**УДК 531.36, 531.382**

# ПРО СТІЙКІСТЬ РІВНОМІРНОГО ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ НЕСИМЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА ПІД ДІЄЮ ПОСТІЙНОГО МОМЕНТУ У ІНЕРЦІАЛЬНІЙ СИСТЕМІ ВІДЛІКУ

**Кононов Ю. М.[1], Довгоший О. А.[1], Чеіб А. Х.[2]**
[1]*Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України*
[2]*Донецький національний університет імені Василя Стуса*

**Анотація:** Досліджено аналітично і чисельно частотний спектр плоских коливань пружної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею в прямокутному каналі. Для довільного закріплення контурів прямокутної пластини показано, що частотний спектр розглянутої задачі складається з двох наборів частот, яки описують коливання вільної поверхні рідини і пружної пластини. Рівняння зв'язаних коливань пластини та рідини представлені у вигляді системи інтегро-диференціальних рівнянь з граничними умовами закріплення контурів пластини та умовою збереження об'єму рідини. При розв'язанні крайової задачі на власні значення форма прогину пластини представляється сумою фундаментальних рішень однорідного рівняння для незакріпленої пластини і часткового розв'язання неоднорідного рівняння у вигляді розкладання за власними функціями коливань ідеальної рідини у прямокутному каналі. Отримано у вигляді визначника четвертого порядку частотне рівняння вільних сумісних коливань пластини та рідини. У випадку затиснених контурів пластини проведено його спрощення і проведені детальні чисельні дослідження першого і другого наборів частот від основних механічних параметрів системи. Відзначається слабкий взаємовплив коливань пластини на коливання вільної поверхні та навпаки. Показано, що зі зменшенням маси пластини частоти другого набору зростають і приймають найбільше значення для безінерційних пластин або мембран. Зменшення частот другого набору відбувається зі збільшенням глибини заповнення верхньої рідини або зі зменшенням глибини заповнення нижньої рідини. З урахуванням двох членів ряду у частотному рівнянні отримано наближені формули для другого набору частот та показано їх ефективність. Зі збільшенням числа членів ряду частотного рівняння попередні корені першого і другого наборів уточнюються та з'являтися нові.

**Ключові слова:** динамічно несиметричне та симетричне тверде тіло, середовище з опором, постійний момент в інерціальній системі відліку, асимптотична стійкість.

# ON THE STABILITY OF UNIFORM ROTATION IN A RESISTING NONSYMETRIC RIGID BODY UNDER THE ACTION OF A CONSTANT MOMENT IN INERTIAL REFERENCE FRAME

**Yu. Kononov[1], O. Dovgoshey[1], A. K. Cheib[2]**
[1]*Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine*
[2]*Vasyl' Stus Donetsk National University*

**Abstract:** Assuming that the center of mass of a rigid asymmetric body is on the third main axis of inertia of a rigid body, the conditions for the asymptotic stability of uniform rotation of a dynamically asymmetric solid rigid body with a fixed point are obtained. These conditions are obtained in the form of a system of three inequalities based on the Lénard-Shipar test, written in innormal form. The rigid body is under the action of gravity, dissipative moment and constant moment in the inertial frame of reference. The rotation of a rigid asymmetric body around the center of mass is


https://doi.org/10.31650/2618-0650-2022-4-1-6-22

studied. Uniform rotation around the center of mass of a rigid asymmetric body will be unstable in the absence of a constant moment. Cases of absence of dynamic or dissipative asymmetry are considered. It is shown that the equilibrium position of a rigid body will be stable only under the action of the reducing moment. Dynamic asymmetry has a more significant effect on the stability of rotation of an asymmetric rigid body than dissipative asymmetry. Stability conditions have been studied for various limiting cases of small or large values of restoring, overturning, or constant moments. It is noted that for sufficiently large values of the modulus of the reducing moment, the rotation of the asymmetric solid will be asymptomatically stable. If the axial moment of inertia is the greatest or the smallest moment of inertia, then at sufficiently large values of angular velocity, both under the action of the overturning moment and under the action of the reducing moment, the rotation of the asymmetric solid will be asymptomatically stable. Analytical studies of the influence of dissipative, constant, overturning and restorative moments on the stability of uniform rotations of asymmetric and symmetric solids have been carried out. It is shown that in the absence of dynamic and dissipative symmetries, the obtained stability conditions coincide with the known ones.

**Keywords:** dynamically asymmetric and symmetric rigid body, medium with resistance, constant moment in inertial frame of reference, asymptotic stability.

# 1 ВСТУП

В даний час є досить велика кількість робіт, в яких проводяться різні дослідження динаміки твердих тіл, що обертаються у середовищі з опором. Наведемо лише роботи, які найближчі до розглядуваної задачі. У роботах [1, 2] розглянуто кілька прикладів рухів твердих тіл з малою несиметрією і запропоновано алгоритм вивчення таких систем. Показано, що мала динамічна несиметрія твердого тіла призводить до появи додаткового інтервалу нестійкості, довжина якого прямує до нуля при прямуванні до нуля величини дебалансу. В статтях [3, 4], на підставі критерію Льєнара-Шіпара в іннорному вигляді, отримано умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання під дією постійного моменту несиметричного твердого тіла у середовищі з опором. Ці умови записано у вигляді системи трьох нерівностей. Проведено аналітичні дослідження цих нерівностей. Отримано умови на величини постійного моменту і моменту інерції третьої головної осі, які при дії відновлювального моменту достатні для асимптотичної стійкості. Показано, що при досить великому постійному моменті буде спостерігатися асимптотична стійкість при дії відновлювального моменту, якщо обертання твердого тіла відбувається навколо осі найбільшого моменту інерції і найменшого з подвоєних. Дано узагальнення отриманих умов стійкості на випадок наявності в твердому тілі порожнини з ідеальної нестисливої рідини, що здійснює потенціальний рух. Показано, що при відсутності дисипації, отримані умови стійкості збігаються з відомими. Вплив ідеальної рідини на стійкість обертання дзиги Лагранжа у середовищі з опором розглянуто в роботі [5]. Найбільш вдалий огляд сучасної літератури по розглядуваної задачі наданий в роботах [3–11]. У монографії [6] представлений уніфікований і добре розроблений підхід до динаміки кутових рухів твердих тіл, що зазнають моментів збурення різної фізичної природи. Строгий підхід, заснований на процедурі усереднення, застосовується до тіл з довільними еліпсоїдами інерції. Детально розглядається дія різних моментів збурень, як зовнішніх (гравітаційний, аеродинамічний, сонячний тиск), так і внутрішніх (завдяки в'язкій рідині в резервуарах, пружним і в'язкопружним властивостям тіла). В статті [7] досліджуються збурені обертальні рухи твердого тіла, близькі до випадку Лагранжа, під дією повільно змінювального в часі крутного моменту. Новий клас обертань динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки з урахуванням нестаціонарного збурюючого моменту і повільно змінюваного з часом відновлюючого моменту вивчається у роботі [8]. За допомогою методу усереднення в статті [8] одержано наближений розв’язок системи рівнянь Ейлера руху в середовищі з опором твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною великої в'язкості. У роботі [9] досліджуються обурені рухи твердого тіла, близькі до випадку Лагранжа, під дією відновлювального та обурюючого моментів сил. Для аналізу нелінійної системи рівнянь руху використається метод усереднення. Наведено умови можливості усереднення рівнянь руху по фазі кута нутації та описано процедуру усереднення повільних змінних обуреного руху твердого тіла у першому наближенні. В статті [10] розглянуто рух навколо центру мас сфероїда із порожниною, заповненою в'язкою рідиною. Момент сил, що діють тіло з боку в'язкої рідини в порожнині, визначають за методикою, розробленою в роботах Ф.Л. Чорноусько. Асимптотичний підхід дозволяє отримати деякі якісні результати та описати нелінійну еволюцію кутового руху за допомогою спрощених усередніх рівнянь. За допомогою методу усереднення Крилова–Боголюбова у роботі [11] одержано наближений розв’язок системи рівнянь Ейлера руху твердого тіла у середовищі з опором з додатковими збуреними членами для сфероїда, заповненого в’язкою рідиною великої в'язкості.

В статті [12] проведені дослідження впливу дисипативного моменту і постійного моменту в інерціальній системі відліку на стійкість стаціонарних рухів гіроскопа

Лагранжа. У роботі [13] ця задача була узагальнена на випадок струнного підвісу і рівномірних обертань гіроскопа Лагранжа.

У цій роботі узагальнені задачі, які були розглянуті у статті [12] на випадок рівномірного обертання несиметричного твердого тіла і у статті [3] на випадок постійного моменту в неінерціальний системі та доповнені результати, які були раніше отримані у роботах [14, 15]. У припущенні, що центр мас несиметритчного твердого тіла знаходиться на третій головній осі інерції твердого тіла, отримано, на підставі критерію Льенара-Шипара в іннорному вигляді, умови асимптотичної стійкості рівномірного обер-тання навколо нерухомої точки несиметричного твердого тіла. Проведено аналітичні дослідження впливу дисипативного, постійного, перекидального і відновлювального моментів на стійкість рівномірних обертань несиметричних та симетричних твердих тіл.

## 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

Розглянемо важке динамічно несиметричне тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої точки, в припущенні, що на нього діє дисипативний момент $\mathbf{M}_d = -\mathbf{D}\boldsymbol{\omega}$ $\left(\mathbf{D} = diag(D_1, D_2, D_3);\ D_i > 0;\ i = \overline{1,3}\right)$, що моделює опір середовища та постійний моменти $\mathbf{M}_p = P\boldsymbol{\gamma}$, який підтримує сталу кутову швидкість власного обертання твердого тіла. Будемо вважати, що на третій головної осі інерції твердого тіла знаходиться центр мас твердого тіла і твердо тіло в незбуреному русі рівномірно обертається с кутою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_0$ навколо цієї вісі. Тут $\boldsymbol{\omega}$ – кутова швидкість твердого тіла, $\boldsymbol{\gamma}$ – одиничний вектор висхідної вертикалі, $P$ – довільна стала.

Рівняння руху твердого тіла мають вигляд [3, 12, 14]

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + P\boldsymbol{\gamma} - D\boldsymbol{\omega}; \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0, \tag{2}$$

де $\mathbf{J} = diag\left(J_1, J_2, J_3\right)$ – тензор інерції твердого тіла для нерухомої точки; $V = \Gamma(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma})$ – потенційна енергія ($\Gamma = mgc$, $m$ – маса твердого тіла, $c$ – відстань від нерухомої точки до центру мас твердого тіла, $g$ – прискорення вільного падіння); $\mathbf{k}$ – одиничний вектор третьої головної осі; $\boldsymbol{\gamma}$ – одиничний вектор висхідної вертикалі.

Рівняння (1) виражає теорему про зміну кінетичного моменту $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$, а рівняння (2) – умова сталості вектора $\boldsymbol{\gamma}$ в інерціальній системі відліку.

Проектуючи рівняння руху твердого тіла (1) – (2) на головній осі інерції твердого тіла для нерухомої точки, отримаємо:

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = \Gamma\gamma_2 - D_1\omega_1; \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 = -\Gamma\gamma_1 - D_2\omega_2; \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = P\gamma_3 - D_3\omega_3, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 + \omega_2\gamma_3 - \omega_3\gamma_2 = 0; \\ \dot{\gamma}_2 + \omega_3\gamma_1 - \omega_1\gamma_3 = 0; \\ \dot{\gamma}_3 + \omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0,\ \ \gamma_3 = 1,\ \ \omega_1 = \omega_2 = 0,\ \ \omega_3 = \omega_0 = \omega = \frac{P}{D_3}, \tag{5}$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = -1,\ \omega_1 = \omega_2 = 0,\ \omega_3 = \omega_0 = \omega = \frac{-P}{D_3}, \tag{6}$$

які відповідають рівномірним обертанням твердого тіла з кутовою швидкістю $\omega$ навколо вертикально розташованої третьої головної осі. При цьому розв'язку (5) відповідає випадок "сплячої" дзиги, на яку діє перекидальний момент ($\Gamma > 0$, центр мас твердого тіла перебуває вище нерухомої точки ($c > 0$), а розв'язку (6) – випадок статично врівноваженої дзиги, на яку діє відновлювальний ($\Gamma < 0$, центр мас знаходиться нижче нерухомої точки ($c < 0$). Таким чином, розв'язку (5) відповідає випадок $\Gamma > 0$, а розв'язку (6) відповідає $\Gamma < 0$.

## 3 АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ (5) – (6)

Дослідити аналітично і чисельно частотний спектр плоских коливань пружної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею в прямокутному каналі. Показати для довільного закріплення контурів прямокутної пластини, що частотний спектр розглянутої задачі складається з двох наборів частот, яки описують коливання вільної поверхні рідини і пружної пластини. У випадку затиснених контурів пластини провести його спрощення і вивчити вплив основних механічних параметрів системи на перший і другий набір частот. Розглянути випадки відродження пластини в мембрану. Показати взаємовплив коливань пластини або мембрани (першого набору) на коливання вільної поверхні рідини (другого набору) та навпаки.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Вважаючи в обуреного руху $\gamma_3 = \pm 1 + \delta$, $\omega_3 = \omega + \sigma$ (знак плюс відповідає рішенню (5), а знак мінус – (6)) і, зберігаючи для інших змінних їх колишні позначення, запишемо лінеаризовані рівняння збуреного руху:

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega - \Gamma\gamma_2 - P\gamma_2 + D_1\omega_1 = 0; \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_1\omega + \Gamma\gamma_1 - P\gamma_2 + D_2\omega_2 = 0; \\ J_3\dot{\sigma} + D_3\sigma - P\sigma = 0, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 + \omega_2 - \omega\gamma_2 = 0; \\ \dot{\gamma}_2 - \omega_1 + \omega\gamma_1 = 0; \\ \dot{\delta} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

При динамічної ($J_2 = J_1$) і дисипативної ($D_2 = D_1$) симетрії рівняння (1) – (2) збігаються з рівняннями роботи [12]. У зв'язку з цим всі основні властивості рівнянь цієї роботи переносяться і на рівняння (1) – (2), а саме: характеристичне рівняння системи (1) – (2) завжди має один нульовий корень, обумовлений наявністю геометричного інтеграла $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ і один негативний корінь $-D_3/J_3$; перше і друге рівняння системи (1) і системи (2) відокремлюються від інших рівнянь. Розв'язання (5) – (6) асимптотично стійкі, якщо всі корені характеристичного рівняння мають позитивну дійсну частину і нестійкі, якщо хоча б один корінь має позитивну речову частину. Асимптотична стійкості по змінної $\gamma_3$ випливає з асимптотичної стійкості по змінним $\gamma_1$, $\gamma_2$ і геометричного інтеграла.

З перших двох рівнянь системи (8) висловимо $\omega_1$, $\omega_2$ і підставимо їх і їхні похідні в перші два рівняння (7):

$$\begin{cases} J_2\ddot{\gamma}_1 + D_2\dot{\gamma}_1 + \Gamma_1\gamma_1 - J_s\dot{\gamma}_2 - \tilde{D}_2\gamma_2 = 0, \\ J_1\ddot{\gamma}_2 + D_2\dot{\gamma}_2 + \Gamma_2\gamma_2 + J_s\dot{\gamma}_1 + \tilde{D}_1\gamma_1 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Тут

$$\Gamma_1 = \left(J_3 - J_1\right)\omega^2 - \Gamma,\ \Gamma_2 = \left(J_3 - J_2\right)\omega^2 - \Gamma,\ J_s = J\omega,\ J = J_1 + J_2 - J_3 > 0,$$
$$\tilde{D}_i = D_i\omega - P\ (i = 1, 2).$$

Основна відмінність отриманих рівнянь (9) від аналогічних рівнянь робіт [5, 6] полягає в тому, що через динамічної ( $J_2 \neq J_1$ ) і дисипативної ( $D_2 \neq D_1$ ) несиметрії неможливо спростити ці рівняння шляхом введенням комплексної функції $\gamma_1 + i\gamma_2$. Слід також зазначити, що система рівнянь (9) описує рух лінійної механічної системи з двома ступенями свободи, що знаходиться під дією сил довільної структури: дисипативних, потенційних, гіроскопічних і циркуляційних [3, 12].

Характеристичне рівняння для системи (9) буде мати вигляд:

$$(\lambda^2 J_1 + D_1\lambda + \Gamma_2)(\lambda^2 J_2 + D_2\lambda + \Gamma_1) + (J_s\lambda + \tilde{D}_1)(J_s\lambda + \tilde{D}_2) = 0$$

чи

$$a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \tag{10}$$

де $a_4 = J_1 J_2 > 0$, $a_3 = J_1 D_1 + J_2 D_2 > 0$,

$$\begin{aligned} a_2 &= J_s^2 + J_1\Gamma_1 + J_2\Gamma_2 + D_1 D_2 = (2J_1J_2 - J_3J)\omega^2 - (J_1 + J_2)\Gamma + D_1D_2, \\ a_1 &= (\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2)J_s + D_1\Gamma_1 + D_2\Gamma_2 = (J_1D_2 + J_2D_1)\omega^2 - (D_1 + D_2)\Gamma - 2JP\omega, \\ a_0 &= \Gamma_1\Gamma_2 + \tilde{D}_1\tilde{D}_2 = (J_3 - J_1)(J_3 - J_2)\omega^4 + [(J - J_3)\Gamma + D_1D_2]\omega^2 - (D_1 + D_2)P\omega + P^2 + \Gamma^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Для того, щоб все нулі рівняння (10) лежали у відкритій лівій півплощині, згідно критерію Льенара - Шіпара, записаного в іннорном вигляді [16] (см. с.34), необхідно і достатньо, щоб:

1) були додатні всі коефіцієнти $a_i$ (або половина цих коефіцієнтів);

2) були іннорно додатними матриці $\Delta_3^e$, $\Delta_1^e$, тобто

$$I_3 = \left|\Delta_3^e\right| = \begin{vmatrix} a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & 0 \end{vmatrix} = (a_2a_3 - a_1a_4)a_1 - a_0a_3^2 > 0;\ \ I_1 = \left|\Delta_1^e\right| = a_3 > 0.$$

Таким чином, умови асимптотичної стійкості розв’язків (5) – (6) запишуться так:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ (a_2a_3 - a_1a_4)a_1 - a_0a_3^2 > 0.$$

Для рішення (5), тобто коли діє перекидальний момент ( $\Gamma > 0$ ), вони мають вигляд:

$$\begin{aligned} &\left(\Gamma - (J_3 - J_1)\omega^2\right)\left(\Gamma - (J_3 - J_2)\omega^2\right) + \left(D_3 - D_1\right)\left(D_3 - D_1\right)D_3\omega^2 = \\ &= \Gamma^2 + \tilde{J}\omega^2\Gamma + \left(D_3 - D_1\right)\left(D_3 - D_1\right)\omega^2 + (J_3 - J_1)(J_3 - J_2)\omega^4 > 0, \end{aligned} \tag{12}$$

$$(D_1 + D_2)\Gamma < \left(J_{12} - 2JD_3\right)\omega^2, \tag{13}$$

$$(J_1 - J_2)^2 D_1D_2\Gamma^2 + b_1\Gamma + b_0 > 0. \tag{14}$$

Тут


https://doi.org/10.31650/2618-0650-2022-4-1-6-22

$$b_1=\left[(J_3-2J_1)D_2+(J_3-2J_2)D_1\right]JJ_{12}\omega^2+2J(J_1-J_2)\tilde{J}_{12}P\omega-(D_1+D_2)D_1D_2J_{12}\,, \quad (15)$$
$$b_0=P\left[2J^2J_3J_{12}\omega^3-4J^2J_1J_2P\omega^2+\left(J_1D_2^2-\tilde{J}D_1D_2+J_2D_1^2\right)J_{12}\omega+J_{12}^2P\right],$$
$$\tilde{J}=J-J_3,\ \ J_{12}=J_1D_2+J_2D_1>0\,.$$

Так як $\omega=P/D_3$, то систему нерівностей (12) – (14) зручно записати ще так:

$$\left(\Gamma D_3^2-(J_3-J_1)P^2\right)\left(\Gamma D_3^2-(J_3-J_2)P^2\right)+\left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_1\right)D_3^3P^2=$$
$$=D_3^4\Gamma^2+\tilde{J}D_3^2P^2\Gamma+\left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_1\right)D_3^2P^2+(J_3-J_1)(J_3-J_2)P^4>0, \quad (16)$$
$$(D_1+D_2)D_3^2\Gamma<\left(J_{12}-2JD_3\right)P^2, \quad (17)$$
$$(J_1-J_2)^2D_1D_2D_3^3\Gamma^2+D_3\Gamma_1\Gamma+\Gamma_0=p_4P^4+p_2P^2+p_0>0\,. \quad (18)$$

Тут

$$\Gamma_1=\left\{\left[(J_3-2J_2)D_1+(J_3-2J_1)D_2\right]J_{12}+2(J_1-J_2)\tilde{J}_{12}D_3\right\}JP^2-J_{12}(D_1+D_2)D_1D_2D_3^2\,,$$
$$\Gamma_0=2\left(J_3J_{12}-2J_1J_2D_3\right)J^2P^4+\left[2D_1D_2J_3-J_{12}D_3-\left(D_1-D_2\right)\tilde{J}_{12}\right]J_{12}D_3^2P^2, \quad (19)$$
$$p_4=2J^2\left(J_3J_{12}-2J_1J_2D_3\right),$$
$$p_2=\left\{\left[J_2(J_3-2J_2)D_1^2+\left(\left(J_1+J_2\right)J_3-4J_1J_2\right)D_1D_2+2\left(J_1-J_2\right)\tilde{J}_{12}D_3+J_1(J_3-2J_1)D_2^2\right]J\Gamma+\right.$$
$$\left.+\left(J_2D_1^2-\tilde{J}D_1D_2-J_{12}D_3+J_1D_2^2\right)J_{12}D_3\right\}D_3,$$
$$p_0=\Gamma\left[(J_1-J_2)^2\Gamma-J_{12}(D_1+D_2)\right]D_1D_2D_3^3\,,\ \tilde{J}=J-J_3,\ \ J_{12}=J_1D_2+J_2D_1>0\,.$$

Так як в нерівності (12) – (14) і (16) – (18) та в позначення (15) і (19) стала $P$ входить в парний ступені, то ці нерівності при дії перекидального моменту ($\Gamma>0$) визначають умови асимптотичної стійкості рішення (5), а при дії відновлювального моменту ($\Gamma<0$) – рішення (6).

Із нерівності (17) слідує, що при дії перекидального моменту стійкість буде неможлива, коли $D_3>J_{12}J_3/2J_1J_2$.

При динамічної симетрії ($J_2=J_1$) нерівності (16) – (18) отримують вигляд:

$$\left(\Gamma D_3^2-(J_3-J_1)P^2\right)^2+\left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_2\right)D_3^3P^2=$$
$$=D_3^4\Gamma^2+\tilde{J}D_3^2P^2\Gamma+\left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_2\right)D_3^2P^2+(J_3-J_1)^2P^4>0, \quad (20)$$
$$(D_1+D_2)D_3^2\Gamma<\left[J_1(D_1+D_2)-2(2J_1-J_3)D_3\right]P^2\,, \quad (21)$$
$$D_3\Gamma_1\Gamma+\Gamma_0=p_4P^4+p_2P^2+p_0>0\,. \quad (22)$$

Тут

$$\Gamma_1=\left[(J_3-2J_1)JP^2-D_1D_2\right](D_1+D_2)^2\,,$$
$$\Gamma_0=2\left[\left(J_3(D_1+D_2)-2J_1D_3\right)\right]J^2P^4+\left[2D_1D_2J_3-J_1\left(D_1+D_2\right)D_3-J_1\left(D_1-D_2\right)^2\right]\times$$
$$\times(D_1+D_2)D_3^2P^2\quad p_4=2J^2\left[\left(J_3(D_1+D_2)-2J_1D_3\right)\right],$$
$$p_2=\left\{(J_3-2J_1)\left(D_1+D_2\right)^2J\Gamma+\left[J_1\left(D_1^2-\left(D_1+D_2\right)D_3+D_2^2\right)-\tilde{J}D_1D_2\right]\left(D_1+D_2\right)D_3\right\}D_3\,,$$
$$p_0=-(D_1+D_2)^2D_1D_2D_3^2\Gamma\,,\ \tilde{J}=2\left(J_1-J_3\right).$$

Нерівності (20) і (22) з точністю до другого ступеня малості відносно $P/P_0\left(|P/P_0|\ll 1\right)$, де $P_0$ – характерне значення постійного моменту запишуться так:

$$D_3^4\Gamma^2+\tilde{J}D_3^2P^2\Gamma+(D_3-D_1)(D_3-D_2)D_3^2P^2>0\,, \tag{23}$$

$$p_2P^2+p_0>0\,. \tag{24}$$

Нерівності (23), (21) і (24) з точністю до першого ступеня малості відносно $P/P_0$ мають вигляд:

$$D_3^4\Gamma^2+\tilde{J}D_3^2P^2\Gamma>0\,, \tag{25}$$

$$(D_1+D_2)D_3^2\Gamma<0\,, \tag{26}$$

$$(D_1+D_2)^2D_1D_2D_3^2\Gamma<0\,. \tag{27}$$

Це можливо тільки при дії відновлювального моменту.

При дисипативної симетрії ( $D_2=D_1$ ) система нерівностей (16) – (18) запишеться наступним чином:

$$\begin{gathered}\left(\Gamma D_3^2-(J_3-J_1)P^2\right)\left(\Gamma D_3^2-(J_3-J_2)P^2\right)+\left(D_1-D_3\right)^2D_3^3P^2=\\ =D_3^4\Gamma^2+\tilde{J}D_3^2P^2\Gamma+\left(D_1-D_3\right)^2D_3^2P^2+(J_3-J_1)(J_3-J_2)P^4>0,\end{gathered} \tag{28}$$

$$2D_1D_3^2\Gamma<\left[\left(J_1+J_2\right)D_1-2JD_3\right]P^2\,, \tag{29}$$

$$(J_1-J_2)^2D_1^2D_3^3\Gamma^2+D_3\Gamma_1\Gamma+\Gamma_0=p_4P^4+p_2P^2+p_0>0\,, \tag{30}$$

де

$$\Gamma_1=-2D_1\left\{\left[(J_1-J_2)^2D_3-(J_1+J_2)JD_1\right]JP^2+(J_1+J_2)D_1^3D_3^2\right\},$$

$$\Gamma_0=2\left[\left(J_3(J_1+J_2)D_1-2J_1J_2D_3\right)\right]J^2P^4+\left[2D_1J_3-(J_1+J_2)D_3\right](J_1+J_2)D_1^2D_3^2P^2,$$

$$p_4=2J^2\left[\left(J_1+J_2\right)J_3D_1-2J_1J_2D_3\right],$$

$$p_2=\left\{2\left[(J_1-J_2)^2D_3-\left(J_1+J_2\right)JD_1\right]J\Gamma+\left[2J_3D_1-\left(J_1+J_2\right)D_3\right]\left(J_1+J_2\right)D_1D_3\right\}D_1D_3,$$

$$p_0=\Gamma\left[(J_1-J_2)^2\Gamma-2(J_1+J_2)D_1^2\right]D_1^2D_3^3,$$

$$\begin{gathered}D=p_2^2-4p_4p_0=\left\{4\left[J^2D_1^2+(J_1-J_2)^2(D_3-2D_1)D_3\right]J^2\Gamma^2+\right.\\ +4\left[2J_3JD_1^2-(J_1^2-6J_1J_2+J_2^2+(J_1+J_2)J_3)D_1D_3-(J_1-J_2)^2D_3^2\right]JD_1D_3\Gamma+\\ \left.+\left[(J_1+J_2)D_3-2J_3D_1\right]^2D_1^2D_3^2\right\}(J_1+J_2)^2D_1D_3^2.\end{gathered}$$

При $\Gamma<0$, $D_3>2D_1$ и $(J_1-J_2)^2D_3^2+(J_1^2-6J_1J_2+J_2^2+(J_1+J_2)J_3)D_1D_3-2J_3JD_1^2>0$ будемо мати $D>0$.

Нерівності (28) і (30) з точністю до другого ступеня малості відносно $P/P_0$ запишуться так:

$$D_3^4\Gamma^2+\tilde{J}D_3^2P^2\Gamma+\left(D_1-D_3\right)^2D_3^2P^2>0\,, \tag{31}$$

$$p_2P^2+p_0>0\,, \tag{32}$$

де

$$p_2=\left\{2\left[(J_1-J_2)^2D_3-\left(J_1+J_2\right)JD_1\right]J\Gamma+\left[2J_3D_1-\left(J_1+J_2\right)D_3\right]\left(J_1+J_2\right)D_1D_3\right\}D_1D_3\,,$$

$$p_0 = \Gamma\left[(J_1 - J_2)^2\Gamma - 2(J_1 + J_2)D_1^2\right]D_1^2 D_3^3\,,$$
$$D = p_2^2 - 4p_4 p_0 = \Big\{4\left[J^2 D_1^2 + (J_1 - J_2)^2(D_3 - 2D_1)D_3\right]J^2\Gamma^2 +$$
$$+4\left[2J_3 J D_1^2 - (J_1^2 - 6J_1J_2 + J_2^2 + (J_1 + J_2)J_3)D_1D_3 - (J_1 - J_2)^2 D_3^2\right]JD_1D_3\Gamma +$$
$$+\left[(J_1 + J_2)D_3 - 2J_3D_1\right]^2 D_1^2 D_3^2\Big\}(J_1 + J_2)^2 D_1 D_3^2\,.$$

Нерівності (31) і (32) з точністю до першого ступеня малості відносно $\Gamma/\Gamma_0$ отримують вигляд:

$$\tilde{J}D_3^2P^2\Gamma + \left(D_1 - D_3\right)^2 D_3^2 P^2 > 0\,, \tag{33}$$
$$p_2P^2 - 2\Gamma(J_1 + J_2)D_1^4 D_3^3 > 0\,. \tag{34}$$

При дії віновлювального моменту $(\Gamma < 0)$ нерівності (33), (29) і (34) будуть виконані, якщо $2J_3 > J_1 + J_2$, $(J_1 - J_2)^2 D_3 - \left(J_1 + J_2\right)JD_1 < 0$, $2J_3D_1 - \left(J_1 + J_2\right)D_3 > 0$. Так, наприклад, при $\left(J_1 + J_2\right)/2 < J_3 < J_1 + J_2 - (J_1 - J_2)^2 D_3/\left(J_1 + J_2\right)D_1$,
$D_3 < \left(J_1 + J_2\right)^2 D_1/2(J_1 - J_2)^2$, $D_3 < 2J_3D_1/\left(J_1 + J_2\right)$ це буде можливо.

Для перевірки отриманих нерівностей (12) – (14) розглянемо випадок динамічної $(J_2 = J_1)$ і дисипативної симетрії ($D_2 = D_1$). В цьому випадку система нерівності (16) – (18) отримає вигляд:

$$\left(\Gamma D_3^2 - (J_3 - J_1)P^2\right)^2 + \left(D_1 - D_3\right)^2 D_3^3 P^2 > 0\,; \tag{35}$$
$$D_1D_3^2\Gamma < \left[J_1D_1 - \left(2J_1 - J_3\right)D_3\right]P^2; \tag{36}$$
$$\begin{aligned} &D_3\Gamma_1\Gamma + \Gamma_0 = p_4P^4 + p_2P^2 + p_0 = 4J_1\left(D_1^2D_3^2 + J^2P^2\right)\times \\ &\times\left[\left(J_3D_1 - J_1D_3\right)P^2 - \Gamma D_1^2 D_3\right] > 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Тут

$$\Gamma_1 = -4J_1D_1^2\left(D_1^2D_3^2 + J^2P^2\right),$$
$$\Gamma_0 = -4J_1P^2\left(D_1^2D_3^2 + J^2P^2\right)\left(J_1D_3 - J_3D_1\right),$$
$$p_4 = 4J_1\left(J_3 - 2J_1\right)^2\left(J_3D_1 - J_1D_3\right),$$
$$p_2 = 4J_1D_1^2D_3\left[\left(J_3D_1 - J_1D_3\right)D_3 - \left(J_3 - 2J_1\right)^2\Gamma\right],$$
$$p_0 = -4J_1D_1^4D_3^3\Gamma.$$

Нерівності (36) і (37) можно переписати так:

$$D_1^2D_3^2\Gamma < \left[J_1D_1 - \left(2J_1 - J_3\right)D_3\right]D_1P^2 = \left[J_1\left(D_1 - D_3\right)^2 + \left(J_3D_1 - J_1D_3\right)D_3\right]P^2, \tag{38}$$
$$D_1^2D_3^2\Gamma < \left(J_3D_1 - J_1D_3\right)D_3P^2\,. \tag{39}$$

Із нерівностей (38) і (39) слідує нерівність (39) із якої випливають відомі умови стійкості для гіроскопа Лагранжа при $\Gamma > 0$ і $\Gamma < 0$ [12]:

$$\left(J_3D_1 - J_1D_3\right)\omega^2 - D_1^2\Gamma > 0\,. \tag{40}$$


https://doi.org/10.31650/2618-0650-2022-4-1-6-22

## 5 ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ СТІЙКОСТІ (12) – (14) І (16) – (18)

З нерівностей (12) – (14) слідує, що при $(J_3-J_1)(J_3-J_2)>0$ і досить великих значеннях $\omega$ ці нерівності будуть виконані, так як відповідні коефіцієнти при старших ступенях у цих нерівностях позитивні. Таким чином, якщо момент інерції $J_3$ є найбільшим або найменшим моментом інерції, то при досить великих значеннях $\omega$, як при дії перекидального моменту ($\Gamma>0$), так і при дії відновлювального моменту ($\Gamma<0$) рівномірне обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опорному буде асимптотично стійким.

Із нерівностей (12) – (14) і (16) – (18) слідує, що вони будуть виконані при достатньо великих значеннях модуля відновлювального моменту.

При часткової дисипації ($D_1=D_2=0,\ D_3\neq 0$) асимптотична стійкість неможлива, так як не виконується нерівність (14) ($b_1=b_2=0$).

На підставі умов стійкості (12) – (14) можно досліджувати стійкість положення рівноваги. Для цього в нерівності (12) – (14) треба покласти $\omega=0$ ($P=0$). Із цих нерівностей випливає, що положення рівноваги буде стійким тільки при дії відновлювального моменту, а також те, що при відсутності постійного моменту ($P=0$) умови стійкості будут виконані тільки при дії відновлювального моменту.

Нерівності (16) буде невиконана при $\left(\Gamma D_3^2-(J_3-J_1)P^2\right)\left(\Gamma D_3^2-(J_3-J_2)P^2\right)<0$, $\left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_2\right)<0$, а із нерівності (17) слід наступна умови нестійкості рівномірного обертання несиметричного твердого тіла при діє перекидального моменту:

$$D_3>J_{12}/2J \text{ або } J_3<\left[J_1(2D_3-D_2)+J_2(2D_3-D_1)\right]/2D_3\,. \tag{41}$$

Нерівність (16) відносно $\Gamma$ має розв'язки:

$$\left\{0<\Gamma<\Gamma_1\right\}\cup\left\{\Gamma>\Gamma_2\right\} \text{ при } D>0\,, 0<\Gamma_1<\Gamma_2 \text{ і } \Gamma\in R \text{ при } D<0\,,$$

де $\mathrm{D}=\left[(J_1-J_2)^2P^2-4\left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_2\right)D_3^2\right]$, $\Gamma_{1,2}=\left(-\tilde{J}P\pm\sqrt{D}\right)P\big/2D_3^2$.

Для виконання нерівності (16) достатньо, щоб

$$\left(\Gamma D_3^2-(J_3-J_1)P^2\right)\left(\Gamma D_3^2-(J_3-J_2)P^2\right)>0 \text{ і } \left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_2\right)>0\,.$$

Так, наприклад, при $\Gamma>0$ і $J_3>J_2>J_1$ ми маємо
$\left\{0<\Gamma<(J_3-J_1)P^2/D_3^2\right\}\cup\left\{\Gamma>(J_3-J_1)P^2/D_3^2\right\}$.

Також для виконання нерівності (16) достатньо, щоб $\tilde{J}\Gamma>0, \left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_1\right)>0$ і $(J_3-J_1)(J_3-J_2)>0$. Так, наприклад, при $\Gamma>0$ і $J_3<J_1, J_3<J_2$ ($\tilde{J}>0$) ця нерівність буде виконана.

Нерівність (18) відносно $\Gamma$ має розв'язки:

$$\left\{0<\Gamma<\Gamma_1\right\}\cup\left\{\Gamma>\Gamma_2\right\} \text{ при } D>0\,, 0<\Gamma_1<\Gamma_2 \text{ і } \Gamma\in R \text{ при } D<0\,,$$

де $\mathrm{D}=b_1^{\,2}-4b_0(J_1-J_2)^2D_1D_2D_3=J_{12}^2\left(q_4P^4+q_2P^2+q_0\right)\big/D_3^4$,

$$q_4=\left(J_3-2J_2\right)^2D_1^2+2\left[\left(J_3-2J_1\right)\left(J_3-2J_2\right)D_2+2\left(J_3-2J_2\right)\left(J_2-J_1\right)D_3\right]D_1+$$

$$+\left(J_3-2J_1\right)^2 D_2^2-4\left(J_3-2J_1\right)\left(J_2-J_1\right)D_2D_3+4\left(J_1-J_2\right)^2 D_3^2,$$
$$q_2=2D_1D_2D_3^2\Big[-\left(J_3-2J_2\right)JD_1^2-\left(J_3-2J_1\right)JD_2^2+2J^2D_1D_2+$$
$$+2\left(J_3-2J_2\right)\left(J_2-J_1\right)D_1D_3+2\left(J_3-2J_1\right)\left(J_1-J_2\right)D_2D_3+2\left(J_1-J_2\right)^2 D_3^2\Big],$$
$$q_0=D_1^2D_2^2D_3^4\left(D_1+D_2\right),\quad \Gamma_{1,2}=\frac{-b_1\pm\sqrt{D}}{2(J_1-J_2)^2D_1D_2D_3^2}.$$

Для виконання нерівності (18) достатньо, щоб $\Gamma_1\Gamma>0$ і $\Gamma_0>0$.

Зведемо нерівності (16) і (18) до другого порядку малості відносно $P/P_0\left(\left|P/P_0\right|\ll 1\right)$, де $P_0$ – характерне значення постійного моменту $P$. У цьому випадку система (16) – (18) отримає вигляд:

$$\left[\left(D_1-D_3\right)\left(D_2-D_3\right)+\tilde{J}\Gamma\right]D_3^2P^2+D_3^4\Gamma^2>0, \tag{42}$$
$$(D_1+D_2)D_3^2\Gamma<\left(J_{12}-2JD_3\right)P^2, \tag{43}$$
$$p_2P^2+p_0>0. \tag{44}$$

Тут

$$p_2=\Big\{\Big[J_2(J_3-2J_2)D_1^2+\left(\left(J_1+J_2\right)J_3-4J_1J_2\right)D_1D_2+2\left(J_1-J_2\right)\tilde{J}_{12}D_3+J_1(J_3-2J_1)D_2^2\Big]J\Gamma+$$
$$+\left(J_2D_1^2-\tilde{J}D_1D_2-J_{12}D_3+J_1D_2^2\right)J_{12}D_3\Big\}D_3,$$
$$p_0=\Gamma\left[(J_1-J_2)^2\Gamma-J_{12}(D_1+D_2)\right]D_1D_2D_3^3.$$

Система нерівностей (42) – (44) с точністю до першого порядку малості відносно $P/P_0$ $(\left|P/P_0\right|\ll 1)$ запишеться наступним чином:

$$D_3^4\Gamma^2>0, \tag{45}$$
$$(D_1+D_2)D_3^2\Gamma<0, \tag{46}$$
$$\Gamma\left[(J_1-J_2)^2\Gamma-J_{12}(D_1+D_2)\right]>0. \tag{47}$$

З нерівностей (45) – (47) випливає, що з точністю до першого ступеня малості постійного моменту рівномірні обертання несиметричного твердого тіла в середовищі з опором будуть асимптотично стійкі при дії відновлювального моменту ($\Gamma<0$) і нестійкі при дії перекидального моменту ($\Gamma>0$).

Запишемо нерівності (42) – (44) з точністю до першого ступеня малості відносно $\Gamma/\Gamma_0$ $\left(\left|\Gamma/\Gamma_0\right|\ll 1\right)$, де $\Gamma_0$ – характерне значення моменту $\Gamma$):

$$\tilde{J}\Gamma+\left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_2\right)>0, \tag{48}$$
$$(D_1+D_2)D_3^2\Gamma<\left(J_{12}-2JD_3\right)P^2, \tag{49}$$
$$\begin{gathered}\Big\{\Big\{\left[(J_3-2J_2)D_1+(J_3-2J_1)D_2\right]J_{12}+2(J_1-J_2)\tilde{J}_{12}D_3\Big\}JP^2-J_{12}(D_1+D_2)D_1D_2D_3^2\Big\}D_3\Gamma+\\+\left[2D_1D_2J_3-J_{12}D_3-\left(D_1-D_2\right)\tilde{J}_{12}\right]J_{12}D_3^2P^2>0.\end{gathered} \tag{50}$$

При $\Gamma<0$, $J_3<\left(J_1+J_2\right)/2$ і $\left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_2\right)<0$ нерівність (48) не виконується. Таким чином, при дії віновлювального моменту, при $J_3<\left(J_1+J_2\right)/2$ і коли значення моменту $D_3$ знаходиться між моментами $D_1$ і $D_2$ або $D_2$ і $D_1$, то з точністю до другого ступеня малості постійного моменту $P/P_0$ і першого ступеня малості відновлювального моменту $\Gamma/\Gamma_0$, рівномірні обертання несимметричного твердого тіла будуть нестійкими.

З точністю до першого ступеня малості $\Gamma/\Gamma_0$ нерівності (16) і (18) отримують вигляд :

$$\tilde{J}D_3^2P^2\Gamma+\left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_2\right)D_3^2P^2+(J_3-J_1)(J_3-J_2)P^4>0\,, \tag{51}$$

$$\begin{gathered}\left\{\left\{\left[(J_3-2J_2)D_1+(J_3-2J_1)D_2\right]J_{12}+2(J_1-J_2)\tilde{J}_{12}D_3\right\}JP^2-J_{12}(D_1+D_2)D_1D_2D_3^2\right\}D_3\Gamma+\\+2\left(J_3J_{12}-2J_1J_2D_3\right)J^2P^4+\left[2D_1D_2J_3-J_{12}D_3-\left(D_1-D_2\right)\tilde{J}_{12}\right]J_{12}D_3^2P^2>0.\end{gathered} \tag{52}$$

Таким чином, лінійна система нерівностей (50), (17) і (51) відносно $\Gamma$ описує стійкість рівномірного обертання несиметричного твердого тіла при діє малого перекидального або відновлювального моменту $\Gamma/\Gamma_0$ .

Для симетричного твердого тіла із нерівності (40) випливає, що обертання статично стійкого гіроскопа $(\Gamma<0)$ при $J_3D_1-J_1D_3>0$ завжди стійке, а обертання “сплячого” гіроскопа $(\Gamma>0)$ стійке при досить великій кутовій швидкості. При $J_3D_1-J_1D_3<0$ обертання “сплячого” гіроскопа завжди нестійке, обертання статично стійкого гіроскопа стійке за досить малої кутової швидкості. Отже, при $J_3D_1-J_1D_3<0$ дисипативний і постійний моменти істотно дестабілізують стійкість рівномірних вертикальних обертань гіроскопа Лагранжа. При $J_3D_1-J_1D_3>0$ ці моменти не мають жодного впливу на стійкість обертання статично стійкого гіроскопа і змінюють критичне значення кутової швидкості “сплячого” гіроскопа. При критичних значеннях постійного моменту $P^2=D_1^2D_3\Gamma/\left(J_3D_1-J_1D_3\right)$, згідно з теорією Андронова–Хопфа (див.,напр. [17]), від вертикальних обертань, для котрих відбувається зміна стійкості, відгалужуються періодичні руху гіроскопа, відповідні іншим формам його стаціонарних рухів, відмінних від вертикальних обертань. Із нерівностей (16) – (18) випливає, що для несиметричного тіла існує декілька критичних значеннях постійного моменту. Наприклад, із нерівності (17) ми маємо $P^2=(D_1+D_2)D_3^2\Gamma/\left(J_{12}-2JD_3\right)$. Таким чином, навіть із умови (40) видно, що наявність постійного моменту може надавати як стабілізуючу, так і дестабілізуючу дію на рівномірне обертання симетричного твердого. Тому вплив постійного моменту на рівномірне обертання несиметричного твердого тіла більш складніший, що ми можемо бачити із нерівностей (12) – (14) і (16) – (18) та їх дослідження.

## 6 СТІЙКОСТІ ОБЕРТАННЯ НАВКОЛО ЦЕНТРУ МАСС $(\Gamma=0)$

В цьому випадку система нерівностей (16) – (18) отримає вигляд:

$$(J_3-J_1)(J_3-J_2)P^2+(D_3-D_1)(D_3-D_2)D_3^2>0, \tag{53}$$

$$2JD_3<J_{12}, \tag{54}$$

$$2\left(J_3J_{12}-2J_1J_2D_3\right)J^2P^2>\left[\left(D_1-D_2\right)\tilde{J}_{12}+J_{12}D_3-2D_1D_2J_3\right]J_{12}D_3^2. \tag{55}$$

Із нерівності (54) випливає вже відома умова ністійкості (41), а із нерівності (53) слідують такі умови нестійкості: $(J_3-J_1)(J_3-J_2)<0$ і $(D_3-D_1)(D_3-D_2)<0$, тобто, коли момент інерції $J_3$ не є ні найбільшим ні найменшим моментом інерції і коли $D_3$ не є ні найбільшим ні найменшим дисипативним моментом.

За досить великої кутової швидкості $\omega$, тобто $P$, із (53) і (55) відповідно випливають наступні умови нестійкості:

- $(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) < 0$,
- $D_3 > J_{12} J_3 / 2 J_1 J_2$.

Для виконання нерівностей (53) – (55) достатньо, щоб $(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) > 0$, $(D_3 - D_1)(D_3 - D_2) > 0$, $2JD_3 < J_{12}$, $J_3 J_{12} > 2 J_1 J_2 D_3$, $J_{12} D_3 < 2 D_1 D_2 J_3 - (D_1 - D_2) \tilde{J}_{12}$. У загальному випадку дослідити сумісність цих нерівностей достатньо складно. Тому розглянемо низку часткових випадків.

Зведемо нерівності (53) і (55) до першого порядку малості відносно $P/P_0$. У цьому випадку система (53) – (55) отримає вигляд:

$$\left(D_1 - D_3\right)\left(D_2 - D_3\right) > 0, \tag{56}$$

$$J_{12} - 2JD_3 > 0, \tag{57}$$

$$J_2 D_1^2 - \tilde{J} D_1 D_2 - J_{12} D_3 + J_1 D_2^2 > 0. \tag{58}$$

Нерівності (56) – (58) будуть виконані коли момент $D_3$ буде найбільшим або наіменьшим, $J_3 > \left(2(J_1 + J_2) D_3 - J_{12}\right) / 2D_3$ та $D_3 < \left(J_2 D_1^2 - \tilde{J} D_1 D_2 + J_1 D_2^2\right) / J_{12}$.

При динамічної симетрії ($J_2 = J_1$) система (53) – (55) отримає вигляд:

$$(J_3 - J_1)^2 P^2 + \left(D_3 - D_1\right)\left(D_3 - D_2\right) D_3^3 > 0, \tag{59}$$

$$D_3 < J_1 (D_1 + D_2) / 2(2J_1 - J_3), \tag{60}$$

$$p_4 P^2 + p_2 > 0. \tag{61}$$

Тут

$$p_4 = 2J^2 \left[\left(J_3 (D_1 + D_2) - 2 J_1 D_3\right)\right],$$

$$p_2 = \left[J_1 \left(D_1^2 - \left(D_1 + D_2\right) D_3 + D_2^2\right) - \tilde{J} D_1 D_2\right]\left(D_1 + D_2\right) D_3^2, \ \tilde{J} = 2\left(J_1 - J_3\right).$$

Для виконання нерівностей (59) – (61) достатньо, щоб $(D_3 - D_1)(D_3 - D_2) > 0$, $D_3 < J_1 (D_1 + D_2) / 2(2J_1 - J_3)$, $J_3 > 2 J_1 D_3 / (D_1 + D_2)$, $J_1 \left(D_1^2 - \left(D_1 + D_2\right) D_3 + D_2^2\right) > \tilde{J} D_1 D_2$.

Із нерівності (61) випливає, що коли момент інерції $J_3 > 2 J_1 D_3 / (D_1 + D_2)$, то при динамічної симетрії і досить великих значеннях $\omega$ рівномірне обертання навколо центру мас несиметричного твердого тіла у середовищі з опорному буде асимптотично стійким.

При дисипативної симетрії ($D_2 = D_1$) система нерівностей (53) – (55) запишеться наступним чином:

$$(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) P^2 + \left(D_1 - D_3\right)^2 D_3^2 > 0, \tag{62}$$

$$D_3 < D_1 (J_1 + J_2) / 2J, \tag{63}$$

$$p_4 P^2 + p_2 > 0, \tag{64}$$

де $p_4 = 2J^2 \left[\left(J_1 + J_2\right) J_3 - 2 J_1 J_2 D_3\right]$,

$p_2 = \left[2J_3D_1 - \left(J_1 + J_2\right)D_3\right]\left(J_1 + J_2\right)D_1D_3$.

Для виконання нерівностей (62) – (64) достатньо, щоб $(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) > 0$, $D_3 < D_1(J_1 + J_2)/2J$, $J_3 > 2J_1J_2D_3/(J_1 + J_2)$, $J_3 > \left(J_1 + J_2\right)D_3/2D_1$.

Із нерівностей (62) і (64) випливає, що коли $(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) > 0$ і $D_3 < J_3(J_1 + J_2)/2J_1J_2$, то при досить великих значеннях $\omega$ рівномірне обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опорному буде асимптотично стійким.

## 7 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

На підставі проведених аналітичних досліджень умов асимптотичої стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором несиметричного твердого тіла можна зробити наступні висновки:

1. При дії перекидального моменту стійкість буде неможлива, коли $J_1(2D_3 - D_2) + J_2(2D_3 - D_1) > 2J_3D_3$.
2. При динамічної симетрії з точністю до першого ступеня малості постійного моменту слід, що обертання твердого тіла із дисипативною несиметріею будуть стійкими при дії відновлювального моменту і нестійкими при дії перекидального моменту.
3. Якщо момент інерції $J_3$ є найбільшим або найменшим моментом інерції, то при досить великих значеннях кутової швидкості, як при дії перекидального моменту, так і при дії відновлювального моментів, обертання твердого тіла будуть стійкими.
4. При достатньо великих значеннях модуля відновлювального моменту обертання твердого тіла будуть стійкими.
5. При часткової дисипації асимптотична стійкість неможлива.
6. При відсутності постійного моменту умови стійкості будут виконані тільки при дії відновлювального моменту. Положення рівноваги буде стійким тільки при дії цього моменту.
7. Положення рівноваги буде стійким тільки при дії відновлювального моменту.
8. З точністю до першого ступеня малості постійного моменту обертання твердого тіла будуть стійкими при дії відновлювального моменту і нестійкими при дії перекидального моменту.
9. При досить великої кутової швидкості обертання твердого тіла навколо центру мас буде нестійким, коли момент $J_3$ інерції ні є найбільшим ні є найменшим моментом інерції.
10. При досить великої кутової швидкості обертання твердого тіла навколо центру мас буде стійким, коли момент $J_3$ інерції є найбільшим або найменшим моментом інерції, є дисипативна симетрія і $D_3 < J_3(J_1 + J_2)/2J_1J_2$.
11. Динамічна несиметрія більш суттево впливає на стійкість обертання несиметричного твердого тіла, чим дисипативна несиметрія.
12. У випадоку динамічної і дисипативної симетрії отримані умови стійкості збігаються з відомими умовами для симетричного твердого тіла.

## Література

1. Савченко А. Я., Болграбская И. А., Кононыхин Г. А. Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел. К.: Наук. Думка, 1991. 166 с.

2. Болграбская И. А., Лесина М. Е., Чебанов Д. А. Динамика систем связанных твёрдых тел. Серия “Задачи и методы: математика, механика, кибернетика”. ИПММ НАН Украины, Том 9. К.: Наукова Думка, 2012. 395 с.
3. Кононов Ю.М. Про стійкість рівномірного обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опором під дією постійного моменту. Прикл. Механіка, 2021. Т. 57. № 4. С. 68–77.
4. Kononov Yu. M. Stability of a Uniform Rotation of an Asymmetric Rigid Body in a Resisting Medium. International applied mechanics. A translation of Prikladnaya Mekhanika, 2021. 57**(**4). P. 432–439. DOI: 10.1007r/s10778-021-01095-1
5. Кононов Ю.М., Василенко В.Ю. Про стійкість обертання під дією постійного моменту дзиги Лагранжа з ідеальною рідиною в середовищі, що чинить опір. Праці ІПММ НАН України, 2019. Т. 33. С. 122–131.
6. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer, 2017. 260 pp.
7. Akulenko L.D., Zinkevich Ya.S., Kozachjenko T.A., Leshenko D.D. The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2017. 81(2). С. 79 – 84.
DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.08.001
8. Leshchenko D.D., Ershkov S.V., Kozachenko T.A. Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques. Nonlinear Dyn, 2021. P. 1517–1528. DOI: 10.1007/s11071-020-06195-0
9. Лещенко Д.Д., Козаченко Т.О. Еволюція обертань сфероїда з порожниною, заповненою в’язкою рідиною в середовищі з опором. Праці ІПММ НАН України, 2021. Т. 35, № 2. С. 97–103.
10. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque. J. Appl. Comput. Mech, 2022. P. 1–9.
11. Akulenko L.D., Leshchenko D.D., Paly K.S. Perturbed rotational motions of a spheroid with cavity filled with a viscous fluid. Proc. IMechE Part C: J. Mechanical Engineering Science, 2021. Vol. 235(20). P. 4833–4837.
12. Карапетян А. В., Лагутина И.С. О влиянии диссипативного и постоянного моментов на вид и устойчивость стационарных движений волчка Лагранжа. Изв. РАН. Механика твёрдого тела, 1998. №5. С.29–33.
13. Карапетян А. ,В., Лагутина И. С. Об устойчивости равномерных вращений волчка, подвешенного на струне, с учетом диссипативного и постоянного моментов. Изв. РАН. Механика твёрдого тела, 2000. №1. С.53–57.
14. Кононов Ю. М., Василенко В.Ю. Про стійкість обертання несиметричного твердого тіла з урахуванням дисипативних і постійних моментів. Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки, 2016. Вип. 1–2. С. 113-117.
15. Kononov Yu., Vasylenko V., Proskuriakov V. Stability of asymmetrical rigit body rotation with consideration of dissipative and constant moments. Book of Abstracts 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, 2016. P. 84–86.
16. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем. Наука, 1979. 304 с.
17. Марсден Дж., Мак–Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения М.: Мир, 1980. 368 с.

## References

1. Savchenko, A. YA., Bolgrabskaya, I. A., Kononyhin, G. A. (1991). *Ustojchivost' dvizheniya sistem svyazannyh tvyordyh tel* [Stability of motion of systems of coupled rigid bodies]. K.: Nauk. Dumka. [in Russian].
2. Bolgrabskaya, I. A., Lesina, M. E., Chebanov, D. A. (2012). *Dinamika sistem svyazannyih tvyordyih tel* [Dynamics of systems of bound rigid bodies]. Seriya “Zadachi i metodyi: matematika, mehanika, kibernetika”. 9. K.: Nauk. Dumka. [in Russian].

3. Kononov, Yu. M. (2021). Pro stiikist rivnomirnoho obertannia nesymetrychnoho tverdoho tila u seredovyshchi z oporom pid diieiu postiinoho momentu [On the stability of uniform rotation of an asymmetric solid in a medium with resistance under the action of a constant moment]. *International applied mechanics.* A translation of Prikladnaya Mekhanika. 57(4). 432–439. DOI: 10.1007/s10778-021-01095-1 [in Ukranian].
4. Kononov, Yu. M. (2021). Stability of a Uniform Rotation of an Asymmetric Rigid Body in a Resisting Medium. *International applied mechanics*. A translation of Prikladnaya Mekhanika. 57(4). 432–439.
5. Kononov, Yu. M., Vasylenko, V. Iu. (2019). Pro stiikist obertannia pid diieiu postiinoho momentu dzyhy Lahranzha z idealnoiu ridynoiu v seredovyshchi, shcho chynyt opir [On the stability of rotation under the action of a constant moment of a Lagrange spinning top with an ideal liquid in a resisting medium]. *Pratsi IPMM NAN Ukrainy*. 33. 122–131. [in Ukranian].
6. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer.
7. Akulenko, L. D., Zinkevich, Ya. S., Kozachjenko, T. A., Leshenko, D. D. (2017). The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 81(2). 79 – 84.
DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.08.001
8. Leshchenko, D.D., Ershkov, S.V., Kozachenko, T.A. (2021). Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques. *Nonlinear Dyn*. 1517–1528. DOI: 10.1007/s11071-020-06195-0
9. Leshchenko, D. D., Kozachenko, T. O. (2021). Evoliutsiia obertan sferoida z porozhnynoiu, zapovnenoiu viazkoiu ridynoiu v seredovyshchi z oporom [Evolution of spheroid rotations with a cavity filled with a viscous fluid in a medium with resistance]. *Pratsi IPMM NAN Ukrainy*. 35(2). 97–103. [in Ukranian].
10. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2022). Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque. *J. Appl. Comput. Mech*. 1–9.
11. Akulenko, L. D, Leshchenko, D. D, Paly, K. S. (2021). Perturbed rotational motions of a spheroid with cavity filled with a viscous fluid. *Proc. IMechE Part C: J. Mechanical Engineering Science*. 235(20). 4833–4837.
12. Karapetyan, A. V., Lagutina, I. S. (1998). O vliyanii dissipativnogo i postoyannogo momentov na vid i ustoychivost statsionarnyih dvizheniy volchka Lagranzha [On the influence of dissipative and constant moments on the appearance and stability of stationary movements of the Lagrange top]. *Izv. RAN. Mehanika tvyordogo tela*. 5. 29–33 [in Russian].
13. Karapetyan ,A. V., Lagutina, I. S. (2000). Ob ustoychivosti ravnomernyih vrascheniy volchka, podveshennogo na strune, s uchetom dissipativnogo i postoyannogo momentov [On the stability of uniform rotations of a top suspended on a string, taking into account the dissipative and constant moments]. *Izv. RAN. Mehanika tvYordogo tela*. 1. 53–57. [in Russian].
14. Kononov, Yu. M., Vasylenko, V. Yu. (2016). Pro stiikist obertannia nesymetrychnoho tverdoho tila z urakhuvanniam dysypatyvnykh i postiinykh momentiv [On the stability of rotation of an asymmetric solid body taking into account dissipative and constant moments]. *Visnyk Donetskoho natsionalnoho universytetu. Seriia A: Pryrodnychi nauky*. 1–2. 113–117 [in Ukraine].
15. Kononov, Yu., Vasylenko, V.Yu., Proskuriakov, V. (2016). Stability of asymmetrical rigit body rotation with consideration of dissipative and constant moments. *Book of Abstracts 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky*. 84–86.
16. Jury, E. I. (1979). *Innory i ustojchivost' dinamicheskih sistem* [Innora and stability of dynamic systems]. M.: Nauka. [in Russian].
17. Marsden, Dzh., Mak–Kraken, M. (1980). *Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilozheniya* [Bifurcation of the birth cycle and its applications]. M. Mir. [in Russian].

**Кононов Юрій Микитович**
Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України
д.ф.-м.н., професор
вул. Добровольського, 1, Слов'янськ, Україна, 84100

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1609-0253
**Довгоший Олексій Альфредович**
Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України,
к.ф.-м.н., провідний науковий співробітник
вул. Добровольського, 1, Слов'янськ, Україна, 84100
oleksiy.dovgoshey@gmail.com
ORCID: 0000-0002-6496-2466
**Чеіб Акрам Халіл**
Донецький національний університет імені Василя Стуса,
здобувач
вул. 600 - річчя, 21, м.Вінниця, Україна, 21021
akram_cheaib@hotmail.com
ORCID: 0000-0001-8311-7682

*Для посилань:*
Кононов Ю. М., Довгоший О. А., Чеіб А. Х. Про стійкість рівномірного обертання у середовищі з опором несиметричного твердого тіла під дією постійного моменту у інерціальній системі відліку. Механіка та математичні методи, 2022. Т. 4. № 1. С. 6–22.

*For references:*
Kononov Yu. M., Dovgoshey O. A., Cheib A. K. (2022). On the stability of uniform rotation in a resisting nonsymetric rigid body under the action of a constant moment in inertial reference frame. Mechanics and Mathematical Methods. 4 (1). 6–22.