09f_{ck} - 4,16f_{ctk}}{1,20f_{ck}^2 - 2,20f_{ck}f_{ctk} + f_{ctk}^2}; & B_2 &= \frac{4,46f_{ck}^2 - 2,04f_{ck}f_{ctk} - 0,73f_{ctk}^2}{4,32f_{ck}^2 - 7,92f_{ck}f_{ctk} + 3,60f_{ctk}^2}; \\
 C_1 &= -H = -\frac{0,82f_{ck}f_{ctk}}{f_{ck} - f_{ctk}},
 \end{aligned} \tag{4}$$

де f_{ck}, f_{ctk} – характеристична (при проектуванні розрахункова f_{cd}, f_{ctd}) міцність бетону, відповідно, на стиск і розтяг. Отже, поверхня міцності бетону може бути однозначно описаною формулою (1) тому, що до неї за допомогою коефіцієнтів (4) включено п'ять незалежних характеристик його міцності для окремих деформацій:

- центрального стиску $R_c = f_{ck}$ і розтягу $R_p = f_{ctk}$,
- двовісному стиску $R_{2c} \cong 1,2R_c = 1,2f_{ck}$ і розтягу $R_{2p} \cong R_p = f_{ctk}$,
- об'ємного рівномірного (тривісного) розтягу $R_{3p} = H \cong (0,82R_c \cdot R_p)/(R_c - R_p)$.

Кут виду напруженого стану в бетоні вказаного елемента доцільно визначати за виразом [7] з урахуванням $\sigma_x = \sigma_y = 0$ та рекомендацій [1, 2, 3, 4]:

$$\theta_c = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3D_3}}{2\sqrt{D_2^3}} \right) = \frac{1}{3} \arccos \left[\frac{\sqrt{\sigma_{zc} \left[2\sigma_{zc}^2 + 9(\tau_{xyc}^2 + \tau_{zyc}^2 + \tau_{zxc}^2) \right]}}{2\sqrt{\left(\frac{\sigma_{zc}^2}{3} + \tau_{xyc}^2 + \tau_{zyc}^2 + \tau_{zxc}^2 \right)^3}} \right], \tag{5}$$

де D_3, D_2 – відповідно, третій та другий інваріанти девіатора напружень.

З урахуванням формул (1), (3) отримаємо

$$\sigma_{oc} = \frac{A_1}{\rho^2(\theta_c)} \tau_{oc}^2 + \frac{B_1}{\rho(\theta_c)} \tau_{oc} + C_1. \tag{6}$$

Найбільші величини міцності бетону на її поверхні у вигляді $\hat{\sigma}_{oc}$ та $\hat{\tau}_{oc}$ обчислюються шляхом розв'язку системи рівнянь:

$$\begin{cases} \hat{\tau}_{oc} - \tau_m = m_\sigma (\hat{\sigma}_{oc} - \sigma_m); \\ \hat{\sigma}_{oc} = \frac{A_1}{\rho^2(\theta_c)} \hat{\tau}_{oc}^2 + \frac{B_1}{\rho(\theta_c)} \hat{\tau}_{oc} + C_1, \end{cases} \tag{7}$$

де σ_m та τ_m – напруження на попередній ступені навантаження (при пропорційно зростаючому ступеневому навантаженні $\sigma_m = \tau_m = 0$);

m_σ – характеристика напруженого стану бетону. Так, при об'ємному рівномірному розтязі $m_\sigma = 0$, двовісному розтязі або стиску $m_\sigma = \pm\sqrt{2/2}$, одновісному розтязі – стиску $m_\sigma = \pm\sqrt{2}$ (знак «+» характеризує деформацію розтягу, «-» – стиску).

Умова текучості Губера - Мізеса - Генкі [7] для FRP при $\sigma_x = \sigma_y = 0$ має вид:

$$\sigma_{zf}^2 + 3\tau_{xyf}^2 + 3\tau_{zxf}^2 + 3\tau_{zyf}^2 = \tilde{f}_{fd}^2, \tag{8}$$

де τ_{fd}^2 – розрахункова міцність неметалевої композитної арматури FRP з урахуванням

її зменшення (16) внаслідок складного напруженого стану у порівнянні з центральним розтягом – стиском.

У загальному випадку напруженого стану вказану умову можна представити:

$$\sigma_{xf}^2 + \sigma_{yf}^2 + \sigma_{zf}^2 - \sigma_{xf}\sigma_{yf} - \sigma_{yf}\sigma_{zf} - \sigma_{zf}\sigma_{xf} + 3\tau_{xyf}^2 + 3\tau_{zyf}^2 + 3\tau_{zxf}^2 = \tilde{f}_{fd}^2.$$

Залежність $\sigma_c - \varepsilon_c$ у бетоні згідно з рекомендаціями [9] можна представити у вигляді:

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b^0 \nu_b} = \frac{\sigma_c}{E_{cm} \zeta_c} = \varepsilon_c, \quad (9)$$

де $\varepsilon_b = \varepsilon_c$ – відносні лінійні деформації бетону;

$\sigma_b - \sigma_c$ – нормальні напруження в бетоні;

$E_b^0 = E_{cm}$ – початковий модуль пружності бетону;

$\nu_b = \zeta_c$ – коефіцієнт, що характеризує залежність січного модуля пружності бетону від рівня його навантаження.

Деформаційні залежності для бетону, який знаходиться в об'ємному напруженому стані, доцільно виражати у вигляді зв'язку між октаедричними напруженнями і деформаціями. При цьому, вважаються справедливими гіпотези, викладені в [1, 2, 3, 4]:

- залежність $\tau_{oc} - \gamma_{oc}$ нелінійна: $\tau_{oc} = G_c(\gamma_{oc}) \cdot \gamma_{oc}$, де $G_c(\gamma_{oc})$ – січний (октаедричний) модуль зсуву бетону;

- зв'язок між нормальними октаедричними напруженнями σ_{oc} і середніми деформаціями ε_{oc} є нелінійним $\sigma_{oc} = K(\gamma_{oc}) \cdot (\varepsilon_{oc} - \rho_c \gamma_{oc}^2)$, де ρ_c - модуль дилатації ([14] - g_{oc}); $K(\gamma_{oc})$ – модуль об'ємних деформацій.

Спираючись на припущення про єдину криву деформування при обчисленні січного модуля пружності бетону, рекомендується скористатися гіпотезою [12], згідно з якою форма зв'язку між напруженнями та деформаціями не залежить від виду напруженого стану. Тобто зв'язок між τ_{oc} і γ_{oc} дозволяється прийняти таким же, як і при центральному стиску, а січний модуль зсуву (рис.2) – обчислювати за виразом Гіббса, запропонованим Саенсом, $G_c(\gamma_{oc}) = G_{oc} \cdot f(\gamma_{oc})$, в якій

$$f(\gamma_{oc}) = \frac{1}{1 + A\eta + B\eta^2 + C\eta^3}, \quad (10)$$

де $C = \lambda(1 - \xi_r) / [\xi_r(\eta_r - 1)^2 - 1/\eta_r]$; $B = 1 - 2C$; $A = C + \lambda - 2$; $\xi_r = \bar{\sigma}_r / f_{ck} \approx 0,85$

і $\eta_r = \gamma / \bar{\gamma}_r \approx 1,41$; $\xi = \sigma_{oc} / f_{ck}$; $\eta = \gamma_{oc} / \bar{\gamma}_{oc}$; $\lambda = \xi / \eta$; початковий модуль зсуву

$$G_{oc} = G_{cm} = \frac{E_{cm}}{2(1 + \nu_c)}; \quad \sigma_{oc} = \frac{\sigma_{xc} + \sigma_{yc} + \sigma_{zc}}{3}; \quad \varepsilon_{oc} = \frac{\varepsilon_{xc} + \varepsilon_{yc} + \varepsilon_{zc}}{3};$$

$$\tau_{oc} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{xc} - \sigma_{yc})^2 + (\sigma_{zc} - \sigma_{yc})^2 + (\sigma_{zc} - \sigma_{xc})^2 + 6(\tau_{xyc}^2 + \tau_{zyc}^2 + \tau_{zxc}^2)};$$

$$\gamma_{oc} = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xc} - \varepsilon_{yc})^2 + (\varepsilon_{zc} - \varepsilon_{yc})^2 + (\varepsilon_{zc} - \varepsilon_{xc})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xyc}^2 + \gamma_{zyc}^2 + \gamma_{zxc}^2)}.$$

З урахуванням $\sigma_{xc} = \sigma_{yc} = 0$ для стержня, що розглядається: $\sigma_{oc} = \sigma_{zc} / 3$;

$$\varepsilon_{oc} = \frac{\varepsilon_{zc}}{3}; \tau_{oc} = \frac{1}{3} \sqrt{2\sigma_{zc}^2 + 6(\tau_{xyc}^2 + \tau_{zyc}^2 + \tau_{zxc}^2)}; \gamma_{oc} = \frac{2}{3} \sqrt{2\varepsilon_{zc}^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xyc}^2 + \gamma_{zyc}^2 + \gamma_{zxc}^2)}.$$

Граничні (максимально можливі) зсуви $\bar{\gamma}_r$ на октаедричних площинках у роботі [12] рекомендується визначити за наступними рівняннями регресії:

$$\bar{\gamma}_r = 7,97 \left(\frac{\tau_{oc}}{f_{ck}} \right)^2 + 15,22 \left(\frac{\tau_{oc}}{f_{ck}} \right) - 3,713. \quad (11)$$

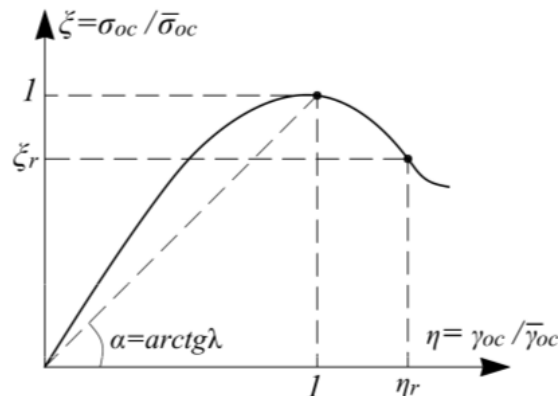


Рис. 2. Діаграма деформування бетону фіб в умовах складного напруженого стану

Модуль дилатації бетону з урахуванням [14] можна визначити за формулою:

$$\rho_c = g_{oc} = -\frac{\theta_c}{A_c} = -\frac{(\varepsilon_{xc} + \varepsilon_{yc} + \varepsilon_{zc})G_{oc}}{4f_{bk}}, \quad (12)$$

де θ_c, A_c – відповідно, граничні об'ємні деформації та інтенсивність деформацій бетону зсуву при чистому зсуві;

f_{bk} – характеристичне (розрахункове f_{bd}) значення граничних напружень зчеплення визначається: $f_{bd} = R_{b,sh} = 0,7\sqrt{R_b R_{bt}} = 0,7\sqrt{f_{cd} f_{ctd}}$.

Модуль об'ємних деформацій згідно [12] визначається: $K_c(\gamma_{oc}) = K_{oc} \cdot f(\gamma_{oc})$,

де $K_{oc} = E_{cm}/(1-2\nu_c)$ – початковий модуль об'ємних деформацій.

Виходячи з наведеного, модуль пружності E_c та коефіцієнт поперечних деформацій ν_c бетону при складному напруженому стані згідно з [9] визначається:

$$E_c = \frac{3K_c(\gamma_{oc})G_c(\gamma_{oc})}{G_c(\gamma_{oc}) + K_c(\gamma_{oc})}, \nu_c = \frac{K_c(\gamma_{oc}) - 2G_c(\gamma_{oc})}{2[G_c(\gamma_{oc}) + K_c(\gamma_{oc})]}. \quad (13)$$

Аналогічно з виразами для бетону можна отримати формули для змінного модуля при зсуві для неметалевої композитної арматури (FRP) та залежності для діаграми її зсуву:

$$G_f = \frac{E_{fk} \vartheta_f}{2(1+\nu_f)}; \tau_f = \frac{E_{fk} \vartheta_f}{2(1+\nu_f)} \gamma_f, \quad (14)$$

де ν_f – змінний коефіцієнт змінного модуля. Ураховуючи пружний характер деформування FRP вздовж волокон у практичних розрахунках можна прийти $\nu_f \cong 0$.

Осьову деформацію в стержнях поперечної арматури FRP і відносну кутову деформацію у прилеглому бетоні можна обчислити за [15]:

$$\varepsilon_{fw}^* = \gamma_c^* = \gamma_c \left[\frac{1 + d_{fw} E_{fw} \nu_{fw} (1 + \nu_c)}{2 l_{fw} E_{cm} \mathcal{G}_c} \right]^{-1}. \quad (15)$$

Сумісна робота поздовжньої та поперечної арматури FRP при розрахунку конструкцій ураховується шляхом зменшення розрахункового значення міцності на розтяг поздовжньої арматури за [15] з понижуючим коефіцієнтом $k_I=0,08\dots 0,10$:

$$\tilde{f}_{fd} = f_{fd} = \sqrt{\frac{1 - 3s^2 k_1 \left(\frac{ctg^2 \alpha}{l_{fw,x}^2} + \frac{ctg^2 \beta}{l_{fw,y}^2} \right)}{4(1 + \nu_f)^2}}, \quad (16)$$

де s – крок поперечної арматури;

α – кут нахилу просторової тріщини на горизонтальній грані елемента відносно осі z ;

β – кут нахилу просторової тріщини на вертикальній грані елемента відносно осі z .

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Мета даного дослідження полягає в подальшому розвитку та адаптації прийнятої у загальному вигляді нелінійної деформаційно-силової моделі стержневої бетонної конструкції з неметалевою композитною арматурою, яка з єдиних позицій механіки армованого FRP бетону дозволила б ураховувати особливості сумісної роботи бетону і арматури на всіх стадіях її деформування, включаючи руйнування.

Для досягнення поставленої мети визначені наступні задачі: 1) з'ясувати стан наукової розробки теми, окреслити джерельну базу; 2) сформулювати основні гіпотези і теоретичні передумови розрахункової моделі; 3) скомпонувати нормальний перетин дослідної конструкції; 4) скласти рівняння рівноваги внутрішніх зусиль і зовнішніх силових факторів у розрахунковому перерізі прогінної бетонної конструкції з FRP; 5) визначити узагальнені лінійні та кутові деформації плоских розрахункових перерізів вказаних конструкцій; 6) скласти фізичні співвідношення для загального випадку напруженого стану нормального перетину бетонного стержня з FRP; 7) визначити напрямок і довжину нахиленої до поздовжньої осі елемента просторової руйнуючої тріщини; 8) обчислити координати центру згину та центру кручення стержня з урахуванням утворення в бетоні тріщин; 9) розробити алгоритм визначення несучої здатності розрахункових нормальних перерізів бетонних стержнів прямокутного перерізу, армованих FRP; 10) сформулювати відповідні висновки.

Бетонну частину нормального перетину елемента уявно поділяємо на призматичні скінчені елементи (рис. 3, а), найменший розмір яких відповідає найбільшому розміру крупного заповнювача бетону. Кожна така часка нумерується та визначаються координати її центра x_{cn} , y_{cn} , відносно центральних осей, площа A_{cn} , нормативна міцність бетону на розтяг f_{ctk} , стиск f_{ck} , модуль деформацій E_{cm} . Коефіцієнт поперечних деформацій вважається сталим: $\nu_c = 0,2$. Такий підхід дає можливість визначати напружено-деформований стан, в тому числі несучу здатність, тріщиностійкість та деформативність елементів складеного перетину, виготовлення або нарощування яких виконували поетапно бетонами різних класів. Він дозволяє також розраховувати стержні, які попали під вплив фізичної або хімічної корозії, високих температур тощо.

Вважаємо, що стержні поздовжньої арматури FRP розташовані згідно з рис. 3, б. Їх

позначаємо відповідним номером j , вказуємо їх діаметр d_{fj} , координати центрів ваги відносно головних осей інерції перетину, нормативне значення міцності f_{fk} , нормативне значення деформацій ε_{fk} або гранично значення попередньо напруженої FRP ε_{fju} , модуль деформацій E_{fjk} згідно прийнятого класу FRP. Коефіцієнт поперечних деформацій для всіх стержнів поздовжньої FRP також приймається сталим, наприклад, $\nu_f = 0,22 - 0,25$ для BFRP.

Стержні поперечної арматури FRP (хомути) розташовуються у площині поперечного перетину по його контуру. Вони уявно поділяються на окремі частки, кожній з яких надається відповідний номер і вказується її діаметр d_{fwi} , площа A_{fwi} , площа поверхні дотику з бетоном A_{cfwi} та прив'язка їх до центральних осей перетину (x_{fj}, y_{fj}) . Вертикальним і горизонтальним поперечним стержням, розташованим у площині перетину, задаються: нормативне значення міцності на розтяг f_{fwk} , модуль пружності E_{fw} , для заданого класу FRP, коефіцієнт поперечних деформацій ν_f , який, наприклад, для BFRP дорівнює $0,22 - 0,25$, нормативне значення деформацій ε_{fwk} та відносні деформації при найбільшому навантаженні ε_{fwu} .

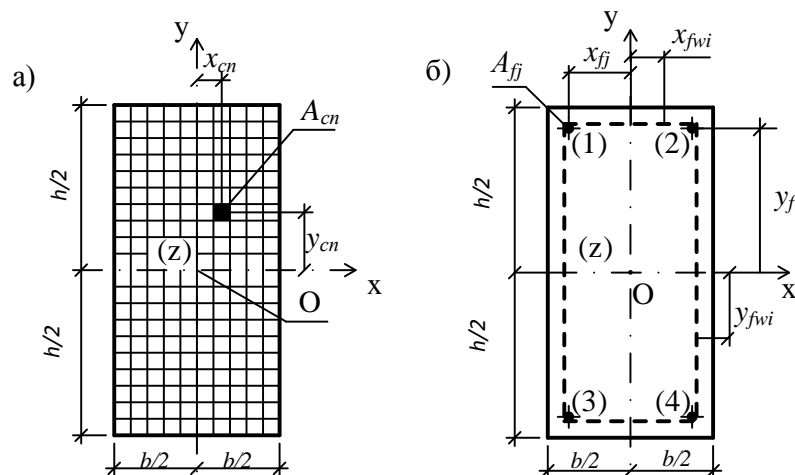


Рис. 3. Складові частки бетону (а), композитної арматури FRP (б) розрахункового поперечного перерізу стержня

Поперечна арматура FRP для вказаного на рис. 3 перетину ураховується по довжині бетонного стержня як розподілений по його грані шар погонної площі

$$A_{zfw} = \frac{\pi d_{fwi}^2}{4s_i}, \quad (17)$$

де s_i – крок поперечних стержнів у поздовжньому напрямку.

Рівняння рівноваги.

З урахуванням викладеного вище для розрахункового перетину бетонного стержня з FRP можна зікласти наступні рівняння рівноваги:

$$\left\{ \begin{aligned} N_z &= \sum_{n=1}^k A_{cn} \sigma_{zcn} + \sum_{j=1}^m A_{ff} \sigma_{zff}, \\ M_y &= \sum_{n=1}^k A_{cn} \sigma_{zcn} X_{cn} + \sum_{j=1}^m A_{ff} \sigma_{zff} X_{ff}, \\ M_x &= \sum_{n=1}^k A_{cn} \sigma_{zcn} Y_{cn} + \sum_{j=1}^m A_{ff} \sigma_{zff} Y_{ff}, \\ V_x &= \sum_{n=1}^k A_{cn} \tau_{zxcn} + \sum_{j=1}^m A_{ff} \tau_{zxfj} + \sum_{i=1}^{l_{xfwi,1-2,3-4}} A_{xfwi} \sigma_{xfwi}, \\ V_y &= \sum_{n=1}^k A_{cn} \tau_{zycn} + \sum_{j=1}^m A_{ff} \tau_{zyfj} + \sum_{i=1}^{l_{yfw,1-4,2-3}} A_{yfw} \sigma_{yfw}, \\ T_{xy} &= \sum_{n=1}^k A_{cn} (\tau_{zycn} X_{cn}^{tor} - \tau_{zxcn} Y_{cn}^{tor}) + \sum_{j=1}^m A_{ff} (\tau_{zyfj} X_{ff}^{tor} - \tau_{zxfj} Y_{ff}^{tor}) + \sum_{i=1}^{l_{xyfw,1-4}} A_{xfwi} (\sigma_{yfw} X_{fw}^{tor} - \sigma_{xfwi} Y_{fw}^{tor}), \end{aligned} \right.$$

де σ_{zcn} – нормальні внутрішні сили (напруження) в n -ному скінченному елементі бетонної частини перетину;

σ_{zff} – нормальні внутрішні сили (напруження) в j -ому стержні FRP;

τ_{zxcn}, τ_{zycn} – дотичні внутрішні сили (напруження) в n -ому скінченному елементі бетонної частини перетину;

τ_{zxfj}, τ_{zyfj} – дотичні внутрішні сили (напруження) в j -ому стержні FRP;

$\sigma_{xfwi}, \sigma_{yfw}$ – нормальні внутрішні сили (напруження) на i -ій ділянці поперечних стержнів FRP.

Нормальні та дотичні внутрішні сили в системі рівнянь (18) обчислюються за повними діаграмами стану бетону і арматури FRP з урахуванням наведених вище припущень:

$$\begin{aligned} \sigma_{zml} &= E_{ml} \zeta_{zml} \varepsilon_{zml} & \tau_{zxml} &= G_{ml} \vartheta_{zxml} \gamma_{zxml} \\ \tau_{zyml} &= G_{ml} \vartheta_{zyml} \gamma_{zyml} & \tau_{xyml} &= G_{ml} \vartheta_{xyml} \gamma_{xyml}, \end{aligned} \quad (19)$$

де ζ – коефіцієнт зміни змінного модуля деформацій бетону E_{ml} ;

ϑ – коефіцієнт зміни змінного модуля зрізу G_{ml} ;

$m = c$ для скінчених елементів бетонної частини перетину;

$m = f$ для стержнів поздовжньої арматури FRP;

$m = fw$ для стержнів поперечної арматури FRP;

l – номер скінченного елемента бетону або стержня поздовжньої арматури FRP.

Лінійні та кутові деформації у загальному вигляді обраховуються в припущенні справедливості гіпотези Бернуллі з урахуванням рішень Х. Хана [16] при поперечному згині стержня, функцій розподілу дотичних напружень Сен-Венана при вільному і Ю. Школи [17] при стисненому його крученні:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{zml} &= \varepsilon_0 + \chi_x X_{ml} + \chi_y Y_{ml} + \beta_z \theta_z \varphi(X_{ml}^{tor}, Y_{ml}^{tor}); \\ \gamma_{zxml} &= K_x g_{xml} + K_y h_{yml} + \theta_z f_{zxml}; \\ \gamma_{zyml} &= K_y g_{zyml} + K_x h_{xml} - \theta_z f_{zyml}; \\ \gamma_{xyml} &= -\theta_z f_{xyml}, \end{aligned} \right. \quad (20)$$

де ε_0 – відносна лінійна деформація по осі z ;

χ_x, χ_y – кривизни згину у площинах дії згинальних моментів M_x, M_y відповідно.

K_x, K_y – кривизни зсуву в площинах дії поперечних сил V_x, V_y відповідно;

θ_z – відносний (погонний) кут закручування одиниці довжини стержня (рад/м);

$\varphi(X_{ml}^{tor}, Y_{ml}^{tor})$ – функція крутіння Сен-Венана відносно центру кручення;

β_z – коефіцієнт депланації всього поперечного перерізу, який при стисненому крученні визначається за формулою

$$\beta_z = \eta e^{-\eta z},$$

де η – коефіцієнт стисненого кручення, який визначається за [8];

z – відстань по довжині стержня від розрахункового перерізу до найближчого жорсткого закріплення. При вільному крученні стержнів приймаємо $\beta_z = 1$;

$g_{xnl}, g_{yml}, h_{xnl}, h_{yml}$ – функції розподілу кутових деформацій при поперечному згині Хана;

$f_{zxml} = \tau_{zxml} / (\theta_z \cdot G_{ml}), f_{zyml} = \tau_{zyml} / (\theta_z \cdot G_{ml}), f_{xyml} = \tau_{xyml} / (\theta_z \cdot G_{ml})$ – функції розподілу кутових деформацій при вільному і стисненому крученні.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ ЗАГАЛЬНІ. ЗАГАЛЬНІ ФІЗИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

З урахуванням рівнянь рівноваги (18), узагальнених деформацій (20), діаграм стану бетону і арматури та розвиваючи ідеї [1, 2, 3, 4, 17] в частині урахування впливу поперечних сил, загальні фізичні співвідношення для розрахункового поперечного перерізу бетонного стержня з FRP можна представити:

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \\ V_x \\ V_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & D_{36} \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ 0 & 0 & 0 & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi_y \\ \chi_x \\ K_x \\ K_y \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (21)$$

або $\{N\} = [D]\{\varepsilon\}$,

де D_{11} – поздовжня (вздовж осі z) жорсткість стержня:

$$D_{11} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cnn} \zeta_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \zeta_{fj}}{\psi_{fj}}. \quad (22)$$

D_{22}, D_{33} – жорсткості стержня у площинах zox, zoy (згинальні):

$$D_{22} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cnn} \zeta_{cn} X_{cn}^2 + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \zeta_{fj} X_{fj}^2}{\psi_{fj}}; \quad (23)$$

$$D_{33} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cnn} \zeta_{cn} Y_{cn}^2 + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \zeta_{fj} Y_{fj}^2}{\psi_{fj}}. \quad (24)$$

D_{23} – жорсткість взаємного впливу згину в двох площинах:

$$D_{23} = D_{32} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} X_{cn} Y_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \zeta_{z fj} X_{fj} Y_{fj}}{\psi_{fj}}. \quad (25)$$

D_{12}, D_{13} – жорсткості впливу поздовжньої сили на згин та згинальних моментів на видовження елемента:

$$D_{12} = D_{21} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} X_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \zeta_{z fj} X_{fj}}{\psi_{fj}}; \quad (26)$$

$$D_{13} = D_{31} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} Y_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \zeta_{z fj} Y_{fj}}{\psi_{fj}}. \quad (27)$$

D_{44}, D_{55} – жорсткості зсуву в напрямку дії поперечних сил V_x, V_y :

$$D_{44} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{cmn} g_{zxcn} g_{xcn}}{2(1+\nu_c)} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} g_{zxfj} g_{xfj}}{2(1+\nu_f)} + \sum_{i=1}^{l_{fw,x}} A_{fwi} E_{fw} \zeta_{xfwi} g_{xfwi,c}; \quad (28)$$

$$D_{55} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{cmn} g_{zycn} g_{ycn}}{2(1+\nu_c)} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} g_{zyfj} g_{yjfj}}{2(1+\nu_f)} + \sum_{i=1}^{l_{fw,y}} A_{fwi} E_{fw} \zeta_{yfwi} g_{yfwi,c}. \quad (29)$$

D_{45}, D_{54} – жорсткості взаємного впливу згину в площинах zox, zoy :

$$D_{45} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{cmn} g_{zxcn} h_{xcn}}{2(1+\nu_c)} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} g_{zxfj} h_{xfj}}{2(1+\nu_f)} + \sum_{i=1}^{l_{fw,x}} A_{fwi} E_{fw} \zeta_{xfwi} h_{xfwi,c}; \quad (30)$$

$$D_{54} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{cmn} g_{zycn} h_{ycn}}{2(1+\nu_c)} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} g_{zyfj} h_{yjfj}}{2(1+\nu_f)} + \sum_{i=1}^{l_{fw,y}} A_{fwi} E_{fw} \zeta_{yfwi} h_{yfwi,c}. \quad (31)$$

D_{16}, D_{26}, D_{36} – жорсткості впливу поздовжньої сили N та згинальних моментів M_x, M_y на зсув у площині, а також крутного моменту T_{xy} на зсув у площинах ZOX, ZOY :

$$D_{16} = D_{61} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} \beta_z \varphi(X_{cn}^{tor}, Y_{cn}^{tor}) + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \zeta_{z fj} \beta_z \varphi(X_{fj}^{tor}, Y_{fj}^{tor})}{\psi_{fj}}; \quad (32)$$

$$D_{26} = D_{62} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} X_{cn}^{tor} \beta_z \varphi(X_{cn}^{tor}, Y_{cn}^{tor}) + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \zeta_{z fj} X_{fj}^{tor} \beta_z \varphi(X_{fj}^{tor}, Y_{fj}^{tor})}{\psi_{fj}}; \quad (33)$$

$$D_{36} = D_{63} = \sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cmn} \zeta_{cn} Y_{cn}^{tor} \beta_z \varphi(X_{cn}^{tor}, Y_{cn}^{tor}) + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \zeta_{z fj} Y_{fj}^{tor} \beta_z \varphi(X_{fj}^{tor}, Y_{fj}^{tor})}{\psi_{fj}}. \quad (34)$$

D_{46}, D_{56} – жорсткості впливу крутного моменту T_{xy} на зсув у площинах z_{ox}, z_{oy} та поперечних сил V_x, V_y на зсув в площині xoy :

$$D_{46} = D_{64} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{cmn} g_{zxcn} f_{zxcn}}{2(1+\nu_c)} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} g_{zxfj} f_{zxfj}}{2(1+\nu_f)} + \sum_{i=1}^{l_{fw,x}} A_{fwi} E_{fw} \zeta_{xfwi} f_{zxfwi,c}; \quad (35)$$

$$D_{56} = D_{65} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{cmn} g_{zycn} f_{zycn}}{2(1+\nu_c)} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} g_{zyfj} f_{zyfj}}{2(1+\nu_f)} + \sum_{i=1}^{l_{fw,y}} A_{fwi} E_{fw} \zeta_{yfwi} f_{zyfwi,c}. \quad (36)$$

D_{66} – жорсткість при крученні стержня в площині xoy :

$$D_{66} = \sum_{n=1}^k \frac{A_{cn} E_{cnn} \vartheta_{xycn}}{2(1+\nu_c)} (f_{zycn} X_{cn}^{tor} - f_{zxcn} Y_{cn}^{tor}) + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj} \vartheta_{xyfj}}{2(1+\nu_f)} (f_{zyfj} X_{fj}^{tor} - f_{zxfj} Y_{fj}^{tor}) + \sum_{i=1}^{l_{f_{v,y}} + l_{f_{v,x}}} A_{fwi} E_{fwi} \zeta_{xyfwi} (f_{zyfwi} X_{fwi}^{tor} - f_{zxfwi} Y_{fwi}^{tor}), \quad (37)$$

де ψ_{fj} – коефіцієнт В. І. Мурашева, який може бути визначений згідно з чинними російськими нормами за формулою:

$$\psi_{fj} = 1 - \omega \frac{\sigma_{fj,cr}}{\sigma_{fj}}, \quad (38)$$

де $\sigma_{fj,cr}$ – напруження в j – тому стержні в момент виникнення тріщин;

σ_{fj} – поточне напруження в j – тому стержні повздовжньої арматури на рівні навантаження, що розглядається;

ω – коефіцієнт повноти епюри розтягнутого бетону, який згідно з рекомендаціями [14] можна приймати: $\omega = 0,7$.

Будемо вважати, що фізичні співвідношення (21)...(37) є справедливими на всіх стадіях напружено – деформованого стану стержневих бетонних елементів з FRP прямокутного перерізу при простому пропорційному їх навантаженні.

Такий підхід дає змогу урахувати дискретність розташування поздовжньої та поперечної арматури FRP, нелінійність властивостей використаних матеріалів шляхом введення січних модулів при їх розтязі (стиску) та зсуві, нерівномірний розподіл напружень по довжині поперечної арматури FRP, а також розглядати загальний випадок складного напруженого стану зі стисненим або вільним крученням, центральним чи позацентровим стиском (розтягом) з малими або великими ексцентриситетами, косим згином.

Вказані фізичні співвідношення можна застосовувати й до інших стержневих бетонних елементів з FRP, що випробують складний напружено – деформований стан, з довільною формою поперечного перерізу за наявності відповідних функцій розподілу дотичних напружень.

При сталому співвідношенні зовнішніх силових факторів на будь – якій стадії навантаження можна знайти вектор деформацій, використовуючи фізичні співвідношення (21)...(37):

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1} \{N\}, \quad (39)$$

компоненти якого дають змогу визначити узагальнені лінійні (ε_z) та кутові ($\gamma_{zy}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$) деформації складнонапружених стержневих залізобетонних елементів з FRP.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

5.1. Визначення напрямку і довжини похилої до поздовжньої осі просторової руйнуючої тріщини

Утворення тріщин на гранях залізобетонного стержня доцільно визначати за оригінальною методикою [15] шляхом видалення із розрахунку тих бетонних елементів, просторовий напружено-деформований стан яких не задовольняє умові

міцності згідно з триінваріантним критерієм В. М. Круглова [10, 11] або умові міцності [5] при неоднорічних напружених станах. Такий підхід дозволяє простежити за розвитком тріщини у площині поперечного перерізу бетонного стержня з FRP, а також обчислити нахил цієї тріщини до його поздовжньої осі на зовнішніх гранях шляхом визначення напрямку площинки головних розтягуючих напружень у частках бетону, розташованих на цих гранях.

Якщо не виконується умова міцності бетону за одним із вказаних критеріїв, то для визначення орієнтації тріщини потрібно знайти направляючий косинус площинки з максимальним розтягуючим напруженням. Головні напруження у випадку просторового напруженого стану рекомендується визначати за виразом [9]:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0, \quad (40)$$

де I_1, I_2, I_3 – інваріанти тензора напружень у довільній точці бетону.

Ураховуючи те, що згідно з граничними умовами і у відповідності з прийнятими гіпотезами у точках, віддалених від місць прикладання зосереджених силових факторів, $\sigma_{xcn} = \sigma_{ycn} = 0$, вирази для інваріантів тензора напружень приймають значення $I_1 = \sigma_{zcn}, I_2 = -\tau_{zxcn}^2 - \tau_{zycn}^2 - \tau_{xycn}^2, I_3 = 0$, підставляючи які в рівняння (40) знаходимо розв'язок:

$$\sigma_{cn} = 0,5 \left[I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 4I_2} \right] = 0,5 \left[\sigma_{zcn} \pm \sqrt{\sigma_{zcn}^2 + 4(\tau_{zxcn}^2 + \tau_{zycn}^2 + \tau_{xycn}^2)} \right]. \quad (41)$$

Найбільші розтягуючі напруження визначаються при утриманні знаку «+». Тоді значення направляючих косинусів площинки максимальних розтягуючих напружень [9] в одній із часток бетону, наприклад, з правого боку стержня можна знайти за допомогою виразів:

$$\cos(x, v_{cn,1-4}) = \frac{\tau_{zxcn,1-4}}{S}; \quad \cos(y, v_{cn,1-4}) = \frac{\tau_{zycn,1-4}}{S}; \quad \cos(z, v_{cn,1-4}) = \frac{\sigma_{zcn,1-4}}{S}; \quad (42)$$

де $S = \sqrt{\sigma_{zcn,1-4}^2 + \tau_{zxcn,1-4}^2 + \tau_{zycn,1-4}^2 + \tau_{xycn}^2}$;

$v_{cn,1-4}$ – нормаль до площинки з максимальними розтягуючими напруженнями в частці бетону, що розглядається;

1–4 – індекс, що вказує на прив'язку правої бічної поверхні елемента до 1 і 4 стержнів повздовжньої арматури.

Аналогічно можна визначити направляючі косинуси площинки з максимальними розтягуючими напруженнями в окремих частках бетону на інших гранях елемента, прив'язуючи їх до відповідної повздовжньої арматури.

Кут нахилу тріщини в межах крайньої частки бетону елемента на довільній грані розглядається як кут між лінією, паралельною поздовжній осі Z , та лінією перетину площини грані з площиною головних розтягуючих напружень. Із аналітичної геометрії відомо, що кути нахилу руйнуючої тріщини, наприклад, на нижній та правій бічній гранях стержневої бетонної конструкції з FRP в межах часток бетону, що знаходяться на цих гранях, відповідно, дорівнюють:

$$\alpha_{cn,3-4} = \arccos \left[\frac{\cos(x, v_{cn,3-4})}{\sqrt{\cos^2(x, v_{cn,3-4}) + \cos^2(z, v_{cn,3-4})}} \right] = \arccos \left[\frac{\tau_{zxcn,3-4}}{\sqrt{\tau_{zxcn,3-4}^2 + \sigma_{zcn,3-4}^2}} \right];$$

$$\beta_{cn,1-4} = \arccos \left[\frac{\cos(y, v_{cn,1-4})}{\sqrt{\cos^2(y, v_{cn,1-4}) + \cos^2(z, v_{cn,1-4})}} \right] = \arccos \left[\frac{\tau_{zycn,1-4}}{\sqrt{\tau_{zycn,1-4}^2 + \sigma_{zcn,1-4}^2}} \right]. \quad (43)$$

З урахуванням (43) довжина проекції тріщини, що утворюється на вказаних вище гранях, на поздовжню вісь бетонного стержня з FRP становить:

$$l_{cr,3-4}^{zox} = \sum_1^{b/b_c} b_* ctg \alpha_{cn,3-4}, \quad l_{cr,1-4}^{zoy} = \sum_1^{h/h_c} h_* ctg \beta_{cn,1-4}. \quad (44)$$

Прийнята методика дозволяє простежити за розвитком і зміною кутів нахилу руйнуючої тріщини на бічних поверхнях (гранях) стержня. Отже, ті частки бетону, в яких виникла тріщина, виключаються з роботи. Проте, необхідно урахувувати той факт, що на величину зусиль, які сприймаються поздовжньою арматурою, суттєво впливає робота бетону, який знаходиться між тріщинами. Для урахування роботи розтягнутого бетону між тріщинами можна використати схему зчеплення арматури з бетоном, запропоновану в свій час В. І. Мурашевим.

Згідно з [9] загальні напруження у об'ємному бетонному елементі з FRP складаються з напружень у бетоні і арматурі:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_c\} + \{\sigma_f\}. \quad (45)$$

Ураховуючи сумісність відносних деформацій бетону і арматури зв'язок між напруженнями і деформаціями в середині елемента можна представити:

$$\{\sigma\} = ([d_f] + [D_c])\{\varepsilon\} = [d]\{\varepsilon\}, \quad (46)$$

де $[d] = ([d_f] + [D_c])$ – матриця механічних характеристик бетону з FRP.

Матриця механічних характеристик армування у загальному виді [12]

$$[d_f] = \sum_i [d_f^i], \quad (47)$$

де $[d_f^i]$ – матриця відповідного i -того напрямку армування, вклад якого визначається як добуток відповідної характеристики на косинус кута між напрямком армування і перпендикуляром до грані елемента, яку перетинають арматурні стержні.

Середні осьові деформації j -того розтягнутого чи стиснутого стержня поздовжньої арматури FRP в зоні утворення тріщини згідно з теорією В. І. Мурашева визначається так:

$$\varepsilon_{fmj} = \varepsilon_{ff} \psi_{ff} + \varepsilon_{cn} (1 - \psi_{ff}), \quad (48)$$

де ε_{ff} – деформації j -того розтягнутого чи стиснутого вільного (без бетону) стержня поздовжньої арматури в зоні утворення тріщини;

ε_{cn} – деформації n -ої частки бетону в тому місці, де розташований j -ий стержень поздовжньої арматури FRP на ділянці між тріщинами;

ψ_{ff} – коефіцієнт В. І. Мурашева, який визначається за формулою (38).

5.2. Визначення координат центру згину та центру кручення з урахуванням тріщиноутворення

При утворенні тріщини бетонна частина поперечного перерізу зменшується, а центр його жорсткості, відносно якого потрібно знаходити характеристики жорсткості, що входять до системи рівнянь (21), зміщується в бік стиснутої грані. Згідно з

прийнятою гіпотезою нормальні напруження σ_z не сприймаються поперечною арматурою. Тому центр згину і центр кручення не збігаються. Координати центру згину приведенного по жорсткості поперечного перерізу бетонного стержня з FRP з урахуванням зміни напруженого стану арматури в результаті утворення тріщин можна представити:

$$X_c = \frac{\sum_{n=1}^k A_{cn} y_{cn} E_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} y_{fj} E_{fj}}{\psi_{fj}}}{\sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj}}{\psi_{fj}}}; \quad Y_c = \frac{\sum_{n=1}^k A_{cn} x_{cn} E_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} x_{fj} E_{fj}}{\psi_{fj}}}{\sum_{n=1}^k A_{cn} E_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} E_{fj}}{\psi_{fj}}}. \quad (49)$$

Координати центру кручення з урахуванням наявності поперечної арматури визначаються відповідно:

$$X_{c,tor} = \frac{\sum_{n=1}^k A_{cn} y_{cn} G_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} y_{fj} G_{fj}}{\psi_{fj}} + \sum_{i=1}^{l_{fw,y}} A_{fwi} y_{fwi} E_{fwi}}{\sum_{n=1}^k A_{cn} G_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} G_{fj}}{\psi_{fj}} + \sum_{i=1}^{l_{fw,y}} A_{fwi} E_{fwi}}; \\ Y_{c,tor} = \frac{\sum_{n=1}^k A_{cn} x_{cn} G_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} x_{fj} G_{fj}}{\psi_{fj}} + \sum_{i=1}^{l_{fw,x}} A_{fwi} x_{fwi} E_{fwi}}{\sum_{n=1}^k A_{cn} G_{cn} + \sum_{j=1}^m \frac{A_{fj} G_{fj}}{\psi_{fj}} + \sum_{i=1}^{l_{fw,x}} A_{fwi} E_{fwi}} \quad (50)$$

де x_{cn}, y_{cn} – координати центрів ваги бетонних часток відносно осей симетрії поперечного перерізу;

x_{fj}, y_{fj} – координати центрів ваги стержнів поздовжньої арматури FRP відносно тих же осей;

x_{fwi}, y_{fwi} – координати центрів ваги окремих ділянок стержнів поперечної арматури FRP відносно осей симетрії перерізу.

При визначенні характеристик жорсткостей впливу, в т.ч. взаємного, повздовжніх та поперечних сил, а також згинальних моментів у рівняннях системи (21) використовуються координати центрів ваги часток бетону, стержнів поздовжньої та окремих ділянок стержнів поперечної арматури відносно центру згину. Тобто значення координат y, x у виразах (23)...(31) визначаються так:

$$X_{cn} = x_{cn} - X_c, \quad X_{fj} = x_{fj} - X_c, \quad X_{fwi} = x_{fwi} - X_c; \\ Y_{cn} = y_{cn} - Y_c, \quad Y_{fj} = y_{fj} - Y_c, \quad Y_{fwi} = y_{fwi} - Y_c. \quad (51)$$

При визначенні характеристик жорсткості четвертого, п'ятого і шостого рівнянь у формулах (28)...(36) використовуються координати відносно центру кручення:

$$X_{cn}^{tor} = x_{cn} - X_{c,tor}; \quad X_{fj}^{tor} = x_{fj} - X_{c,tor}; \quad X_{fwi}^{tor} = x_{fwi} - X_{c,tor}; \\ Y_{cn}^{tor} = y_{cn} - Y_{c,tor}; \quad Y_{fj}^{tor} = y_{fj} - Y_{c,tor}; \quad Y_{fwi}^{tor} = y_{fwi} - Y_{c,tor}. \quad (52)$$

5.3. Умови закінчення розрахунку

Стержні поздовжньої арматури FRP перестають сприймати зростаюче навантаження (умовно виключаються з роботи), якщо компоненти напружено-деформованого стану такі, що не задовольняють критерій міцності FRP, в якому

границя текучості визначена з урахуванням її зменшення (16) внаслідок складного напруженого стану.

Стержень поперечної арматури FRP умовно виключається з роботи, якщо нормальні напруження хоча би на одній з його ділянок досягнуть напружень f_{fk} .

Інколи в елементах поперечної арматури при великих крутних моментах з'являються зусилля, при яких порушується їх зчеплення з бетоном внаслідок того, що дотичні напруження в бетоні поблизу цієї арматури досягають межі міцності на зсув. У такому випадку умовно виключається з роботи той елемент поперечної арматури, в якому виникло порушення зчеплення з бетоном, тобто не виконується умова:

$$\tau_{zxc} < f_{bd} \text{ або } \tau_{zyc} < f_{bd}, \quad (53)$$

де f_{bd} – розрахункове значення граничних напружень зчеплення арматури з бетоном.

Згідно з чинними нормами $f_{bd} = 2,25\eta_1\eta_2f_{ctd}$,

де f_{ctd} – розрахункове значення міцності бетону на розтяг (в експериментах – характеристичне f_{ctk}); $\eta_1 = 1,0$ при нормальних умовах зчеплення бетону з арматурою; $\eta_2 = 1,0$ при діаметрах арматури до 32мм включно.

На кожному етапі навантаження розрахунок здійснюється шляхом виконання деякої кількості ітерацій до тих пір, доки точність визначення всіх компонент вектора деформацій не буде задовольняти деяку задану величину, тобто доки не буде виконана умова:

$$\frac{\{\varepsilon\}_n - \{\varepsilon\}_{n-1}}{\{\varepsilon\}_n} < \{\eta\}, \quad (54)$$

де $\{\varepsilon\}_n$ – вектор деформацій, обчислений на n-ій ітерації;

$\{\varepsilon\}_{n-1}$ – те ж на попередній, n – 1-ій, ітерації;

$\{\eta\}$ – вектор точності, складений із заданих точностей для кожної складової вектора деформацій.

Послідовно збільшуючи вектор діючих у стержні зусиль заданого співвідношення, можна визначити несучу здатність бетонного стержня з FRP. У якості граничного навантаження приймається максимальний вектор зусиль $\{N\}$, при якому система рівнянь (21) має рішення, тобто визначник матриці $[D]$ не дорівнює нулю (з деякою заданою точністю η_{det}) або несуча здатність бетонного стержня з FRP вважається вичерпаною, якщо

$$\det[D] < \eta_{det}. \quad (55)$$

5.4. Алгоритм визначення несучої здатності розрахункових нормальних перерізів бетонних стержнів прямокутного перерізу, армованих FRP

У межах даної роботи зі збереженням основних принципів [9, 12, 18] здійснюється розробка нової програми «NTVM» в середовищі ефективної комп'ютерної математики MATLAB, яка дозволить у повному об'ємі визначити всі внутрішні зусилля (силові фактори) у загальному випадку складного напружено – деформованого стану бетонного стержня з FRP з урахуванням його вільного або стисненого кручення, сучасних критеріїв міцності матеріалів при простому пропорційному навантаженні.

Блок–схема алгоритму визначення несучої здатності бетонних стержнів прямокутного поперечного перерізу з довільним ортогональним армуванням FRP

представлена на рис. 4.

Алгоритм складається з блоку введення вихідних даних, основної частини, допоміжних підпрограм перевірки умов збільшення вектора навантаження і вичерпання несучої здатності та блоку роздрукування результатів розрахунків.

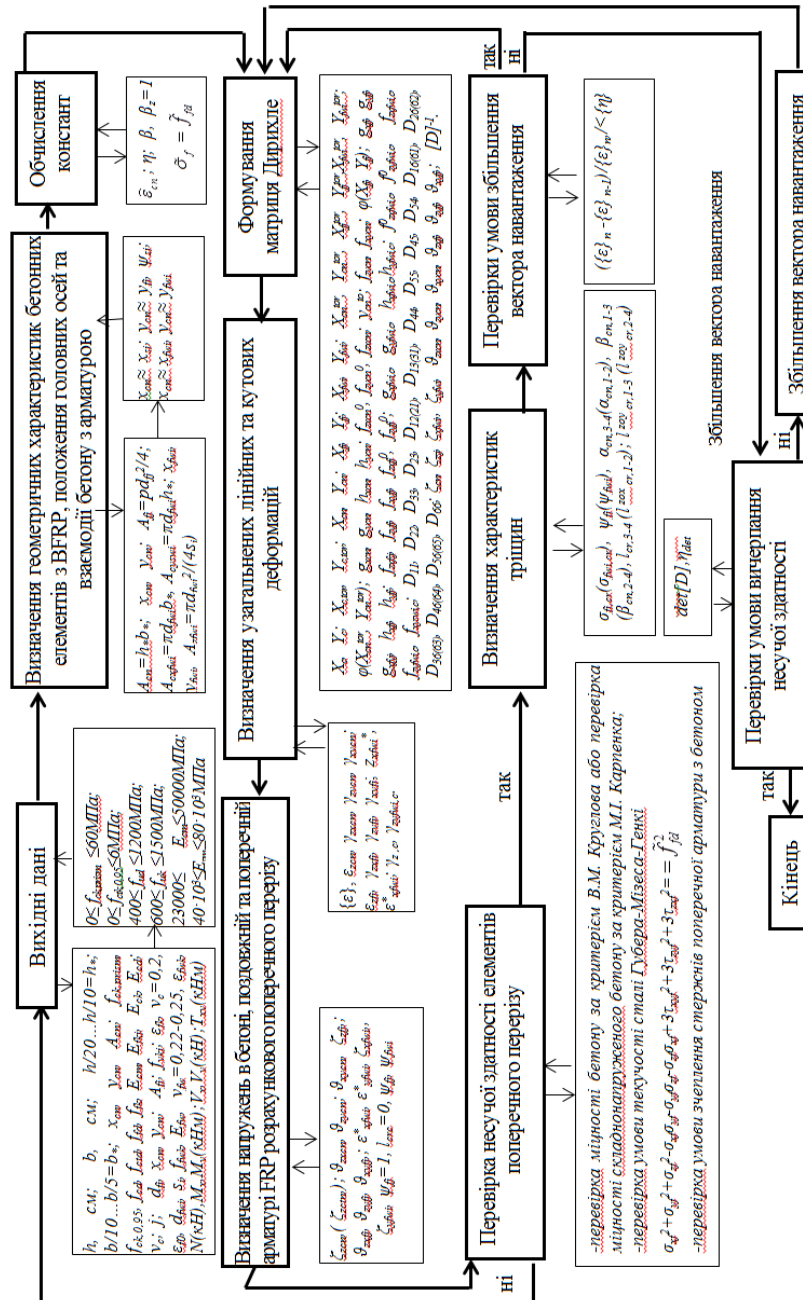


Рис. 4. Блок – схема алгоритму розрахунку

6 ВИСНОВКИ

1. Отримала подальший розвиток прийнята у загальному вигляді нелінійна деформаційно-силова модель стержневої бетонної конструкції з неметалевою композитною арматурою, яка з єдиних позицій механіки армованого бетону дозволяє урахувати особливості сумісної роботи бетону і арматури FRP на всіх стадіях, включаючи руйнування, в її розрахункових перерізах у загальному випадку напруженого стану з урахуванням сумісної дії повздовжніх та поперечних сил, згинальних та крутних моментів. Її можна застосувати при проектуванні чи підсиленні балок, ригелів, колон та елементів розкисних ферм прямокутного поперечного перерізу, а також перевірці несучої здатності існуючих стержневих бетонних конструкцій з FRP,

що працюють в умовах складного напружено-деформованого стану або агресивного впливу оточуючого середовища.

2. Прогноз тріщиноутворення на гранях залізобетонного стержня і перевірку міцності бетону рекомендується здійснювати за тринваріантним критерієм В. М. Круглова або п'ятипараметричним критерієм М. І. Карпенка та його учнів.

3. Утворення тріщин в бетоні ураховується шляхом виключення з розрахунку тих часток бетону, просторовий напружено-деформований стан яких не задовольняє зазначеним в п.2 висновків критеріям міцності.

4. Проведені експериментально-теоретичні дослідження [19] підтвердили можливість і доцільність застосування представлені деформаційно-силової моделі для визначення несучої здатності, тріщиностійкості, деформативності, а також орієнтації тріщини відносно граней бетонного елемента з FRP та її довжини на цих гранях.

5. Зниження міцності повздовжньої арматури FRP, зумовлене її сумісною роботою з аналогічною поперечною арматурою, доцільно ураховувати за допомогою (16). Стержні цієї арматури FRP також умовно виключаються з роботи, якщо напруження в ній досягають значень f_{fd} із (16). Стержень поперечної арматури умовно виключається з роботи, якщо нормальні напруження хоча би на одній з його ділянок досягнуть значень \tilde{f}_{fd} .

6. Представленні рівняння рівноваги (18), вирази для узагальнених деформацій (20), аналітичні описи діаграм стану матеріалів, загальні фізичні співвідношення у вигляді (21) є справедливими для всіх стадій складного напружено-деформованого стану бетонного стержня з FRP. Пластичні властивості бетону ураховуються шляхом використання січних модулів пружності при стиску, розтязі і зсуві, а зміщені внаслідок тріщиноутворення центри жорсткостей при згині й крученні стержня-відповідно, за допомогою виразів (50, 51).

Несуча здатність розрахункових перерізів та стержня, в цілому, визначається максимальним вектором зусиль заданого співвідношення або рівнів, при якому система рівнянь (21) ще має розв'язок, тобто визначник матриці жорсткості $[D]$ не дорівнює нулю із заданою точністю. Прогини і кути закручування окремих перерізів стержня, при потребі, можна визначити через їх відповідні кривизни згину і відносні (погонні) кути закручування, які обчислюються в процесі розрахунку.

Література

1. Карпюк В. М. Розрахункові моделі силового опору прогінних залізобетонних конструкцій у загальному випадку напруженого стану. Одеса: ОДАБА, 2014. 352 с.
2. Карпюк В. М., Костюк А. І., Сьоміна Ю. А. Нелінійна деформаційно-силова модель прогінних залізобетонних конструкцій у загальному випадку напруженого стану. Вісник ВІЕМ, 2017. №18. С. 136-150.
3. Karpyuk V. M., Kostyuk A. I., Semina Yu. A. General Case of Nonlinear Deformation-Strength Model of Reinforced Concrete Structures. *Strength of Materials*. 2018. Volume 50. Issue 3. P. 453–464.
4. Карпюк В. М., Петров О. М. Міцність, деформативність та тріщиностійкість прогінних залізобетонних елементів при їх згині з крученням. Одеса: Optimum, 2016. 171 с.
5. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
6. Биргер И. А., Пановко Я. Г. Прочность, устойчивость, колебания: справочник в 3т. Т. 1. М.: Машиностроение, 1968. 832 с.
7. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1956. 420 с.
8. Школа Ю. О. Напряженное состояние балок, подверженных стесненному кручению. Будівельні конструкції: міжвідомч. зб. наук. праць. К.: НДІБК, 2000. Вип. 52. С. 208–213.
9. Карпенко Н. И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.

10. Круглов В. М. Феноменологический критерий прочности бетона при трёхосном напряжённом состоянии. Известия вузов, серия: строительство и архитектура, 1986. №6. С. 6–11.
11. Круглов В. М. Нелинейные соотношения и критерий прочности бетона в трёхосном напряжённом состоянии. Строительная механика и расчёт сооружений, 1987. №1. С. 40–44.
12. Безушко Д. І. Нелінійні моделі матеріалів при розрахунку залізобетонних конструкцій, що згинаються, методом скінчених елементів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.23.01 – «Будівельні конструкції, будівлі та споруди». Одеса, 2008. 20 с.
13. Бондаренко В. М., Колчунов В. И. Расчетные модели силового сопротивления железобетона. Издательство Ассоциации строительных вузов. Москва, 2004. 472 с.
14. Гениев Г. А. Киссюк В. Н., Тюпин Г. А. Теория пластичности бетона и железобетона. М: Стройиздат, 1974. 316 с.
15. Школа Ю. А. Несущая способность и деформативность железобетонных стержневых элементов при сложном напряжённом состоянии: дис. на соискание научн. степени канд. техн. наук: спец. 05.23.01. Одесса, 2002. 197 с.
16. Хан Х. Теория упругости. Основы линейной теории и её применения М.: Мир, 1988. 344 с.
17. Яременко О. Ф., Школа Ю. А. Фізичні співвідношення для перерізів залізобетонних стержневих елементів у загальному випадку напруженого стану. Вісник національного університету «Львівська політехніка». Теорія і практика будівництва, 2007. №600. С. 339–344.
18. Клованич С. Ф., Мироненко И. Н. Метод конечных элементов в механике железобетона. Одеса: Изд-во ОНПУ, 2007. 100 с.
19. Karpiuk V., Tselikova A., Khudobych A., Karpiuk I., Kostyuk A. Study of strength, deformability property and crack resistance of beams with BFR. Eastern-European journal of enterprise technologies. Харків, Т. 4/7 Вип.106 2020. С. 42–53.

References

1. Karpiuk, V. M. (2014). *Rozrakhunkovi modeli sylovoho oporu prohynnykh zalizobetonnykh konstrukttsii u zahalnomu vypadku napruzhenoho stanu* [Computational models of the force resistance of spanning reinforced concrete structures in the general case of a stressed state]. (monograph). Odessa. ODABA [in Ukraine].
2. Karpiuk, V. M., Kostyuk, A. I., Somina, Yu A. (2017). Nelineiina deformatsiino-sylova model prohynnykh zalizobetonnykh konstrukttsii u zahalnomu vypadku napruzhenoho stanu [Nonlinear deformation-force model of spans of reinforced concrete structures in the general case of a stressed state]. *VIEM Bulletin*. (18). 136–150. [in Ukraine].
3. Karpiuk, V. M., Kostyuk, A. I., Semina, Yu. A. (2018) General Case of Nonlinear Deformation-Strength Model of Reinforced Concrete Structures Strength of Materials. *Strength of Materials* no. 50. (3). 453–464.
4. Karpiuk, V. N., Petrov, A. N. (2016). *Mitsnist, deformatyvnist ta trishchynostiikist prohynnykh zalizobetonnykh elementiv pry yikh zghyni z kruchenniam* [Strength, deformability and crack resistance of spanning reinforced concrete elements during bending with torsion] (monograph). Odessa: Optimum. [in Ukraine].
5. Tymoshenko, S. P., Huder, Dzh. (1975). *Teoryia upruhosty* [Theory of elasticity]. Moskva. Nauka. [in Russian].
6. Byrher, Y. A., Panovko, Ya. H. (1968). *Prochnost, ustoiichyvost, kolebanyia: spravochnyk v 3t.* [Strength, stability, fluctuations: a reference book]. Moskva, Mashynostroenye (1) [in Russian].
7. Bezukhov, N. I. (1956). *Osnovy teoryy upruhosty, plastychnosti y polzuchesty* [Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity and creep]. Moskva. Vysshiaia shkola. [in Russian].
8. Shkola, Yu. A. (2000). Napriazhennoe sostoianye balok, podverzhennykh stesnennomu kruchenyiu [The stress state of beams subjected to constrained torsion]. *Budivelni konstrukttsii: mizhvidomch. zb. nauk. prats.* Moskva, NIISK. no. 52. 208–213. [in Russian].
9. Karpenko, N. I. (1996). *Obshchye modely mekhanyky zhelezobetona* [General Models of Reinforced Concrete Mechanics]. Moskva. Stroyizdat. [in Russian].

10. Kruglov, V. M. (1986). Fenomenologicheskyi kryteriyi prochnosti betona pry trekhnosnom napriazhenom sostoianyy [Phenomenological criterion for the strength of concrete in a triaxial stress state]. *Yzvestiya vuzov, seryia: stroytelstvo y arkhytektura* (6). 6–11. [in Russian].
11. Kruglov, V. M. (1987). Nelyneinye sootnosheniya y kryteriyi prochnosti betona v trekhnosnom napriazhenom sostoianyy [Nonlinear relations and the criterion for the strength of concrete in a triaxial stress state], *Stroytelnaia mekhanika y raschet sooruzheniy* (1). 40–44. [in Russian].
12. Bezushko, D. I. (2008). *Neliniini modeli materialiv pry rozrakhunku zalizobetonnykh konstrukttsii, shcho zghynaiutsia, metodom skinchenykh elementiv* [Nonlinear models of materials in the design of reinforced concrete structures are bent by the finite element method]: avtoref. dys. na zdobuttia nauk. stupenia kand. tekhn. nauk: spets. 05.23.01 – «Budivelni konstrukttsii, budivli ta sporudy. [in Ukraine].
13. Bondarenko, V. M., Kolchunov, V. I. (2004). *Raschetnye modeli sylovoho soprotivleniya zhelezobetona* [Calculation models of power resistance of reinforced concrete]. *Yzdatelstvo Assotsyatsyy stroytelnykh vuzov. Moscow.* [in Russian].
14. Henyev, H. A., Kyssiuk, V. N., Tiupyn, H. A. (1974). *Teoriya plastychnosti betona y zhelezobetona.* [Theory of plasticity of concrete and reinforced concrete]. Moskva. Stroyizdat. [in Russian].
15. Shkola, Yu. A. (2002). *Nesushchaia sposobnost y deformatsiynost zhelezobetonnykh sterzhnevyykh elementov pry slozhnom napriazhenom sostoianyy* [Bearing capacity and deformability of reinforced concrete bar elements in a complex stress state]: dys. na soyskanye nauchn. stepeny kand. tekhn. nauk: spets. 05.23.01. Odessa. [in Russian].
16. Khan, H. (1988). *Teoriya uprugosti. Osnovy lyneinoi teoryy y ee pryimeneniya* [Theory of elasticity. Fundamentals of linear theory and its applications]. Moskva. Mir. [in Russian].
17. Yaremenko, A. F., Shkola, Yu. A. (2007). Fizychni spivvidnoshennia dlia pereriziv zalizobetonnykh sterzhnevyykh elementiv u zahalnomu vypadku napruzhenoho stanu [Physical relations for sections of reinforced concrete bar elements in the general case of a stressed state]. *Visnyk natsionalnoho universytetu «Lvivska politekhnika». Teoriia i praktyka budivnytstva.* 339–344. [in Ukraine].
18. Klovanych, S. F., Myronenko, Y. N. (2007). *Metod konechnykh elementov v mekhanike zhelezobetona* [Finite element method in reinforced concrete mechanics]. Odesa. Yzd-vo ONPU. [in Russian].
19. Karpiuk, V., Tselikova, A., Khudobych, A., Karpiuk, I., Kostyuk, A. (2020). Study of strength, deformability property and crack resistance of beams with BFR. *Eastern-European journal of enterprise technologies, Kharkiv.* no.4/7 (106) 42–53.

Карпюк Ірина Анатоліївна

Одеська державна академія будівництва та архітектури, к.т.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029, irina.carpyuk@gmail.com, ORCID: 0000-0003-3437-5882

Клименко Євгеній Володимирович

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.т.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029, klimenkoew57@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4502-8504

Карпюк Василь Михайлович

Одеська державна академія будівництва та архітектури, д.т.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029, karpiukvim@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4088-6489

Карпюк Марія Василівна

Одеська державна академія будівництва та архітектури, студентка
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029, marai.v.karpiuk@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5084-4971

Для посилань:

Карпюк І. А., Клименко Є. В., Карпюк В. М., Карпюк М. В. Нелінійна деформаційно-силова модель бетонного стержня з неметалевою композитною арматурою у загальному випадку напруженого стану. *Механіка та математичні методи*, 2021. Т. 3. № 1. С. 6–26.

For references:

Karpiuk I., Klumenko Ye., Karpiuk V., Karpiuk M. (2021). Nonlinear deformation-force model of a concrete bar with non-metallic composite reinforcement in the general case of a stressed state. *Mechanics and Mathematical Methods.* 3 (1). 6–26