

УДК 539.3

АНТИПЛОСКА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМІРНОГО П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО КВАЗІКРИСТАЛА З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ ПІД ВПЛИВОМ ВНУТРІШНЬОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО ЗАРЯДУ

Білий Д. В.¹, Лобода В. В.¹

¹Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Анотація: У даній статті досліджено міжфазну тріщину у п'єзоелектричному квазікристалі, яка знаходиться під впливом механічного навантаження та електричного заряду, прикладеного безпосередньо до її берегів. Розглянуто два пов'язані одновимірні квазікристалічні напівпростори та тунельна тріщина вздовж їх межі розділу. Вивчено напружено-деформований стан поблизу електропровідних граней тріщини. Вважається, що поляризація матеріалів спрямована в напрямку фронту тріщини і в цьому ж напрямку розташування атомів є квазіперіодичним, а перпендикулярно фронту тріщини розташування атомів є періодичним. Прикладаються рівномірно розподілені антиплоскі фононні та фазонні зсувні навантаження паралельно берегам тріщини. На гранях тріщини також має місце електричний заряд.

За допомогою векторної функції, голоморфної у всій комплексній площині, крім області тріщини, будуються матрично-векторні представлення для похідних стрибків переміщень і напружень. Задовольняючи граничні умови на гранях тріщини, за допомогою цих представлень формується задача лінійного спряження Рімана-Гільберта з відповідними додатковими умовами на тріщині та умовами на нескінченності. Побудовано аналітичне рішення цієї задачі. Аналізуючи отриманий розв'язок, одержуємо аналітичні вирази для фононних і фазонних напружень, стрибків переміщень уздовж межі розділу матеріалів в області тріщини, що має електричний заряд.

Чисельний аналіз розв'язку продемонстрував істотний вплив електричного заряду тріщини на фононний і фазонний напружено-деформований стан в околі тріщини. Аналіз проводився для комбінації різних квазікристалічних матеріалів. Основні результати розв'язків, тобто фононні та фазонні напруження вздовж межі розділу матеріалів та стрибки фононних і фазонних зміщень, представлені у графічному вигляді. Зроблено висновки щодо впливу електричного заряду тріщини на поведінку як самої тріщини, так і матеріалу в її околі.

Ключові слова: міжфазна тріщина, квазікристал, задача лінійного спряження.

ANTIPLANE PROBLEM FOR ONE-DIMENSIONAL PIEZOELECTRIC QUASICRYSTAL WITH AN INTERFACE CRACK UNDER THE INFLUENCE OF INTERNAL ELECTRIC LOAD

D. Bilyi¹, V. Loboda¹

¹Oles Honchar Dnipro National University

Abstract: The paper considers two coupled one-dimensional quasicrystalline half-spaces and a tunnel crack along their interface. The stress-strain state in the vicinity of the electrically conductive faces of the crack is investigated. It is believed that the polarization of materials is directed in the direction of the crack front and in the same direction the arrangement of atoms is quasi-periodic, and perpendicular to the crack front the arrangement of atoms is periodic. Uniformly distributed antiplane



phonon and phason shear loads parallel to the crack faces are applied. The electric charge on the crack faces also takes place.

A matrix-vector representations for the derivatives of displacement jumps and stresses are constructed through a vector function that is holomorphic in the whole complex plane, except of the crack region. Satisfying the boundary conditions on the crack faces, using matrix-vector representations, the Riemann-Hilbert linear conjugation problem with corresponding conditions at infinity is formed. An analytical solution of this problem is constructed. Analyzing the solution, we obtain analytical expressions for the phonon and phason stresses, the jumps of displacements along the interface between the materials in the crack region that has an electric charge.

Numerical analysis of the solution demonstrated the essential influence of the electric charge of the crack to the phonon and phason stress-strain state in the vicinity of the crack. The analysis was performed for a combination of different quasicrystalline compounds. The main results of the solutions, i.e. phonon and phason stresses along the materials interface and the phonon and phason displacement jumps are presented in the graphic form. Conclusions are made regarding the influence of the electric charge of the crack on the behavior of both the crack itself and the material in its vicinity.

Keywords: interface crack, quasicrystal, the problem of linear relationship.

1 ВСТУП

Квазікристали, які вперше представлені в роботі [1] – це надзвичайний клас матеріалів з різними властивостями, які раніше не спостерігались в таких комбінаціях, через що їх посилено вивчають останні декілька десятиліть. В порівнянні зі звичайними кристалами та некристалами, квазікристали (далі КК) відрізняються своєю міцністю, низькою тепловіддачею, високою зносостійкістю, тощо. З таким набором характеристик вони ідеально підходять для різних покриттів, наприклад: двигунів, антипригарних сковорідок, сонячних панелей, термоелектричних перетворювачів, контейнерів з ядерним паливом та воднем.

3 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Сучасний рівень досліджень та головна парадигма механіки руйнування квазікристалів представлені в роботі [2]. Там же і вказані основні проблеми. Особливу зацікавленість даним матеріалом викликає те що багато квазікристалів мають п'єзоелектричні властивості, що ускладнює їх розгляд, але і відкриває нові можливості застосування. В роботі [3] представленні основні положення для квазікристалів з урахуванням п'єзоелектричного ефекту.

При розгляді композитних матеріалів ми отримуємо проблему тріщини між двома п'єзоелектричними квазікристалами, яка до цього часу вивчена недостатньо. При огляді актуальної літератури виявленні роботи [4, 5], де аналітично-чисельним методом досліджено електрично непроникну тріщину в одновимірному гексагональному термоелектропружному квазікристалічному біматеріалі. В роботі [6] розглянуті міжфазні тріщини типу III між звичайними пружним матеріалом та квазікристалом, але розглядався при цьому квазікристал без п'єзоелектричного ефекту. Тріщина між одновимірними п'єзоелектричними квазікристалами з електропроникними та електроізолюваними умовами на берегах тріщини в антиплоскому випадку вивчалась у роботі [7].

Проблема плоского електричного навантаження в провідній міжфазній тріщині в комбінації з антиплоским механічним навантаженням розглянута в роботі [8]. В ній виявлена, характерна для тріщини на межі поділу матеріалів коливальна особливість на кінчиках тріщини. Важливою є робота [9], в якій розглянута взаємодія тунельної провідної тріщини та віддаленого смугового електрода, розташованого на межі розділу двох п'єзоелектричних матеріалів. Нещодавно в роботі [10] було розглянуто взаємодію електропровідної міжфазної тріщини між двома п'єзоелектричними квазікристалами.

4 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Основною метою для даної статті є вивчення тріщини у п'єзоелектричному квазікристалі, яка знаходиться під впливом механічного навантаження та електричного заряду, прикладеного безпосередньо до її берегів.

Постановка задачі. Розглянемо тріщину (c, b) в площині (x_1, x_2) . Вісь x_3 співпадає з квазіперіодичним напрямом одновимірних п'єзоелектричних квазікристалів. Вважається, що сумарний електричний заряд тріщини дорівнює D_0 . Біматеріал навантажений на нескінченості зсувними напруженнями $\sigma_{23}^\infty = \tau_1$, $H_{23}^\infty = \tau_2$. Тут τ_1 - фонон напруження τ_2 - фазон напруження.

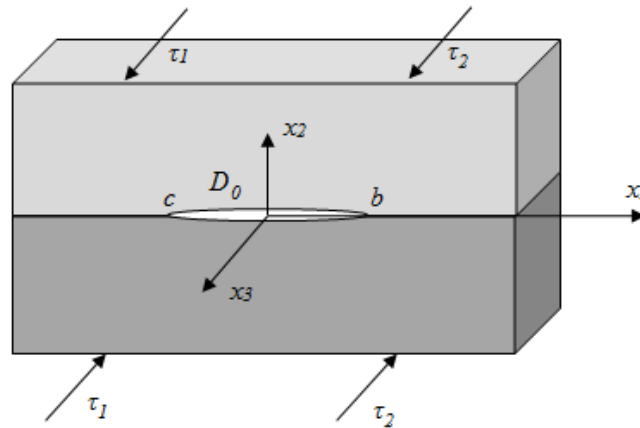


Рис.1. Схематичне зображення тунельної тріщини між двома одномірними квазікристалічними півпросторами з п'єзоелектричним ефектом.

За представленими умовами навантаження в розглянутому тілі виникає антиплоска деформація. Визначальні співвідношення в такому випадку будемо розглядати для кожної півобласті у вигляді:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{j3} \\ H_{j3} \\ D_j \end{Bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{Bmatrix} u_{3,j} \\ w_{3,j} \\ \varphi_{,j} \end{Bmatrix} \quad (j = 1, 2), \quad (1)$$

де $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c_{44} & R_3 & -e_{15} \\ R_3 & K_2 & -\tilde{e}_{15} \\ e_{15} & \tilde{e}_{15} & \xi_{11} \end{bmatrix}$, (2)

$i = 1, 2$ - для верхнього і нижнього матеріалів відповідно;

σ_{3i} - компоненти фонон напруження;

H_{3i} - компоненти фазон напруження;

C_{44}, K_2 - пружні константи у фононних і фазонних полях, відповідно;

R_3 - пружна константа зв'язку фононних і фазонних полів;

e_{15}, d_{15} - п'єзоелектричні сталі;

ξ_{11} - діелектрична проникність.

Для зручності отримання розв'язку задачі введемо вектори переміщень і електричного потенціалу та напружень і електричного зміщення

$$\mathbf{u} = [u_3, w_3, \varphi]^T, \quad \mathbf{t}_j = [\sigma_{3j}, H_{3j}, D_j]^T. \quad (3)$$

Враховуючи введені вектори, запишемо рівняння (1) у векторно-матричному вигляді

$$\mathbf{t}_j = \mathbf{Q} \mathbf{u}_{,j} \quad (j = 1, 2). \quad (4)$$

Так як розглянутий квазікристал має п'єзоелектричні властивості, необхідно врахувати фонон, фазон та електростатичні рівняння рівноваги у випадку антиплоского навантаження

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial H_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{32}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} = 0 \quad (5)$$

і наступні формули зв'язку електричного поля і потенціалу φ

$$E_1 = -\varphi_{,1}, \quad E_2 = -\varphi_{,2}. \quad (6)$$

Враховуючи вище представлені співвідношення (1), (5) і (6) отримуємо рівняння:

$$\begin{cases} C_{44} \nabla^2 u_3 + R_3 \nabla^2 w_3 + e_{15} \nabla^2 \varphi = 0 \\ R_3 \nabla^2 u_3 + K_2 \nabla^2 w_3 + d_3 \varphi = 0 \\ e_{15} \nabla^2 u_3 + K_2 \nabla^2 w_3 + \lambda_{11} \varphi = 0, \end{cases} \quad (7)$$

де $\nabla^2 = (\partial^2/\partial x_1^2) + (\partial^2/\partial x_2^2)$, $i = 1, 2$ – індекс відображає залежність для верхнього та нижнього матеріалів відповідно.

Введемо нові вектори:

$$\mathbf{v}' = [u_3', w_3', D_2]^T, \quad \mathbf{P} = [\sigma_{32}, H_{32}, \varphi']^T. \quad (8)$$

Розглянувши рівняння (7) зробимо висновок, що функції u_3 , φ та w_3 задовольняють рівнянням $\Delta u_3 = 0$, $\Delta \varphi = 0$, $\Delta w_3 = 0$, відповідно, що вказує на те що ці функції являються гармонічними. Це дозволяє представити вектор \mathbf{u} , в який входять ці функції в якості компонент, як дійсну частину довільної, аналітичної вектор-функції $\Phi(z) = [\Phi_1(z), \Phi_2(z), \Phi_3(z)]^T$ комплексної змінної $z = x_1 + ix_2$

$$\mathbf{u} = 2\text{Re}\Phi(z) = \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}). \quad (9)$$

Використовуючи вектор \mathbf{u} вигляду (8) і підставляючи його в (4), отримаємо:

$$\mathbf{t}_1 = -i\mathbf{B}\Phi'(z) + i\bar{\mathbf{B}}\bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{B}\Phi'(z) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad (10)$$

де $\mathbf{B} = i\mathbf{Q}$.

Можна помітити, що на основі (9) та (10) вектори (8) можна записати у такому вигляді:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{M}\Phi'(z) + \bar{\mathbf{M}}\bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad \mathbf{P} = \mathbf{N}\Phi'(z) + \bar{\mathbf{N}}\bar{\Phi}'(\bar{z}), \quad (11)$$

де $\mathbf{M} = [M_{ij}]_{i,j=1,2,3}$, $\mathbf{N} = [N_{ij}]_{i,j=1,2,3}$, $(i = 1, 2; j = 1, 2, 3)$;

$$M_{11} = M_{22} = 1; M_{12} = M_{13} = M_{21} = M_{23} = 0;$$

$$M_{3j} = B_{3j}, \quad N_{ij} = B_{ij} \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, 3);$$

$$N_{33} = 1;$$

$$N_{31} = N_{32} = 0.$$

Матриці \mathbf{M} та \mathbf{N} мають вигляд

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}, \quad (12)$$



$$N = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Враховуючи, що розглядається тріщини між двома квазікристалами (Рис. 1), запишемо представлення (11) для кожного з обох півпросторів $x_2 > 0$ та $x_2 < 0$ в формі

$$\mathbf{v}^{(m)} = \mathbf{M}^{(m)} \Phi^{(m)}(z) + \bar{\mathbf{M}}^{(m)} \bar{\Phi}^{(m)}(\bar{z}), \quad \mathbf{P}^{(m)} = N^{(m)} \Phi^{(m)}(z) + \bar{N}^{(m)} \bar{\Phi}^{(m)}(\bar{z}), \quad (14)$$

де $\mathbf{M}^{(m)}, N^{(m)}$ - матриці, які відповідають матрицям \mathbf{M}, N ; $\Phi^{(m)}(z)$ – невизначені поки що вектор функції аналітичні у верхньому та нижньому півпросторах, відповідно; індекси $m=1$ та $m=2$ відносяться до верхньої та нижньої частин композиту, відповідно.

Вимагаючи, щоб рівність $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}^{(2)}$ була справедлива на всій осі x_1 , з рівняння (14) одержуємо наступну рівність

$$N^{(1)} \Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{N}^{(1)} \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) = N^{(2)} \Phi^{(2)}(x_1 - i0) + \bar{N}^{(2)} \bar{\Phi}^{(2)}(x_1 + i0). \quad (15)$$

Для спрощення запису будемо використовувати $F(x_1 \pm i0) = F^\pm(x_1)$, що означає граничне значення функції $F(z)$ при $x_2 \rightarrow 0$ зверху чи знизу, відповідно.

Рівняння (15) перепишемо в формі:

$$N^{(1)} \Phi^{(1)}(x_1 + i0) - \bar{N}^{(2)} \bar{\Phi}^{(2)}(x_1 + i0) = N^{(2)} \Phi^{(2)}(x_1 - i0) - \bar{N}^{(1)} \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0).$$

Припустимо, що ліва та права частина останньої рівності представляють собою граничні вирази для функції

$$N^{(1)} \Phi^{(1)}(z) - \bar{N}^{(2)} \bar{\Phi}^{(2)}(z)$$

та

$$N^{(2)} \Phi^{(2)}(z) - \bar{N}^{(1)} \bar{\Phi}^{(1)}(z), \quad (16)$$

які аналітичні в верхній та нижній площинах, відповідно. Це передбачає існування функції $\Pi(z)$, аналітичної на всій площині і рівної вищевказаним функціям для відповідних напівплощин.

Враховуючи, що $\Pi(z)|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ та базуючись на теоремі Ліувілля знайдемо, що кожна з функцій (16) рівна 0 для будь якого z для кожної з напівплощин. Отже, з (16) одержуємо

$$\bar{\Phi}^{(2)}(z) = (\bar{N}^{(2)})^{-1} N^{(1)} \Phi^{(1)}(z) \quad \text{для } x_2 > 0, \quad (17)$$

$$\bar{\Phi}^{(1)}(z) = (\bar{N}^{(1)})^{-1} N^{(2)} \Phi^{(2)}(z) \quad \text{для } x_2 < 0. \quad (18)$$

З отриманих рівностей можемо знайти стрибок при проходженні через область тріщини для наступної вектор функції

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = \mathbf{v}'^{(1)}(x_1 + i0) - \mathbf{v}'^{(1)}(x_1 - i0),$$

А саме з першої формули (14) отримаємо



$$\mathbf{v}^{(k)}(x_1 \pm i0) = \mathbf{M}^{(k)} \Phi^{(k)}(x_1 \pm i0) + \bar{\mathbf{M}}^{(k)} \bar{\Phi}^{(k)}(x_1 \mp i0).$$

Підставивши ці вирази в останню формулу, одержуємо

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle &= \mathbf{M}^{(1)} \Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{\mathbf{M}}^{(1)} \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) - \\ &\quad - \mathbf{M}^{(2)} \Phi^{(2)}(x_1 - i0) - \bar{\mathbf{M}}^{(2)} \bar{\Phi}^{(2)}(x_1 + i0). \end{aligned} \quad (19)$$

Використовуючи, що на основі (18)

$$\Phi^{(2)}(x_1 - i0) = \left(\mathbf{N}^{(2)} \right)^{-1} \bar{\mathbf{N}}^{(1)} \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0)$$

та підставляючи цей вираз разом з (17) в (19) при $x_2 \rightarrow +0$, визначимо стрибок в формі

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = \mathbf{D} \Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{\mathbf{D}} \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0), \quad (20)$$

де $\mathbf{D} = \mathbf{M}^{(1)} - \bar{\mathbf{M}}^{(2)} \left(\bar{\mathbf{N}}^{(2)} \right)^{-1} \mathbf{N}^{(1)}$.

Введемо нову вектор-функцію

$$\mathbf{W}(z) = \begin{cases} \mathbf{D} \Phi^{(1)}(z), & x_2 > 0, \\ -\bar{\mathbf{D}} \bar{\Phi}^{(1)}(z), & x_2 < 0. \end{cases} \quad (21)$$

Тоді (20) можна записати так

$$\langle \mathbf{v}'(x_1) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1). \quad (22)$$

Розглянувши другу формулу із співвідношення (14) отримаємо:

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{N}^{(1)} \Phi^{(1)}(x_1 + i0) + \bar{\mathbf{N}}^{(1)} \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0). \quad (23)$$

На основі (21) отримаємо

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(x_1 + i0) &= \mathbf{D}^{-1} \mathbf{W}(x_1 + i0), \\ \bar{\Phi}^{(1)}(x_1 - i0) &= -\left(\bar{\mathbf{D}}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{W}(x_1 - i0). \end{aligned}$$

Підставивши отримані вектор-функції в (23), запишемо отриманий вираз у вигляді

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{S} \mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{S}} \mathbf{W}^-(x_1), \quad (24)$$

де $\mathbf{S} = \mathbf{N}^{(1)} \mathbf{D}^{-1}$, причому цю матрицю можна представити у вигляді

$$\mathbf{S} = \left[\mathbf{M}^{(1)} \left(\mathbf{N}^{(1)} \right)^{-1} - \bar{\mathbf{M}}^{(2)} \left(\bar{\mathbf{N}}^{(2)} \right)^{-1} \right]^{-1}. \quad (25)$$

Чисельний аналіз показує, що матриця \mathbf{S} має таку структуру

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iS_{11} & iS_{12} & S_{13} \\ iS_{21} & iS_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & iS_{33} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

де всі s_{ij} є дійсними.

На основі представлень (22), (24) аналогічно до роботи [13] отримуємо:



$$r_{j1}\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) + H_{23}^{(1)}(x_1, 0) + ir_{j3}E_1^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \quad (j=1, 3), \quad (27)$$

$$it_{j1}\langle u'_3(x_1) \rangle + it_{j2}\langle w'_3(x_1) \rangle + t_{j3}\langle D_2(x_1) \rangle = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1), \quad (28)$$

де r_{ij} та t_{ij} є дійсними і входять в якості компонент у наступні матриці

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & 1 & ir_{13} \\ -r_{11} & 1 & -ir_{13} \\ r_{31} & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} it_{11} & it_{12} & t_{13} \\ it_{21} & it_{22} & t_{23} \\ it_{31} & it_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

причому

$$r_{11} = \frac{s_{22}s_{31} - s_{21}s_{32}}{D}, \quad r_{13} = \delta \frac{s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21}}{D}, \quad r_{31} = -s_{23} / s_{13}, \quad \text{а}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{RS}. \quad (30)$$

Аналітичний аналіз електрично зарядженої тріщини. Для задачі, проілюстрованій на Рис. 1, граничні умови можна сформулювати у вигляді

$$\sigma_{23}^{(1)}(x_1, 0) = H_{23}^{(1)}(x_1, 0) = E_1^{(1)}(x_1, 0) = 0 \quad \text{для } c < x_1 < b, \quad (31)$$

$$\langle \sigma_{23} \rangle = 0, \quad \langle H_{23} \rangle = 0, \quad \langle D_2 \rangle = 0, \quad \langle u'_3 \rangle = 0, \quad \langle E_1 \rangle = 0, \quad w'_3 = 0 \quad \text{для } x_1 \notin (c, b), \quad (32)$$

а наявність сумарного електричного заряду величини D_0 на тріщині приводить до наступного рівняння:

$$\int_c^b \langle D_2(x_1) \rangle dx_1 = D_0 \quad (33)$$

Граничні умови (32) з використанням представлень (28) забезпечують неперервність функцій $F_j(z)$ на відрізках $x_1 \notin (c, b)$ межі поділу матеріалів, а умова (31) з використанням (27) дає рівняння:

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = 0 \quad \text{для } c < x_1 < b. \quad (34)$$

Умови на нескінченності для функцій $F_j(z)$ витікають із (27) і мають вигляд

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j, \quad (35)$$

де

$$\tilde{\tau}_j = \frac{r_{j1}\tau^\infty + H_{23}^\infty}{1 + \gamma_j}, \quad \tilde{\sigma}_j = \frac{r_{j3}E^\infty}{1 + \gamma_j}, \quad (j=1, 2, 3).$$

Враховуємо також, що повинна виконуватись умова яка витікає з (28), а саме

$$\int_c^b \{F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1)\} dx_1 = \int_c^b \{it_{11}\langle u'_3(x_1) \rangle + it_{12}\langle w'_3(x_1) \rangle + t_{13}\langle D_2(x_1) \rangle\} dx_1. \quad (36)$$

Тоді в силу умов однозначності переміщень при обході контуру тріщини маємо

$$\int_c^b \{it_{11}\langle u'_3(x_1) \rangle + it_{12}\langle w'_3(x_1) \rangle\} dx_1 = 0. \quad (37)$$

При врахуванні також умов (33) отримаємо

$$\int_c^b \{F_1^+(x_1) - F_1^-(x_1)\} dx_1 = t_{13} D_0. \quad (38)$$

Розв'язок задачі (34), (35) та (38) будемо розшукувати у формі [11]

$$F_j(z) = \frac{c_{0j} + c_{1j}z}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{i\varepsilon_j}, \quad (39)$$

де c_0, c_1 - довільні константи.

При розкладенні на безкінечності $F_j(z)$ отримаємо

$$F_j(z) = c_{1j} + \left\{ c_{0j} + c_{1j} \left[\frac{b+c}{2} + i(b-c)\varepsilon_j \right] \right\} \frac{1}{z} + O(z^{-2}). \quad (40)$$

З представлень (35) і (38) отримаємо наступні рівняння

$$\begin{aligned} c_{1j} &= \tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j, \\ c_{0j} + c_{1j} \left[\frac{b+c}{2} + i(b-c)\varepsilon_j \right] &= \frac{it_{13}D_0}{2\pi}. \end{aligned}$$

Будемо розглядати випадок коли $D_0 \neq 0$ і враховуючи це можемо записати наступні вирази для констант

$$\begin{aligned} c_{1j} &= \tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j, \\ c_{0j} &= \frac{it_{13}D_0}{2\pi} - c_{1j} \left[\frac{b+c}{2} + i(b-c)\varepsilon_j \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

З врахуванням вище вказаних співвідношень (41) одержуємо рішення

$$F_j(z) = \frac{\frac{it_{j3}D_0}{2\pi} + (\tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j) \left[z - \frac{b+c}{2} - i\varepsilon_j l \right]}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{i\varepsilon_j}. \quad (42)$$

Також для зручності можливий його запис в формі

$$F_j(z) = \left\{ (\tilde{\tau}_j + i\tilde{\sigma}_j) \frac{z - \frac{b+c}{2} - i\varepsilon_j l}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} + \frac{it_{j3}D_0}{2\pi\sqrt{(z-c)(z-b)}} \right\} \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{i\varepsilon_j}. \quad (43)$$

Як і в випадку відсутності електричного заряду на тріщині, розглянутому в [12, 13], можемо помітити осциляційну сингулярність напружень в безпосередній близькості до вершини тріщини.

Підставляючи вирази (43) в представлення (27) та (28), знаходимо фазонні і фазонні напруження, а також стрибки переміщень і електричного потенціалу на тріщині.

5 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Представлене вище рішення використовуємо для дослідження впливу заряду D_0 на тріщині на напруження в околі її вершини та стрибки переміщень її берегів. Дослідження будемо проводити на прикладі біматеріалу скомпозованого з двох одномірних п'єзоелектричних квазікристалів з різними характеристиками для нижнього та верхнього матеріалів:

$$c_{44}^{(1)} = 3.55 \times 10^{10} \text{ Па}, \quad e_{15}^{(1)} = 17 \text{ К/м}^2, \quad K_2^{(1)} = 0.15 \times 10^9 \text{ Па}, \quad R_3^{(1)} = 1.765 \times 10^9 \text{ Па},$$

$$\tilde{e}_{15}^{(1)} = 17 \text{ К/м}^2, \quad \xi_{11}^{(1)} = 15.1 \times 10^{-9} \text{ К}^2 / (\text{Нм}^2) \text{ для верхнього матеріалу,}$$

$$c_{44}^{(2)} = 5.0 \times 10^{10} \text{ Па}, \quad e_{15}^{(2)} = -0.318 \text{ К/м}^2, \quad K_2^{(2)} = 0.3 \times 10^9 \text{ Па}, \quad R_3^{(2)} = 1.2 \times 10^9 \text{ Па},$$

$$\tilde{e}_{15}^{(2)} = -0.16 \text{ К/м}^2, \quad \xi_{11}^{(2)} = 8.25 \times 10^{-12} \text{ К}^2 / (\text{Нм}^2) \text{ для нижнього матеріалу.}$$

Результати отримані для $c = -0,05 \text{ м}$, $b = 0,05 \text{ м}$ при статичному механічному навантаженні $\sigma_{23}^\infty = 10^5 \text{ Н/м}^2$ і при змінній величині електричного поля. На всіх рисунках лінії I відповідають $D_0 = 0$, II - $D_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}$, III - $D_0 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/м}$.

6 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

На рис. 2(а) показана зміна фонон напруження σ_{23} в околі правої вершини тріщини. Прослідковується незначне зростання цього напруження зі зростанням величини електричного заряду. Має місце також зростання σ_{23} до нескінченості при наближенні до вершини тріщини.

На рис.2 (б) наведено зміну фазон напруження H_{23} при збільшенні заряду тріщини D_0 . Як і в попередньому випадку при наближенні до вершини тріщини значення напруження зростають до нескінченості і не можуть бути визначені в самій вершині тріщини (особливій точці). Також можна зазначити, що при тих же значень електричного заряду, що і на рис 2(а), розбіжність у значеннях фазон напруження для різних D_0 практично непомітна.

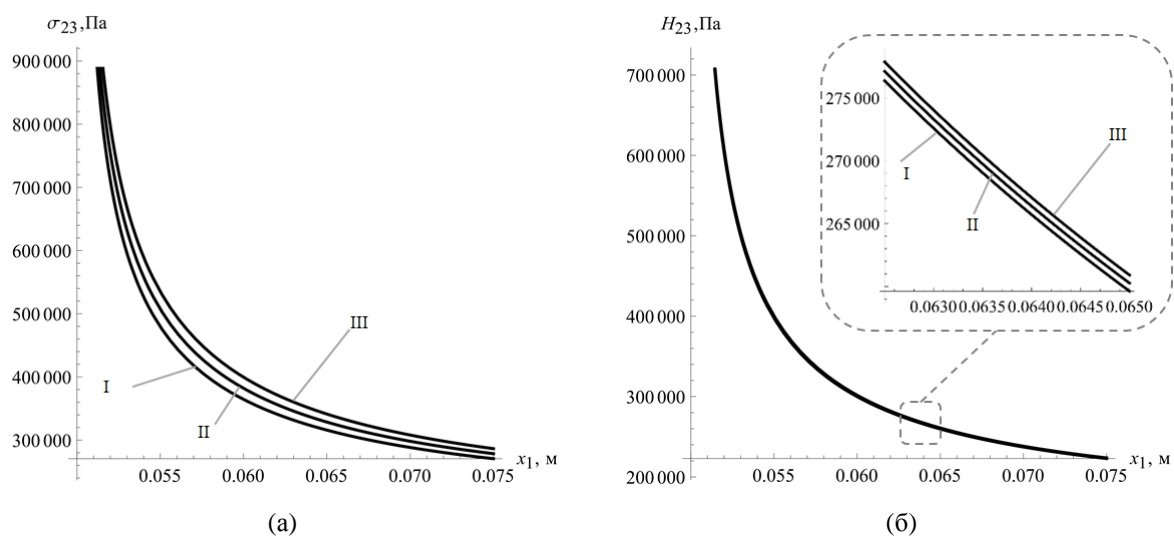


Рис. 2. Зміна фонон (а) та фазон (б) напруження в околі вершини тріщини при прикладеному на нескінченості напруженні σ_{23}^∞ і різних значеннях електричного заряду D_0

На рис. 3 наведені фонон та фазон розкриття тріщини при різних значеннях електричного заряду D_0 . Легко помітити що стрибок $\langle u_3 \rangle$ несуттєво збільшується при збільшенні електричного заряду, а $\langle w_3 \rangle$ навпаки зменшується для вказаних D_0 .

Важливо відзначити також симетричність графіків відносно середини тріщини, що говорить про симетричність впливу як зовнішнього напруження, так і заряду на фонон і фазон розкриття тріщини.

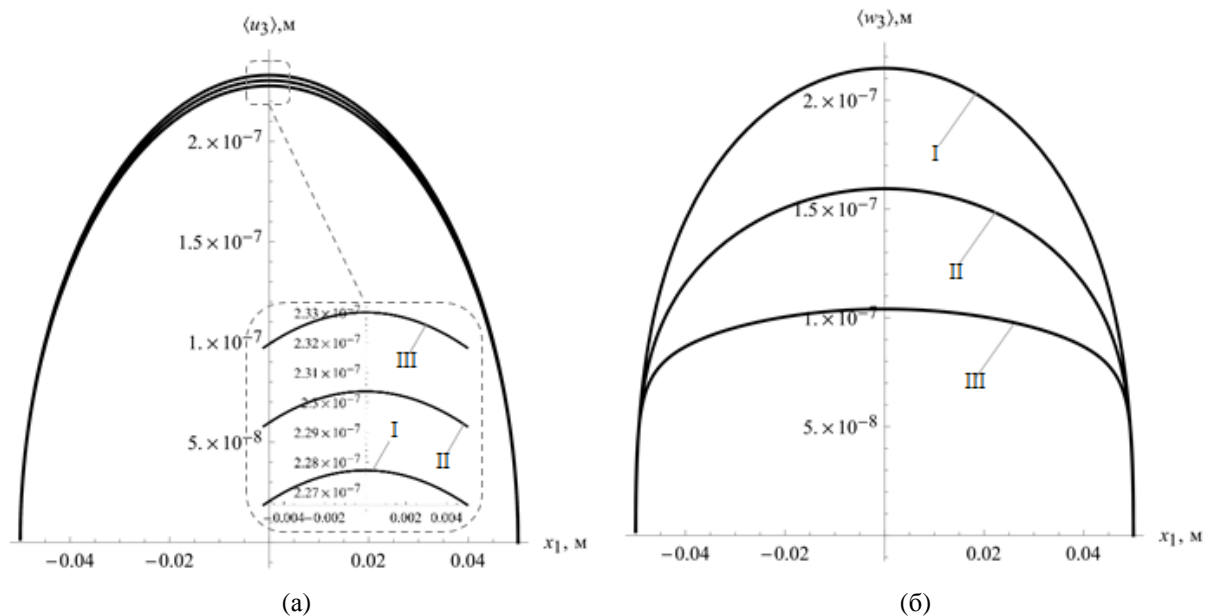


Рис. 3. Стрибок переміщень $\langle u_3 \rangle$ (а) та $\langle w_3 \rangle$ (б) при різних значеннях D_0 .

7 ВИСНОВКИ

В роботі представлено рішення задачі антиплоского навантаження для одномірного п'єзоелектричного біматеріального квазікристалу з тріщиною під впливом як механічного навантаження прикладеного на безкінечності так і електричного заряду розподіленого вздовж берегів тріщини. Виведений аналітичний алгоритм рішення, який включив в себе:

- сформульовані представлення для напружень та електричного поля (27), а також для похідних від стрибка переміщень та електричного зміщення (28) через вектор-функцію, голоморфну у всій комплексній площині, крім області тріщини;
- на основі представлень (27) та (28) отримана задача лінійного спряження (34) з умовами на нескінченності (35) та умовами балансу заряду тріщини ;
- побудовано аналітичний розв'язок (43) цієї задачі і на його основі знайдені всі необхідні електромеханічні компоненти на межі поділу матеріалів.

На базі отриманого розв'язку проведена чисельна ілюстрація впливу зовнішнього навантаження і заряду тріщини на фонон і фазон напруження та відкриття тріщини.

Встановлено, що так як квазікристали мають п'єзоелектричні властивості, то електричний заряд тріщини впливає на усі характеристики напружено-деформованого стану біматеріального квазікристалічного з'єднання.

Література

1. Shechtman, D.; Blech, I.; Gratias, D.; Cahn J. W. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. Physical Review Letters 1984, 53 (20), 1951-1953. DOI: 10.1103/PhysRevLett.53.1951.

2. Fan T. Y. *Mathematical theory of elasticity of quasicrystals and its applications*. Beijing: Springer, 2011.
3. Rao K. R. M.; Rao P. H.; Chaitanya B. S. K. Piezoelectricity in quasicrystals. *Pramana-Journal of Physics*, 2007. 68 (3). 481–487. DOI: 10.1007/s12043-007-0051-3.
4. Zhao M. H.; Dang H. Y.; Fan C. Y.; Chen Z. T. Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bi-material, Part 1: Theoretical solution. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017. 179. 59–78. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.04.019.
5. Zhao M. H.; Dang H. Y.; Fan C. Y.; Chen Z. T. Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bi-material, Part 2: Numerical method. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017. 180. 268–281. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.05.042.
6. Shi W. C.; Li H. H.; Gao Q. H. Interfacial cracks of antiplane sliding mode between usual elastic materials and quasicrystals. *Key Eng. Mater.*, 2007. 340–341. 453–458. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.340-341.453.
7. Hu K. Q.; Jin H.; Yang Z.; Chen X. Interface crack between dissimilar one-dimensional hexagonal quasicrystals with piezoelectric effect. *Acta Mech.*, 2019. 230. 2455–2474. DOI: 10.1007/s00707-019-02404-z.
8. Wang X.; Zhong Z. A conducting arc crack between a circular piezoelectric inclusion and an unbounded matrix. *Int. J. Solids Struct.*, 2002. 39. 5895–5911. DOI: 10.1016/S0020-7683(02)00474-2.
9. Onopriienko O.; Loboda V.; Sheveleva A.; Lapusta Y. Bond zone model for a conductive crack at the interface of piezoelectric materials under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings. *Z Angew Math Mech.*, 2019. e201800230. DOI: 10.1002/zamm.201800230.
10. Sheveleva A.; Loboda V.; Lapusta Y. A conductive crack and a remote electrode at the interface between two piezoelectric materials. *Applied Math. Modeling*, 2020. 87. 287–299. DOI: 10.1016/j.apm.2020.06.003.
11. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
12. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concept for interfacial cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 1988. 55, 98–103. DOI: 10.1115/1.3173668.
13. Білий Д. В., Комаров О. В., Лобода В.В. Антиплоска задача для одномірного п'єзоелектричного квазікристала з міжфазною тріщиною. *Bulletin of Zaporizhzhia National University. Physical and Mathematical Sciences*, 2021. No 1. 5–14. DOI: 10.26661/2413-6549-2021-1-01

References

- 1 Shechtman, D.; Blech, I.; Gratias, D.; Cahn J. W. (1984) Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Physical Review Letters*. 53 (20). 1951–1953. DOI: 10.1103/PhysRevLett.53.1951.
- 2 Fan T. Y. (2011) *Mathematical theory of elasticity of quasicrystals and its applications*. Beijing: Springer.
- 3 Rao K. R. M.; Rao P. H.; Chaitanya B. S. K. (2007) Piezoelectricity in quasicrystals. *Pramana Journal of Physics*. 68 (3). 481–487. DOI: 10.1007/s12043-007-0051-3.
- 4 Zhao M. H.; Dang H. Y.; Fan C. Y.; Chen Z. T. (2017) Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bimaterial, Part 1: Theoretical solution. *Engineering Fracture Mechanics*. 179. 59–78. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.04.019.
- 5 Zhao M. H.; Dang H. Y.; Fan C. Y.; Chen Z. T (2017) Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bimaterial. Part 2: Numerical method. *Engineering Fracture Mechanics*. 180. 268–281. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.05.042.
- 6 Shi W. C.; Li H. H.; Gao Q. H. (2007) Interfacial cracks of antiplane sliding mode between usual elastic materials and quasicrystals. *Key Eng. Mater.* 340–341. 453–458. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.340-341.453.

- 7 Hu K. Q.; Jin H.; Yang Z.; Chen X. (2019) Interface crack between dissimilar one-dimensional hexagonal quasicrystals with piezoelectric effect. *Acta Mech.* 230. 2455–2474. DOI: 10.1007/s00707-019-02404-z.
- 8 Wang X.; Zhong Z. (2002) A conducting arc crack between a circular piezoelectric inclusion and an unbounded matrix. *Int. J. Solids Struct.* 39. 5895–5911. DOI: 10.1016/S0020-7683(02)00474-2.
- 9 Onopriienko O.; Loboda V.; Sheveleva A.; Lapusta Y. (2019) Bond zone model for a conductive crack at the interface of piezoelectric materials under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings. *Z Angew Math Mech.* e201800230. DOI: 10.1002/zamm.201800230.
- 10 Sheveleva A.; Loboda V.; Lapusta Y. (2020) A conductive crack and a remote electrode at the interface between two piezoelectric materials. *Applied Math. Modeling.* 87. 287–299. DOI: 10.1016/j.apm.2020.06.003.
- 11 Muskhelishvili N. I. (1975) *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity.* Noordhoff. Groningen.
- 12 Rice J. R. (1988) Elastic fracture mechanics concept for interfacial cracks. *Journal of Applied Mechanics.* 55. 98–103. DOI: 10.1115/1.3173668.
- 13 Biliy D.V.; Komarov O.V.; Loboda V.V. (2021) *Antyploska zadacha dlya odnomirnoho p'yezoelektrychnoho kvazikrystala z mizhfaznoyu trishchynoyu* [Antiplane problem for a one-dimensional piezoelectric quasicrystal with an interface crack.] *Bulletin of Zaporizhzhia National University. Physical and Mathematical Sciences.* No 1 5–14. DOI: 10.26661/2413-6549-2021-1-01 [in Ukraine]

Білий Дмитро Володимирович

Дніпровський Національний Університет імені Олеся Гончара
аспірант

пр. Гагаріна, 72 Дніпро, Україна, 49010

biliy.dmitry@gmail.com

ORCID: 0000-0001-6873-576

Лобода Володимир Васильович

Дніпровський Національний Університет імені Олеся Гончара

доктор фізико-математичних наук

пр. Гагаріна, 72 Дніпро, Україна, 49010

loboda@dnu.dp.ua

ORCID: 0000-0002-0432-629X

Для посилань:

Білий Д. В., Лобода В. В. Антиплоска задача для одномірного п'езоелектричного квазікристала з міжфазною тріщиною під впливом внутрішнього електричного заряду. *Механка та математичні методи*, 2022. Том 4. Вип. 1. С. 32–44

For references:

Bilyi D., Loboda V. (2022). Antiplane problem for one-dimensional piezoelectric quasicrystal with an interface crack under the influence of internal electric load. *Mechanics and Mathematical Methods.* 4 (1). 32–44