

УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕФОРМУВАННЯ БАГАТОШАРОВОЇ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОЇ ПЛИТИ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ ЗА БЕЗЗГИНОВОЮ УТОЧНЕНОЮ КОНТИНУАЛЬНОЮ МОДЕЛЛЮ

Гуртовий О. Г.¹, Тинчук С. О.¹

¹Національний університет водного господарства та природокористування

Анотація: Високоточна оцінка напружено-деформованого стану (НДС) багатошарових плит на жорстких основах при дії стаціонарного поперечного навантаження є актуальною задачею, оскільки до неї зводяться розрахунки міцності та деформативності різного роду однорідних та багатошарових покриттів. Це розрахунок дорожнього одягу на відносно жорстких мостових конструкціях, або на недеформівному підстилаючому шарі чи захисних багатошарових покриттів плоских елементів конструкцій більшої жорсткості, ніж покриття, тощо. Об'єднання матеріалів з ізотропними та трансверсально-ізотропними фізичними характеристиками в багатошаровий пакет дозволяє створювати багатофункціональні конструкції. НДС таких конструкцій, зважаючи на їх структурну неоднорідність та відносно низьку поперечну жорсткість окремих шарів, суттєво пов'язаний з впливом деформацій поперечного зсуву та деформацій поперечного обтиснення. Тому актуальною є задача уточненого моделювання НДС плит, яка б враховувала ці види деформацій. Грунтуючись на розкладанні НДС плити на згинові та беззгинові складові, пропонується оптимізація розрахункової схеми деформування прямокутної багатошарової плити на жорсткій основі. Суть оптимізації полягає в розгляді такої розрахункової схеми плити, в якій НДС плити повністю описувався б лише одною складовою, а саме беззгиновою складовою НДС. Для цього замість реальної конструкції багатошарової плити, що деформується без відриву від основи, пропонується розглядати розрахункову схему плити, яка утворена симетричною добудовою відносно поверхні контакту даної плити з основою. У цьому випадку плита буде двосторонньо симетрично навантаженою відносно серединної поверхні плити, а товщина плити збільшиться вдвоє. НДС плити буде беззгиновим, що суттєво спрощує його моделювання. Для беззгинового НДС побудована в пружній постановці двовимірною, високого ступеня ітераційного наближення, але тривимірною за характером відображення НДС модель деформування багатошарових прямокутних плит на жорсткій основі з ізотропними та трансверсально-ізотропними шарами, яка достатньо повно враховує деформації поперечного зсуву та поперечного обтиснення при поперечному навантаженні плити. Виконано методом скінченних різниць розрахунки однорідних та двошарових трансверсально-ізотропних плит на жорсткій основі під дією рівномірно розподіленого по поверхні плити та локалізованого поперечних навантажень.

Ключові слова: багатошарова плита, жорстка основа, поперечний зсув, поперечне обтиснення, континуальна модель.

INVESTIGATION DEFORMATION OF A MULTILAYERED TRANSVERSAL-ISOTROPIC PLATE ON A RIGID FOUNDATION BY UNFLEXURAL REFINED CONTINUAL MODEL

O. Gurtovyi¹, S. Tynchuk¹

¹National University of Water and Environmental Engineering

Abstract: The high-precision estimation of the stress-strain state (SSS) of multilayered plates on a rigid foundation under the action of stationary transverse loading is an urgent task. As its includes

the calculations of strength and deformability of various homogeneous and multilayer coatings. This is the calculation of road surface on relatively rigid bridge structures, or on a non-deformable underlying layer or calculation protective multilayer coatings of flat structural elements of greater rigidity than coatings, etc. The combining of materials with isotropic and transversal-isotropic physical characteristics into a multilayer package allows creating of the multifunctional designs. The SSS of such structures due to their structural heterogeneity and the relatively low transverse stiffness of the individual layers is significantly associated with the effect of transverse shear deformations and transverse compression deformations. Therefore, the problem of refined modelling of SSS of plates, which takes into account these types of deformations, is an urgent one. Based on the decomposition the SSS of plate into the flexural and unflexural components, it is proposed to optimize the design diagram of deformation a rectangular multilayer plate on a rigid foundation. The essence of optimization is to consider such a design diagram of the plate, in which the SSS of plate would be fully described by only one component, namely the unflexural component of SSS. To do this, instead of the actual design of the multilayer plate, which is deformed without separation from the foundation, it is suggested to consider the design diagram of the plate, which is formed by supplementing it with a symmetric one about the contact surface of the foundation. In this case, the plate will be symmetrically loaded with respect to the middle surface of the plate, and the thickness of the plate will double. The SSS of plate will be unflexural, which greatly simplifies its modeling. For unflexural SSS, a two-dimensional and high-degree iterative approximation but three-dimensional by the nature reflection of SSS, model of deformation of multilayer rectangular plates on a rigid foundation with isotropic and transverse-isotropic layers is constructed in an elastic formulation. This model takes full account deformations of transverse shear and of transverse compression at transverse loading of a plate. Calculations of homogeneous and two-layer transverse-isotropic plates on a rigid foundation under the action evenly distributed and localized transverse loads on the surface of a plate are performed by the finite difference method.

Keywords: a multilayered plate, a rigid foundation, transverse shear, transverse compression, continual model.

1 ВСТУП

Розробка і числова реалізація уточнених методик розрахунку анізотропних багатошарових плит на жорсткій основі є важливою задачею інженерних розрахунків дорожніх покриттів на недеформівних (скельних) основах, покриттів дорожнього полотна залізобетонних мостів, захисних багатофункціональних покриттів плоских конструкцій. І оскільки ці покриття можуть мати досить багато шарів, важливим являється розробка континуальних за характером розрахункових моделей, в яких порядок диференціювання розрахункових рівнянь не залежить від кількості шарів. Моделі деформування плит на жорсткій основі мають свою специфіку, оскільки в них переважає беззгинова складова НДС і важливу роль відіграють, окрім деформацій поперечного зсуву, також деформації поперечного обтиснення.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Ефекти обтиснення та поперечного зсуву в трансверсально-ізотропних плитах та пластинах на пружних основах та в контактних задачах для плит всесторонньо досліджувалась В. Г. Піскуновим та В. К. Присяжнюком, В. І. Шваб'юком, останнім, зокрема, в [1]. Показано, що врахування поперечного обтиснення суттєво уточнює НДС плит, а також усуває ті протиріччя в розподілі контактних зусиль, що характерні для чисто-зсувних теорій. Проте ними застосовувались згинові уточнені моделі пластин, а основи були недеформівними. Задачі деформування плит на жорсткій основі розглядалися в уточненій постановці О. Г. Гуртовим [2], а в тривимірній постановці О. В. Марчуком [3]. Останній підхід використано для розрахунку багатошарового дорожнього полотна моста О. В. Марчуком та Б. В. Гриневицьким [4]. Підходи для побудови уточнених моделей в тому числі ітераційних за своїм змістом, викладено в [5,6]. Проте ці моделі являються згиновими за своїм змістом. А при деформуванні плит на недеформівній основі переважає беззгинова компонента НДС. Тому актуальною є розробка та числова реалізація беззгинової уточненої моделі НДС багатошарових плит на жорстких основах, причому важливим фактором є її континуальна концепція.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою роботи є розробка уточненої моделі беззгинового НДС плит та її застосування для дослідження НДС багатошарових ізотропних та трансверсально-ізотропних плит, що опираються на жорсткі основи, за дії поперечних навантажень, зокрема локалізованого навантаження.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ґрунтуючись на розкладанні НДС плити на згинові та беззгинові складові, пропонується оптимізація розрахункової схеми деформування прямокутної багатошарової плити на жорсткій основі. Суть оптимізації полягає в розгляді такої розрахункової схеми плити, в якій НДС плити повністю описувався б лише одною складовою, а саме беззгиновою складовою НДС. Для цього замість реальної конструкції багатошарової плити (рис. 1, а), що деформується без відриву від основи, пропонується розглядати розрахункову схему плити, яка утворена симетричною добудовою відносно поверхні контакту даної плити з основою. У цьому випадку плита буде двосторонньо симетрично навантаженою відносно серединної поверхні плити, а товщина плити збільшиться вдвоє (рис. 1, б).

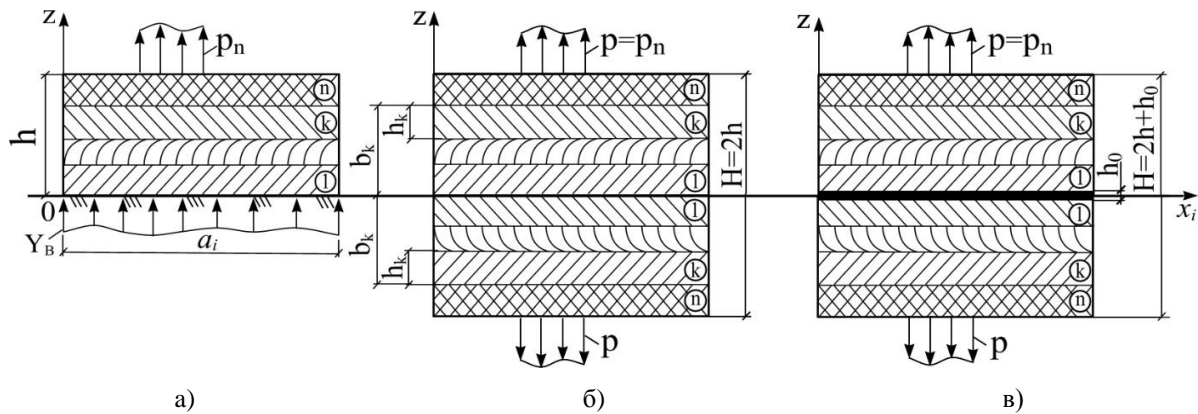


Рис. 1. Варіанти оптимізації розрахункової схеми плити:

- а) задана розрахункова схема; б) оптимізована розрахункова схема плити за умови ковзкого контакту з основою; в) оптимізована розрахункова схема плити за умови жорсткого контакту з основою

Розв'язання задачі з визначення НДС плити виконаємо наближено, зведенням тривимірної задачі до двовимірної. Застосуємо для цього метод гіпотез, зокрема континуальний підхід [5], задавши гіпотетично функції розподілу НДС за поперечною координатою z . Застосовуючи континуальне по товщині пластини моделювання, тангенціальні до поверхні x_1x_2 складові вектору зміщень $u_i^{(k)}(x_j, z)$ ($i, j = \overline{1, 2}$) для k -го шару будемо шукати шляхом інтегрування по поперечній координаті z співвідношень Коші у вигляді [6, 7, 8, 9 та ін.]:

$$u_i^{(k)} = u_i - \int_{\delta_i}^z u_{3,i}^{(s)} dz + \int_{\delta_i}^z 2e_{i3}^{(s)} dz, \quad s = \overline{l_i, k}, \quad i, j = \overline{1, 2}, \quad (1)$$

де $u_i(x_j)$ – невідомі функції тангенціальних зміщень на довільній поверхні $z = \delta_i = const$ в шарі l_i ($i, j = \overline{1, 2}$); $u_3^{(s)}(x_j, z)$ – нормальні до площини плити зміщення, а $e_{i3}^{(s)}(x_j, z)$ – відносні поперечні дотичні деформації в довільній точці шару s , що задаються гіпотетично. Тут і далі диференціювання позначено нижнім індексом після коми. Застосовується також підсумовування за нижніми індексами, що повторюються.

Відносні деформації поперечного зсуву $e_{i3}^{(k)}$ визначаємо із закону Гука, попередньо задавши гіпотези про характер розподілу по товщині плити поперечних дотичних напружень $\sigma_{i3}^{(k)}$.

Тоді вираз (1) має вигляд:

$$u_i^{(k)} = u_i - \int_{\delta_i}^z u_{3,i}^{(s)} dz + \int_{\delta_i}^z 4a_{i3i3}^{(s)} \sigma_{i3}^{(s)} dz \quad (2)$$

Нормальні зміщення $u_3^{(k)}$ при поперечному навантаженні визначатимемо наближено із співвідношення [7, 8, 9 та ін.]

$$u_3^{(k)} = w(x_j) + \int_{\delta_w}^z a_{3333}^{(s)} \sigma_{33}^{(s)} dz; \quad s = \overline{l_3, k}, \quad (3)$$

де функція прогинів $w(x_j)$ визначається в довільному шарі l_3 на довільній поверхні $z = \delta_w = const$; $\sigma_{33}^{(s)}(x_j, z)$ – гіпотетично задана функція поперечних нормальних напружень в s -му шарі.

Залежність (3) отримано інтегруванням за координатою z співвідношення Коші $e_{33} = u_{3,3}$. Відмітимо, що у гіпотетичному представленні $u_3^{(k)}$ за (3) нехтується ефектом Пуассона в залежності для e_{33} закону Гука, тобто приймається наближено $e_{33} \approx a_{3333}\sigma_{33}$.

Гіпотези для дотичних напружень σ_{i3} та для нормальних напружень σ_{33} в плиті значно простіше задавати, розглядаючи двостороннє симетричне беззгинове навантаження $p(x_j)$.

Оскільки у випадку жорсткої основи деформації основи відсутні, координатну поверхню $x_1 0 x_2$ сумістимо з поверхнею контакту плити і основи (рис. 1, б). Тоді функція прогину на цій поверхні $w(x_j) \equiv 0$ при $z = \delta_w = 0$, і отже w не увійде у вираз (3) для зміщень $u_3^{(k)}$, що спрощує залежності (2), (3).

В результаті замість співвідношення (3) для нормальних зміщень $u_3^{(k)}$ отримаємо

$$u_3^{(k)} = \int_0^z a_{3333}^{(s)} \sigma_{33}^{(s)} dz, \quad s = \overline{l_3, k}. \quad (4)$$

В оптимізованій схемі відпадає потреба у визначенні функції відпору основи Y_B як шуканої невідомої функції. Симетрична складова функції навантаження p не залежить від відпору основи Y_B і становить

$$p = p_n, \quad (5)$$

а відпір основи $Y_B(x_i)$ буде визначено як напруження $\sigma_{33}(x_i, 0)$ на поверхні $z = 0$.

У розрахунковій схемі з рис. 1, б на поверхні контакту плити з основою $z = 0$ моделюється ковзкий контакт без тертя ($\sigma_{i3} = 0$) та без відриву плити від основи. Граничні умови контакту для всіх трьох компонентів вектора зміщень u_α та для напруження $\sigma_{\alpha\beta}$ мають на поверхні $z = 0$ вигляд:

$$u_3^{(1)} = 0; \quad u_i^{(1)} \neq 0; \quad \sigma_{i3}^{(1)} = 0 \quad (\text{при } z = 0). \quad (6)$$

Для моделювання жорсткого контакту плити з основою в розрахунковій схемі (рис. 1, в) всередині плити потрібно додатково вводити відносно тонкий, у порівнянні з іншими шарами, товщиною h_0 „абсолютно” жорсткий прошарок, позначений $k = 0$. „Абсолютна” жорсткість прошарку (відносно жорсткості інших шарів) забезпечується прийняттям відносно великих модулів пружності $E^{(0)} = E'^{(0)} = nE$; $G^{(0)} = G'^{(0)} = nG$; $\nu = \nu' \equiv 0$, де $n \approx 10^3$, а E і G – найбільші значення модулів пружності та зсуву із усіх наявних для матеріалу шарів плити, що розглядається. У цьому випадку граничні умови при $z = \pm h_0 / 2$ матимуть вигляд:

$$u_3^{(1)} = 0; \quad u_i^{(1)} = 0; \quad \sigma_{i3}^{(1)} \neq 0 \quad (\text{при } z = \pm h_0 / 2), \quad (7)$$

хоча на поверхні $z = 0$ залишаються справедливими умови (6), проте $u_i^{(1)} \rightarrow 0$ внаслідок відносно великої жорсткості прошарку.

Між шарами плити виконуються умови жорсткого контакту без проковзування. Проте, вводячи додаткові відносно тонкі прошарки заданої малої відносно жорсткості, можна без змін у постановці задачі розглядати також інші умови контакту між шарами, моделюючи ефекти проковзування без тертя, ковзання з тертям, розшарування, тощо.



При розгляді беззгинового НДС оптимізованої (рис. 1, б, в) двосторонньо обтиснутої поперечним симетричним заданим навантаженням $p(x_i) = p_n(x_i)$ багат шарової плити для отримання НДС обов'язковим є врахування поперечного обтиснення ($e_{33} \neq 0$), оскільки інакше отримуємо тривіально-нульовий розв'язок задачі. Тому прийємо гіпотези для поперечних нормальних напружень $\sigma_{33}^{(k)}$ і напружень поперечного зсуву $\sigma_{i3}^{(k)}$ у вигляді, запропонованому в роботі [7], як перше наближення беззгинового НДС:

$$\sigma_{i3}^{(k)} = f_i^{(k)}(z)\beta_i(x_j); \quad \sigma_{33}^{(k)} = f_3^{(k)}(z)\beta_3(x_j) + p, \quad (8)$$

і які задовольняють умовам жорсткого контакту шарів та умовам на зовнішніх поверхнях для цих напружень.

Тут $\beta_\alpha(x_j)$ – невідомі функції зміщень (функції поперечного зсуву та поперечного обтиснення); $f_\alpha^{(k)}(z)$ – обґрунтовано задані степеневі апроксимації по z , що моделюють самозрівноважений по товщині плити розподіл напруження $\sigma_{i3}^{(k)}$ та симетричний відносно $z = 0$ розподіл напружень $\sigma_{33}^{(k)}$.

Із рівнянь рівноваги $\sigma_{\alpha 3, \alpha}^{(k)} = 0$ ($\alpha = \overline{1, 3}$) випливає, що порядок апроксимації напружень поперечного обтиснення $\sigma_{33}^{(k)}$ повинен бути на одиницю більшим, ніж $\sigma_{i3}^{(k)}$.

Функції розподілу напружень по висоті плити запишемо у вигляді [7]:

$$\begin{aligned} f_i^{(k)} &= \int_{-b_n}^z A_{iiii}^{(s)} [f_0^{(s)}(z) - c_0 z + c_0 \theta_i - d_i / b_i] dz; \\ f_3^{(k)} &= \int_{-b_n}^z (f_1^{(s)} + f_2^{(s)}) dz; \quad s = \overline{1, k}, \end{aligned} \quad (9)$$

де функція $f_0^{(s)}(z)$ в (9) має вигляд:

$$f_0^{(s)}(z) = R_0 \int_{-b_n}^z \int_{-b_n}^z a_{3333}^{(r)} dz^2; \quad R_0 = H / \int_{-b_n}^{b_n} a_{3333}^{(k)} dz; \quad r = \overline{1, s}; \quad k = \overline{1, n},$$

а коефіцієнти в (9) мають вигляд:

$$\begin{aligned} b_i &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{iiii}^{(t)} dz; \quad d_i = \int_{-b_n}^{b_n} A_{iiii}^{(t)} f_0^{(t)} dz; \quad \theta_i = \int_{-b_n}^{b_n} A_{iiii}^{(t)} z dz / b_i; \quad t = \overline{1, n}; \\ c_{0i} &= \frac{\int_{-b_n}^{b_n} \int_{-b_n}^z A_{iiii}^{(t)} (f_0^{(t)} - d_i / b_i) dz^2}{\int_{-b_n}^{b_n} \int_{-b_n}^z A_{jjjj}^{(t)} (z - \theta_j) dz^2}, \end{aligned}$$

та задовольняють умовам $f_\alpha^{(n)}(z = \pm H / 2) = 0$.

Причому $A_{mlkp}^{(k)}$ і $a_{mlkp}^{(k)}$ – коефіцієнти закону Гука; $z = b_n$ – координата точок на верхній поверхні шару n ($b_n = H / 2$), а $z = -b_n$ – координата точок на нижній поверхні симетрично добудованої плити.

Функції $f_{\alpha}^{(k)}$ отримані процедурою послідовних уточнень, за якою при початкових гіпотезах $\sigma_{i3}^{(k)}(x_i, z) = 0$, $\sigma_{33}^{(k)}(x_i, z) = p$ за (2) визначались функції зміщень $u_3^{(k)}$, $u_i^{(k)}$, а далі із співвідношень Коші – деформацій $e_{\alpha\beta}$. За цими деформаціями із закону Гука знаходились вирази для напружень $\sigma_{ij}^{(k)}(i, j = \overline{1, 2})$. Вирази для напружень $\sigma_{ij}^{(k)}$ підставлялись в рівняння рівноваги $\sigma_{i\alpha, \alpha}^{(k)} = 0$, із яких інтегруванням за поперечною координатою z знаходились уточнені вирази поперечних дотичних напружень $\sigma_{i3}^{(k)}$. Підстановка уточнених $\sigma_{i3}^{(k)}$ в третє рівняння рівноваги $\sigma_{\alpha 3, \alpha}^{(k)} = 0$ та інтегрування його за z дозволило знайти уточнені вирази для поперечних нормальних напружень $\sigma_{33}^{(k)}$.

Відмітимо, що різні процедури послідовних уточнень для отримання неklasичних континуальних моделей НДС пластин застосовувалась також в роботах [6, 10, 11 та ін.], однак у цих роботах використовувались інші початкові гіпотези.

Функції вищих наближень записуються у вигляді:

$$\begin{aligned}
 f_{i(\omega+1)}^{(k)} &= \int_{-b_n}^z A_{iii}^{(r)} \int_0^z a_{i3i3}^{(s)} f_{i\omega}^{(k)} dz^2 - \phi_i^{(k)} \int_{-b_n}^{b_n} A_{iii}^{(l)} \int_0^z a_{i3i3}^{(p)} f_{i\omega}^{(p)} dz^2; \quad \omega = \overline{1, 3}; \\
 \phi_i^{(k)} &= \int_{-b_n}^z A_{iii}^{(r)} dz \Big/ \int_{-b_n}^{b_n} A_{iii}^{(l)} dz; \quad k, l = \overline{1, n}; \quad r = \overline{1, k}; \quad s = \overline{1, r}; \quad p = \overline{1, l}; \\
 f_t^{(k)} &= \int_{-b_n}^z (f_{1t}^{(r)} + f_{2t}^{(r)}) dz; \quad t = \overline{1, 2}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Підставивши уточнені вирази для напружень в рівняння (4) та (2), отримаємо, з врахуванням закону Гука, нормальні $u_3^{(k)}$ і тангенціальні $u_i^{(k)}$ компоненти вектора зміщень по відношенню до координатної (серединної) поверхні $x_1 0 x_2$ (рис. 1) для випадку беззгинового деформування плити. При цьому компоненти зміщень представлені сумами добутків гіпотетично заданих степеневих функцій $\psi_{3t}^{(k)}$, $\psi_{ir}^{(k)}$ поперечної координати z та шуканих функцій γ_t , β_{ir} і v_i координатної поверхні $x_1 0 x_2$.

Таким чином, компоненти зміщень в кінематичній моделі мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 u_3^{(k)} &= \psi_{3t,3}^{(k)}(z) \gamma_t + \psi_{33,3}^{(k)}(z) p; \quad t = \overline{1, 2}; \\
 u_i^{(k)} &= v_i - \psi_{3t}^{(k)}(z) \gamma_{t,i} - \psi_{33}^{(k)}(z) p_{,i} - \psi_{ir}^{(k)}(z) \beta_{ir}; \quad r = \overline{1, 4}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Отже, тривимірна задача НДС зведена до уточненої двовимірної задачі НДС з шуканими функціями двох координат x_1, x_2 .

Для підвищення точності апроксимації беззгинового НДС у модель (11) включені запропоновані в [7, 12] функції, що моделюють ефекти від поперечних зсувних деформацій та від деформацій поперечного обтиснення у вищих наближеннях. Ці апроксимуючі за координатою z функції мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 \psi_{3t,3}^{(k)} &= \int_0^z a_{3333}^{(s)} f_t^{(s)} dz; \quad \psi_{33,3}^{(k)} = \int_0^z a_{3333}^{(s)} dz; \\
 \psi_{ir}^{(k)} &= - \int_0^z a_{i3i3}^{(s)} f_{ir}^{(s)} dz; \quad \psi_{3l}^{(k)} = \int_0^z \psi_{3l,3}^{(s)} dz; \quad s = \overline{1, k}; \quad l = \overline{1, 3}.
 \end{aligned}$$

Функції $[\psi_{3l_s}] = a_t^{(k)} z^{2t+1}$ – непарного степеня z , а функції $[\psi_{3l}; \psi_{ir}] = a_t^{(k)} z^{2t}$ – парного степеня z .

За варіаційним принципом Лагранжа отримано розрахункові рівняння в узагальнених зусиллях з відповідними граничними умовами, а також диференціальні розрахункові рівняння у відносно функцій зміщень. Система має вигляд:

$$[L] \cdot [u] = [p], \quad (12)$$

де $[u]$ – матриця шуканих функцій, яка має вигляд

$$[u] = [v_1, v_2, \gamma_t, \beta_{1r}, \beta_{2r}]^T,$$

$[L]$ – матриця диференціальних операторів,

$[p]$ – матриця, що враховує задане зовнішнє навантаження p і має вигляд

$$[p] = [p_{v_1}, p_{v_2}, p_{\gamma_t}, p_{\beta_{1r}}, p_{\beta_{2r}}]^T \cdot p.$$

Оскільки модель континуальна, загальний порядок диференціювання розрахункової системи рівнянь не залежить від кількості шарів в плиті, а залежить лише від ступеня застосованого для розв'язання задачі наближення в гіпотезах поперечного зсуву та поперечного наближення.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розрахункова система рівнянь (12) реалізована методом скінченних різниць.

Досліджувався при циліндричному деформуванні вплив на НДС трансверсально-ізоотропних плит характеру навантаження на прикладі плит на жорсткій основі при жорсткому защемленні країв (табл. 1). Розглянуто два випадки прикладання рівномірно розподіленого навантаження: 1 – по всій дожині плити; 2 – на половині довжини посередині плити. Контакт плит з жорсткою основою – ковзкий, а на краях плита є жорстко защемленою. У варіантах 1, 2 (табл. 1) розглянуто одношарову трансверсально-ізоотропну плиту з $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $E' = 2 \cdot 10^4$ МПа ($E/E' = 10$); $\nu = 0,25$; $\nu' = 0,01$. Для схем 4, 5 – двохшарову плиту з трансверсально-ізоотропними шарами ($(E^{(k)}/E'^{(k)} = 10)$) однакової товщини $h_1 = h_2 = 0,5h$ з пружними характеристиками: $E^{(1)} = 1 \cdot 10^4$ МПа; $E^{(2)} = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,25$; $\nu'^{(1)} = \nu'^{(2)} = 0,01$. В розрахунку застосовано розрахункові схеми плит, що симетрично побудовані відносно поверхні контакту з основою ($a/h = 4$; $a/H = 2$). Застосовано модель другого ітераційного наближення.

Таблиця 1

Зміщення і напруження в плитах ($a/h = 4$) з жорстко защемленими краями за ковзкого контакту з основою

Варіанти схем плит та навантаження	z/h	$u_3^\#$		$u_1^\#$	Епюри $\sigma_{11}^\#$
		$x = a/2$	$x = a/4$	$x = a/4$	$x = a/2$
1	2	3	4	5	6
	1,0	9,52	7,08	-1,31	
	0,5	5,02	2,68	0,32	
	0	0	0	0,85	
	1,0	8,33	4,48	-1,67	
	0,5	3,60	1,98	0,40	
	0	0	0	0,72	
	1,0	39,05	23,82	-6,23	
	0,5	35,60	20,24	5,64	
	0	0	0	7,41	
	1,0	32,85	17,64	-5,71	
	0,5	29,40	15,59	4,90	
	0	0	0	5,86	

Показано (табл. 1), що в однорідній плиті при дискретному навантаженні (варіант 2) відносні поперечні зміщення $u_3^\# = u_3 E / p h$ зменшуються порівняно з варіантом 1. У двохшаровій плиті, за наявності слабшого нижнього шару (варіанти 5 і 6), відносні зміщення $u_\alpha^\# = u_\alpha E^{(2)} / p h$ збільшуються в п'ять разів та майже в десять разів збільшуються відносні напруження $\sigma_{11}^\# = \sigma_{11} / p$ у порівнянні з НДС однорідної плити.

6 ВИСНОВКИ

Побудовано варіант уточненої структурно-континуальної моделі з гіпотезами ітераційного типу та реалізовано методику високоточного розрахунку в пружній постановці НДС поперечно навантажених багатошарових прямокутних товстих плит на жорсткій основі з ізотропними та трансверсально-ізотропними шарами. Модель беззгинового НДС враховує деформації поперечного зсуву та поперечного обтиснення. З варіаційного принципу Лагранжа отримано систему розрахункових рівнянь.

Встановлено певні особливості НДС: в трансверсально-ізотропній плиті напруження σ_{11} , σ_{22} локалізуються біля навантаженої верхньої поверхні плити, тоді як в ізотропних плитах σ_{ii} по висоті перерізу плити розподіляються рівномірніше. Із зростанням співвідношення E/E' локалізація і абсолютні значення σ_{11} зростають, що може призвести до руйнування поверхні плити.

При стиску плити і ковзкому контакті з основою в плиті біля основи з'являються напруження розтягу, що може бути небезпечним для плити або шару з крихкого матеріалу.

Література

1. Шваб'юк В. І., Ротко С. В., Бондарський О. Г., Шваб'юк В. В. Уточнений розрахунок композитних плит на пружних основах за дії локальних навантажень. В зб.: Механіка та математичні методи. Одеса: ОДАБА, 2019. №1. С. 35–45.
2. Гуртовий А. Г. Контактная задача для анизотропной слоистой плиты с упругим и с абсолютно жестким основаниями. В зб.: Теоретическая и прикладная механика. Харьков: «Основа», 2002. Вып. 35. С. 163–169.
3. Марчук А. В. Применение вариационного подхода для исследования напряженно-деформированного состояния слоистых пластин на жестком основании в трехмерной постановке. Проблемы прочности, 1997. № 6. С. 86–94.
4. Марчук О. В. Гриневицький Б. В. Розрахунок напружень у шаруватому дорожньому одязі плитно-ребристого моста. Автомобільні дороги і дорожнє будівництво: Міжвідомчий наук.-техн. збірник. К.: НТУ, 2001. Вип.62. С. 211–215.
5. Пискунов В. Г., Рассказов А. О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек. Прикладная механика, 2002. Т. 38. № 2. С. 22–57.
6. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1987. 360 с.
7. Гуртовий А. Г. Высокоточное моделирование деформирования слоистых структур. Механика композит. Материалов, 1999. Т. 35. № 1. С. 13–28.
8. Гуртовий А. Г., Пискунов В. Г. Новые расчетные модели и сравнение приближенных уточненных с точными трехмерными решениями задач изгиба слоистых анизотропных пластин. Механика композит. Материалов, 1988. № 1. С. 23–29.
9. Пискунов В. Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем. Механика композитных материалов, 2003. Т. 39 № 1. С. 3–24.
10. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
11. Пискунов В. Г., Вериженко В. Е., Присяжнюк В. К., Сипетов В. С., Карпиловский В. С. Расчет неоднородных оболочек и пластин методом конечных элементов. К.: Вища школа, 1987. 200 с.
12. Гуртовий А. Г. Континуальные аппроксимации перемещений в толстых слоистых пластинах при разделении термомеханических нагрузок на двухсторонние симметрические и косо-симметрические составляющие. Механика композит. Материалов, 1999. Т. 35. № 6. С. 743–756.

References

1. Schwabyuk, V. I., Rotko, S. V., Bondarsky, O. G., Schwabyuk, V. V. (2019). Utochnenyi rozrakhunok kompozytnykh plyt na pruzhnykh osnovakh za diyi lokal'nykh navantazhen [Refined calculation of composite slabs on elastic foundations under the action of local loads]. *Mekhanika ta matematychni metody*. Odessa: ODABA. 1. 35-45. [in Ukraine].
2. Gurtovyi, A. G. (2002). Kontaktnaya zadacha dlya anizotropnoy sloistoy plity s uprugim i s absolutno zhestkim osnovaniyami [Contact problem for an anisotropic layered plate with elastic and absolutely rigid foundations]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*. Kharkov: "Osnova". 35. 163–169. [in Russian].
3. Marchuk, A. V. (1997). Primeneniye variatsionnogo podkhoda dlya issledovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya sloistykh plastin na zhestkom osnovanii v trekhmernoy postanovke

- [Application of the variational approach for the study of the stress-strain state of layered plates on a rigid foundation in a three-dimensional setting]. *Problemy prochnosti*. 6. 86–94. [in Russian].
4. Marchuk, O. V. Hrynevitsky, O. V. (2001). Rozrakhunok napruzhen u sharuvatomu dorozhn'omu odyazi plytno-rebrystoho mosta [Calculation of stresses in the layered road clothes of the slab-ribbed bridge] *Avtomobil'ni dorohy i dorozhnye budivnytstvo: Mizhvidomchyy nauk.-tekhn. zbirnyk*. Kyiv: NTU. 62. 211–215. [in Ukraine].
 5. Piskunov, V. G., Rasskazov, A. O. (2002). Razvitiye teorii sloistykh plastin i obolochek [Development of the theory of layered plates and shells]. *Prikladnaya mekhanika*. 38(2). 22–57. [in Russian].
 6. Ambartsumyan, S. A. (1987). *Teoriya anizotropnykh plastin. Prochnost', ustoychivost' i kolebaniya* [Theory of anisotropic plates. Strength, stability and fluctuations]. 2nd ed., revised and add. Moskva: Nauka. [in Russian].
 7. Gurtovy, A. G. (1999). Vysokotochnoye modelirovaniye deformirovaniya sloistykh struktur [High-precision modeling of deformation of layered structures]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 35(1). 13–28. [in Russian].
 8. Gurtovyi, A. G., Piskunov, V. G. (1988). Novyye raschetnyye modeli i sravneniye priblizhennykh utochnennykh s tochnymi trekhmernymi resheniyami zadach izgiba sloistykh anizotropnykh plastin [New computational models and comparison of approximate refinement problems of bending of layered anisotropic plates with exact three-dimensional solutions]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 1. 23–29. [in Russian].
 9. Piskunov, V. G. (2003). Iteratsionnaya analiticheskaya teoriya v mekhanike sloistykh kompozitnykh sistem [Iterative analytical theory in the mechanics of layered composite systems]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 39(1). 3–24. [in Russian].
 10. Ambartsumyan, S. A. (1974). *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek* [General theory of anisotropic shells]. Moskva: Nauka. [in Russian].
 11. Piskunov, V. G. Verizhenko, V. E., Prisyazhnyuk, V. K., Sipetov, B. C., Karpilovsky, B. C. (1987). *Raschet neodnorodnykh obolochek i plastin metodom konechnykh elementov* [Calculation of inhomogeneous shells and plates by the finite element method]. Kyiv: Higher school. [in Russian].
 12. Gurtovyi, A. G. (1999). Kontinual'nyye approksimatsii peremeshcheniy v tolstykh sloistykh plastinakh pri razdelenii termomekhanicheskikh nagruzok na dvukhstoronniye simmetricheskiye i kososimmetricheskiye sostavlyayushchiye [Continuous approximations of displacements in thick layered plates during the separation of thermomechanical loads into bilateral symmetric and obliquely symmetric components]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 35(6). 743–756. [in Russian].

Гуртовий Олексій Григорович

Національний університет водного господарства та природокористування
к.т.н., доцент
Вул. Соборна, 11, Рівне, Україна, 33028
o.g.gurtovyi@nuwm.edu.ua
ORCID 0000-0002-2651-948X

Тинчук Сергій Олександрович

Національний університет водного господарства та природокористування
к.т.н., доцент
Вул. Соборна, 11, Рівне, Україна, 33028
s.o.tynchuk@nuwm.edu.ua
ORCID 0000-0002-1763-8620

Для посилань:

Гуртовий О. Г., Тинчук С. О. Дослідження деформування багатoshарової трансверсально-ізотропної плити на жорсткій основі за безгиновою уточненою континуальною моделлю. Механіка та математичні методи, 2022. Т. 4. №. 1. С. 64–74.

For references:

Gurtovyi O., Tynchuk S. (2022). Investigation deformation of a multilayered transversal-isotropic plate on a rigid foundation by unflexural refined continual model. *Mechanics and Mathematical Methods*. 43 (1). 64 – 74.