

УДК 534.1:539.3

КОЛИВАННЯ ІМПУЛЬСНО НАВАНТАЖЕНОГО ОСЦИЛЯТОРА ЗІ СТЕПЕНЕВИМ ПОЗИЦІЙНИМ ТЕРТЯМ

Ольшанський В. П.¹, Сліпченко М. В.¹

¹Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка

Анотація: Описано нестационарні коливання осцилятора з нелінійним позиційним тертям, спричинені миттєвим силовим імпульсом. Прийнято степеневу залежність сили позиційного тертя від переміщення системи, що узагальнює відомі моделі. Відповідні задачі динаміки розв'язували точно методом припасовування та наближено методом енергетичного балансу В дослідженні з використанням періодичних Атеб-функцій побудовано точний аналітичний розв'язок нелінійного диференціального рівняння руху. Виведено компактні формули для розрахунку розмахів коливань і тривалостей напівциклів. Показано, що спадання розмахів коливань, як і при дії сили лінійного в'язкого опору, проходить за законом геометричної прогресії. Знаменник прогресії менший одиниці і залежить від констант позиційного тертя, зокрема від показника нелінійності. Отже, маємо не тільки спадання розмахів коливань, а і зростання тривалостей напівциклів, що властиво нелінійним системам з жорсткою силовою характеристикою. У наближених розрахунках переміщень використано апроксимації типу Паде для періодичних Атеб-функцій. Похибка цих апроксимацій менша одного відсотка. Із одержаних аналітичних співвідношень, як окремі випадки, впливають відомі залежності, висвітлені в теорії коливань для лінійного позиційного тертя. Показано, що і у випадку нелінійного позиційного тертя процес коливань, спричинених миттєвим імпульсом, має безліч розмахів і не обмежений у часі. У випадку степеневого позиційного тертя розмахи коливань імпульсно навантаженого осцилятора можна розрахувати за елементарними формулами. Розрахунок переміщень у часі пов'язаний з використанням періодичних Атеб-функцій, значення яких не складно визначати за відомими асимптотичними формулами. Розрахунки підтверджують, що отримана наближена формула не дає великих похибок.

З метою перевірки адекватності одержаних аналітичних розв'язків проведено чисельне комп'ютерне інтегрування вихідного нелінійного диференціального рівняння руху. Одержано гарну відповідність результатів розрахунку, до яких призводять аналітичні та чисельні розв'язки задачі Коші.

Ключові слова: нелінійний осцилятор, степеневе позиційне тертя, миттєвий імпульс сили, періодичні Атеб-функції, їх апроксимація.

OSCILLATION OF PULSE-LOADED OSCILLATOR WITH DEGREE POSITIONAL FRICTION

V. Olshanskiy¹, M. Slipchenko¹

¹Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture

Abstract: Nonstationary oscillations of the oscillator with nonlinear positional friction caused by an instantaneous force pulse are described. The power dependence of the positional friction force on the displacement of the system, which generalizes the known models, is accepted. The corresponding dynamics problems were solved precisely by the method of adding and approximated by the method of energy balance. In the study, using periodic Ateb-functions, an exact analytical solution of the nonlinear differential equation of motion was constructed. Compact formulas for calculating oscillation ranges and half-cycle durations are derived. It is shown that the decrease in the amplitude of oscillations, as well as under the action of the force of linear viscous resistance, follows the law of geometric progression. The denominator of the progression is less than one and depends on the positional friction constants, in particular on the nonlinearity index. Thus, we have not only a decrease



in the amplitude of oscillations, but also an increase in the durations of half-cycles, which is characteristic of nonlinear systems with a rigid force characteristic. Approximate displacement calculations use Pade-type approximations for periodic Ateb-functions. The error of these approximations is less than one percent. From the obtained analytical relations, as separate cases, the known dependences covered in the theory of oscillations for linear positional friction follow. It is shown that even in the case of nonlinear positional friction the process of oscillations caused by an instantaneous momentum has many oscillations and is not limited in time. In the case of power positional friction, the oscillation ranges of the pulse-loaded oscillator can be calculated by elementary formulas. The calculation of displacements in time is associated with the use of periodic Ateb-functions, the values of which are not difficult to determine by known asymptotic formulas. Calculations confirm that the obtained approximate formula does not give large errors.

In order to verify the adequacy of the obtained analytical solutions, numerical computer integration of the original nonlinear differential equation of motion was performed. The results of the calculation, which lead to analytical and numerical solutions of the Cauchy problem, are well matched.

Keywords: nonlinear oscillator, power positional friction, instant impulse of force, periodic Ateb-functions, their approximation.

1 ВСТУП

В сучасних умовах експлуатації пружні елементи машин нерідко піддаються дії короткочасних імпульсних навантажень. Це впливає на їх ресурс і надійність. Тому вивчення особливостей деформування коливальних, особливо нелінійних, систем в таких умовах становить не тільки теоретичний, а і практичний інтерес. Важливе значення набуває розробка моделей руху з удосконаленим урахуванням дії сил тертя, особливо при резонансних режимах руху. Це стосується і позиційного тертя, яке описано в роботах [1-3].

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Позиційне тертя виникає в коливальних системах, які пружною ланкою мають листову ресору. Його вплив на вільні коливання почали розглядати ще з часів І. В. Мещерського, в збірнику задач якого з теоретичної механіки є відповідна задача [1, с. 442]. Теорія таких коливань детально висвітлена в [2, 3], де показано, що як і при дії сили лінійного в'язкого опору, при наявності позиційного тертя зміна розмахів коливань підпорядкована геометричній прогресії зі знаменником меншим одиниці. Певне узагальнення цих результатів є в роботі [4]. Там позиційне тертя пов'язане зі степеневою залежністю пружної сили від переміщення. Показано, що і в цьому випадку відношення сусідніх розмахів коливань є сталою величиною, хоча через нелінійності сили пружності в ході руху змінюються тривалості циклів, тому що залежать від розмахів. Спільну дію позиційного тертя та інших видів опору при вільних коливаннях розглядали в [5, 6]. Відповідні задачі динаміки розв'язували точно методом припасовування та наближено методом енергетичного балансу. Тут розглядаємо нелінійні коливання осцилятора зі степеневим позиційним тертям, спричинені миттєвим імпульсом зовнішньої сили. Динаміка імпульсно навантажених осциляторів змінних параметрів досліджена в [7].

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою статті є побудова аналітичних розв'язків рівняння руху та аналіз числових результатів, до яких вони призводять.

Для побудови точних розв'язків залучаємо періодичні Атеб-функції, які набули поширення в теорії коливань не тільки в Україні [8-10], а і за її межами [11-13]. При переході від точних до наближених розв'язків, задіяних у розрахунках, використовуємо відомі апроксимації названих спеціальних функцій елементарними функціями.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

На відміну від попередніх робіт стосовно позиційного тертя, тут використовуємо його степеневу залежність від переміщення осцилятора, коли його силова характеристика $F(x)$ має вигляд, зображений на рис. 1.

Аналітично залежність сили пружності $F(x)$ від переміщення системи $x(t)$ описуємо виразом [4]:

$$F(x) = (c + \Delta c \operatorname{sign} x \cdot \operatorname{sign} \dot{x}) |x|^{\nu} \operatorname{sign}(x),$$

у якому c , Δc – характеристики жорсткості, причому $\Delta c < c$; $\nu > 0$ – показник нелінійності. У попередніх дослідженнях, за винятком [4], приймали $\nu = 1$.

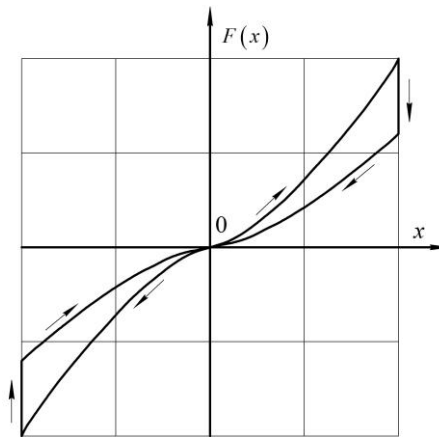


Рис. 1. Залежність $F(x)$ при збільшенні та зменшенні $|x|$

Коливання імпульсно навантаженого осцилятора масою m описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + F(x) = 0, \quad (1)$$

при початкових умовах миттєвого навантаження його імпульсом $S = m v_0$:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (2)$$

На початковому етапі руху, коли $\dot{x} \geq 0$, $x \geq 0$, рівняння (1) має вигляд:

$$m\ddot{x} + c_1 x^\nu = 0,$$

де $c_1 = c + \Delta c$.

Його інтегрування, з урахуванням (2), дає:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sqrt{v_0^2 - \frac{2c_1}{m(\nu+1)} x^{\nu+1}}; \\ x(t) &= a_1 \text{Sa}\left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2} \eta\right); \\ a_1 &= \left(\frac{m v_0^2}{2} \frac{\nu+1}{c_1}\right)^{\frac{1}{\nu+1}}; \quad \eta = a_1^{\frac{\nu-1}{2}} \sqrt{\frac{2c_1}{m(\nu+1)}} t. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут a_1 – максимальне переміщення осцилятора; $\text{Sa}(\nu, 1, (\nu+1/2)\eta)$ – періодичний Атеб-синус, інтегральне подання якого є в [8, 9].

Перша зупинка осцилятора, з переміщенням $x(t_1) = a_1$, настає при:

$$t_1 = \int_0^{a_1} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2c_1}{m(\nu+1)} x^{\nu+1}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2\nu+2}\right)} \sqrt{\frac{m}{(\nu+1)c_1}} a_1^{\frac{1-\nu}{2}}, \quad (4)$$

де $\Gamma(z)$ – гамма-функція, затабульована в [14, 15].

У випадку лінійного позиційного тертя ($\nu=1$) із (3), (4) випливає, що: $\Gamma(1/1+\nu) = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$; $\Gamma(\nu+3/2\nu+2) = \Gamma(1) = 1$ і

$$x(t) = a_1 \sin \left(\sqrt{\frac{c_1}{m}} t \right); \quad a_1 = \left(\frac{m v_0^2}{c_1} \right)^{1/2}; \quad t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{c_1}}.$$

Це узгоджується з відомими залежностями [2, 3].

Подальший рух осцилятора, коли $\dot{x} \leq 0$, $x \geq 0$, описується рівнянням:

$$m \ddot{x} + c_2 x^\nu = 0,$$

у якому $c_2 = c - \Delta c > 0$.

Його розв'язуємо при початкових умовах:

$$x(t_1) = a_1; \quad \dot{x}(t_1) = 0.$$

Цей розв'язок подається виразами:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\sqrt{\frac{2c_2}{m(\nu+1)}} (a_1^{\nu+1} - x^{\nu+1}); \\ x(t) &= a_1 \operatorname{Ca} \left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2} \tau \right), \end{aligned} \quad (5)$$

де $\tau = a_1^{\nu-1/2} \sqrt{2c_2/m(\nu+1)} (t - t_1)$; $\operatorname{Ca}(\nu, 1, (\nu+1/2)\tau)$ – періодичний Атеб-косинус.

При $t = t_{1*}$ осцилятор повертається у вихідне положення $x(t_{1*}) = 0$. Цей час визначається рівнянням:

$$\operatorname{Ca} \left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2} \tau \right) = 0$$

і становить:

$$t_{1*} = t_1 + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2\nu+2}\right)} \sqrt{\frac{m}{(\nu+1)c_2}} a_1^{\frac{1-\nu}{2}}, \quad (6)$$

Із (5), (6), для лінійного позиційного тертя ($\nu = 1$), випливає, що при $t_1 \leq t \leq t_{1*}$:

$$x(t) = a_1 \cos \left[\sqrt{\frac{c_2}{m}} (t - t_1) \right]; \quad t_{1*} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{m}{c_1}} + \sqrt{\frac{m}{c_2}} \right).$$

Ці залежності теж узгоджуються з [2, 3].

Швидкість руху в положенні $x = 0$ подається формулою:

$$v_1 = -\sqrt{\frac{2c_2}{m(\nu+1)}} a_1^{1+\nu}. \quad (7)$$

Далі коливальний процес повторюється і для обчислення другого розмаху коливань a_2 треба в (3) замінити v_0 на v_1 і a_1 на a_2 . Тоді, з урахуванням (7), отримаємо вираз:

$$a_2 = a_1 \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^{\frac{1}{1+\nu}}.$$

Аналогічне співвідношення виконується і для інших розмахів a_n , $n = 3, 4, \dots$. Отже в цій коливальній системі:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^{\frac{1}{1+\nu}} = \text{const}.$$

Спадання розмахів підпорядковано геометричній прогресії, як і при дії сили лінійного в'язкого опору [2].

Приклад.

З метою проведення обчислень задаємо: $m = 1 \text{ кг}$; $c = 4200 \text{ Н/м}$; $\Delta c = 1000 \text{ Н/м}$; $\nu = 1,5$; $v_0 = 1 \text{ м/с}$. При таких вхідних даних: $c_1 = 5200 \text{ Н/м}$; $c_2 = 3200 \text{ Н/м}$; $\Gamma(2/5) \approx 2,21825$; $\Gamma(0,9) \approx 1,06867$ і згідно з (3)-(7): $a_1 \approx 0,035675 \text{ м}$; $t_1 \approx 0,052501 \text{ с}$; $t_{1*} \approx 0,119426 \text{ с}$; $v_1 = -0,784468 \text{ м/с}$. Повторне використання цих розрахункових формул дає: $a_2 \approx 0,029378 \text{ м}$; $t_2 \approx 0,174538 \text{ с}$; $t_{2*} \approx 0,244793 \text{ с}$; $v_2 = 0,615386 \text{ м/с}$; $a_3 \approx 0,024193 \text{ м}$; $t_3 \approx 0,302647 \text{ с}$; $t_{3*} \approx 0,376397 \text{ с}$; $v_3 = -0,482751 \text{ м/с}$; $a_4 \approx 0,019922 \text{ м}$; $t_4 \approx 0,437130 \text{ с}$; $t_{4*} \approx 0,514550 \text{ с}$. Ці результати добре узгоджуються з відповідними на рис. 2, який одержано чисельним інтегруванням рівняння (1).

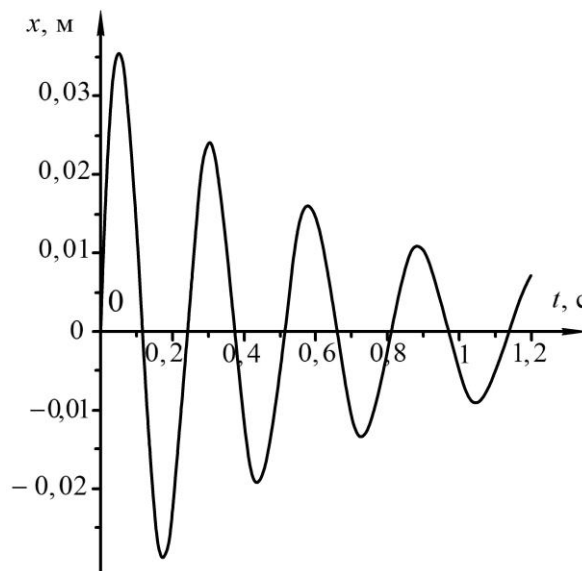


Рис. 2. Переміщення осцилятора з нелінійним позиційним тертям

На графіку на рис. 2 маємо не тільки спадання розмахів коливальних, а і зростання тривалостей напівциклів, що властиво нелінійним системам з жорсткою силовою характеристикою.

Зупинимось далі на обчисленні переміщень осцилятора при різних t . Згідно із (3), при $r \leq t_1$, відношення $x(t)/a_1$, становить:

$$\frac{x(t)}{a_1} = \text{Sa} \left(\frac{3}{2}; 1, \frac{5}{4} \eta \right),$$

причому $\eta \approx 28,03094t$.

Значення Атеб-сінуса будемо обчислювати за асимптотичною формулою, виведеного в [16]. Тоді:

$$\frac{x(t)}{a_1} \approx \eta - \frac{16\eta^{7/2}}{7(16 + \eta^{5/2})}. \quad (8)$$

Результати обчислення безрозмірного переміщення занесено в табл. 1.

Таблиця 1

Значення $x(t)/a_1$ при $t < t_1$.

100t, с	1	2	3	4	5
η	0,2803	0,5606	0,8409	1,1212	1,4055
$\frac{10x(t)}{a_1}$	<u>2,787</u>	<u>5,421</u>	<u>7,661</u>	<u>9,244</u>	<u>9,950</u>
a_1	2,787	5,420	7,661	9,247	9,962
100t, с	1	2	3	4	5
η	0,2303	0,5606	0,8409	1,1212	1,4055

В чисельники записано результати, які дає наближена формула (8), а в знаменники результати, одержані чисельним інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері. Як бачимо, розбіжності значень $x(t)/a_1$, отримані різними способами, не великі. Похибка наближеної формули (8) менша 1 %.

На проміжку $t \in (t_1; t_{1*})$, згідно з (5), маємо:

$$\frac{x(t)}{a_1} = \text{Ca}\left(\frac{3}{2}; 1, \frac{5}{4}\tau\right), \quad (9)$$

де $\tau \approx 21,98928(t - 0,052501)$.

Тоді, по аналогії з (8), формулу (9) заміняємо на:

$$\frac{x(t)}{a_1} \approx (I - \tau) - \frac{16(I - \tau)^{7/2}}{7[16 + (I - \tau)^{5/2}]}. \quad (10)$$

Тут $I \approx 1,47164$.

При запису формули (10) врахували відомий зв'язок між Атеб-косинусом і Атеб-синусом [9, 17], а саме:

$$\text{Ca}\left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2}\tau\right) = \text{Sa}\left(\nu, 1, \frac{\nu+1}{2}(I - \tau)\right),$$

де

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{\nu+1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2\nu+2}\right)}.$$

Тоді, при $\nu = 3/2$, [14]:

$$\Gamma(0,4) = \frac{\Gamma(1,4)}{0,4} \approx 2,21816; \quad \Gamma(0,9) = \frac{\Gamma(1,9)}{0,9} \approx 1,44164; \quad I = 1,47164.$$

Відношення $x(t)/a_1$, обчислені за формулою (10), та одержані чисельним інтегруванням рівняння (1), записано в табл. 2.

Таблиця 2

Значення $x(t)/a_1$ при $t_1 < t < t_{1*}$.

100t, с	τ	I - τ	Формула (10)	Числ. інтегр.
			Значення 10x(t)/a ₁	
6	0,1649	1,3068	9,820	9,831
7	0,3848	1,0869	9,093	9,096
8	0,6047	0,8670	7,839	7,839
9	0,8246	0,6471	6,166	6,167
10	1,0445	0,4272	4,200	4,200
11	1,2644	0,2073	2,067	2,067

Розрахунки підтверджують, що і наближена формула (10) не дає великих похибок. У випадку інших ν значення періодичних Ateb-функцій можна наближено одержувати за допомогою асимптотичних формул, надрукованих в [18].

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Отримані вище результати узагальнюють відомі залежності для позиційного тертя в теорії механічних коливань. В узагальненому варіанті теорії впадання розмахів коливань у часі теж відбувається за законом геометричної прогресії, знаменник якої залежить від показника нелінійності, але коливання проходять зі змінною тривалістю циклів, в чому проявляється нелінійність системи. При цьому для опису переміщень осцилятора доводиться залучати спеціальні періодичні функції.

6 ВИСНОВКИ

У випадку степеневого позиційного тертя розмахи коливань імпульсно навантаженого осцилятора можна розрахувати за елементарними формулами. Розрахунок переміщень у часі пов'язаний з використанням періодичних Ateb-функцій, наближені значення яких не складно визначати за відомими асимптотичними формулами. Проведені розрахунки підтвердили адекватність одержаних аналітичних розв'язків нелінійної задачі Коші, виражених через спеціальні функції та їх наближення в елементарних функціях.

Література

1. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1975. 448 с.
2. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
3. Сурьянинов Н. Г., Дашенко А. Ф., Белоус П. А. Теоретические основы динамики машин Одесса: ОГПУ, 2000. 306 с.
4. Olshanskiy V., Burlaka V., Slipchenko M. Free oscillations of an oscillator with nonlinear position friction. Ukrainian journal of mechanical engineering and material science. 2018. 4. (2) P. 50–57. doi.org/10.23939/ujmems2018.02.050
5. Ольшанський В. П., Тіщенко Л. М., Ольшанський С. В. та ін. Динаміка дисипативних осциляторів. Харків: Міськдрук, 2016. 264 с.
6. Ольшанський В. П., Сліпченко М. В., Спольнік О. І., Бурлака В. В. Нелінійні коливання дисипативних осциляторів. Харків: Міськдрук, 2020. 268 с.
7. Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Метод ВБК в расчетах нестационарных колебаний осцилляторов. Харьков: Міськдрук, 2014. 264 с.
8. Сокіл Б. І. Про застосування Ateb-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ. Доповіді Національної академії наук України, 1997. 1. С. 55–58.
9. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем. Львів: Львівська політехніка, 2014. 288 с.

10. Pukach P. Ya., Kuzio I. V. Resonance phenomena in quasi-zero stiffness vibration isolation systems. *Науковий вісник національного гірничого університету*, 2015. Issue 3. P. 62–67.
11. Gendelman O., Vakakis A. F. Transition from localization to nonlocalization in strongly nonlinear damped oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2000. 11. (10) P. 1535–1542. doi.org/10.1016/S0960-0779(99)00076-4
12. Cveticanin L. *Strong nonlinear oscillators*. Analytical Solution. 2 nd edition. Springer. Cham. 2017. 317 p. doi.org/10.1007/978-3-319-58826-1
13. Cveticanin L., Pogany T. Oscillator with a sum of noninteger-order nonlinearities. *Journal of Applied Mathematics*, 2012. Vol. 2012. 20 p. doi.org/10.1155/2012/649050
14. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами)*. М.: Наука, 1979. 832 с.
15. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. *Специальные функции*. М.: Наука, 1977. 344 с.
16. Ольшанський В. П. Порівняння наближених розв'язків інтегрального рівняння сили удару тіл в теорії Герца. *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, 2019. 8 (1333). С. 244–249.
17. Грицик В. В., Назаркевич М. А. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Атеб-функцій. *Доповіді Національної академії наук України*, 2007. 12. С. 37–42.
18. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про рух осцилятора зі степеневою характеристикою пружності. *Вібрації в техніці та технологіях*, 2017. 3 (86). С. 34–40.

References

1. Meshhershkiy, I. V. (1975). *Sbornik zadach po teoreticheskoy mehanike* [Collection of problems in theoretical mechanics]. М.: Nauka. [in Russian].
2. Biderman, V. L. (1980). *Teoriya mehanicheskikh kolebanij* [Mechanical vibration theory]. М.: Vysshaya shkola. [in Russian].
3. Suryaninov N. G., Dashhenko, A. F., Belous, P. A. (2000). *Teoreticheskie osnovy dinamiki mashin* [Theoretical Foundations of Machine Dynamics]. Odessa: OGPU. [in Russian].
4. Olshanskiy, V., Burlaka, V., Slipchenko, M. (2018). Free oscillations of an oscillator with nonlinear position friction. *Ukrainian journal of mechanical engineering and material science*. no. 4. 2. 50–57. doi.org/10.23939/ujm2018.02.050
5. Olshanskiy, V. P., Tishchenko, L. M., Olshanskiy, S. V. (2016). *Dynamika dysypatyvnykh oscyljatoriv* [Dynamics of dissipative oscillators]. Kharkiv: Miskdruk. [in Ukraine].
6. Olshanskiy, V. P., Slipchenko, M. V., Spolnik, O. I., Burlaka, V. V. (2020). *Nelinijni kolyvannja dysypatyvnykh oscyljatoriv* [Nonlinear oscillations of dissipative oscillators]. Kharkiv: Miskdruk. [in Ukraine].
7. Olshanskiy, V. P., Olshanskiy, S. V. (2014). Metod VBK v raschetah nestacionarnykh kolebanij oscyljatorov [VBK method in calculating non-stationary oscillations of oscillators]. Kharkiv: Miskdruk. [in Russian].
8. Sokil, B. I. (1997). Pro zastosuvannja Ateb-funkcij dlja pobudovy rozv'jazkiv dejakykh rivnjan, jaki opysujut nelinijni kolyvannja odnovymirnykh seredovyshh [On the application of Ateb functions to construct solutions of some equations that describe nonlinear oscillations of one-dimensional media]. *Dopovidi Nacionalnoi akademii nauk Ukrainy*. no. 1. 55–58. [in Ukraine].
9. Pukach, P. Ja. (2014). *Yakisni metody doslidzhennja nelinijnykh kolyvalnykh system* [Qualitative methods of research of nonlinear oscillatory systems]. Lviv: Lvivska politehnika, [in Ukraine].
10. Pukach, P. Ya., Kuzio, I. V. (2015). Resonance phenomena in quasi-zero stiffness vibration isolation systems. *Naukovyi visnyk natsionalnogo hirnychogo universytetu*. no. 3. 62–67.
11. Gendelman, O., Vakakis, A. F. (2000). Transition from localization to nonlocalization in strongly nonlinear damped oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals*. 11. 10. 1535–1542. doi.org/10.1016/S0960-0779(99)00076-4.
12. Cveticanin, L. (2007). *Strong nonlinear oscillators*. Analytical Solution. 2 nd edition. Springer. Cham. doi.org/10.1007/978-3-319-58826-1.
13. Cveticanin, L., Pogany, T. (2012). *Oscillator with a sum of noninteger-order nonlinearities*. *Journal of Applied Mathematics*. 2012. doi.org/10.1155/2012/649050.

14. Abramovic, M., Stigan, I. (1979). *Spravochnik po specialnym funkcijam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablicami)* [Special functions reference (with formulas, graphs and math tables)]. M.: Nauka. [in Russian].
15. Janke, E., Jemde, F., Ljosh, F. (1977). *Specialnye funkicii* [Special functions]. M.: Nauka. [in Russian].
16. Olshanskiy, V. P. (2019). Porivnjannja nablyzhenyh rozvjazkiv integralnogo rivnjannja syly udaru til v teorii Gerca [Correspondence of the approximate relations of the integral level of force or the blow of til in the theory of Hertz]. *Visnyk NTU «HPI». Serija: Matematychni modeljuvannja v tehnicji ta tehnologijah.* 8 (1333). 244–249. [in Ukraine].
17. Grycyk, V. V., Nazarkevych, M. A. (2007). Matematychni modeli alhorytmiv i realizacija Ateb-funkcij [Mathematical models of algorithms and implementation of Ateb-functions]. *Dopovidi Nacionalnoi akademii nauk Ukrainy.* 2. 37–42. [in Ukraine].
18. Olshanskiy, V. P., Olshanskiy, S. V. (2017). Pro ruh oscyljatora zi stepenevoju harakterystykoju pruzhnosti [About the collapse of the oscillator due to the power characteristic of springiness]. *Vibracii v tehnicji ta tehnologijah.* 3 (86). 34–40. [in Ukraine].

Ольшанський Василь Павлович

Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. П. Василенка
д.ф.-м.н., професор
вул. Алчевських, 44, Харків, Україна, 61002
OlshanskiyVP@gmail.com
ORCID: 0000-0003-1407-4476

Сліпченко Максим Володимирович

Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. П. Василенка
к.т.н., доцент
вул. Алчевських, 44, Харків, Україна, 61002
Slipchenko1982@gmail.com
ORCID: 0000-0002-9728-661X

Для посилань:

Ольшанський В. П., Сліпченко М. В. Роливання імпульсно навантаженого осцилятора зі степеневим позиційним тертям. *Механіка та математичні методи*, 2021. Т. 3. № 1. С. 37–46.

For references:

Olshanskiy V., Slipchenko M. (2021). Oscillation of pulse-loaded oscillator with degree positional friction. *Mechanics and Mathematical Methods.* 3 (1). 37–46.