IV, №2, 2022
Стор. 6-18 / Page 6-18

УДК 531.36, 531.38

ВПЛИВ ДИНАМІЧНОЇ НЕСИМЕТРІЇ НА СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ТВЕРДОГО ТІЛА ПІД ДІЄЮ ПОСТІЙНОГО МОМЕНТУ У ІНЕРЦІАЛЬНІЙ СИСТЕМІ ВІДЛІКУ

Кононов Ю. М.[1], Чеіб А. Х.[2]
[1]*Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України*
[2]*Донецький національний університет імені Василя Стуса*

Анотація. У припущенні, що центр мас несиметричного твердого тіла знаходиться на третій головній осі інерції твердого тіла, досліджені раніше отримані умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання у середовищі з опором динамічно несиметричного твердого тіла. Тверде тіло обертається навколо нерухомої точки, знаходиться під дією сил тяжіння, дисипативного моменту і постійного моменту в інерціальній системі відліку. Умови стійкості представлені у вигляді системи трьох нерівностей. Перша і друга нерівність мають першу ступень відносно динамічного дебалансу, а третья нерівність має третью ступень. Перша і третя нерівність мають другий ступінь щодо перекидального або відновлювального моменту, а друга нерівність – перший ступінь. Перша та третя нерівність мають четвертий ступінь відносно постійного моменту, а друга нерівність має другий ступінь. Найбільш складною для дослідження є третя нерівність. Проведені аналітичні дослідження впливу динамічного дебалансу, відновлювального і перекидального моменту на умови асимптотичої стійкості. Отримані умови асимптотичої стійкості рівномірного обертання у середовищі з опором несиметричного твердого тіла при досить малих значеннях динамічному дебалансу. Виписані достатні умови стійкості с точністю до другого порядку малості відносно постійного моменту і першого порядку малості відносно відновлювального і перекидального моментів. Отримані умови нестійкості при досить великому динамічному дебалансі. Досліджено вплив динамічного дебалансу на умови стійкості обертання твердого тіла навколо центру масс. Показано, що при відсутності дисипативної несиметрії для асимпотичної стійкості достатньо, щоб осьовий момент інерції твердого тіла був більший за подвійний екваторіальний момент і виконувалося відома необхідна умова стійкості для симетричного твердого тіла.

Ключові слова: динамічно несиметричне твердо тіло, рівномірне обертання, середовище з опором, постійний момент в інерціальній системі відліку, асимптотична стійкість.

INFLUENCE OF DYNAMIC ASYMMETRY ON THE ROTATION STABILITY IN A RESISTING MEDIUM OF A ASYMMETRIC RIGID BODY UNDER THE ACTION OF A CONSTANT MOMENT IN INERTIAL REFERENCE FRAME

Yu. Kononov[1], A. K. Cheib[2]
[1]*Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine*
[2]*Vasyl' Stus Donetsk National University*

Abstract. Under the assumption that the center of mass of an asymmetric rigid body is located on the third principal axis of inertia of a rigid body, the previously obtained conditions for the asymptotic stability of uniform rotation in a medium with resistance of a dynamically asymmetric rigid body are investigated. A rigid body rotates around a fixed point, is under the action of gravity, dissipative moment and constant moment in an inertial frame of reference. The stability conditions are presented as a system of three inequalities. The first and second inequalities have the first degree relative to the

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2022-4-2-6-18

dynamic unbalance, and the third inequality has the third degree. The first and third inequalities are of the second degree with respect to the overturning or restoring moment, and the second inequality is of the first degree. The first and third inequalities are of the fourth degree with respect to the constant moment, and the second inequality is of the second degree. The third inequality is the most difficult to study. Analytical studies of the influence of dynamic unbalance, restoring and overturning moments on the conditions of asymptotic stability are carried out. Conditions for the asymptotic stability of uniform rotation in a medium with resistance to an asymmetric rigid body are obtained for sufficiently small values of dynamic unbalance. Sufficient stability conditions are written out up to the second order of smallness with respect to the constant moment and the first order of smallness with respect to the restoring and overturning moments. Instability conditions are obtained for sufficiently large dynamic unbalance. The effect of dynamic unbalance on the stability conditions for the rotation of a rigid body around the center of mass is studied. It is shown that in the absence of dissipative asymmetry, it is sufficient for asymptotic stability that the axial moment of inertia of a rigid body be greater than the double equatorial moment and that the well-known necessary stability condition for a symmetric rigid body be satisfied.

Keywords: dynamically asymmetric rigid body, uniform rotation, resisting medium, constant moment in inertial frame of reference, asymptotic stability.

1 ВСТУП

В даний час є досить велика кількість робіт, в яких проводяться різні дослідження динаміки твердих тіл, що обертаються у середовищі з опором. Наведемо лише роботи, які найближчі до розглядуваної задачі. У роботах [1, 2] розглянуто кілька прикладів рухів твердих тіл з малою несиметрією і запропоновано алгоритм вивчення таких систем. Показано, що мала динамічна несиметрія твердого тіла призводить до появи додаткового інтервалу нестійкості, довжина якого прямує до нуля при прямуванні до нуля величини дебалансу. В статті [3] проведені дослідження впливу дисипативного моменту і постійного моменту в інерціальній системі відліку на стійкість стаціонарних рухів гіроскопа Лагранжа. У роботі [4] ця задача була узагальнена на випадок рівномірних обертань гіроскопа Лагранжа на струнному підвісі. В статтях [5, 6], на підставі критерію Льєнара-Шіпара в іннорному вигляді, отримано умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання у середовищі з опором несиметричного твердого тіла. Рівномірного обертання твердого тіла підтримується постійним моментом у неінерціальній системі відліку. Умови стійкості записано у вигляді системи трьох нерівностей. Проведено аналітичні дослідження цих нерівностей. Отримано умови на величини постійного моменту і моменту інерції третьої головної осі, які при дії відновлювального моменту достатні для асимптотичної стійкості. Показано, що при досить великому постійному моменті буде спостерігатися асимптотична стійкість при дії відновлювального моменту, якщо обертання твердого тіла відбувається навколо осі найбільшого моменту інерції і найменшого з подвоєних. Дано узагальнення отриманих умов стійкості на випадок наявності в твердому тілі порожнини з ідеальної нестисливої рідини, що здійснює потенціальний рух. Показано, що при відсутності дисипації, отримані умови стійкості збігаються з відомими. Стаття [7] узагальнює результаті статті [3] на випадок рівномірних обертань динамічно несиметричного важкого твердого тіла. В ній, у припущенні, що центр мас несиметричного твердого тіла знаходиться на третій головній осі інерції твердого тіла, отримані умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання динамічно несиметричного важкого твердого тіла. Ці умови отримані у вигляді системи трьох нерівностей. Тверде тіло знаходиться під дією сил тяжіння, дисипативного моменту і постійного моменту в інерціальній системі відліку. Показано, що положення рівноваги твердого тіла буде стійким тільки при дії відновлювального моменту. Динамічна несиметрія більш суттєво впливає на стійкість обертання несиметричного твердого тіла, ніж дисипативна несиметрія. Проведено дослідження умов стійкості для різних граничних випадків малих або великих значень величин відновлювального, перекидального або постійного моментів. Зазначається, що з досить великих значеннях модуля відновлювального моменту обертання несиметричного твердого тіла буде асимптотично стійким. Якщо осьовий момент інерції є найбільшим або найменшим моментом інерції, то при досить великих значеннях кутової швидкості, як при дії перекидального моменту, так і при дії відновлювального моментів, обертання несиметричного твердого тіла буде асимптотично стійким. Проведено аналітичні дослідження впливу дисипативного, постійного, перекидального і відновлювального моментів на стійкість рівномірних обертань несиметричних та симетричних твердих тіл. Показано, що при відсутності динамічній та дисипативній симетрії отримані умови стійкості збігаються з відомими. У роботі [8] узагальнюється задача, яка була розглянута в [7], на випадок постійних моментів в інерціальній і неінерціальній системах відліку. Найбільш вдалий огляд сучасної літератури по розглядуваної задачі наданий в роботах [5–8, 10–12]. У монографії [9] представлений уніфікований і добре розроблений підхід до динаміки кутових рухів твердих тіл, що зазнають моментів збурення різної фізичної природи. Строгий підхід, заснований на процедурі

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2022-4-2-6-18

усереднення, застосовується до тіл з довільними еліпсоїдами інерції. Детально розглядається дія різних моментів збурень, як зовнішніх (гравітаційний, аеродинамічний, сонячний тиск), так і внутрішніх (завдяки в'язкій рідині в резервуарах, пружним і в'язкопружним властивостям тіла). В статті [10] розглянуто рух навколо центру мас сфероїда із порожниною, заповненою в'язкою рідиною. Момент сил, що діють тіло з боку в'язкої рідини в порожнині, визначають за методикою, розробленою в роботах Ф. Л. Черноусько. Асимптотичний підхід дозволяє отримати деякі якісні результати та описати нелінійну еволюцію кутового руху за допомогою спрощених усередніх рівнянь. В статті [11] досліджуються збурені обертальні рухи твердого тіла, схожі на випадок дзиги Лагранжа, піддані повільно змінним у часі моментам сил відновлення та збурення. Відновлюючий момент також залежить від малого кута нутації. Для розв'язування задачі використовується метод усереднення. Встановлено умови можливості усереднення (по фазі кута нутації) рівнянь руху твердого тіла, пов'язаних із випадком Лагранжа. Отримано усереднену систему рівнянь у першому наближенні. Асимптотичний підхід дозволяє отримати деякі якісні результати та описати еволюцію руху за допомогою спрощених усереднених рівнянь. У випадку обертального руху тіла, зануреного в лінійно-дисипативне середовище, проводиться чисельне інтегрування усередненої системи рівнянь. Вивчається новий клас обертальних рухів дзиги Лагранжа для нестаціонарного моменту збурення, а також для моменту відновлення, який повільно змінюється з часом і залежить від малого кута нутації. У роботі [12] розглянуто рух навколо центру мас майже динамічно сферичного твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною високої в'язкості, на яку діють постійні нерухомі обертальні моменти тіла. Момент сил, що діють на тверде тіло з боку в'язкої рідини в порожнині, визначається за методикою, розробленою в роботах Ф. Л. Черноусько. Отримані асимптотичні та чисельні розв'язки описують еволюцію руху тіла під дією малих внутрішніх і зовнішніх моментів.

У даній статті продовжуються дослідження умов асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором несиметричного твердого тіла, яки були раніше отримані у роботі [7]. З урахуванням перекидального і відновлювального моментів, а також при їх відсутності, проведено аналітичні дослідження впливу малого і великого динамічного дібалансу на умови стійкості. Досліджено вплив динамічного дібалансу на стійкості і нестійкості при відсутності дисипативної несиметрії.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

Розглянемо важке динамічно несиметричне тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої точки, в припущенні, що на нього діє дисипативний момент $\mathbf{M}_d = -\mathbf{D\omega}$ $\left(\mathbf{D} = diag(D_1, D_2, D_3);\ D_i > 0;\ i = \overline{1,3}\right)$, що моделює опір середовища та постійний моменти $\mathbf{M}_p = P\boldsymbol{\gamma}$, який підтримує сталу кутову швидкість власного обертання твердого тіла. Будемо вважати, що на третій головної осі інерції твердого тіла знаходиться центр мас твердого тіла і твердо тіло в незбуреному русі рівномірно обертається с кутою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_0$ навколо цієї вісі. Тут $\boldsymbol{\omega}$ – кутова швидкість твердого тіла, $\boldsymbol{\gamma}$ – одиничний вектор висхідної вертикалі, P – довільна стала.

Рівняння руху твердого тіла мають вигляд [3, 5, 7]

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + P\boldsymbol{\gamma} - D\boldsymbol{\omega}; \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0, \tag{2}$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2022-4-2-6-18

де $\mathbf{J} = diag\left(J_1, J_2, J_3\right)$ – тензор інерції твердого тіла для нерухомої точки; $V = \Gamma(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma})$ – потенційна енергія ($\Gamma = mgc$, m – маса твердого тіла, c – відстань від нерухомої точки до центру мас твердого тіла, g – прискорення вільного падіння); $\mathbf{k}$ – одиничний вектор третьої головної осі; $\boldsymbol{\gamma}$ – одиничний вектор висхідної вертикалі.

Рівняння (1) виражає теорему про зміну кінетичного моменту $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$, а рівняння (2) – умова сталості вектора $\boldsymbol{\gamma}$ в інерціальній системі відліку.

Проектуючи рівняння руху твердого тіла (1) – (2) на головній осі інерції твердого тіла для нерухомої точки, отримаємо:

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = \Gamma\gamma_2 - D_1\omega_1; \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 = -\Gamma\gamma_1 - D_2\omega_2; \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = P\gamma_3 - D_3\omega_3, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 + \omega_2\gamma_3 - \omega_3\gamma_2 = 0; \\ \dot{\gamma}_2 + \omega_3\gamma_1 - \omega_1\gamma_3 = 0; \\ \dot{\gamma}_3 + \omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Система (3) – (4) допускає розв'язки:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = 1,\ \omega_1 = \omega_2 = 0,\ \ \omega_3 = \omega_0 = \omega = \frac{P}{D_3}, \tag{5}$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = -1,\ \omega_1 = \omega_2 = 0,\ \omega_3 = \omega_0 = \omega = \frac{-P}{D_3}, \tag{6}$$

які відповідають рівномірним обертанням твердого тіла з кутовою швидкістю ω навколо вертикально розташованої третьої головної осі. При цьому розв'язку (5) відповідає випадок "сплячої" дзиги, на яку діє перекидальний момент ($\Gamma > 0$, центр мас твердого тіла перебуває вище нерухомої точки $(c > 0)$, а розв'язку (6) – випадок статично врівноваженої дзиги, на яку діє відновлювальний ($\Gamma < 0$, центр мас знаходиться нижче нерухомої точки $(c < 0)$. Таким чином, розв'язку (5) відповідає випадок $\Gamma > 0$, а розв'язку (6) відповідає $\Gamma < 0$.

Вважаючи в обуреного руху $\gamma_3 = \pm 1 + \delta$, $\omega_3 = \omega + \sigma$ (знак плюс відповідає рішенню (5), а знак мінус – (6)) і, зберігаючи для інших змінних їх колишні позначення, запишемо лінеаризовані рівняння збуреного руху:

$$\begin{cases} J_2\ddot{\gamma}_1 + D_2\dot{\gamma}_1 + \left[\left(J_3 - J_1\right)\omega^2 - \Gamma\right]\gamma_1 - J\omega\dot{\gamma}_2 - \left(D_2\omega - P\right)\gamma_2 = 0, \\ J_1\ddot{\gamma}_2 + D_2\dot{\gamma}_2 + \left[\left(J_3 - J_2\right)\omega^2 - \Gamma\right]\gamma_2 + J\omega\dot{\gamma}_1 + \left(D_1\omega - P\right)\gamma_1 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Тут $J = J_1 + J_2 - J_3 > 0$.

Основна відмінність отриманих рівнянь (7) від аналогічних рівнянь робіт [3, 4] полягає в тому, що через динамічну $(J_2 \neq J_1)$ та дисипативну $(D_2 \neq D_1)$ несиметрію не можна спростити ці рівняння шляхом введенням комплексної функції $\gamma_1 + i\gamma_2$. Слід також зазначити, що система рівнянь (7) описує рух лінійної механічної системи з двома ступенями свободи, що знаходиться під дією сил довільної структури: дисипативних, потенційних, гіроскопічних і циркуляційних [1, 3–5].

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2022-4-2-6-18

3 АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ (5) – (6)

У роботі [7] були отримані наступні умови асимптотичної стійкості розв'язків (5) – (6):

$$\begin{aligned}&\left(\Gamma D_3^2-(J_3-J_1)P^2\right)\left(\Gamma D_3^2-(J_3-J_2)P^2\right)+\left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_2\right)D_3^3P^2=\\&=D_3^4\Gamma^2+\tilde{J}D_3^2P^2\Gamma+\left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_2\right)D_3^2P^2+(J_3-J_1)(J_3-J_2)P^4>0,\end{aligned}\qquad(8)$$

$$\left(D_1+D_2\right)D_3^2\Gamma<\left(J_{12}-2JD_3\right)P^2,\qquad(9)$$

$$\left(J_1-J_2\right)^2D_1D_2D_3^3\Gamma^2+D_3\Gamma_1\Gamma+\Gamma_0=p_4P^4+p_2P^2+p_0>0,\qquad(10)$$

де

$$\begin{aligned}&\Gamma_1=\left\{\left[\left(J_3-2J_2\right)D_1+\left(J_3-2J_1\right)D_2\right]J_{12}+2\left(J_1-J_2\right)\tilde{J}_{12}D_3\right\}JP^2-\\&-J_{12}\left(D_1+D_2\right)D_1D_2D_3^2,\\&\Gamma_0=2\left(J_3J_{12}-2J_1J_2D_3\right)J^2P^4+\left[2D_1D_2J_3-J_{12}D_3-\left(D_1-D_2\right)\tilde{J}_{12}\right]J_{12}D_3^2P^2,\\&p_4=2J^2\left(J_3J_{12}-2J_1J_2D_3\right),\\&p_2=\left\{\left[J_2\left(J_3-2J_2\right)D_1^2+\left(\left(J_1+J_2\right)J_3-4J_1J_2\right)D_1D_2+2\left(J_1-J_2\right)\tilde{J}_{12}D_3+\right.\right.\\&\left.\left.+J_1\left(J_3-2J_1\right)D_2^2\right]J\Gamma+\left(J_2D_1^2-\tilde{J}D_1D_2-J_{12}D_3+J_1D_2^2\right)J_{12}D_3\right\}D_3,\\&p_0=\Gamma\left[(J_1-J_2)^2\Gamma-J_{12}(D_1+D_2)\right]D_1D_2D_3^3,\ \tilde{J}=J-J_3,\ J_{12}=J_1D_2+J_2D_1>0.\end{aligned}\qquad(11)$$

Так як в нерівності (8) – (10) та в позначення (11) стала P входить в парний ступені, то ці нерівності при дії перекидального моменту ($\Gamma>0$) визначають умови асимптотичної стійкості рішення (5), а при дії відновлювального моменту ($\Gamma<0$) – рішення (6).

Проведемо дослідження впливу динамічного дибалансу на умови стійкості. Нехай $J_2=J_1(1+\varepsilon)$, де $\varepsilon\geq-1$, тоді система нерівностей (8) – (10) отримують вигляд:

$$\begin{aligned}&\left(\Gamma D_3^2-\left(J_3-J_1\right)P^2\right)^2+\left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_2\right)D_3^3P^2+\tilde{a}_0\varepsilon=\\&=D_3^4\Gamma^2+2\left(J_1-J_3\right)D_3^2P^2\Gamma+\left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_2\right)D_3^2P^2+\left(J_3-J_1\right)^2P^4+\\&+\left[\left(J_1-J_3\right)P^2-D_3^2\Gamma\right]J_1P^2\varepsilon>0,\end{aligned}\qquad(12)$$

$$\left(D_1+D_2\right)D_3^2\Gamma<\left[J_1\left(D_1+D_2\right)+2\left(J_3-2J_1\right)D_3\right]P^2+J_1\left(D_1-2D_3\right)P^2\varepsilon,\qquad(13)$$

$$\begin{aligned}&\Gamma_{10}\Gamma+\Gamma_{00}+\left(\Gamma_{11}\Gamma+\Gamma_{01}\right)\varepsilon+\left(\Gamma_{22}\Gamma^2+\Gamma_{12}\Gamma+\Gamma_{02}\right)\varepsilon^2+\left(\Gamma_{13}\Gamma+\Gamma_{03}\right)\varepsilon^3=\\&=p_{40}P^4+p_{20}P^2+p_{00}+\left(p_{41}P^4+p_{21}P^2+p_{01}\right)\varepsilon+\\&+\left(p_{42}P^4+p_{22}P^2+p_{02}\right)\varepsilon^2+\left(p_{43}P^2+p_{23}\right)P^2\varepsilon^3>0.\end{aligned}\qquad(14)$$

Тут

$$\begin{aligned}&\tilde{a}_0=\left[D_3^2\Gamma-(J_3-J_1)P^2\right]J_1P^2,\ \Gamma_{10}=-\left[\left(J_3-2J_1\right)^2P^2+D_1D_2D_3^2\right]\left(D_1+D_2\right)^2D_3,\\&\Gamma_{00}=\left\{2\left(J_3-2J_1\right)^2\left[J_3\left(D_1+D_2\right)-2J_1D_3\right]P^2+\right.\\&\left.+\left[J_1\left(\left(D_1-D_2\right)^2-\left(D_1+D_2\right)D_3\right)+2J_3D_1D_2\right]\left(D_1+D_2\right)D_3^2\right\}P^2,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{11}=\Big\{(J_3-2J_1)\Big[J_1\big(2(D_2-D_1)D_3+5(D_1+6D_2)D_1+D_2^2\big)-J_3D_1(D_1+D_2)\Big]P^2-\\
&-(D_1+D_2)D_1^2D_2D_3^2\Big\},\\
&\Gamma_{01}=2\Big\{(J_3-2J_1)\big[(J_3-4J_1)(J_3D_1-2J_1D_3)-2J_1J_3D_2\big]P^2+\\
&+\big[J_1\big((D_1-D_2)D_1-(D_1+D_2)D_3\big)+J_3D_1D_2\big]D_1D_3^2\Big\}P^2,\ \Gamma_{22}=J_1D_1D_2D_3^3,\\
&\Gamma_{12}=\Big\{2\big[(J_3-3J_1)D_1-J_1D_2\big]D_3+\big[(3J_3-8J_1)D_1+(J_3-4J_1)D_2\big]D_1\Big\}J_1D_3P^2,\\
&\Gamma_{02}=\Big\{2\big[J_3(2J_3-5J_1)D_1-2J_1(2J_3-5J_1)D_3+J_1J_3D_2\big]P^2-\\
&-(D_3+D_2-D_1)D_1^2D_3^2\Big\}J_1P^2,\\
&\Gamma_{13}=2J_1^2(D_3-D_1)D_1D_3P^2,\ \Gamma_{03}=2J_1^2(J_3D_1-2J_1D_3)P^4,\\
&p_{40}=2(J_3-2J_1)^2\big[J_3(D_1+D_2)-2J_1D_3\big],\\
&p_{20}=\Big\{\big[J_1(D_1-D_2)^2+2J_3D_1D_2\big]D_3-\big[(J_3-2J_1)^2\Gamma+J_1D_3^2\big](D_1+D_2)\Big\}(D_1+D_2)D_3,\\
&p_{00}=-(D_1+D_2)^2D_1D_2D_3^2\Gamma,\\
&p_{41}=2(J_3-2J_1)\Big\{J_3\big[J_3D_1-2J_1(2D_1+D_2)\big]-2J_1(J_3-4J_1)D_3\Big\},\\
&p_{21}=\Big\{(J_3-2J_1)\big[2J_1(D_2-D_1)D_3+J_1D_2^2-(J_3-6J_1)D_1D_2-(J_3-5J_1)D_1^2\big]\Gamma+\\
&+2\big[J_3D_1D_2+J_1\big((D_1-D_2)D_1-(D_1+D_2)D_3\big)\big]D_1D_3\Big\}D_3,\ p_{01}=-(D_1+D_2)D_1^2D_2D_3^2\Gamma,\\
&p_{42}=-2J_1\Big\{J_3\big[(2J_3-5J_1)D_1-J_1D_2\big]-2J_1(2J_3-5J_1)D_3\Big\},\\
&p_{22}=-\Big\{\big[2\big(J_1D_2+(J_3-3J_1)D_1\big)D_3-(J_3-4J_1)D_1D_2-(3J_3-8J_1)D_1^2\big]\Gamma+\\
&+(D_3+D_2-D_1)D_1^2D_3\Big\}J_1D_3,\ p_{02}=J_1D_1D_2D_3^2\Gamma^2,\ \ p_{43}=2J_1{}^2(J_3D_1-2J_1D_3),\\
&p_{23}=2J_1^2(D_3-D_1)D_1D_3\Gamma.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

З точністю до першого порядку малості динамічного дебалансу ε нерівність (14) отримує вигляд

$$\Gamma_{10}\Gamma+\Gamma_{00}+(\Gamma_{11}\Gamma+\Gamma_{01})\varepsilon=p_{40}P^4+p_{20}P^2+p_{00}+\left(p_{41}P^4+p_{21}P^2+p_{01}\right)\varepsilon>0. \tag{16}$$

Таким чином, з точністю до першого порядку малості динамічного дебалансу система нерівностей (12) – (14) буде представлена у вигляді нерівностей (12), (13) і (16), де значення коефіцієнтів $\Gamma_{10},\Gamma_{00},\Gamma_{11},\Gamma_{01},p_{40},p_{20},p_{00},p_{41},p_{21},p_{01}$ наведено в (15).

Нерівності (12) і (14) з точністю до другого порядку малості відносно $P/P_0\left(|P/P_0|\ll 1\right)$, де P_0 – характерне значення постійного моменту, запишуться так:

$$D_3^2\Gamma^2+2(J_1-J_3)P^2\Gamma+(D_3-D_1)(D_3-D_2)P^2-\Gamma J_1P^2\varepsilon>0, \tag{17}$$

$$p_{20}P^2+p_{00}+\left(p_{21}P^2+p_{01}\right)\varepsilon+\left(p_{22}P^2+p_{02}\right)\varepsilon^2+p_{23}\varepsilon^3>0. \tag{18}$$

Таким чином, з точністю до другого порядку малості постійного моменту система нерівностей (12) – (14) буде представлена у вигляді нерівностей (17), (16) і (18), де значення коефіцієнтів $p_{20},p_{00},p_{21},p_{01},p_{22},p_{02},p_{23}$ приведені в (15).

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2022-4-2-6-18

Нерівності (12) і (14) з точністю до першого порядку малості відносно $\Gamma/\Gamma_0\left(\left|\Gamma/\Gamma_0\right|\ll 1\right)$ де Γ_0 – характерне значення постійного моменту, отримають вигляд:

$$2\left(J_1-J_3\right)D_3^2\Gamma+\left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_2\right)D_3^2+\left(J_3-J_1\right)^2P^2+ \\ +\left[\left(J_1-J_3\right)P^2-D_3^2\Gamma\right]J_1\varepsilon>0, \tag{19}$$

$$\Gamma_{10}\Gamma+\Gamma_{00}+\left(\Gamma_{11}\Gamma+\Gamma_{01}\right)\varepsilon+\left(\Gamma_{12}\Gamma+\Gamma_{02}\right)\varepsilon^2+\left(\Gamma_{13}\Gamma+\Gamma_{03}\right)\varepsilon^3>0\,. \tag{20}$$

Таким чином, з точністю до першого порядку малості відносно Γ/Γ_0 система нерівностей (12) – (14) буде представлена у вигляді нерівностей (19), (13) і (20), де значення коефіцієнтів $\Gamma_{10},\Gamma_{00},\Gamma_{11},\Gamma_{01},\Gamma_{12},\Gamma_{02},\Gamma_{13},\Gamma_{03}$ наведено в (15).

У випадку відсутності дисипативное несиметрії $\left(D_2=D_1\right)$ система нерівностей (12) – (14) спрощується і записується наступним чином:

$$\left(\Gamma D_3^2-(J_3-J_1)P^2\right)^2+\left(D_3-D_1\right)^2D_3^3P^2+\tilde{a}_0\varepsilon=D_3^4\Gamma^2+2(J_1-J_3)D_3^2P^2\Gamma+ \\ +\left(D_3-D_1\right)^2D_3^2P^2+\left(J_3-J_1\right)^2P^4+\left[\left(J_1-J_3\right)P^2-D_3^2\Gamma\right]J_1P^2\varepsilon>0, \tag{21}$$

$$2D_1D_3^2\Gamma<2\left[J_1D_1+\left(J_3-2J_1\right)D_3\right]P^2+J_1\left(D_1-2D_3\right)P^2\varepsilon\,, \tag{22}$$

$$\Gamma_{10}\Gamma+\Gamma_{00}+\left(\Gamma_{11}\Gamma+\Gamma_{01}\right)\varepsilon+\left(\Gamma_{22}\Gamma^2+\Gamma_{12}\Gamma+\Gamma_{02}\right)\varepsilon^2+\left(\Gamma_{13}\Gamma+\Gamma_{03}\right)\varepsilon^3= \\ =p_{40}P^4+p_{20}P^2+p_{00}+\left(p_{41}P^4+p_{21}P^2+p_{01}\right)\varepsilon+\left(p_{42}P^4+p_{22}P^2+p_{02}\right)\varepsilon^2+ \\ +\left(p_{43}P^2+p_{23}\right)P^2\varepsilon^3>0. \tag{23}$$

Тут

$$\begin{gathered}
\tilde{a}_0=\left[D_3^2\Gamma-\left(J_3-J_1\right)P^2\right]J_1P^2\,, \\
\Gamma_{10}=4\left\{\left[2J_1\left(J_3-4J_1\right)D_3-J_3\left(J_3-6J_1\right)D_1\right]\left(J_3-2J_1\right)P^2+\left(2J_1D_3-J_3D_1\right)D_1^2D_3^2\right\}P^2, \\
\Gamma_{00}=4\left(J_3D_1-J_1D_3\right)\left[\left(J_3-2J_1\right)^2P^2+D_1^2D_3^2\right]P^2\,, \\
\Gamma_{11}=-2\left[\left(J_3-2J_1\right)\left(J_3-6J_1\right)P^2+D_1^2D_3^2\right]D_1^2D_3\,, \\
\Gamma_{01}=4\left\{\left[J_3\left(J_3-2J_1\right)\left(J_3-6J_1\right)D_1-2J_1\left(J_3-2J_1\right)\left(J_3-4J_1\right)D_3\right]P^2+\right. \\
\left.+\left(J_3D_1-2J_1D_3\right)D_1^2D_3^2\right\}P^2, \\
\Gamma_{22}=J_1D_1^2D_3^3,\ \Gamma_{12}=2\left[2\left(J_3-3J_1\right)D_1-\left(J_3-2J_1\right)D_3\right]J_1D_1D_3P^2\,, \\
\Gamma_{02}=\left\{4\left[J_1\left(2J_3-5J_1\right)D_3-J_3\left(J_3-3J_1\right)D_1\right]P^2-D_1^2D_3^2\right\}J_1P^2\,, \\
\Gamma_{13}=2J_1^2\left(D_3-D_1\right)D_1D_3P^2,\Gamma_{03}=2J_1^2\left(J_3D_1-2J_1D_3\right)P^4\,, \\
p_{40}=4\left(J_3-2J_1\right)^2\left(J_3D_1-J_1D_3\right),\ p_{20}=4\left[\left(J_3D_1-J_1D_3\right)D_3-\left(J_3-2J_1\right)^2\Gamma\right]D_1^2D_3\,, \\
p_{00}=-4D_1^4D_3^3\Gamma,\ p_{41}=2\left(J_3-2J_1\right)\left[J_3\left(J_3-6J_1\right)D_1-2J_1\left(J_3-4J_1\right)D_3\right], \\
p_{21}=2\left[\left(J_3D_1-2J_1D_3\right)D_3-\left(J_3-2J_1\right)\left(J_3-6J_1\right)\Gamma\right]D_1^2D_3,\ p_{01}=p_{00}/2\,, \\
p_{42}=4J_1\left[J_1\left(2J_3-5J_1\right)D_3-J_3\left(J_3-3J_1\right)D_1\right], \\
p_{22}=J_1\left\{2\left[2\left(J_3-3J_1\right)D_1-\left(J_3-2J_1\right)D_3\right]\Gamma-D_1D_3^2\right\}D_1D_3,\ p_{02}=J_1D_1^2D_3^3\Gamma^2\,, \\
p_{43}=2J_1^2\left(J_3D_1-2J_1D_3\right),\ p_{23}=2J_1^2\left(D_3-D_1\right)D_1D_3\Gamma\,.
\end{gathered} \tag{24}$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2022-4-2-6-18

4 ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ СТІЙКОСТІ (12) – (14), (16) – (20) І (21) – (23)

Із нерівностей (13) випливає, що при дії перекидального моменту $(\Gamma > 0)$ стійкість буде неможлива, коли $J_1(D_1+D_2)+2\left(J_3-2J_1\right)D_3<0$, $D_1<2D_3$ при $\varepsilon>0$ і $D_1>2D_3$ при $\varepsilon<0$.

Із нерівностей $(12)-(14)$ слід, що для досить малих значеннях динамічному дебалансу ε $(\varepsilon \ll 1)$ при

$$\begin{gathered}\left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_2\right)>0,\ (D_1+D_2)D_3^2\Gamma<\left[J_1(D_1+D_2)+2\left(J_3-2J_1\right)D_3\right]P^2,\\ \Gamma_{10}\Gamma+\Gamma_{00}>0 \text{ або } p_{40}P^4+p_{20}P^2+p_{00}>0\end{gathered} \tag{25}$$

рівномірне обертання твердого тіла буде стійким. С точністю до другого порядку малості постійного моменту P/P_0 будемо мати наступні достатні умови стійкості:

$$\begin{gathered}\left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_2\right)>0,\ (D_1+D_2)D_3^2\Gamma<\left[J_1(D_1+D_2)+2\left(J_3-2J_1\right)D_3\right]P^2,\\ p_{20}P^2+p_{00}>0.\end{gathered} \tag{26}$$

Із нерівності (12) слід, що для $\left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_2\right)<0$ при досить великому динамічному дебалансу ε $(\varepsilon>0)$ і $\Gamma<\left(J_3-J_1\right)P^2/D_3^2$ рівномірне обертання твердого тіла буде нестійким. Дане твердження також буде дійсним і при $\left(D_3-D_1\right)\left(D_3-D_2\right)\geq 0$. У запас стійкості також не йде випадок $-1<\varepsilon<0$ і $\Gamma>\left(J_3-J_1\right)P^2/D_3^2$.

Із нерівності (13) також випливає, що для $J_1(D_1+D_2)+2\left(J_3-2J_1\right)D_3<0$ при досить великому динамічному дебалансу ε $(\varepsilon>0)$ і $D_1<2D_3$ обертання твердого тіла буде нестійким. Дане твердження також буде дійсним і при $J_1(D_1+D_2)+$ $+2\left(J_3-2J_1\right)D_3\geq 0$. У запас стійкості не йде випадок $-1<\varepsilon<0$ і $D_1>2D_3$.

Нерівність (14) включає в собі більш складний, ніж на нерівності (12) і (13) вплив динамічного дебалансу і має третій порядок малості або більшості відповідно ε. При $\Gamma_{10}\Gamma+\Gamma_{00}<0$ і досить малому значенні ε $(\varepsilon>0)$ і $\Gamma_{11}\Gamma+\Gamma_{01}<0$, а також при $\varepsilon<0$ і $\Gamma_{11}\Gamma+\Gamma_{01}>0$ рівномірне обертання твердого тіла буде нестійким. Дане твердження також буде дійсним тільки при $\Gamma_{10}\Gamma+\Gamma_{00}<0$. При досить великому значенні ε $(\varepsilon>0)$ і $\Gamma_{13}\Gamma+\Gamma_{03}<0$ $\left(p_{43}P^2+p_{23}<0\right)$ також винукає нестійкість. Для $\Gamma>0$ це може бути при $2J_1D_3/J_3<D_1<D_3$, тобто коли $2J_1<J_3$, а для $\Gamma<0$ – при $D_1<D_3$ і $2J_1D_3/J_3<D_1$. У запас стійкості також не йде випадок $-1<\varepsilon<0$ і $\Gamma_{13}\Gamma+\Gamma_{03}>0$ $\left(p_{43}P^2+p_{23}>0\right)$.

При відсутності несиметрії $\left(D_2=D_1\right)$, згідно (21) – (24), умови стійкості (25) і (26) відповідно отримують вигляд:

$$\begin{gathered}D_1D_3^2\Gamma<\left[J_1D_1+\left(J_3-2J_1\right)D_3\right]P^2>0,\\ \left(J_3-2J_1\right)^2\left(J_3D_1-J_1D_3\right)P^4+\\ +\left[\left(J_3D_1-J_1D_3\right)D_3-\left(J_3-2J_1\right)^2\Gamma\right]D_1^2D_3P^2-D_1^4D_3^3\Gamma>0,\end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{gathered}D_1D_3^2\Gamma<\left[J_1D_1+\left(J_3-2J_1\right)D_3\right]P^2>0,\\ \left[\left(J_3D_1-J_1D_3\right)D_3-\left(J_3-2J_1\right)^2\Gamma\right]P^2-D_1^2D_3^2\Gamma>0.\end{gathered} \tag{28}$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2022-4-2-6-18

При діє відновлювального моменту $(\Gamma < 0)$ достатньою умовою для виконання нерівностей (27) і (28) є відома умова для симетричного твердого тіла [3]

$$J_3 D_1 - J_1 D_3 > 0. \tag{29}$$

5 СТІЙКОСТІ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО ЦЕНТРУ МАСС $(\Gamma = 0)$

В цьому випадку система нерівностей (12) – (14) отримає вигляд:

$$(J_3 - J_1)^2 P^2 + \left(D_3 - D_1\right)\left(D_3 - D_2\right) D_3^2 + J_1 (J_1 - J_3) P^2 \varepsilon > 0, \tag{30}$$

$$J_1 (D_1 + D_2) + 2\left(J_3 - 2J_1\right) D_3 + J_1 (D_1 - 2D_3)\varepsilon > 0, \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\Gamma}_{00} + \tilde{\Gamma}_{01}\varepsilon + \tilde{\Gamma}_{02}\varepsilon^2 + \tilde{\Gamma}_{03}\varepsilon^3 = p_{40}P^2 + p_{20} + \left(p_{41}P^2 + p_{21}\right)\varepsilon + \\ &+\left(p_{42}P^2 + p_{22}\right)\varepsilon^2 + p_{43}P^2\varepsilon^3 > 0, \end{aligned} \tag{32}$$

де $\tilde{\Gamma}_{0i} = \Gamma_{0i} / P^2$, а значення коефіцієнтів $\Gamma_{00}, \Gamma_{01}, \Gamma_{02}, \Gamma_{03}$ і $p_{40}, p_{20}, p_{41}, p_{21}, p_{42}, p_{22}, p_{43}$ приведені в (15).

Із нерівностей (30) – (32) слід, що для досить малих значеннях динамічного дебалансу ε $(\varepsilon \ll 1)$ при

$$\begin{aligned} &\left(D_3 - D_1\right)\left(D_3 - D_2\right) > 0,\ J_1(D_1 + D_2) + 2\left(J_3 - 2J_1\right) D_3 > 0, \\ &2\left(J_3 - 2J_1\right)^2 \left[J_3\left(D_1 + D_2\right) - 2J_1 D_3\right] P^2 + \\ &+\left[J_1\left(\left(D_1 - D_2\right)^2 - \left(D_1 + D_2\right) D_3\right) + 2J_3 D_1 D_2\right]\left(D_1 + D_2\right) D_3^2 > 0, \end{aligned} \tag{33}$$

рівномірне обертання твердого тіла буде стійким. С точністю до другого порядку малості постійного моменту P/P_0 будемо мати наступні достатні умови стійкості:

$$\left(D_3 - D_1\right)\left(D_3 - D_2\right) > 0,\ J_1(D_1 + D_2) + 2\left(J_3 - 2J_1\right) D_3 > 0,\ \ p_{20}P^2 + p_{00} > 0. \tag{34}$$

Із нерівності (30) слід, що при досить великому динамічному дебалансу ε $(\varepsilon > 0)$ і $J_3 > J_1$ рівномірне обертання твердого тіла буде нестійким. У запас стійкості також не йде випадок $-1 < \varepsilon < 0$ і $J_3 < J_1$.

Із нерівності (31) також випливає, що при досить великому динамічному дебалансу ε $(\varepsilon > 0)$ і $D_1 < 2D_3$ обертання твердого тіла буде нестійким. У запас стійкості також не йде випадок $-1 < \varepsilon < 0$ і $D_1 > 2D_3$.

Нерівність (32), як і раніше, має третій порядок малості або більшості відповідно ε. При $\Gamma_{00} < 0$ і досить малому значенні ε $(\varepsilon > 0)$ і $\Gamma_{01} < 0$, а також для $\varepsilon < 0$ і $\Gamma_{01} > 0$ винукає нестійкість. При досить великому значенні ε $(\varepsilon > 0)$ і $\Gamma_{03} < 0$ рівномірне обертання твердого тіла також буде нестійким. У запас стійкості не йде випадок $-1 < \varepsilon < 0$ і $\Gamma_{03} > 0$.

При відсутності дисипативної несиметрії $\left(D_2 = D_1\right)$, згідно (23) – (24), умови стійкості (30) – (32) отримають вигляд:

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2022-4-2-6-18

$$\left(J_3-J_1\right)^2 P^2+\left(D_3-D_1\right)^2 D_3^2+J_1\left(J_1-J_3\right)P^2\varepsilon>0,$$
$$2J_1D_1+2\left(J_3-2J_1\right)D_3+J_1\left(D_1-2D_3\right)\varepsilon>0,$$
$$\tilde{\Gamma}_{00}+\tilde{\Gamma}_{01}\varepsilon+\tilde{\Gamma}_{02}\varepsilon^2+\tilde{\Gamma}_{03}\varepsilon^3=p_{40}P^2+p_{20}+\left(p_{41}P^2+p_{21}\right)\varepsilon+\left(p_{42}P^2+p_{22}\right)\varepsilon^2+p_{43}P^2\varepsilon^3>0,$$

де значення коефіцієнтів $\Gamma_{00},\Gamma_{01},\Gamma_{02},\Gamma_{03}$ і $p_{40},p_{20},p_{41},p_{21},p_{42},p_{22},p_{43}$ приведены в (19). В цьому випадку умови стійкості (33) і (34) відповідно запишутся наступним чином:

$$J_1D_1+\left(J_3-2J_1\right)D_3>0,\;\; J_3D_1-J_1D_3>0\,, \tag{35}$$
$$J_3D_1-J_1D_3>0\,. \tag{36}$$

Для виконання нерівностей (35) достатньо, щоб виконувалась нерівність $J_3>2J_1$ і відома нерівність (29), а для нерівності (36) тільки нерівність (29).

Як вже було раніше зазначено, що при $\Gamma_{00}<0$ і досить малому значенні ε $(\varepsilon>0)$ і $\Gamma_{01}<0$, а також для $\varepsilon<0$ і $\Gamma_{01}>0$ винукає нестійкість. Із співвідношень (19) $\left(D_2=D_1\right)$ при $\varepsilon>0$, $4J_1<J_3<6J_1$ і $J_3D_1-2J_1D_3<0$ маємо $\Gamma_{00}<0$ і $\Gamma_{01}<0$. Варіант $\Gamma_{00}<0$, $\varepsilon<0$ і $\Gamma_{01}>0$ неможлив. Таким чином, при досить малому значенні динамічного дебалансу рівномірне обертання твердого тіла навколо центру мас буде нестійким при $4J_1<J_3<6J_1$ і $J_3<J_1D_3/D_1$.

6 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

На підставі проведених аналітичних досліджень впливу динамічного дебалансу, відновлювального і перекидального моменту на умови асимптотичої стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором несиметричного твердого тіла можна зробити наступні висновки:

1. Умови асимптотичої стійкості представлені у вигляді системи трьох нерівностей. Перша і друга нерівність мають першу ступень відносно динамічного дебалансу, а третья нерівність – третью ступень. Перша і третя нерівність мають другий ступінь щодо перекидального або відновлювального моментів, а друга нерівність – перший ступінь. Перша та третя нерівність мають четвертий ступінь відносно постійного моменту, а друга нерівність має другий ступінь. Найбільш складною для дослідження є третя нерівність.
2. При дії перекидального моменту стійкість буде неможлива, коли $J_1(D_1+D_2)+$ $+2\left(J_3-2J_1\right)D_3<0$, $D_1<2D_3$ при $\varepsilon>0$ і $D_1>2D_3$ при $\varepsilon<0$.
3. Отримані умови асимптотичої стійкості при досить малих значеннях динамічному дебалансу. Виписані достатні умови стійкості с точністью до другого порядку малості постійного моменту.
4. Отримані умови нестійкості при досить великому динамічному дебалансі.
5. Виписані і досліджені умови стійкості і нестійкості при відсутності дисипативної несиметрії. Показано, що при діє відновлювального моменту достатньою умовою стійкості є відома умова для симетричного твердого тіла $J_3D_1-J_1D_3>0$.
6. Досліджено вплив динамічного дебалансу на умови стійкості обертання твердого тіла навколо центру масс. Виписані і досліджені умови стійкості і нестійкості при відсутності дисипативної несиметрії. Так, наприклад, було показано, що при досить малому значенні динамічного дебалансу рівномірне обертання твердого тіла буде нестійким при $4J_1<J_3<6J_1$ і $J_3<J_1D_3/D_1$.

Література

1. Савченко А. Я., Болграбская И. А., Кононыхин Г. А. Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел. К.: Наук. Думка, 1991. 166 с.
2. Болграбская И. А., Лесина М. Е., Чебанов Д. А. Динамика систем связанных твёрдых тел. Серия “Задачи и методы: математика, механика, кибернетика”. ИПММ НАН Украины. К.: Наукова Думка, 2012. Т. 9. 395 с.
3. Карапетян А. В., Лагутина И. С. О влиянии диссипативного и постоянного моментов на вид и устойчивость стационарных движений волчка Лагранжа. Изв. РАН. Механика твёрдого тела, 1998. №5. С.29–33.
4. Карапетян А. В., Лагутина И. С. Об устойчивости равномерных вращений волчка, подвешенного на струне, с учетом диссипативного и постоянного моментов. Изв. РАН. Механика твёрдого тела, 2000. №1. С.53–57.
5. Кононов Ю. М. Про стійкість рівномірного обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опором під дією постійного моменту. Прикл. Механіка, 2021. Т. 57. № 4. С. 68–77.
6. Kononov Yu. M. Stability of a Uniform Rotation of an Asymmetric Rigid Body in a Resisting Medium. International applied mechanics. A translation of Prikladnaya Mekhanika, 2021. 57**(**4). P. 432–439. DOI: 10.1007r/s10778-021-01095-1.
7. Кононов Ю. М., Довгоший О. А., Чеіб А. Х. Про стійкість рівномірного обертання у середовищі з опором несиметричного твердого тіла під дією постійного моменту у інерціальній системі відліку. Механіка та математичні методи, 2022. IV. № 1. С. 6–22.
8. Кононов Ю. М., Чеіб А. Х. Про стійкість рівномірних обертань у середовищі з опором несиметричних і симетричних твердих тіл під дією постійних моментів. Праці ІПММ НАН України, 2022. Т. 36. С. 11 –25.
9. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer, 2017. 260 p.
10. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque. J. Appl. Comput. Mech, 2022. P. 1–9.
11. Leshchenko D.D., Ershkov S.V., Kozachenko Evolution of motion of a rigid body similar to Lagrange top under the influence of slowly time varying torques. Proc IMechE Part C: J Mechanical Engineering Scienc, 2022. 236(22). P. 10879–10890.
12. Leshchenko D. Perturbed rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid subject to constant body fixed torques. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2023. 148. 104284.

References

1. Savchenko, A. Ya., Bolgrabskaya, I. A., Kononyhin, G. A. (1991). *Ustojchivost’ dvizheniya sistem svyazannyh tvyordyh tel* [Stability of motion of systems of coupled rigid bodies]. K.: Nauk. Dumka. [in Russian].
2. Bolgrabskaya, I. A., Lesina, M. E., Chebanov, D. A. (2012). *Dinamika sistem svyazannyih tvyordyih tel* [Dynamics of systems of bound rigid bodies]. Seriya “Zadachi i metodyi: matematika, mehanika, kibernetika”. K.: Nauk. Dumka. 9. [in Russian].
3. Karapetyan, A. V., Lagutina, I. S. (1998). O vliyanii dissipativnogo i postoyannogo momentov na vid i ustoychivost statsionarnyih dvizheniy volchka Lagranzha [On the influence of dissipative and constant moments on the appearance and stability of stationary movements of the Lagrange top]. *Izv. RAN. Mehanika tvyordogo tela*. 5. 29–33 [in Russian].
4. Karapetyan ,A. V., Lagutina, I. S. (2000). Ob ustoychivosti ravnomernyih vrascheniy volchka, podveshennogo na strune, s uchetom dissipativnogo i postoyannogo momentov [On the stability of uniform rotations of a top suspended on a string, taking into account the dissipative and constant moments]. *Izv. RAN. Mehanika tvYordogo tela*. 1. 53–57. [in Russian].
5. Kononov, Yu. M. (2021). Pro stiikist rivnomirnoho obertannia nesymetrychnoho tverdoho tila u seredovyshchi z oporom pid diieiu postiinoho momentu [On the stability of uniform rotation of an asymmetric solid body in a medium with resistance under the action of a constant torque]. *Prykl. Mekhanika*. 57(4). 68–77. [in Ukranian].

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2022-4-2-6-18

6. Kononov, Yu. M. (2021). Stability of a Uniform Rotation of an Asymmetric Rigid Body in a Resisting Medium. *International applied mechanics*. *A translation of Prikladnaya Mekhanika*. 57(4). 432–439. DOI: 10.1007/s10778-021-01095-1.
7. Kononov, Yu. M., Dovgoshey, O. A., Cheib, A. K. (2022). Pro stiikist rivnomirnoho obertannia u seredovyshchi z oporom nesymetrychnoho tverdoho tila pid diieiu postiinoho momentu u inertsialnii systemi vidliku [On the stability of uniform rotation in a medium with resistance of an asymmetric solid body under the action of a constant moment in an inertial frame of reference]. *Mekhanika ta matematichni metody*. IV(1). 6–22. [in Ukranian].
8. Kononov, Yu. M., Cheib, A. K. (2022). Pro stiikist rivnomirnoho obertannia u seredovyshchi z oporom nesymetrychnykh i symetrychnykh tverdykh til pid diieiu postiinykh momentiv [On the stability of uniform rotations in a medium with resistance of asymmetric and symmetric solids under the action of constant moments]. *Pratsi IPMM NAN Ukrainy*. 36. 11 –25. [in Ukranian].
9. Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D. (2017). *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*. Springer.
10. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2022). Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque. *J. Appl. Comput. Mech*. 1–9.
11. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2022). Evolution of motion of a rigid body similar to Lagrange top under the influence of slowly time varying torques. *Proc IMechE Part C: J Mechanical Engineering Scienc*. 236(22). 10879–10890.
12. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2023). Perturbed rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid subject to constant body fixed torques. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 148. 104284.

Кононов Юрій Микитович
Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України
д.ф.-м.н., професор
вул. Добровольського, 1, Слов’янськ, Україна, 84100
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1609-0253
Чеіб Акрам Халіл
Донецький національний університет імені Василя Стуса,
здобувач
вул. 600 - річчя, 21, м.Вінниця, Україна, 21021
akram_cheaib@hotmail.com
ORCID: 0000-0001-8311-7682

Для посилань:
Кононов Ю. М., Чеіб А. Х. Вплив динамічної несиметрії на стійкість обертання у середовищі з опором твердого тіла під дією постійного моменту у інерціальній системі відліку. Механіка та математичні методи, 2022. Т. 4. № 2. С. 6–18.

For references:
Kononov Yu. M., Cheib A. K. (2022). Influence of dynamic asymmetry on the rotation stability in a resisting medium of a asymmetric rigid body under the action of a constant moment in inertial reference frame. Mechanics and Mathematical Methods. 4 (2). 6–18.