

УДК 533.6.013.42

## ВЛАСНІ ЧАСТОТИ КОЛИВАНЬ ПЛАСТИНИ, ЯКА ПОДІЛЯЄ ДВОШАРОВУ ІДЕАЛЬНУ РІДИНУ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ У ПРЯМОКУТНОМУ КАНАЛІ

Лимар О. О.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Миколаївський національний аграрний університет

**Анотація:** Досліджено аналітично і чисельно частотний спектр плоских коливань пружної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею в прямокутному каналі. Для довільного закріплення контурів прямокутної пластини показано, що частотний спектр розглянутої задачі складається з двох наборів частот, які описують коливання вільної поверхні рідини і пружної пластини. Рівняння зв'язаних коливань пластини та рідини представлені у вигляді системи інтегро-диференціальних рівнянь з граничними умовами закріплення контурів пластини та умовою збереження об'єму рідини. При розв'язанні крайової задачі на власні значення форма прогину пластини представляється сумою фундаментальних рішень однорідного рівняння для незакріпленої пластини і часткового розв'язання неоднорідного рівняння у вигляді розкладання за власними функціями коливань ідеальної рідини у прямокутному каналі. Отримано у вигляді визначника четвертого порядку частотне рівняння вільних сумісних коливань пластини та рідини. У випадку затиснених контурів пластини проведено його спрощення і проведені детальні чисельні дослідження першого і другого наборів частот від основних механічних параметрів системи. Відзначається слабкий взаємовплив коливань пластини на коливання вільної поверхні та навпаки. Показано, що зі зменшенням маси пластини частоти другого набору зростають і приймають найбільше значення для безінерційних пластин або мембран. Зменшення частот другого набору відбувається зі збільшенням глибини заповнення верхньої рідини або зі зменшенням глибини заповнення нижньої рідини. З урахуванням двох членів ряду у частотному рівнянні отримано наближені формули для другого набору частот та показано їх ефективність. Зі збільшенням числа членів ряду частотного рівняння попередні корені першого і другого наборів уточнюються та з'являються нові.

**Ключові слова:** гідропружність, прямокутна пластинка, плоскі коливання, ідеальна рідина, вільна поверхня, власні частоти сумісних коливань пластини і рідини.

## EIGENFREQUENCIES OF OSCILLATIONS OF A PLATE WHICH SEPARATES A TWO-LAYER IDEAL FLUID WITH A FREE SURFACE IN A RECTANGULAR CHANNEL

O. Lymar<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Mykolayiv National Agrarian University

**Abstract:** The frequency spectrum of plane vibrations of an elastic plate separating a two-layer ideal fluid with a free surface in a rectangular channel is investigated analytically and numerically. For an arbitrary fixing of the contours of a rectangular plate, it is shown that the frequency spectrum of the problem under consideration consists of two sets of frequencies describing the vibrations of the free surface of the liquid and the elastic plate. The equations of coupled vibrations of the plate and the fluid are presented using a system of integro-differential equations with the boundary conditions for fixing the contours of the plate and the condition for the conservation of the volume of the fluid. When solving a boundary value problem for eigenvalues, the shape of the plate deflection is represented by the sum of the fundamental solutions of a homogeneous equation for a loose plate and a partial solution of an inhomogeneous equation by expanding in terms of eigenfunctions of oscillations of an



ideal fluid in a rectangular channel. The frequency equation of free compatible vibrations of a plate and a liquid is obtained in the form of a fourth-order determinant. In the case of a clamped plate, its simplification is made and detailed numerical studies of the first and second sets of frequencies from the main mechanical parameters of the system are carried out. A weak interaction of plate vibrations on vibrations of the free surface and vice versa is noted. It is shown that with a decrease in the mass of the plate, the frequencies of the second set increase and take the greatest value for inertialess plates or membranes. A decrease in the frequencies of the second set occurs with an increase in the filling depth of the upper liquid or a decrease in the filling depth of the lower liquid. Taking into account two terms of the series in the frequency equation, approximate formulas for the second set of frequencies are obtained and their efficiency is shown. With an increase in the number of terms in the series of the frequency equation, the previous roots of the first and second sets are refined and new ones appear.

**Keywords:** hydroelasticity, elastic isotropic rectangular plate, ideal incompressible fluid, rectangular channel, flat oscillations.

## 1 ВСТУП

Для безпеки транспортування та зберігання рідких вантажів великі резервуари поділяють на відсіки. У цих відсіках можуть бути рідини різної щільності. У цьому випадку виникає задача про вплив пружних і масових характеристик пластин, яка поділяє рідини різної щільності, на частотний спектр і стійкість коливань механічної системи. У раніше розглянутих роботах в основному були досліджено умови стійкості коливань пластини у разі затиснутих контурів пластини. Однак у результаті сейсмічних впливів або виникнення аварійної або позаштатної ситуації край затиснутий пластини може прийняти довільне закріплення, наприклад, стати вільним або опертим. У цьому виникає потреба у дослідженні нового частотного спектра та її структури. В даній статті досліджено аналітично і чисельно частотний спектр плоских коливань пружної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею в прямокутному каналі. Для довільного закріплення контурів прямокутної пластини показано, що частотний спектр розглянутої задачі складається з двох наборів частот, які описують коливання вільної поверхні рідини і пружної пластини. У випадку затиснених контурів пластини проведено його спрощення і детальні дослідження першого і другого наборів частот від основних механічних параметрів системи. Розглянути випадки відродження пластини в мембрану. Показаний слабкий взаємовплив коливань пластини або мембрани на коливання вільної поверхні рідини та навпаки.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ І ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

У даній роботі узагальнюються результати статтею [1–7] на випадок дослідження частотного спектра коливань пружної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею. У статті [1] у лінійній постановці розглянуто плоску гідропружну задачу про стійкість коливань затиснутої тонкої ізотропної прямокутної пластини, яка розділяє ідеальні нестисливі рідини в прямокутному каналі. Пластина схильна до розтягуючих або стискаючих зусиль в серединній поверхні. Отримано у вигляді визначника четвертого порядку частотне рівняння вільних спільних коливань пластини і рідини та проведено його спрощення. Показано, що воно розпадається на два рівняння, що описують несиметричні та симетричні частоти вільних коливань (непарні та парні частоти) і може бути представлено в єдиній формі для цих частот. Отримано наближені та точні умови стійкості спільних коливань пластини та рідини. У цій статті наведено досить повний огляд літературних даних щодо цієї проблеми. Доповнимо його лише деякими основними та останніми роботами. У роботі [2] розглянуто задача, аналогічне [1], у випадку опертих і вільних контурів. Роботи [1, 3–6] присвячені переважно питання стійкості спільних коливань пластини та рідини. У статті [8] представлено аналітичне рішення для аналізу вільних коливань товстих прямокутних ізотропних пластин у поєднанні з обмеженою рідиною для різних граничних умов. Для розгляду теорій зміщення довільного порядку використовується уніфікована формула Каррери (CUF). Проблема власних значень отримується за допомогою функціоналу енергії, враховуючи кінетичну енергію пластини та рідини, а також потенційну енергію пластини. Метод Рітца використовується для оцінки змінних переміщень, а функції, які використовуються в ряді Рітца, можуть бути налаштовані для врахування довільної вібрації з класичними граничними умовами. Проаналізовано збіжність розв'язку та проведено перевірку результатів з урахуванням відкритої літератури та програмного забезпечення 3D кінцевих елементів. Стаття [9] присвячена вивченню вільних коливань двошарової ідеальної рідини у прямокутному контейнері з пружною бічною стінкою. З використанням нормальних форм проведено дослідження двовимірної гідропружної системи.

Великий цикл робіт присвячений гідропружним коливанням ідеальної рідини в кругових та коаксіальних циліндрах з жорсткими та пружними основами. Це роботи [10–14] та багато інших. ін. Стаття [10] присвячена коливанням затиснутої кругової пластини в ідеальній рідині, яка знаходиться в жорсткому прямому круговому циліндричному резервуарі. У цій статті дано порівняння аналітичних результатів із результатами, отриманими в системі ANSYS. У роботі [11] проводяться дослідження несиметричних вільних коливань затиснутої круглої пластини при контакті з ідеальною несжимаємою рідиною. З використанням рядів Фур'є – Бесселя та варіаційного принципу виведено приєднану масу рідини та отримано частотне рівняння зв'язаних коливань пластини та рідини. Проведено порівняння отриманих результатів із результатами роботи [10]. У статті [12] виведено частотне рівняння осесиметричних коливань важкої двошарової ідеальної рідини в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі з пружними верхньою і нижньою основами у вигляді затиснених кільцевих пластин і проведено дослідження частотного спектру. Робота [13] присвячена дослідженню частотних рівнянь несиметричних та симетричних власних коливань важкої ідеальної двошарової рідини у жорсткому круговому циліндричному резервуарі з пружними основами у вигляді затиснутих кругових пластин. На прикладі однорідної рідини з вільною поверхнею та пружним дном у вигляді мембрани аналітично та чисельно досліджено частотний спектр. Показано, що він складається із двох наборів, які відповідають коливанням вільної поверхні рідини та коливанням мембрани.

Найбільш загальний математичний підхід до вирішення задачі про динаміку та стійкість руху твердого тіла з відсіками, що містять багатшарову ідеальну рідину, розділену пружними пластинами, наведено у статті [14].

У даній статті продовжені дослідження, які були розпочаті у роботах [1-4]. Досліджено аналітично і чисельно частотний спектр плоских коливань пружної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею в прямокутному каналі. Показано, що частотний спектр розглянутої задачі складається з двох наборів частот, які описують коливання вільної поверхні і пружної пластини. Для затиснутих контурів пластини докладно проведено дослідження цих двох наборів частот.

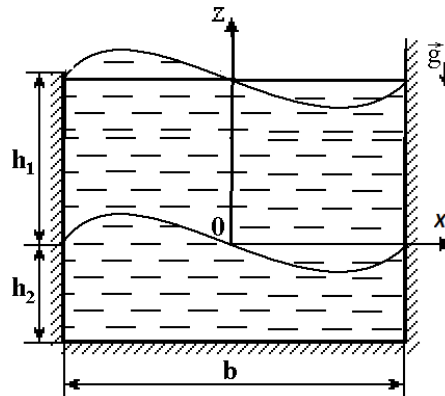
### 3 МЕТА ТА ЗАВДАННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідити аналітично і чисельно частотний спектр плоских коливань пружної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею в прямокутному каналі. Показати для довільного закріплення контурів прямокутної пластини, що частотний спектр розглянутої задачі складається з двох наборів частот, які описують коливання вільної поверхні рідини і пружної пластини. У випадку затиснених контурів пластини провести його спрощення і вивчити вплив основних механічних параметрів системи на перший і другий набір частот. Розглянути випадки відродження пластини в мембрану. Показати взаємовплив коливань пластини або мембрани (першого набору) на коливання вільної поверхні рідини (другого набору) та навпаки.

### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянемо плоскі коливання пружної прямокутної пластини, яка горизонтально поділяє двошарову ідеальну нестисливу рідину з густиною  $\rho_i (i=1,2)$  в прямокутному каналі шириною  $b (b=2a)$ . Пластина має постійну згинальну жорсткість  $D$  і допускається наявність розтягуючих та стискаючих зусиль в серединній поверхні інтенсивності  $T$ . Конттури пластини можуть мати довільне закріплення, наприклад, бути затиснені, оперті або вільні. Верхня рідина щільності  $\rho_1$  заповнює канал до

глибини  $h_1$ , а нижня рідина щільності  $\rho_2$  до глибини  $h_2$  (рис. 1). Верхня рідина може повністю заповнювати канал або мати вільну поверхню.



**Рис. 1.** Прямокутна пластина розділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею

Власні частоти спільних коливань пружної пластини і двошарової ідеальної рідини з вільною поверхнею знаходяться з системи інтегро-диференціальних рівнянь [3, 7]

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - P \frac{d^2 w}{dx^2} + qw = \frac{\omega^2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^* w_n}{k_n} \psi_n + C, \quad (1)$$

$$w_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a w \psi_n dx, \quad \int_{-a}^a w dx = 0 \quad (2)$$

і граничних умов

$$(\mathcal{L}_{jp}[w])|_{\gamma_j} = 0 \quad (j, p = 1, 2). \quad (3)$$

Тут  $P = T/D$ ,  $q = (g\Delta\rho - k_0\omega^2)/D$  ( $D \neq 0$ ),  $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ ,  $k_0 = \rho_0\delta_0$ ,  $w(x)$ ,  $\rho_0$ ,  $\delta_0$  – відповідно форма нормального прогину, щільність і товщина пластини;  $\omega$  – невідома частота спільних коливань пластини і рідини,  $a_n = \rho_1 \coth \kappa_{1n} + \rho_2 \coth \kappa_{2n}$ ,  $a_n^* = a_n - \tilde{b}_n$ ,  $\kappa_{in} = h_i k_n$ ,  $k_n = \pi n / b \tilde{b}_n = 2\omega^2 \rho_1 / (\omega^2 - \sigma_n^2) \sinh 2\kappa_{1n}$ ,  $\sigma_n^2 = gk_n \tanh \kappa_{1n}$  – квадрат частоти коливань вільної поверхні верхньої рідини в випадку абсолютно жорсткої пластини;  $\mathcal{L}_{j1}$  і  $\mathcal{L}_{j2}$  – диференціальні оператори граничних умов закріплення пластини на контурі  $\gamma_j$ ; наприклад, у випадку жорсткого защемлення пластини оператор  $\mathcal{L}_{j1}$  буде одиничним, а  $\mathcal{L}_{j2} = d/dx$ ;  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ) – позначення контуру, причому індекс  $j = 1$  відповідає контуру  $x = -a$ , а  $j = 2$  –  $x = a$ .

У разі відсутності вільної поверхні (випадок повного заповнення каналу) у рівнянні (1) треба покласти  $a_n^* = a_n$  ( $\tilde{b}_n = 0$ ) [1, 2, ...].

У роботах [3, 6, 7] показано, що форма прогину пластини має вигляд

$$w = \sum_{k=1}^4 \left( w_k^0 - \tilde{w}_k^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^* E_{kn}^0}{\omega^2 a_n^* - k_n d_n} \psi_n \right) A_k^0, \quad (4)$$

де  $w_k^0$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) – фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння (1),

$$\tilde{w}_k^0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a w_k^0 dx, \quad E_{kn}^0 = \frac{1}{a} \int_{-a}^a w_k^0 \psi_n dx, \quad \psi_n(x) = \cos k_n(x+a), \quad d_n = (Dk_n^2 + T)k_n^2 + g\Delta\rho - k_0\omega^2.$$

У формулу (4) входить чотири невідомі константи  $A_k^0$ . З граничних умов закріплення пластини (3) маємо чотири лінійних однорідних рівняння відносно  $A_k^0$ .

$$\sum_{k=1}^4 \left( \mathcal{L}_{jpk}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{jpn} \right) A_k^0 = 0 \quad (p, j = 1, 2). \quad (5)$$

Тут  $\mathcal{L}_{jpk}^0 = \left( \mathcal{L}_{jp} [w_k^0 - \tilde{w}_k^0] \right) \Big|_{\gamma_j}$ ,  $\mathcal{L}_{jpn} = \left( \mathcal{L}_{jp} [\psi_n] \right) \Big|_{\gamma_j}$ ,  $\alpha_n = a_n^* / (\omega^2 a_n^* - k_n d_n)$ .

З рівності нулю визначника однорідної системи (5) впливає частотне рівняння власних спільних коливань пружної пластини і рідини

$$\left| \left\| C_{qk} \right\|_{q, k=1}^4 \right| = 0, \quad (6)$$

де

$$C_{pk} = \mathcal{L}_{jpk}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{jpn} \quad (j=1, p=1, 2; k=\overline{1, 4}),$$

$$C_{p+2, k} = \mathcal{L}_{jpk}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{jpn} \quad (j=2, p=1, 2; k=\overline{1, 4}).$$

Скориставшись розвиненнями функцій  $w_k^0$  в ряд по повній і ортогональній системі функцій  $\psi_n$  та умовою  $\int_{-a}^a \psi_n dx = 0$ , рівняння (6) можна переписати так

$$\left| \left\| C_{qk} \right\|_{q, k=1}^4 \right| = 0, \quad (7)$$

де

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{j1n}, \quad C_{2k} = \mathcal{L}_{j2k}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{j2n} \quad (j=1, k=\overline{1, 4}),$$

$$C_{3k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{j1n}, \quad C_{4k} = \mathcal{L}_{j2k}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathcal{L}_{j2n} \quad (j=2, k=\overline{1, 4}).$$

Тут  $\beta_n = k_n d_n / (\omega^2 a_n^* - k_n d_n)$ .

Слід зазначати, що частотне рівняння (6) більш зручніше для точності чисельних розрахунків, а (7) – для аналітичних досліджень [1–7].

Власні форми коливань пластини знаходяться на підставі частотних рівнянь (6)–(7), системи рівнянь (5) та форми прогину пластини (4).

На підставі робіт [12–13] можна стверджувати, що частотний спектр рівнянь (6)–(7) складається з двох наборів частот, які описують коливання вільної поверхні і пружної пластини.

Слід зазначати складність розв'язків частотних рівнянь (6)–(7) тому, що фундаментальна система  $w_k^0$  залежить від знака величини  $g\Delta\rho - k_0\omega^2$ . В роботах [1, 2] був розглянуто випадок  $\Delta\rho = 0$  ( $\rho_1 = \rho_2$ ), тому у цьому випадку розглянута задача

суттєво спрощується.

При відсутності вільної поверхні у рівнянні (2)–(7) треба покласти  $a_n^* = a_n$ .

Система рівняння (4)–(7) виписана для довільних способів закріплення контурів пластини. Розглянемо найбільш поширені на практиці способи закріплення: затиснений, опертий і вільний контур.

У разі затиснених контурів пластини коефіцієнти частотного рівняння (7) запишуться так

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0, \quad C_{2k} = \mathcal{L}_{12k}^0, \quad C_{3k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0 (-1)^n, \quad C_{4k} = \mathcal{L}_{j2k}^0 \quad (k = \overline{1,4}), \quad (8)$$

оскільки величини  $\mathcal{L}_{jpn}$  і  $\mathcal{L}_{j2k}^0$  мають вигляд  $\mathcal{L}_{11n} = 1$ ,  $\mathcal{L}_{21n} = (-1)^n$ ,  $\mathcal{L}_{j2n} = 0$ ,

$$\mathcal{L}_{j2k}^0 [w_k^0] = \left. \frac{dw_k^0}{dx} \right|_{\gamma_j}.$$

Для опертого краю оператори  $\mathcal{L}_{jp}$  та значення функцій  $\mathcal{L}_{jpn}$ ,  $\mathcal{L}_{j2k}^0$  будуть мати вигляд:  $\mathcal{L}_{j1} \equiv 1$ ,  $\mathcal{L}_{j2} = d^2/dx^2$ ,  $\mathcal{L}_{11n} = 1$ ,  $\mathcal{L}_{21n} = (-1)^n$ ,  $\mathcal{L}_{12n} = -k_n^2$ ,  $\mathcal{L}_{22n} = (-1)^{n+1} k_n^2$ ,

$\mathcal{L}_{j2k}^0 [w_k^0] = d^2 w_k^0 / dx^2 \Big|_{\gamma_j}$ , а для вільного краю  $\mathcal{L}_{j1} = d^2/dx^2$ ,  $\mathcal{L}_{j2} = d^3/dx^3$ ,  $\mathcal{L}_{11n} = -k_n^2$ ,

$\mathcal{L}_{21n} = (-1)^{n+1} k_n^2$ ,  $\mathcal{L}_{12n} = 0$ ,  $\mathcal{L}_{22n} = 0$ ,  $\mathcal{L}_{j1k}^0 [w_k^0] = \left. \frac{d^2 w_k^0}{dx^2} \right|_{\gamma_j}$ ,  $\mathcal{L}_{j2k}^0 [w_k^0] = \left. \frac{d^3 w_k^0}{dx^3} \right|_{\gamma_j}$  [2, 3, 6, 7].

Проводячи за аналогією з роботами [6, 7] перетворення з рядками та стовпцями визначника рівняння (7) для затиснутих, опертих та вільних контурів пластини, можна привести його до блокового вигляду з двома нульовими блоками. В результаті отримаємо, що рівняння (7) для защемлених, опертих і вільних контурів розпадається на два рівняння, які описують несиметричні та симетричні частоти сумісних коливань пластини та рідини з вільною поверхнею. Для змішаних способів закріплення двох контурів пластини рівняння (7) не розпадається на непарні та парні частоти [2, 6, 7]. Найбільше спрощення рівняння (7) ми отримаємо для затиснутих контурів [2, 6, 7]. У цьому випадку воно спрощується і розпадається на два рівняння, які описують непарні ( $n = 2m - 1$ ) й парні ( $n = 2m$ ) частоти і ці рівняння можуть бути записані в єдиній формі для цих частот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 a_n^* - k_n d_n} = 0. \quad (9)$$

Із рівняння (9) слід, що з зростання  $h_1/b$  коефіцієнт  $b_n^*$  прагне до нуля як  $e^{-2\pi h_1/b}$ , а коефіцієнт  $a_n^*$  прагне до  $a_n$ . Таким чином, при  $h_1/b > 1$  впливом вільної поверхні на частотний спектр можна знехтувати і рівняння (9) в цьому разі має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 a_n - k_n d_n} = 0$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 \hat{a}_n - k_n \tilde{d}_n} = 0, \quad (10)$$

де  $\hat{a}_n = a_n + k_n k_0$ ,  $\tilde{d}_n = (Dk_n^2 + T)k_n^2 + g\Delta\rho$ .



Ліва частина рівняння (10) є монотонно зростаючою функцією параметра  $\omega^2$  на інтервалі  $(k_n \tilde{d}_n / \tilde{a}_n, k_{n+1} \tilde{d}_{n+1} / \tilde{a}_{n+1})$  ( $n=1, 2, \dots$ ), яка приймає на ньому значення від  $-\infty$  до  $\infty$ . Отже, між двома послідовними значеннями  $k_n \tilde{d}_n / \tilde{a}_n$  лежить тільки один корінь рівняння (10). Цим заздалегідь визначаються інтервали, в яких знаходяться власні частоти. Квадрати високих частот ( $n \gg 1$ ) будуть мало відрізнятися від величини  $\omega_n^2 = k_n [(Dk_n^2 + T)k_n^2 + g\Delta\rho] / (a_n + k_n k_0)$ . З цієї рівності випливає, що залежність  $\omega_n^2$  від  $D, T$  і  $\Delta\rho$  є лінійною, найбільше значення  $\omega_n^2$  буде при  $k_0 = 0$ , тобто для безінерційної пластини. Квадрат частоти  $\omega_n^2$  слабо залежить від глибин заповнення  $h_1$  і  $h_2$  і зменшується при їх зменшенні. Проведені чисельні дослідження рівняння (10) підтвердять ці попередні висновки.

На відміну від рівняння (10) знаменник рівняння (9) представляється як кубічного многочлена відносно  $\omega^2$  і у цьому разі досить важко відокремити коріння цього рівняння. Проте, можна зробити так: спочатку розглянути рівняння (10) і на його основі провести дослідження другого набору частот. Вплив вільної поверхні цей набір частот буде незначним. Це дозволить відокремити частоти другого набору від першого, а потім провести дослідження першого набору частот.

## 5 ЧИСЕЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ СУМІСНИХ КОЛИВАНЬ ПЛАСТИНИ І РІДИНИ

У безрозмірному вигляді частотне рівняння (9)–(10) будуть мати вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\tilde{a}_n + \pi n \tilde{k}_0 - \tilde{b}_n^*) \Omega^2 - \pi n [(\pi^2 n^2 + \gamma_0^2) \pi^2 n^2 + (1 - \rho_{12}) \tilde{g}]} = 0; \quad (11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\tilde{a}_n + \pi n \tilde{k}_0) \Omega^2 - \pi n [(\pi^2 n^2 + \gamma_0^2) \pi^2 n^2 + (1 - \rho_{12}) \tilde{g}]} = 0. \quad (12)$$

Тут  $\tilde{a}_n = a_n / \rho_2 = \rho_{12} \coth \kappa_{1n} + \coth \kappa_{2n}$ ,  $\tilde{k}_0 = k_0 / \rho_2 b$ ,  $\Omega^2 = \omega^2 \rho_2 b^5 / D$ ,  $\tilde{b}_n^* = 2\rho_{12} \Omega^2 / (\Omega^2 - \tilde{g} \pi n \tanh \kappa_{1n}) \sinh 2\kappa_{1n}$ ,  $\kappa_{in} = \pi n H_i$ ,  $\gamma_0^2 = T b^2 / D$ ,  $\rho_{12} = \rho_1 / \rho_2$ ,  $\tilde{g} = g b^4 / D$ ,  $b = 2a$ .

Якщо у рівнянні (12) утримати два члени ряду, то отримаємо наближенню формулу квадрата частоти. Так, для непарних частот ( $n=1, 3$ ) маємо

$$\Omega^2 = \frac{6\pi [41\pi^2 + 5\gamma_0^2 + (1 - \rho_{12}) / \pi^2]}{k_{13}}, \quad (13)$$

де  $k_{13} = \rho_{12} (\coth \kappa_{13} + 3 \coth \kappa_{11}) + \coth \kappa_{23} + 3 \coth \kappa_{21} + 4\pi \tilde{k}_0$ ,  $\kappa_{11} = \pi H_1$ ,  $\kappa_{13} = 3\kappa_{11}$ ,  $\kappa_{21} = \pi H_2$ ,  $\kappa_{11} = 3\kappa_{21}$ , а для парних ( $n=2, 4$ ):

$$\Omega^2 = \frac{2\pi [68\pi^2 + 5\gamma_0^2 + 0.5(1 - \rho_{12}) / \pi^2]}{k_{14}}. \quad (14)$$

Тут  $k_{14} = \rho_{12} (\coth \kappa_{14} + 2 \coth \kappa_{12}) + \coth \kappa_{24} + 2 \coth \kappa_{21} + 8\pi \tilde{k}_0$ ,  $\kappa_{12} = 2\pi H_1$ ,  $\kappa_{14} = 2\kappa_{12}$ ,  $\kappa_{22} = 2\pi H_2$ ,  $\kappa_{24} = 2\kappa_{22}$

У разі виродження пластини в мембрану ( $D=0$ ) у нових безрозмірних змінних  $\Omega^2$



і  $\tilde{T}$  частотні рівняння (11)–(14) запишуться так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\tilde{a}_n + \pi n \tilde{k}_0 - \tilde{b}_n^*) \Omega^2 - \pi n (\tilde{T} \pi^2 n^2 + 1 - \rho_{12})} = 0; \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\tilde{a}_n + \pi n \tilde{k}_0) \Omega^2 - \pi n (\tilde{T} \pi^2 n^2 + 1 - \rho_{12})} = 0, \quad (16)$$

де  $\Omega^2 = \omega^2 b / g$ ,  $\tilde{T} = T / g \rho_2 b^2$ .

Для непарних частот ( $n = 1, 3$ ) маємо

$$\Omega^2 = \frac{6\pi [41\pi^2 + 5\gamma_0^2 + (1 - \rho_{12}) / \pi^2]}{k_{13}}, \quad (17)$$

а для парних ( $n = 2, 4$ ):

$$\Omega^2 = \frac{2\pi [5\tilde{T} + 0.5(1 - \rho_{12}) / \pi^2]}{k_{14}}. \quad (18)$$

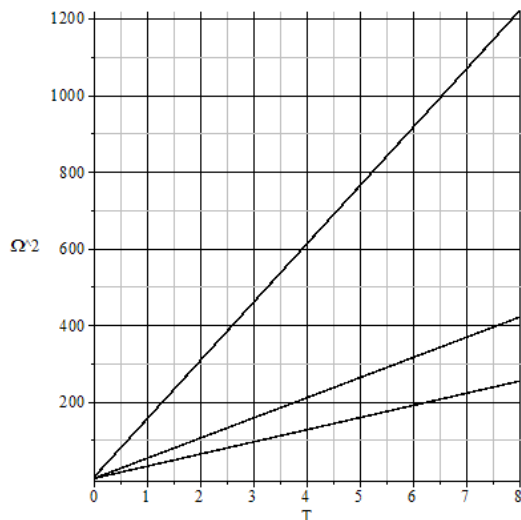
Слід відмітити, що формули (13)–(14) і (17)–(18) підтверджують попередні висновки, які були зроблені з приблизної формули для високих частот.

Зі збільшенням кількості членів ряду попередні корені будуть уточнюватися і з'являтися нові.

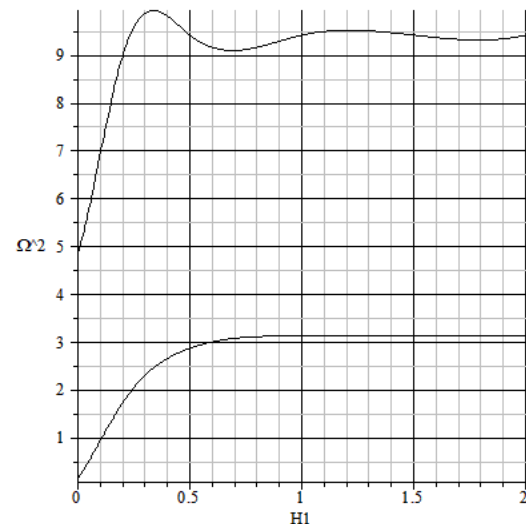
Чисельні дослідження частотних рівнянь (11)–(12), (15)–(16) і формул (13)–(14), (17)–(18) були проведені для наступних значень безрозмірних параметрів:  $\rho_{12} = 0, 0.5, 1, 2$ ;  $\gamma_0^2 = 0.50$ ;  $\tilde{T} = 0, 0.5, 1, 2$ ;  $\tilde{g} = 1, 10, 100$ ;  $H_i = 0.5, 1, 1.5$ ;  $\tilde{k}_0 = 0, 0.5, 1$ , з урахуванням десяти-двадцяти членів у ряду цих рівнянь.

На рис. 2–5 представлені, у випадку мембрани ( $D = 0$ ), графіки залежності квадрата першої безрозмірної несиметричної частоти  $\Omega^2$  від безрозмірного натягу  $\tilde{T}$  (рис. 2), від безрозмірної глибини  $H_1$  (рис.3) і від безрозмірної щільності  $\rho_{12}$  (рис.4, 5), а на рис. 3 додано ще графік квадрата другої безрозмірної частоти. На рис.2, 4, 5  $H_1 = H_2 = 1$  і значенням  $\tilde{k}_0 = 0$  відповідає верхній графік,  $\tilde{k}_0 = 0.5$  – середній графік і  $\tilde{k}_0 = 1.0$  – нижній графік.

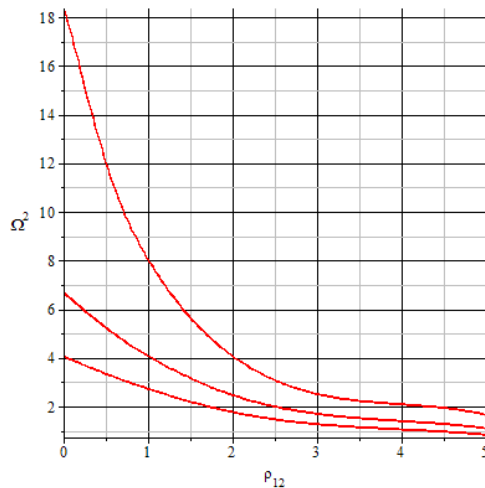
Графіки на рис. 2, 4, 5 дуже близькі до другого набору частотного спектру, а графік на рис. 3 точно відповідає першому набору. Численні дослідження показали, що додавання рідини з вільною поверхнею до рідини зі щільністю  $\rho_{12} = 0$  (рис.2) призводить до зменшення коливань пластини (другого набору) і появи нових частот коливань вільної поверхні (першого набору, рис. 3). Все це не суперечить фізичному змісту. При додаванні рідини зі щільністю  $\rho_{12} > 0$  відбувається суттєве зменшення частот коливань другого набору, що може призвести до втрати стійкості положення рівноваги пластини (див. рис. 4-5) [5, 7]. Також відзначається слабкий взаємовплив коливань пластини на коливання вільної поверхні та навпаки. Так, наприклад, графіки на рис. 3 (перший набір) с точністю до третього знака збігаються з аналогічними графіками при відсутності коливань пластини.



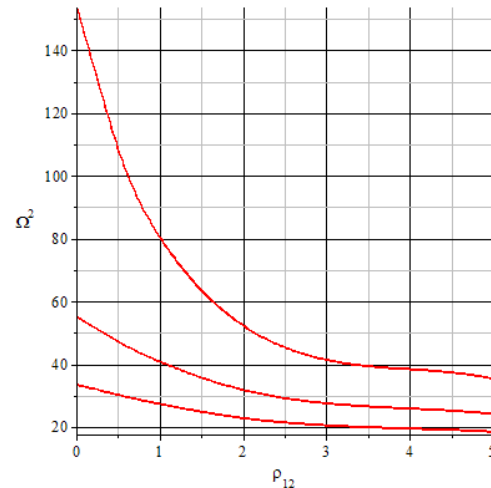
**Рис. 2.** Залежність квадрата першої безрозмірної частоти від  $\tilde{T}$  при  $\rho_{12} = 0$  (випадок відсутності верхньої рідини)



**Рис. 3.** Залежність квадрата першої і другої безрозмірної частоти від  $H_1$  при  $\rho_{12} = 1$ ,  $H_2 = 0.5$ ,  $k_0 = 1$ ,  $\tilde{T} = 10$  (перший набір частот)



**Рис. 4.** Залежність квадрата першої безрозмірної частоти від  $\rho_{12}$  при  $\tilde{T} = 0.1$  (другий набір частот)



**Рис. 5.** Залежність квадрата першої безрозмірної частоти від  $\rho_{12}$  при  $\tilde{T} = 1$  (другий набір частот)

Слід зазначити, що графіки залежності квадрата першої безрозмірної несиметричної частоти  $\Omega^2$  від  $\gamma_0^2$  ( $D \neq 0$ ) якісно не відрізняються від графіків у випадку  $D = 0$  і графіки для симетричних і несиметричних частот також якісно не відрізняються і, як правило, значення парних частот приблизно в п'ять разів більше відповідних значень непарних частот. Отримані приблизні формули (13)–(14) і (17)–(18) є достатньою для практики точністю можуть бути застосовані для інженерних розрахунків.

На основі проведених аналітичних і чисельних досліджень можна зробити наступні загальні висновки як для парних, так і для непарних частот:

1. Частотний спектр розглянутої задача складається із двох наборів частот, які відповідають коливанням вільної поверхні і коливанням пластини. Відзначається слабкий взаємовплив коливань пластини на коливання вільної поверхні та навпаки.
2. Залежність квадрата безрозмірної частоти від величин  $\tilde{T}$  і  $\gamma_0^2$  лінійна.
3. Зі зменшенням маси пластини частоти другого набору зростають і приймають

- найбільше значення для безінерційних пластин або мембран.
4. Отримано наближені формули для другого набору частот та показано їх ефективність.
  5. Зі зменшенням щільності верхньої рідини частоти другого набору зростають і приймають найбільше значення при відсутності верхньої рідини, а зі збільшенням щільності верхньої рідини частоти спадають й при малому натягу мембрани або малій згинальній жорсткості та малому натягу пластини можуть обернутися в нуль, що призведе до втрати стійкості плоскої форми рівноваги мембрани або пластини.
  6. Зменшення частот другого набору відбувається зі збільшенням глибини заповнення верхньої рідини або зі зменшенням глибини заповнення нижньої рідини.
  7. Зі збільшенням членів ряду частотного рівняння попередні корені першого і другого наборів будуть уточнюватися та з'являтися нові. Для отримання точності чотирьох значних цифр достатньо врахувати 10–20 членів ряду.

## 6 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

Досліджено аналітично і чисельно частотний спектр плоских коливань пружної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею в прямокутному каналі. Рівняння вільних сумісних коливань пластини та рідини представлені у вигляді системи інтегро-диференціальних рівнянь з граничними умовами закріплення контурів пластини та умовою збереження об'єму рідини. При розв'язанні крайової задачі на власні значення форма прогину пластини представляється сумою фундаментальних рішень однорідного рівняння для незакріпленої пластини і часткового розв'язання неоднорідного рівняння у вигляді розкладання за власними функціями коливань ідеальної рідини у прямокутному каналі. Отримано у вигляді визначника четвертого порядку частотне рівняння вільних сумісних коливань пластини та рідини. Для довільного закріплення контурів прямокутної пластини показано, що частотний спектр розглянутої задача складається із двох наборів частот, які відповідають коливанням вільної поверхні і коливанням пластини. У випадку затиснених контурів пластини проведено його спрощення і проведені детальні дослідження першого і другого наборів частот від основних механічних параметрів системи. Відзначається слабкий взаємовплив коливань пластини на коливання вільної поверхні та навпаки. Отримано наближені формули для другого набору частот та показано їх ефективність. Показано, що зі зменшенням маси пластини частоти другого набору зростають і приймають найбільше значення для безінерційних пластин або мембран. Зі зменшенням щільності верхньої рідини частоти другого набору також зростають і приймають найбільше значення при відсутності верхньої рідини, а зі збільшенням щільності верхньої рідини частоти спадають й при малому натягу мембрани або малій згинальній жорсткості та малому натягу пластини можуть обернутися в нуль, що призведе до втрати стійкості плоскої форми рівноваги мембрани або пластини. Зменшення частот другого набору відбувається зі збільшенням глибини заповнення верхньої рідини або зі зменшенням глибини заповнення нижньої рідини. Зі збільшенням членів ряду частотного рівняння попередні корені першого і другого наборів будуть уточнюватися та з'являтися нові.

## 7. ВИСНОВКИ

У лінійній постановці розглянуто гідропружну задачу про плоскі коливання пружної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею в прямокутному каналі. Пластина має довільне закріплення контурів і схильна до розтягуючих або стискаючих зусиль в серединній поверхні. Аналітично і чисельно

досліджено частотний спектр сумісних вільних коливань пружної пластини і рідини з вільною поверхнею. Показано, що частотний спектр розглянутої задача складається із двох наборів частот, які відповідають коливанням вільної поверхні і коливанням пластини. У випадку затиснених контурів пластини проведені детальні дослідження першого і другого наборів частот від основних механічних параметрів системи. Відзначається слабкий взаємовплив коливань пластини на коливання вільної поверхні та навпаки. Отримано наближені формули для другого набору частот та показано їх ефективність.

## Література

1. Кононов Ю. Н., Шевченко В. П., Лимарь А. А. Об устойчивости колебаний прямоугольной пластины в идеальной жидкости. Механика та математичні методи, 2019. Том 1. Вип. 2. С. 6–17.
2. Кононов Ю. Н., Шевченко В. П., Лимарь А. А. О колебании прямоугольной пластины в идеальной жидкости с учетом различных способов закрепления ее контуров. Механика та математичні методи, 2020. Том 2. Вип. 1. С. 6–19.
3. Лимарь О. О. Про уточнення умов стійкості коливань прямокутної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею. Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки, 2020. № 1. С. 190–204.
4. Kononov Yuri, Lyamar Aleksandr On the stability of coupled oscillations of the elastic bottom of a rigid rectangular channel and ideal liquid. Journal of Theoretical and Applied Mechanics. Fluid mechanics. Sofia. 2020. Vol. 50. P. 292–303.
5. Kononov Yu. N., Lyamar A. A. On the update of the conditions of the stability of vibrations of the plate separating ideal liquids in a rectangular channel with hard foundations. Intern. Journal of Mechanical Engineering and Information Technology. 2018. Vol. 06. Issue 1. P. 1755–1760.
6. Лимарь А. А. Об упрощении частотных уравнений в задаче о колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій : збірник наукових праць, 2017. Вип.27. С. 106–128.
7. Кононов Ю.Н., Лимарь А.А. О колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с одним упругим основанием. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій : збірник наукових праць, 2017. Вип. 26. С. 79–96.
8. Canales F. G., Mantari J. L. Vibration behavior of isotropic plate structures in contact with a bounded fluid via unified formulation. Chinese Journal of Aeronautics. 2019. 32(4). P. 921–937.
9. Amaouche M., Meziani B. Coupled frequencies of a rectangular hydroelastic system with two fluids. Meccanica. 2012. 47. P. 71–83.
10. Jeong K.-H., Kim K.-J. Hydroelastic vibration of circular plate submerged in a bounded compressible fluid. J. Sound Vib. 2005. 283. P. 153–172.
11. Tariverdilo S., Shahmardani M., Mirzapour J., Shabani R. Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid. Appl. Math. Model. 2013. 37. № 1-2. P. 228–239.
12. Kononov Yu.M., Shevchenko V. P., Dzhukha Yu.O. Axially symmetric vibrations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical vessel. Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 240, №. 1. P. 98–112.
13. Kononov Yu.M., Dzhukha Yu.O. Vibrations of two-layer ideal liquid in a rigid cylindrical vessel with elastic bases. Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 246. №. 3. P. 365–383.
14. Кононов Ю.М. Про стійкість положення рівноваги твердого тіла з багатошаровою ідеальною рідиною, розділеною пружними пластинами. Укр. мат. журн. 2021, 73. №10. С. 1343–1355.

## References

1. Kononov, Yu. N., Shevchenko, V. P., Lyamar', A. A. (2019) Ob ustojchivosti kolebaniya pryamougol'noj plastiny v ideal'noj zhidkosti. [On the stability of vibrations of a rectangular plate in an ideal fluid]. *Mekhanika ta matematichi metody*. 1(2). 6–17. [in Russian].

2. Kononov, Yu. N., Shevchenko, V. P., Limar', A. A. (2020). O kolebanii pryamougolnoy plastiny v idealnoy zhidkosti s uchetom razlichnykh sposobov zakrepleniya ee konturov. [On the vibration of a rectangular plate in an ideal fluid, taking into account various ways of fixing its contours]. *Mekhanika ta matematichi metody*. 2(1). 6–19. [in Russian].
3. Limar', A.A. (2020) Pro utochnennya umov stijkosti kolivan' pryamokutnoї plastini, yaka podilyae dvosharovu ideal'nu ridinu z vil'noyu poverhneyu. [About specification of conditions of stability of fluctuations of the rectangular plate which separates two-layer ideal liquid with a free surface]. *Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu. Fiziko-matematichni nauki*. 1. 190–204. [in Ukrainian].
4. Kononov, Yuri, Lyamar, Alekandr (2020). On the stability of coupled oscillations of the elastic bottom of a rigid rectangular channel and ideal liquid. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Fluid mechanics, Sofia*, Vol. 50, 292–303.
5. Kononov, Yu. N., Lyamar, A. A. (2018). On the update of the conditions of the stability of vibrations of the plate separating ideal liquids in a rectangular channel with hard foundations. *Intern. Journal of Mechanical Engineering and Information Technology*. 06. Issue 1. 1755–1760.
6. Limar', A.A. (2017). Ob uproshchenii chastotnykh uravnenij v zadache o kolebanii pryamougol'noj plastiny, razdelyayushchej ideal'nye zhidkosti raznoj plotnosti v pryamougol'nom kanale. [On the simplification of frequency equations in the problem of oscillation of a rectangular plate separating ideal liquids of different densities in a rectangular channel]. *Problemi obchislyval'noi mekhaniki i mcnosti konstrukcij: zbirnik naukovih prac'*. 27. 106–128. [in Russian].
7. Kononov, Yu. N., Limar', A. A. (2017) O kolebanii pryamougol'noj plastiny, razdelyayushchej ideal'nye zhidkosti raznoj plotnosti v pryamougol'nom kanale s odnim uprugim osnovaniem. [On the oscillation of a rectangular plate separating ideal liquids of different densities in a rectangular channel with one elastic base]. *Problemi obchislyval'noi mekhaniki i mcnosti konstrukcij: zbirnik naukovih prac'*. 26. 79–96. [in Russian].
8. Canales, F. G., Mantari, J. L. (2019). Vibration behavior of isotropic plate structures in contact with a bounded fluid via unified formulation. *Chinese Journal of Aeronautics*. 32(4). 921–937.
9. Amaouche, M., Meziani, B. (2012). Coupled frequencies of a rectangular hydroelastic system with two fluids. *Meccanica*. 47. 71–83.
10. Jeong, K.-H., Kim, K.-J. (2005). Hydroelastic vibration of circular plate submerged in a bounded compressible fluid. *J. Sound Vib*. 283. 153–172.
11. Tariverdilo, S., Shahmardani, M., Mirzapour, J., Shabani, R. (2013). Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid. *Appl. Math. Model*. 37. № 1-2. 228–239.
12. Kononov, Yu. M., Shevchenko, V. P., Dzhukha, Yu. O. (2019). Axially symmetric vibrations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical vessel. *Journal of Mathematical Sciences*. 240 (1). 98–112.
13. Kononov, Yu. M., Dzhukha, Yu. O. (2020). Vibrations of two-layer ideal liquid in a rigid cylindrical vessel with elastic bases. *Journal of Mathematical Sciences*. 246 (3). 365–383.
14. Kononov, Yu. M. (2021) Pro stijkist' polozhennya rivnovagi tverdogo tila z bagatosharovoyu ideal'noyu ridinoyu, rozdilenoyu pruzhnimi plastinami. [ On the stability of the equilibrium position of a solid with a multilayer ideal liquid separated by elastic plates] *Ukr. mat. Zhurn* 73(10). 1343–1355. [in Ukrainian].

**Лимарь Александр Александрович**

Миколаївський національний аграрний університет  
к.ф.-м.н, асистент  
вул. Георгія Гонгадзе, 9 Миколаїв, Україна 54020  
aleksandr1402aa@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-0301-7313

*Для посилань:*

Лимар О. О. Власні частоти коливань пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею у прямокутному каналі. *Механіка та математичні методи*, 2021. Т. 3. № 2. С. 75–87.

*For references:*

Lyamar O. (2021). Eigenfrequencies of oscillations of a plate which separates a two-layer ideal fluid with a free surface in a rectangular channel. *Mechanics and Mathematical Methods*. 3 (2). 75–87.