

ISSN 2618-0650 (Print)  
ISSN 2664-1364 (Online)

---

**Механіка**



**та математичні методи**

---

**Mechanics  
and Mathematical Methods**

**Науковий журнал  
The scientific journal**

**VIII/1/2026**

УДК 531 : 51-7 (05)  
М55

# МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

Науковий журнал



Засновник і видавець:

**Одеська державна академія будівництва та архітектури**

**Том VIII**  
**№1**  
**2026**

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: Серія КВ №23478–13318 Р від 13.07.2018 р.

Рішення Національної ради №1162 від 26.10.2023 р.,  
протокол №24; ідентифікатор медіа: R30-01810

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
Серія ДК №4515 від 01.04.2013 р.

**М55**      **Механіка та математичні методи** : науковий журнал. — Одеса : ОДАБА, 2026. —  
Том VIII. — №1. — 172 с.

В науковому журналі публікуються статті і огляди за спеціальностями:

- E7 Математика;
- E8 Статистика;
- F1 Прикладна математика;
- F2 Інженерія програмного забезпечення;
- F3 Комп'ютерні науки;
- F4 Системний аналіз та наука про дані;
- G9 Прикладна механіка;
- G19 Будівництво та цивільна інженерія.

---

**Рекомендовано до друку Вченою радою Одеської державної академії будівництва та архітектури, протокол №3 від 26.02.2026 р.**

---

**Адреса:**    редакція журналу «Механіка та математичні методи»  
Одеська державна академія будівництва та архітектури  
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна, 65029

**Телефони:** (048)7234937, (048)7323402, (048)7298563

**E-mail:** mmm@odaba.edu.ua

**Web:** mmm-journal.com.ua

---

УДК 531 : 51-7 (05)  
М55

ISSN 2618-0650 (Print)  
ISSN 2664-1364 (Online)

Одеська державна академія  
будівництва та архітектури, 2025

---

## Редакційна колегія:

**Головний редактор:** Ковров А. В., к.т.н., проф., ректор Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

**Заступники головного редактора:**

Крутий Ю. С., д.т.н., проф., професор кафедри інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

Сур'янінов М. Г., д.т.н., проф., завідувач кафедри будівельної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

**Відповідальний секретар:** Кіосак В. А., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;

- Бербюк В. Є., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри механіки та морських наук, Технічний університет Чалмерса, Гетеборг, Швеція;
- Ватуля Г. Л., д.т.н., проф., професор кафедри будівельної механіки та гідравліки Українського державного університету залізничного транспорту, Харків, Україна;
- Горик О. В., д.т.н., проф., професор кафедри будівництва та професійної освіти Полтавської державної аграрної академії, Полтава, Україна;
- Куріазопоулос А., к.т.н., доц., професор кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Кода Е., д.т.н., проф., декан факультету будівництва та інженерії середовища Варшавського природничого університету, Варшава, Польща;
- Кононов Ю. М., д.ф.-м.н., проф., завідувач відділу теорії керуючих систем інституту прикладної математики та механіки НАН України, Слав'янск, Україна;
- Кучер М. К., д.т.н., проф., завідувач відділу конструкційних матеріалів інституту проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна;
- Лазарева Д. В., к.т.н., доцент кафедри динаміки машин та механічної інженерії національного університету «Одеська політехніка», Одеса, Україна;
- Лесечко О. В., к.ф.-м.н., доц., завідувач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Лещенко Д. Д., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри теоретичної механіки Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Ляшенко Т. В., д.т.н., проф., професорка кафедри процесів та апаратів в технології будівельних матеріалів Одеської державної академії будівництва та архітектури, Одеса, Україна;
- Максимович О. В., д.т.н., проф., професорка кафедри зварювального виробництва, діагностики та відновлення металоконструкцій Національного університету "Львівська політехніка", Львів, Україна;
- Мікуліч О. А., д.т.н., проф., завідувачка кафедри прикладної математики та механіки Луцького національного технічного університету, Луцьк, Україна;
- Отрош Ю. А., д.т.н., проф., начальник кафедри пожежної профілактики в населених пунктах Національного університету цивільного захисту України, Харків, Україна;
- Пастернак Я. М., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри комп'ютерних наук та кібербезпеки Волинського національного університету імені Лесі Українки, Луцьк, Україна;
- Пневматікос Н., к.т.н., доц., доцент кафедри будівництва, Університет Західної Аттики, Афіни, Греція;
- Савченко О. Г., д.ф.-м.н., проф., професор кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету, Херсон, Україна;
- Трач В. М., д.т.н., проф., завідувач кафедри мостів і тунелів, опору матеріалів і будівельної механіки Національного університету водного господарства та природокористування, Рівне, Україна.

**Видавничий редактор:** Теорло Наталя Анатоліївна, асистент кафедри інформаційних технологій та прикладної математики

**Технічний редактор:** Гедулян Сергій Іванович, к.т.н., доцент кафедри процесів та апаратів в технології будівельних матеріалів

**Лінгвістичний радник з англійської мови:** Мар'яно Яніна Георгіївна, к.ф.н, доц.,  
в.о. завідувачки кафедрою мовної підготовки та міжнародних комунікацій

---

## The composition of the editorial board:

**Chief Editor:** A. Kovrov, Ph.D., Professor, Rector of Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;

**Deputy Chief Editor:**

Yu. Krutii, Doctor of Technical Science, Professor, Professor of the Department of Information Technologies and Applied Mathematics of Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;

Suryaninov M., Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Mechanics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;

**Assistant Editor:** V. Kiosak, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Higher Mathematics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;

- V. Berbyuk, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor in Mechanical Systems, Division of Dynamics, Department of Mechanics and Maritime Sciences Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden;
- G. Vatulia, Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Structural Mechanics and Hydraulics Department, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine;
- O. Goryk, Doctor of Technical Science, Professor, Professor of the Department of Construction and Professional Education, Poltava State Agrarian Academy, Poltava, Ukraine;
- A. Kyriazopoulos, Ph.D., Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- E. Koda, Doctor of Technical Science, Professor, Dean of Construction and Environmental Engineering Faculty, University of Life Sciences, Warsaw, Poland;
- Y. Kononov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Control-system Theory Division, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Slavyansk, Ukraine;
- M. Kucher, Doctor of Technical Science, Professor, Head of Structural Materials Division, G. S. Pisarenko Institute for Problems of Strength, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine;
- D. Lazareva, Ph.D., Associate Professor of the Department of Machine Dynamics and Mechanical Engineering of the Odesa Polytechnic National University, Odesa, Ukraine;
- O. Lesechko, Ph.D., Associate Professor, Head of Higher Mathematics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;
- D. Leshchenko, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Theoretical Mechanics Department, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;
- T. Lyashenko, Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Processes and Devices in Construction Materials Technology, Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine;
- O. Maksymovych, Doctor of Technical Science, Professor, Professor of Department of Welding Engineering, Diagnostics and Rebuilding of Metal Structures, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine;
- O. Mikulich, Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Engineering Mechanics Department, Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine;
- Y. Otrosh, Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Civil Protection Service, National University of Civil Defence of Ukraine, Kharkiv, Ukraine;
- Y. Pasternak, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of the of Computer Science and Cyber Security, Lesya Ukrainka Volyn National University, Lutsk, Ukraine;
- N. Pnevmatikos, Ph.D., Associate Professor Department of Civil Engineering University of West Attica, Athens, Greece;
- O. Savchenko, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Algebra, Geometry and Mathematical Analysis Department, Kherson State University, Kherson, Ukraine;
- V. Trach, Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Bridges and Tunnels, Strength of Materials and Structural Mechanics, National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine.

**Publishing Editor:** Natalia Teorlo, Assistant Professor of the Department of Information Technologies and Applied Mathematics

**Technical Editor:** Serhii Hedulian, Ph.D., Associate Professor of the Department of Processes and Apparatuses in Building Materials Technology

**Linguistic Adviser in English language:** Yanina Marianko, Ph.D in Philology, Associate Professor, Head of the Department of Language Competence and International Communication Department of Foreign Languages

---

## ЗМІСТ

**Сур'янінов М. Г., Крутий Ю. С., Осадчий В. С., Сур'янінов В. М.,  
Константинов П. В.**

Механічні властивості фібробетону..... 6

**Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О., Лукашева Ю. М.**

Еволюція руху гіростата з рухомою масою під дією керуючого моменту ..... 17

**Пурденко Р. Р., Отрош Ю. А., Рашкевич Н. В.**

Оцінка надійності будівельних конструкцій під впливом вибухових навантажень..... 28

**Кровяков С. О., Шимченко П. В.**

Пошук оптимальних складів бетонів дорожніх покриттів і транспортних споруд з використанням вторинного щебеню покрововим скануванням полів властивостей.... 41

**Завгородня Г. А., Завгородній В. В.**

Метод генерації ігрового контенту за допомогою нейромереж..... 54

**Колесников А. В., Семенова С. В., Левицький Д. В.**

Багатокритеріальна оптимізація складів реставраційних композитів..... 69

**Ісаєв В. Ф., Пальчик С. С.**

Про модель розповсюдження сейсмовибухових хвиль ..... 84

**Човнюк Ю. В., Чередніченко П. П., Остапущенко О. П., Кравченко І. М.**

Аналіз просторово-часової хаотичної динаміки дискретно-континуальних систем з наявною структурно-еволюційною перебудовою ..... 95

**Вілінська Л. М., Бурдак Г. М.**

Дослідження електрорушійної системи  $AL-AL_2O_3$  - електроліт ..... 108

**Бекірова М. М.**

Вплив повзучості та старіння на стійкість стрижнів..... 116

**Кравченко О. В., Онищенко О. С.**

Проблеми експлуатації аеросистем..... 125

**Олійник Н. В.**

Визначення впливу технологічних пошкоджень бетону на його призматичну міцність... 141

**Стахів Р. Ю.**

Аналіз мультимножинної розмірності в нечітких графах дільників нуля, пов'язаних з комутативними кільцями..... 151

**Ясельський А. Р.**

Дійсні суперсиметричні аналітичні функції та їх застосування до семетричних розподілів..... 162

---

## CONTENT

|  |     |
|--|-----|
| <b>M. Surianinov, Yu. Krutii, V. Osadchy, V. Surianinov, P. Konstantinov</b><br>Mechanical properties of fiber concrete .....  | 6   |
| <b>D. Leshchenko, T. Kozachenko, Yu. Lukasheva</b><br>Evolution of motion of a gyrostat with a moving mass under the action of a control moment ...  | 17  |
| <b>R. Purdenko, Yu. Otrosh, N. Rashkevich</b><br>Assessment of the reliability of building structures under the effect of explosive loads.....   | 28  |
| <b>S. Kroviakov, P. Shymchenko</b><br>Differentially driven wheeled robot constructed using lego mindstorms components.....  | 41  |
| <b>G. Zavorodnia, V. Zavorodnii</b><br>Method of game content generation using neural networks.....  | 54  |
| <b>A. Kolesnykov, S. Semenova, D. Levytskyi</b><br>Multi-criterion optimization of restorative composite compositions.....   | 69  |
| <b>V. Isaiev, S. Palchyk</b><br>On a model of seismic–explosive wave propagation.....  | 84  |
| <b>Yu. Chovnyuk, P. Cherednichenko, O. Ostapushchenko, I. Kravchenko</b><br>Analysis of spatial-temporal chaotic dynamics of discrete-continuous systems with structural-<br>evolutionary restructuring..... | 95  |
| <b>L. Vilinskaya, G. Burlak</b><br>Study of electromotive force of the system AL-AL <sub>2</sub> O <sub>3</sub> - electrolyte .....  | 108 |
| <b>M. Bekirova</b><br>Influence of density and aging on rod strength.....  | 116 |
| <b>O. Kravchenko, O. Onishchenko</b><br>Problems of aerosystem operation.....  | 125 |
| <b>N. Oliynyk</b><br>Determination of the influence of technological damage to concrete on its prism strength .....  | 141 |
| <b>R. Stakhiv</b><br>Analysis of multiset dimension in fuzzy zero-divisor graphs associated with commutative<br>rings.....   | 151 |
| <b>A. Yaselskyi</b><br>Real supersymmetric analytic functions and their applications to symmetric distributions.....   | 162 |

UDC 624.04

## MECHANICAL PROPERTIES OF FIBER CONCRETE

M. Surianinov<sup>1</sup>, Yu. Krutii<sup>1</sup>, V. Osadchy<sup>1</sup>, V. Surianinov<sup>1</sup>, P. Konstantinov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract:** The article describes and analyzes the results of systematic experimental studies of the strength of steel fiber concrete mixtures. Studies by domestic and foreign scientists show that steel fiber concrete has physical and mechanical characteristics that are significantly better than those of ordinary concrete. The bending and tensile strength increases, the shrinkage of the concrete mixture decreases, which prevents delamination, destruction of the cement-sand layer, the formation of cracks and chips. Impact resistance increases. There are quite a large number of publications in the world about steel fiber and its properties. These works touch on many aspects related to the production and use of steel fiber, including the choice of the composition of dispersed reinforced concrete. The characteristics of steel fiber concrete depend on a number of factors. However, different authors provide different quantitative estimates of their influence, so further research is needed.

In the process of work, the optimal characteristics of steel-fiber concrete mixtures were determined, and then the cubic and prismatic strength of fiber concrete under short-term and long-term loading was investigated. To solve these problems, 108 fiber concrete samples were tested: 54 with short-term loading (27 cubes 100x100x100 mm and 27 prisms 100x100x400 mm) and 54 with long-term loading (in the same proportion). At the same time, a batch of concrete samples of similar quantitative composition was tested. Compression tests of cubes from the same manufactured batch were carried out at the age of 28 days, and then at the age of 370 days. It was established that the development of deformations under long-term loading can be conditionally divided into three stages. At the first stage, accelerated deformation occurs. In the second stage, the deformation occurs at a conditionally constant rate, i.e. the growth of deformations is carried out almost according to a linear law. And in the third stage, the rate of growth of deformation almost approaches zero. Steel-fiber concrete prisms, which were subjected to long-term loading for 370 days, increased their bearing capacity, depending on the load level, by 30-50%.

**Keywords:** fiber reinforced concrete, long-term load, cubes, prisms, deformation

## МЕХАНІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ФІБРОБЕТОНУ

Сур'янінов М. Г.<sup>1</sup>, Крутій Ю. С.<sup>1</sup>, Осадчий В. С.<sup>1</sup>, Сур'янінов В. М.<sup>1</sup>,  
Константинов П. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація:** У статті описано та проаналізовано результати системних експериментальних досліджень міцності сталевіфробетонних сумішей.

Дослідження вітчизняних та зарубіжних вчених показують, що сталевіфробетон має фізико-механічні характеристики, які значно кращі, ніж у звичайного бетону. Збільшується міцність на вигин та розтяг, зменшується усадка бетонної суміші, що запобігає розшаруванню, руйнуванню цементно-піщаного шару, утворенню тріщин та сколів. Підвищується ударостійкість. У світі існує досить велика кількість публікацій про сталеву фібру та її властивості. У цих роботах порушується багато аспектів, пов'язаних з виробництвом та використанням сталевіфибри, включаючи вибір складу дисперсно-армованого бетону. Характеристики сталевіфробетону залежать від низки факторів. Однак різні автори надають різні кількісні оцінки їх впливу, тому необхідні подальші дослідження.

В процесі роботи було визначено оптимальні характеристики сталевіфробетонних сумішей, а потім досліджено кубічну та призматичну міцність фіробетону при короткочасному та тривалому навантаженні. Для вирішення цих завдань було випробувано 108 зразків фіробетону: 54 – з короткочасним прикладанням навантаження (27 кубів 100x100x100



мм та 27 призм 100x100x400 мм) та 54 – з тривалим навантаженням (в тій самій пропорції). Одночасно було випробувано партію зразків бетону аналогічного кількісного складу. Випробування кубів на стиск з тієї ж виготовленої партії проводилися у віці 28 днів, а потім у віці 370 днів. Встановлено, що розвиток деформацій при тривалому навантаженні умовно можна розділити на три стадії. На першій стадії відбувається прискорена деформація. На другому етапі деформація відбувається з умовно постійною швидкістю, тобто зростання деформацій здійснюється майже за лінійним законом. А на третьому етапі швидкість зростання деформації майже наближається до нуля. Призми зі сталевібробетону, які піддавалися тривалому навантаженню протягом 370 днів, збільшили несучу здатність, залежно від рівня навантаження, на 30-50%.

**Ключові слова:** фібробетон, тривале навантаження, куби, призми, деформація.

## 1 INTRODUCTION

Research by domestic and foreign scientists shows that steel fiber concrete has physical and mechanical characteristics that are significantly better than those of conventional concrete [1–4]. the strength in bending and stretching increases, shrinkage of the concrete mixture decreases, preventing delamination, destruction of the cement-sand layer, formation of cracks and chips. impact resistance increases. fiber-concrete structures have been widely used abroad for over a hundred years, and there is a positive experience of their effective use in domestic construction [5]. the designs can be made with both fiber and combination reinforcement when there is fiber and rod or wire reinforcement. the range of applications is very wide: monolithic structures - roads, transfer of coverings, industrial floors, leveling floors, bridge decks, irrigation channels, explosion-proof structures, dams, fireproof plaster, capacities for water and other liquids, finishing of tunnels, spatial coverings and structures, repair of monolithic structures of floors, roads, etc; prefabricated elements and structures - railway sleepers, pipelines, beams, ladders, wall panels, roofing panels and tiles, floating dock modules, offshore structures, explosion-proof structures, slabs of airfield, road, pavement and channel fasteners, cornices, piles, heating elements, elements of spatial coverings and structures, street accessories.

## 2 ANALYSIS OF LITERARY DATA AND RESOLVING THE PROBLEM

Many works are devoted to the strengthening of reinforced concrete beams. all of them can be divided into experimental and theoretical, and the latter include analytical and numerical methods for calculating reinforcements. the theoretical methods of calculation of reinforcements are currently insufficiently developed. this is explained by the complexity of the mathematical model of amplification, regardless of the method used. this fully applies to beams reinforced with fiber concrete. in this regard, preference is given to numerical methods. first of all, the finite element method (fem), because it is the only universal method, the possibility of which is practically not limited. this explains the use of fem for numerical analysis in all modern engineering calculation programs. implementation of the fem algorithm is carried out using modern computer programs, such as ansys [1], abaqus [2], nastran [3], etc., designed for numerical modeling and analysis of complex structures, including beams with inclusions.

The article [4] discusses 3d modeling in ansys of the destruction of an element of a structural reinforced concrete beam. the authors [5] show the use of the finite element method for modeling damaged reinforced concrete beams. the corresponding numerical analysis was carried out in abaqus using the concrete plasticity model. the article [6] considers the critical parameters affecting the efficiency of fiber-reinforced polymer systems with an external lateral connection based on the finite-element model developed by the authors. an interesting work is presented by the authors of the article [7], where a multifactorial numerical experiment was conducted using computer modeling in the ansys program.

Articles [8-10] are devoted to a similar problem. in [8], experimental data from four-point bending of six reinforced concrete beams and the results of finite-element modeling obtained using ansys are considered. [9] suggests using discrete fiber reinforcement for tunnel finishing. the task is also modeled in ansys. the same authors in [10] investigate the ability of fibers to control cracks by summarizing the results of more than ninety tensile tests of reinforced concrete prisms, conducted with different sizes, reinforcement ratios, number of fibers, and concrete strength. recent finite element models for predicting crack spacing in fiber reinforced concrete composites are evaluated and critically discussed.

### 3 PURPOSE AND TASKS OF THE STUDY

The purpose of this work was to conduct systematic experimental studies of the strength of steel fiber concrete. The tasks of the work consisted in determining the optimal characteristics of the steel-fiber concrete mixture, followed by the study of the cubic and prismatic strength of the fiber concrete at short and long loads.

### 4 BASIC RESULTS

Since fiber concrete is a composite material, two approaches are commonly used in the study of its physical and mechanical properties, which are commonly used in the work of composites – phenomenological and structural. In the first case, the material is regarded as a certain isotropic system to which the methods of mechanics of a deformed solid are applicable. In this case, the material characteristics are determined on the basis of laboratory studies and tests using the methods of the theory of experiment planning and mathematical statistics [17]. In the second case, structural analysis is used, which implies the expression of the mechanical characteristics of the material through analogous indices of its components, the coefficient of fiber reinforcement, the type and geometric dimensions of the fiber, etc. [18].

In our country, the most widespread is structural approach to the study of the properties of fiber concrete by analogy with reinforced concrete, which allows you to determine the necessary strength and deformation characteristics based on the properties of the original components. This approach is complex, depends on many factors, but it is also convenient in solving the problems of optimal design of fibrous concrete structures.

The phenomenological approach has become widespread in Europe and America. World experience in designing concrete structures shows that the application of the phenomenological approach in determining the physical and mechanical properties of fiber concrete allows the most efficient use of the material and the design of rational concrete structures.

The experimental studies included two steps. The purpose of the first stage was to determine the optimal characteristics of the steel fiber concrete mix. For this purpose, the cubic strength of steel fiber concrete on samples of 100x100x100 mm was determined. The percentage of dispersed reinforcement varied, which was 0.5%, 1.0%, 1.5%, as well as the size of the fraction of large aggregate (crushed stone) – with the size of the fraction  $\leq 10$  mm in one series of tests and  $\leq 20$  mm – in the second. At the same time, the cubic strength of ordinary concrete at the same size of a large aggregate was determined. In total, 8 series of tests were carried out on 9 samples in each, the general characteristics of which are given in Table 1.

In the room where the samples were made and subsequently gained strength, the air temperature met the requirements and was 15 ... 20 ° C.

Before preparing the mixture, the right components were selected and the forms were prepared. For the production of samples used metal detachable molds. Before laying the concrete mixture in the form of their inner surfaces were greased with a thin layer of oil.

First, the required amount of each of the components was proportionally determined, and then the concrete mixture was prepared. For the first two series of experiments, a conventional concrete mixture was prepared and molded. Then they made another the same mixture, and it gradually "portions" was introduced fiber, continuing mixing in the concrete mixer until a uniform distribution of fiber in the mixture.



**Table 1**

Summary table of the first stage of tests

| Series № | Material         | Crushed stone dimension, [mm] | Percent of fibrous reinforcement |
|----------|------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| 1        | Concrete         | ≤ 10                          | –                                |
| 2        | Concrete         | ≤ 20                          | –                                |
| 3        | Fibrous concrete | ≤ 10                          | 0.5                              |
| 4        | Fibrous concrete | ≤ 10                          | 1.0                              |
| 5        | Fibrous concrete | ≤ 10                          | 1.5                              |
| 6        | Fibrous concrete | ≤ 20                          | 0.5                              |
| 7        | Fibrous concrete | ≤ 20                          | 1.0                              |
| 8        | Fibrous concrete | ≤ 20                          | 1.5                              |

After the formation of specimens of ordinary concrete and steel fiber, they were left under normal conditions. After 5 days, the samples were removed from the forms, labeled, and stored for 28 days from the time of formation under normal conditions. After storage, the finished specimens were inspected (they should have the correct geometric shape and parallel faces), measured and prepared for testing.

The processing of the results of the first stage of the tests showed that the optimum characteristics of the steel-concrete mixture is a matrix with a large filler of 10 mm (the cubic strength was much higher than the size of the crushed stone 20 mm, in all series of experiments) at 1.0% fibrous reinforcement, since at a higher percentage of fiber reinforcement increased cubic strength was insignificant. This composition was accepted for the second stage of testing.

In all the experiments used cement grade 400 and washed river sand. The water-cement ratio is 0.449. For disperse reinforcement, bent-end fiber made from high-strength wire with a temporary resistance of 1335 MPa was used. The main characteristics of fiber are given in Table 2.

The fiber used is manufactured by Stalkanat-Silur Production Association (Ukraine) in accordance with European standard EN14889-1: 2006 [19]. It is the most common type of fiber, easy to handle, not prone to the formation of "hedgehogs", holds well in concrete.

The objectives of the experimental studies in the second stage were:

- determination of cubic and prism strength;
- study the nature of, change along time;
- elasticity modulus and deformation modulus determination.

To solve these problems, 108 specimens of fiber concrete were tested: 54 — with a short-term load application (27 cubes 100x100x100 mm and 27 prisms 100x100x400 mm) and 54 — with a long load (in the same proportion). A batch of concrete samples similar in quantitative composition was tested at the same time.

**Table 2**

Main fiber properties

| Mark | Description        | Length, [mm] | Diameter, [mm] | $\sigma_u$ , [MPa] | $E$ , [MPa] | $\mu$ |
|------|--------------------|--------------|----------------|--------------------|-------------|-------|
| HE50 | Wire chopped fiber | 50           | 1.0            | 1335               | 200000      | 0.3   |

Cubes of concrete and fiber concrete were subjected to destruction by compression in a test facility with a loading rate, which provides an increase in the design stress in the sample before its complete destruction. The press was used as the test unit (figure 1). The cubes were set strictly in the center of the plate of the press. They turned on the equipment and gradually loaded the samples before their destruction. Tests of specimen cubes for compression from

the same manufactured batch were performed at the age of 28 days, and then — at the age of 370 days. In this case, the cubic strength of ordinary concrete during the observation increased by 3.5 MPa, which is 11.3%. Fiber concrete strength increased by 10.1 MPa over the same period, ie by 31%. And if, by the time of the set of branded concrete strength, the strength of fiber concrete was only 4.7% higher than the strength of ordinary concrete, then almost a year later this difference increased to 24%.



**Fig. 1.** Examples of tests

It should be noted that all without exception samples that have been under the influence of continuous load for a year have increased their load capacity. The higher the level of long load, the more compacted the concrete, and, of course, the higher its durability. Samples loaded to 0.8 (from cubic or prism strength respectively) for 370 days increase their load capacity by 40.5%. At the same time, in the sample loaded to 0.3 the long-term strength increased by 18.3%.

When testing concrete prisms with dimensions of  $100 \times 100 \times 400$  mm, twin specimens were combined into groups and series. Samples of each group were made in one step. Prisms (like cubes) were concreted in metal cassette formwork. The concrete mixture was made in a free fall concrete mixer. The formulation was further mixed manually for greater uniformity prior to formworking. Prior to the experimental studies, the samples were stored at a temperature of 18-24°C. Before testing the side faces, the prisms were glued on to mount clock-type indicators.

The method of short-term and long-term testing of samples was made taking into account the recommendations of normative documents for testing concrete.

Determination of the modulus of elasticity and prism strength was preceded by centering the samples from the physical center by applying test loads that cause stresses up to 0.2 of the prism strength. The centering sought to ensure that the deformations along the four faces of the specimen were approximately the same and almost completely reversible. The workload was carried out in steps of 0.1 from prism strength. At each load stage, deformations were measured. The maximum force perceived by the sample prior to fracture was taken as the value of the destructive load. Continuous loading of the samples was carried out in power stands, consisting of 4 metal rods with a diameter of 46 mm, to which rigid load plates (4 pieces) were attached by means of threaded connections at certain levels. In order to maintain

the load during long-term tests at a given level, the transfer of forces from the hydraulic jack to the studied prisms was carried out through a power unit consisting of 4 springs and 2 load plates. The power of each spring is 100 kN.

All forces made by the power unit are balanced within the upper and lower load plates. From the installation to the foundation is transferred only its own weight and a possible dynamic impact during the fragile destruction of the prisms. Prior to loading, each spring cartridge is calibrated using a sample dynamometer (500 kN) mounted at the location of the experimental sample. The load during the experiment was maintained at the required level and controlled by deformation of the spring block and the pressure gauge of the pumping station.

On the height of the installation in one power line, that is, in 2 floors, there were 2 samples: one of ordinary concrete, and the other - of steel fiber. Thus, throughout the experiment (370 days), the mode and load level for both samples were exactly the same (figure 2).

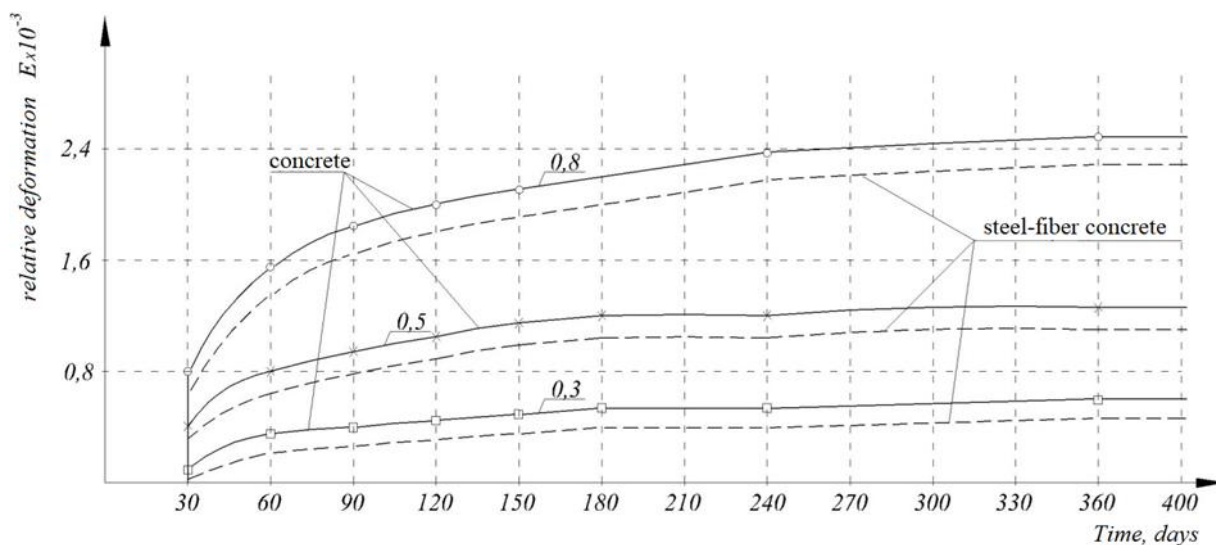


Fig. 2. Long-time tests results

## 5 DISCUSSION OF THE RESULTS OF THE STUDY

To determine the bearing capacity, as well as to compare the results of short-term and long-term loading, in each group of samples 3 prisms were brought to destruction by short-term load on the hydraulic press. Five prisms of each concrete composition were loaded with a long load in the power stands and 4 prisms of each group were stored until the end of the experiment to determine the corresponding prism strength. As a result of short-term testing, it was found that the prism strength of ordinary concrete was 235 kN and that of steel fiber concrete was 252 kN.

To cover the entire operational spectrum of the stress state of real reinforced concrete elements, levels of 0.3 were assumed as continuous load levels; 0.4; 0.5; 0.67 and 0.8 from short-term destructive loading. In figure 2 presents the results of long tests for three levels - 0.3; 0.5 and 0.8. The solid lines show the deformation of the concrete, and the dashed lines show the steel concrete. The creep deformation of steel fiber is on average 20% lower than that of concrete.

## 6 CONCLUSIONS

The optimal characteristics of the steel fiber concrete mixture is a matrix with a large

filler of 10 mm at 1.0% fiber reinforcement, since at a higher percentage of fiber reinforcement the increase in cubic strength was insignificant.

Before the destruction of cubic specimens of steel fiber concrete, cracks along the axis of action of the short-term compressive load were observed. The destruction of specimens of steel fiber concrete with 0.5% of disperse reinforcement and ordinary concrete was fragile, while in the case of reinforcement of 1.0% and 1.5% brittle fracture was not observed.

The development of deformations under prolonged loading can be conditionally divided into 3 stages. In the first stage there is an accelerated deformation. The deformations that occurred during this period make up almost 75% of the total deformations during the whole observation period. In the second stage of deformation occurs at a relatively constant rate, ie, the deformation increase is carried out practically according to a linear law. At a load level of 0.3 R stable linear part begins after 35-40 days, for the level of 0.8 - after 65-70 days. The deformations appeared at this stage make up 20-23% of their total size. And finally, in the third stage, the growth rate of deformation is almost approaching zero. The deformation change graph is almost parallel to the horizontal axis.

Prisms made of steel fiber concrete, which have been in operation for 370 days under the influence of prolonged loading, have increased the load-bearing capacity, depending on the load level, by 30-50%. The higher the load level, the higher the durability. When reloading to the destruction of deformation of steel-fiber prisms changed according to linear law. This is explained by the fact that in the process of three-stage loading was elongated transient creep of concrete.

## 7 ETHICAL DECLARATIONS

The author has no relevant financial or non-financial interests to report.

## References

1. Yu R., van Beers L., Spiesz P., Brouwers H.J.H. Impact resistance of a sustainable Ultra-High Performance Fibre Reinforced Concrete (UHPFRC) under pendulum impact loadings. *Constr. Build. Mater.* 107 (2016) 203–215. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2015.12.157.2.
2. Wang D., Shi C., Wu Z., Xiao J., Huang Z., Fang Z. A review on ultra high performance concrete: Part II. Hydration, microstructure and properties. *Constr. Build. Mater.* 96 (2015) 368–377. <http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2015.08.095.3>.
3. Li P.P., Yu Q.L. Responses and post-impact properties of ultra-high performance fibereinforced concrete under pendulum impact. *Compos. Struct.* 208 (2019) 806–815. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.10.071>.
4. Haksung Lee, Man Kwon Choi, Byung-Joo Kim, Structural and functional properties of fiber reinforced concrete composites for construction applications, *Journal of Industrial and Engineering Chemistry.* 125 (2023) 38-49. <https://doi.org/10.1016/j.jiec.2023.05.019>.
5. Krutii, Y., Kovrov, A., Otrosh, Y., Surianinov, M. Analysis of Forced Longitudinal Vibrations of Columns Taking into Account Internal Resistance in Resonance Zones. In *Materials Science Forum.* 1006 (2020) 79-86.
6. Surianinov M., Andronov V., Otrosh Y., Makovkina T. and Vasiukov S. Concrete and Fiber Concrete Impact Strength. In *Materials Science Forum.* Trans Tech Publications Ltd. 1006 (2020) 101-106.
7. Pukhareno Yu. V., Golubev V. Yu. High-strength steel fiber concrete. *Industrial and civil engineering.* 9 (2007) 40–41.
8. Moein M., Saradar A., Rahmati K., Shirkouh A., Sadrinejad I., Aramali V., & Karakouzian M. Investigation of Impact Resistance of High-Strength Portland Cement Concrete Containing Steel Fibers. *Materials.* 15(20) (2022) 7157. <https://doi.org/10.3390/ma15207157>.
9. Khan M., & Cao M. (2021). Effect of Hybrid Basalt Fibre Length and Content on Properties Of Cementitious Composites. *Magazine of Concrete Research.* 73(10) (2021) 487-498. <https://doi.org/10.1680/jmacr.19.00226>.

10. Yusof M., Nor N., Ismail A., Peng N., Sohaimi R., Yahya M. Performance of Hybrid Steel Fibers Reinforced Concrete Subjected to Air Blast Loading. *Advances in Materials Science and Engineering*. 2013. doi: 10.1155/2013/420136.
11. Yusof M., Norazman, Ariffin, Zain F., Risby, CP Ng. Normal Strength Steel Fiber Reinforced Concrete Subjected to Explosive Loading. *Sustainable Construction Engineering & Technology*, (2010) 127-136.
12. Pasternak, V., Ruban, A., Surianinov, M., Otrosh, Y., Romin, A. Software Modeling Environment for Solving Problems of Structurally Inhomogeneous Materials. In *Materials Science Forum*. 1068 (2022) 215–222.
13. Abbas, A, Mohsin, SS, Cotsovovs, DM. Steel-fibre-reinforced concrete beams under cyclic loads. in J. Barros (ed.), 8th RILEM International Symposium on Fibre Reinforced Concrete (BEFIB 2012): Challenges and Opportunities. 2 (2012) 893-904.
14. Khot, S.R., Mane, S.S. (2015). An Experimental Study On Shear Behavior Of Steel Fiber Reinforced Concrete Beam. *Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*. 02 (06) (2015) 829-834.
15. Al-lami, Karrar Ali, "Experimental Investigation of Fiber Reinforced Concrete Beams" (2015). Dissertations and Theses. <https://doi.org/10.15760/etd.2293>.
16. Baarimah, Abdullah O., Syed |Mohsin, Sharifah Maszura. Behaviour of Reinforced Concrete Slabs with Steel Fibers. *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*. 271 (2017) 1-8. 10.1088/1757-899X/271/1/012099.
17. Golovanevskiy, V., Kondratiev, A. Elastic properties of steel-cord rubber conveyor belt. *Experimental techniques*. 45(2) (2021) 217 – 226.
18. Kondratiev, A.V., Kovalenko, V.O. Optimization of design parameters of the main composite fairing of the launch vehicle under simultaneous force and thermal loading. *Space science and technology*, 25, 4(119) (2019) 3 – 21.
19. BS EN 14889-1:2006: Fibres for concrete. Steel fibres. Definitions, specifications and conformity. [in Ukrainian].

## Література

1. Yu R., van Beers L., Spiesz P., Brouwers H.J.H. Impact resistance of a sustainable Ultra-High Performance Fibre Reinforced Concrete (UHPFRC) under pendulum impact loadings. *Constr. Build. Mater.* 107 (2016) 203–215. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2015.12.157.2.
2. Wang D., Shi C., Wu Z., Xiao J., Huang Z., Fang Z. A review on ultra high performance concrete: Part II. Hydration, microstructure and properties. *Constr. Build. Mater.* 96 (2015) 368–377. <http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2015.08.095.3>.
3. Li P.P., Yu Q.L. Responses and post-impact properties of ultra-high performance fibre reinforced concrete under pendulum impact. *Compos. Struct.* 208 (2019) 806–815. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.10.071>.
4. Haksung Lee, Man Kwon Choi, Byung-Joo Kim, Structural and functional properties of fiber reinforced concrete composites for construction applications, *Journal of Industrial and Engineering Chemistry*. 125 (2023) 38-49. <https://doi.org/10.1016/j.jiec.2023.05.019>.
5. Krutii, Y., Kovrov, A., Otrosh, Y., Surianinov, M. Analysis of Forced Longitudinal Vibrations of Columns Taking into Account Internal Resistance in Resonance Zones. In *Materials Science Forum*. 1006 (2020) 79-86.
6. Surianinov M., Andronov V., Otrosh Y., Makovkina T. and Vasiukov S. Concrete and Fiber Concrete Impact Strength. In *Materials Science Forum*. Trans Tech Publications Ltd. 1006 (2020) 101-106.
7. Pukharenko Yu. V., Golubev V. Yu. High-strength steel fiber concrete. *Industrial and civil engineering*. 9 (2007) 40–41.
8. Moein M., Saradar A., Rahmati K., Shirkouh A., Sadrinejad I., Aramali V., & Karakouzian M. Investigation of Impact Resistance of High-Strength Portland Cement Concrete Containing Steel Fibers. *Materials*. 15(20) (2022) 7157. <https://doi.org/10.3390/ma15207157>.
9. Khan M., & Cao M. (2021). Effect of Hybrid Basalt Fibre Length and Content on Properties Of Cementitious Composites. *Magazine of Concrete Research*. 73(10) (2021) 487-498. doi: 10.1680/jmacr.19.00226.

10. Yusof M., Nor N., Ismail A., Peng N., Sohaimi R., Yahya M. Performance of Hybrid Steel Fibers Reinforced Concrete Subjected to Air Blast Loading. *Advances in Materials Science and Engineering*. 2013. doi: 10.1155/2013/420136.
11. Yusof M., Norazman, Ariffin, Zain F., Risby, CP Ng. Normal Strength Steel Fiber Reinforced Concrete Subjected to Explosive Loading. *Sustainable Construction Engineering & Technology*, (2010) 127-136.
12. Pasternak, V., Ruban, A., Surianinov, M., Otrosh, Y., Romin, A. Software Modeling Environment for Solving Problems of Structurally Inhomogeneous Materials. In *Materials Science Forum*. 1068 (2022) 215–222.
13. Abbas, A, Mohsin, SS, Cotsovos, DM. Steel-fibre-reinforced concrete beams under cyclic loads. in J. Barros (ed.), 8th RILEM International Symposium on Fibre Reinforced Concrete (BEFIB 2012): Challenges and Opportunities. 2 (2012) 893-904.
14. Khot, S.R., Mane, S.S. (2015). An Experimental Study On Shear Behavior Of Steel Fiber Reinforced Concrete Beam. *Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*. 02 (06) (2015) 829-834.
15. Al-lami, Karrar Ali, "Experimental Investigation of Fiber Reinforced Concrete Beams" (2015). Dissertations and Theses. <https://doi.org/10.15760/etd.2293>
16. Baarimah, Abdullah O., Syed |Mohsin, Sharifah Maszura. Behaviour of Reinforced Concrete Slabs with Steel Fibers. *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*. 271 (2017) 1-8. 10.1088/1757-899X/271/1/012099.
17. Golovanevskiy, V., Kondratiev, A. Elastic properties of steel-cord rubber conveyor belt. *Experimental techniques*. 45(2) (2021) 217 – 226.
18. Kondratiev, A.V., Kovalenko, V.O. Optimization of design parameters of the main composite fairing of the launch vehicle under simultaneous force and thermal loading. *Space science and technology*, 25, 4(119) (2019) 3 – 21.
19. BS EN 14889-1:2006: Fibres for concrete. Steel fibres. Definitions, specifications and conformity.

Стаття надійшла до редакції 05.12.2025

Стаття прийнята до друку 05.01.2026

Дата публікації статті 26.03.2026

**Mykola Surianinov**

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Doctor of Technical Sciences, Professor  
Didrihsona str., 4, Odesa, Ukraine, 65029  
[sng@odaba.edu.ua](mailto:sng@odaba.edu.ua)  
ORCID: 0000-0003-2592-5221

**Yurii Krutii**

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Doctor of Technical Sciences, Professor  
Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Didrihsona str., 4, Odesa, Ukraine, 65029  
[yurii.krutii@gmail.com](mailto:yurii.krutii@gmail.com)  
ORCID: 0000-0001-7105-3087

**Volodymyr Osadchy**

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Ph.D., Associate Professor  
Didrihsona str., 4, Odesa, Ukraine, 65029  
[ovs1455@gmail.com](mailto:ovs1455@gmail.com)  
ORCID: 0000-0001-8153-8635

**Vyacheslav Surianinov**

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture  
Ph.D, Associate Professor  
Didrihsona str., 4, Odesa, Ukraine, 65029  
[citykboss@odaba.edu.ua](mailto:citykboss@odaba.edu.ua)  
ORCID: 0009 0006 9620 4287



**Petro Konstantinov**

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Ph.D., Associate Professor

Didrihsona str., 4, Odesa, Ukraine, 65029

[konstantinov@odaba.edu.ua](mailto:konstantinov@odaba.edu.ua)

ORCID: 0000-0001-7708-6955

*For references:*

M. Surianinov, Yu. Krutii, V. Osadchy, V. Surianinov, P. Konstantinov. (2026). Mechanical properties of fiber concrete . Mechanics and Mathematical Methods. VIII (1). 6–16.

*Для посилань:*

Сур'янінов М. Г., Крутій Ю. С., Осадчий В. С., Сур'янінов В. М., Константинов П. В. Механічні властивості фібробетону. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. № 1. С. 6–16.

[Mechanical properties of fiber concrete](#) © 2026 by [M. Surianinov, Yu. Krutii, V. Osadchy, V. Surianinov, P. Konstantinov](#) is licensed under [CC BY 4.0](#)

УДК 531.381

## ЕВОЛЮЦІЯ РУХУ ГІРОСТАТА З РУХОМОЮ МАСОЮ ПІД ДІЄЮ КЕРУЮЧОГО МОМЕНТУ

Лещенко Д. Д.<sup>1</sup>, Козаченко Т. О.<sup>1</sup>, Лукашева Ю. М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Анотація:** Задача дослідження руху твердого тіла відносно нерухомої точки належить до фундаментальних проблем класичної механіки і впродовж тривалого часу залишається предметом інтенсивних теоретичних та прикладних досліджень. Дослідження руху супутників навколо центра мас важливо для створення систем управління орієнтацією, стабілізації руху і для розв'язування практичних задач космонавтики. Космічний корабель або супутник в своєму русі відносно центра мас зазнає вплив моментів сил різної фізичної природи. До них належать як зовнішні збурення, так і внутрішні моменти, зумовлені перерозподілом мас усередині конструкції. Зокрема, істотний вплив мають ротори, маховики, гіроскопічні пристрої, що формують додатковий кінетичний момент, а також переміщення членів екіпажу у випадку пілотованого апарату, що призводить до зміни характеристик системи. Ці рухи можуть бути також зумовлені наявністю рідини в порожнинах, розташованих в тілі (наприклад, рідкого палива або окислювача в баках ракет).

Розглядається керований рух в середовищі з опором динамічно симетричного твердого тіла відносно центра мас, коли тіло містить порожнину з рідиною великої в'язкості та в'язкопружний елемент. Така постановка задачі дозволяє врахувати комплексний вплив дисипативних чинників і внутрішніх переміщень маси на еволюцію руху системи. У результаті проведених досліджень отримано як кількісні, так і якісні характеристики керованого руху динамічно симетричного тіла з рухомою масою. Розв'язок рівняння для кута нутації представлено в аналітичному вигляді, а також визначено залежність між осьовою та екваторіальною компонентами вектора кутової швидкості гіростата. Проведено чисельне інтегрування системи рівнянь руху твердого тіла. Графічні зображення розв'язків представлені та обговорені. Стаття може розглядатися як розвиток попередніх задач про рух твердого тіла під дією малих моментів (порожнини, яка заповнена рідиною великої в'язкості, рухомої маси, сталих моментів в зв'язаних з тілом осях). Стаття вносить вклад в розв'язання задач руху космічних кораблів і руху членів екіпажів відносно цих тіл. Одержані результати важливі при управлінні за допомогою рухомих мас та для рухів обертових снарядів.

**Ключові слова:** гіростат, порожнина, в'язка рідина, рухома маса.

## EVOLUTION OF MOTION OF A GYROSTAT WITH A MOVING MASS UNDER THE ACTION OF A CONTROL MOMENT

D. Leshchenko<sup>1</sup>, T. Kozachenko<sup>1</sup>, Yu. Lukasheva<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract:** The problem of studying the motion of a rigid body relative to a fixed point is one of the fundamental problems of classical mechanics and has long been the subject of intensive theoretical and applied research. The study of motion of satellites about its center of mass is important for the creation of orientation control systems, motion stabilization, and for solving practical problems in cosmonautics. A spacecraft or satellite in its motion relative to the center of mass is influenced by moments of forces of different physical nature. These include both external disturbances and internal moments caused by the redistribution of mass within the structure. In particular, rotors, flywheels, and gyroscopic devices that generate additional kinetic momentum have a significant impact, as does the movement of crew members in the case of a manned spacecraft, which leads to a change in the



characteristics of the system. These movements can also be caused by the presence of liquid in cavities located in the body (for example, liquid fuel or oxidizer in rocket tanks).

Controlled motion of a dynamically symmetric rigid body relative to the center of mass is considered when the body contains a cavity with a high-viscosity liquid and a viscoelastic element. This formulation of the problem allows us to take into account the complex influence of dissipative factors and internal mass displacements on the evolution of the system's motion. As a result of the research, both quantitative and qualitative characteristics of the controlled motion of a dynamically symmetric body with a moving mass were obtained. The solution of the equation for the nutation angle is presented in analytical form, and the dependence between the axial and equatorial components of the angular velocity vector of the gyroscope is determined. Numerical integration of the system of equations of motion of a rigid body is performed. Graphical representations of the solutions are presented and discussed. The article can be considered as a development of previous problems on the motion of a rigid body under the action of small moments (a cavity filled with a highly viscous fluid, a moving mass, constant moments in the axes connected to the body). The article contributes to solving problems of spacecraft motion and the motion of crew members relative to these bodies. The results obtained are important for control using moving masses and for the motion of rotating projectiles.

**Keywords:** rigid body, cavity, viscous fluid, movable mass.

## 1 ВСТУП

Проблеми динаміки твердих тіл із порожнинами, заповненими рідиною, належать до класичних задач механіки, оскільки поєднують у собі складну взаємодію обертального руху твердого тіла та внутрішніх гідродинамічних процесів. Дослідження таких систем має тривалу історію та пов'язане з розвитком теорії гіроскопів, механіки супутників і задач стійкості обертання. Наявність рідини в порожнині істотно впливає на характер руху, зумовлюючи внутрішню дисипацію енергії, та виникнення додаткових збурюючих моментів, що ускладнює математичний опис і потребує застосування спеціальних аналітичних і асимптотичних методів дослідження.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Значна кількість наукових праць присвячена дослідженню різноманітних аспектів динаміки космічних апаратів із внутрішніми рухомими масами, зокрема питанням стійкості обертання, демпфування коливань, керування кутовим рухом та впливу дисипативних факторів. Проте проблема сумісного врахування внутрішніх рухомих елементів і порожнини з в'язкою рідиною залишається актуальною, особливо в умовах тривалої експлуатації космічних систем, де навіть малі збурення можуть істотно впливати на еволюцію руху.

У роботі [1] досліджено сумісний вплив рідини великої в'язкості в порожнині твердого тіла та рухомої маси, з'єднаної з тілом пружним зв'язком із в'язким тертям або квадратичною дисипацією, на рух динамічно симетричного тіла. У праці [2] вивчено рух у середовищі з опором близького до динамічно сферичного твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною, при малих числах Рейнольдса. У статті [3] розглядається можливість демпфування нугаційних коливань за допомогою в'язкої рідини, яка заповнює порожнини в роторі або в рамках гіроскопа.

Огляд досліджень, присвячених обертанню твердого тіла з рухомими внутрішніми масами, наведено в роботах [4–10]. Зокрема, у монографії [5] проаналізовано вплив внутрішньої пружності та дисипації на рух супутника відносно центра мас. У [7] методом усереднення отримано наближений розв'язок задачі про рух у середовищі з опором близького до динамічно сферичного твердого тіла з в'язкопружним елементом. У роботі [8] досліджено рух динамічно симетричного твердого тіла з рухомою масою, з'єднаною з тілом пружним зв'язком, за наявності в'язкого тертя. В [9] за допомогою метода усереднення одержано наближений розв'язок задачі про рух динамічно симетричного твердого тіла з в'язкопружним елементом під дією постійного моменту в зв'язаних з тілом осях. В статті [10] проведено асимптотичне розв'язування системи рівнянь Ейлера з додатковими збурюючими моментами сил для близького до динамічно сферичного твердого тіла з в'язкопружним елементом при наявності в'язкого тертя.

Окремі випадки інтегрування рівнянь руху твердого тіла в середовищі з опором розглянуто в роботах [11–13]. У [14] досліджено збурений рух космічного апарата, що обертається, на круговій орбіті під дією малого аеродинамічного моменту, пропорційного кутовій швидкості тіла. В [15] одержані умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опором

В роботі [16] проаналізовано сукупний вплив в'язкої рідини та рухомої маси на обертальний рух тіла. Показано, що за наявності внутрішнього розсіювання енергії рух системи з часом наближається до стаціонарного обертання навколо осі найбільшого моменту інерції.

У праці [17] досліджено обертальний рух супутника з порожниною, заповненою в'язкою рідиною, під дією збурюючих моментів. За умови обмежених значень числа Рейнольдса вводиться малий параметр, що дає змогу застосовувати асимптотичні



методи дослідження. В роботі [18] представлені аналітичні та чисельні результати для твердих тіл з в'язкою рідиною.

Таким чином, аналіз наведених праць свідчить про значний інтерес до проблеми динаміки твердих тіл із внутрішніми рухомими елементами та рідиною в порожнинах. Перерозподіл мас усередині апарата може використовуватися як засіб керування орієнтацією, однак водночас створює додаткові динамічні ефекти, які потребують детального теоретичного аналізу.

Розглянемо обертальний рух динамічно симетричного тіла відносно центра мас за наявності порожнини, заповненою в'язкою рідиною, а також рухомої маси, з'єднаної в'язкопружним демпфером з точкою на осі симетрії (в недеформованому стані) [1]. Крім того, в моделі враховується дія керуючого моменту, який відображає ефекти внутрішньої дисипації та впливає на характер еволюції обертального руху системи.

Наближена система рівнянь руху тіла в проєкціях на головні центральні осі інерції має вигляд [1]

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= \gamma C(A - C)pr^2 + \frac{\beta P}{\nu A^2} C(A - C)pr^2 + Lqr + Spr^4, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= \gamma C(A - C)qr^2 + \frac{\beta P}{\nu A^2} C(A - C)qr^2 - Lpr + Sqr^4, \\ C\dot{r} &= \gamma A(C - A)r(p^2 + q^2) + \frac{\beta P}{\nu A} (C - A)r(p^2 + q^2) - AC^{-1}Sr^3(p^2 + q^2). \end{aligned} \quad (1)$$

де  $p, q, r$  – проєкції абсолютної кутової швидкості  $\boldsymbol{\omega}$  на головні центральні осі інерції,  $\mathbf{J} = \text{diag}(A, A, C)$  – тензор інерції незбуреного тіла,  $\gamma$  – додатний коефіцієнт керування,  $\beta$  – густина рідини. Тензор  $\|P_{ij}\|$  залежить від форми порожнини та має вигляд  $P_{ij} = P\delta_{ij}$ , де  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $P > 0$  скалярний коефіцієнт, у випадку сферичної порожнини радіуса  $b$  значення  $P = 8\pi b^7 / 525$  [1, 2],  $\nu$  – кінематичний коефіцієнт в'язкості рідини ( $\nu = 1 / \text{Re} \gg 1$ ). Припускається, що число Рейнольдса є достатньо малим:  $\text{Re} \ll 1$  [1, 2], а отже  $\nu^{-1} \ll 1$ . Будемо вважати, що безрозмірний параметр  $\nu^{-1} \sim \varepsilon$ .

Коефіцієнти  $L, S$  характеризують збурюючі моменти сил, зумовлені наявністю в'язкопружного елемента, і визначаються через параметри механічної системи таким чином [1]:

$$\begin{aligned} L &= m\rho^2 \Omega^{-2} A^{-3} C (A^2 p^2 + A^2 q^2 + C^2 r^2), \\ S &= m\rho^2 \lambda \Omega^{-4} C^3 (A - C) A^{-4} \end{aligned} \quad (2)$$

де  $m$  – маса рухомої точки,  $\rho$  – відстань від центра мас недеформованої системи до точки кріплення, яка знаходиться, за припущенням, на осі динамічної симетрії цього тіла. Сталі  $\Omega^2 = c/m$ ,  $\lambda = \delta/m$  визначають частоту коливань і швидкість їх згасання відповідно;  $c$  – жорсткість (коефіцієнт пружності),  $\delta$  – коефіцієнт в'язкості демпфера. Зробимо деякі припущення щодо коефіцієнтів  $\Omega, \lambda$  [1]:

$$\Omega^2 \gg \lambda \omega \gg \omega^2 \quad (3)$$

Нерівності (3) дозволяють знехтувати ділянками вільних коливань рухів маси, які обумовлені початковими відхиленнями внаслідок їх швидкого згасання, та врахувати вимушені квазістаціонарні рухи, викликані обертанням тіла. Згідно до умови (3)  $\Omega^{-2}, \lambda \Omega^{-4}$  є малими параметрами, такими що  $\Omega^{-2} \sim \varepsilon, \lambda \Omega^{-4} \sim \varepsilon$ .



### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Доведемо існування першого інтеграла системи (1). Для цього помножимо кожне з трьох рівнянь системи (1) відповідно на  $Ap$ ,  $Aq$ ,  $Cr$  та просумуємо отримані співвідношення. У результаті маємо, що похідна від кінетичного моменту дорівнює нулю, а отже, кінетичний момент є сталим:

$$G^2 = A^2(p^2 + q^2) + C^2r^2 = \text{const} \quad (4)$$

Перший інтеграл (4) виражає сталість у розглянутому наближенні модуля вектора кінетичного моменту твердого тіла із затверділою рідиною відносно точки  $O$ .

Обчислюючи похідну за часом від кінетичної енергії  $H = 0.5[A^2(p^2 + q^2) + C^2r^2]$ , з урахуванням рівнянь (1), отримуємо:

$$\dot{H} = r^2(p^2 + q^2)(A - C)^2 \left[ -\gamma - r^2 m \rho^2 \lambda \Omega^{-4} C^2 A^{-4} - \frac{\beta P}{v A^2} \right] < 0 \quad (5)$$

Похідна від'ємна, отже кінетична енергія зменшується (спадає). За умови виконання (4) та (5), введемо кути  $\theta$ ,  $\varphi$ , що визначають орієнтацію вектора кінетичного моменту відносно твердого тіла згідно з рівностями:

$$Ap = G \sin \theta \cos \varphi, \quad Aq = G \sin \theta \sin \varphi, \quad Cr = G \cos \theta, \quad (6)$$

де  $\theta$  – кут нутації,  $\varphi$  – кут власного обертання.

Перейдемо в рівняннях (1) до змінних  $\theta$ ,  $\varphi$ , враховуючи сталість  $G$ . Розв'язуючи отримані рівняння відносно похідних  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\varphi}$ , отримаємо:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2}(\chi + \alpha \cos^2 \theta) \sin 2\theta, \quad \dot{\varphi} = \xi \cos \theta, \quad (7)$$

де

$$\alpha = S \frac{G^4}{AC^4}, \quad \chi = (A - C) \frac{G^2}{AC} \left( \gamma + \frac{\beta P}{v A^2} \right), \quad \xi = \frac{G}{AC} (C - A - L) \quad (8)$$

Величини  $\alpha$ ,  $\chi$ ,  $\xi$  мають розмірності кутової швидкості і залишаються постійними під час руху. Інтегруючи перше рівняння (7) за початкових умов  $\theta(t) = \theta_0$  отримаємо:

$$\left(1 + \frac{\chi}{\alpha} \sec^2 \theta\right) (tg^2 \theta)^{\chi/\alpha} = \left(1 + \sec^2 \theta_0\right) (tg^2 \theta_0)^{\chi/\alpha} \exp\left[2\chi\left(1 + \frac{\chi}{\alpha}\right)t\right] \quad (9)$$

Вираз (9) визначає в неявній формі залежність кута нутації  $\theta$  від  $t$ . Знак величини  $\chi$  залежить від різниці  $(A - C)$ . Система (7) розв'язана чисельно за допомогою математичного пакета Maple.

Застосуємо ще один підхід до розв'язку системи (1).

При припущеннях  $\Omega^{-2} \ll \varepsilon$ ,  $\lambda \Omega^{-4} \sim \varepsilon$ ,  $v^{-1} \sim \varepsilon$ ,  $\gamma \sim \varepsilon$ , будемо вважати  $\varepsilon = 0$ , тоді система (1) інтегрується. В цьому випадку, при  $r_0 \neq 0$ , змінні  $p$ ,  $q$  здійснюють гармонічні коливання, частота яких  $|(C - A)r_0|$  залежить від  $r_0$ . Розв'язок системи (1) при цих припущеннях має вигляд [19]

$$p = a \cos \varphi, \quad q = a \sin \varphi, \quad r = r_0. \quad (10)$$

Застосуємо (10) як формули перетворення до змінних  $a, r$ , де  $a^2 = p^2 + q^2$ ,  $a > 0$ ,  $\varphi = r(C - A)A^{-1}t$ . Диференціюючи  $a^2 = p^2 + q^2$  маємо, що  $\dot{a} = \dot{p} \cos \varphi + \dot{q} \sin \varphi$ . Підставимо в цей вираз  $\dot{p}$  і  $\dot{q}$  з перших двох рівнянь (1), одержані рівняння для  $a$  і  $r$  мають вигляд (крапка – похідна по часу  $t$ ):

$$\dot{a} = A^{-1}C\mu r^2 a + A^{-1}S r^4 a, \quad \dot{r} = -C^{-1}A\mu r a^2 - AC^{-2}S r^3 a^2, \quad (11)$$

де  $\mu = (A - C) \left( \gamma + \frac{\beta P}{v A^2} \right)$ .

Здійснивши низку алгебраїчних перетворень та виконавши заміну змінних  $x = a^2$ ,  $y = r^2$ , приведемо рівняння (11) до еквівалентної системи вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2xyA^{-1}C(\mu + C^{-1}Sy), \\ \dot{y} &= -2xyAC^{-1}(\mu + C^{-1}Sy). \end{aligned} \quad (12)$$

Перше рівняння системи (12) розділим на друге, отримаємо рівняння, розв'язок якого вказує на залежність між змінними  $x$  та  $y$ :

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{C^2}{A^2} \Rightarrow x = \frac{C^2}{A^2}(y_0 - y) + x_0, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (13)$$

Отриманий розв'язок має лінійний характер і однозначно задається початковими умовами та співвідношенням  $C^2/A^2$ .

#### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

В математичному пакеті Maple, з застосуванням метода Рунге-Кутти-Фельберга п'ятого порядку точності, знайдено чисельний розв'язок систем (7) і (12) за початкових умов  $\theta(0) = \pi/4$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 1$  та при певних значеннях параметрів  $\rho = 1$ ;  $m = 1$ ;  $\lambda = 9$ ,  $\Omega = 3$ ,  $P_0 = 0.48$ ,  $v = 1000$ ,  $\rho = 1260$ ,  $\gamma = 0.01$ ;  $0.625$ ; екваторіального  $A = 1$ ;  $1.2$ ;  $1.5$ ; та осьового  $C = 1$ ;  $1.2$ ;  $1.5$ ; моментів інерції.

Графічне зображення зміни кута нутації при вказаних параметрах представлено на рис. 1, 2. На рис. 3, 4 зображено графіки зміни величин  $x = a^2$  і  $y = r^2$  квадратів екваторіальної та осьової компонент кутової швидкості твердого тіла у випадку  $A > C$  при вказаних параметрах.

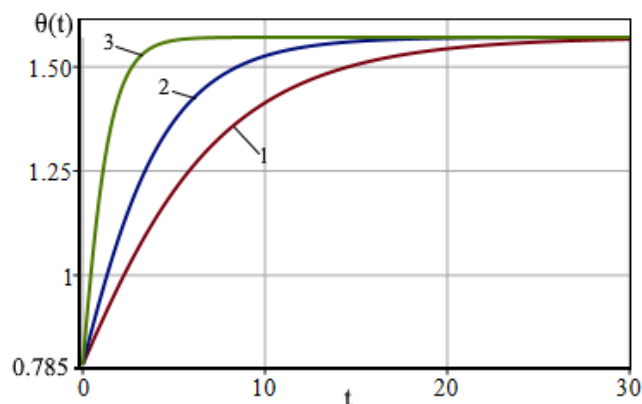
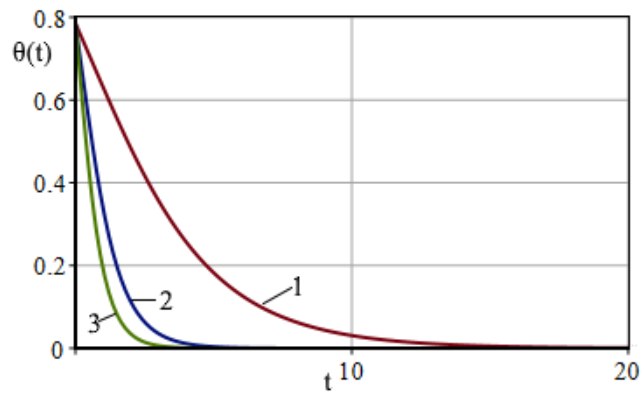
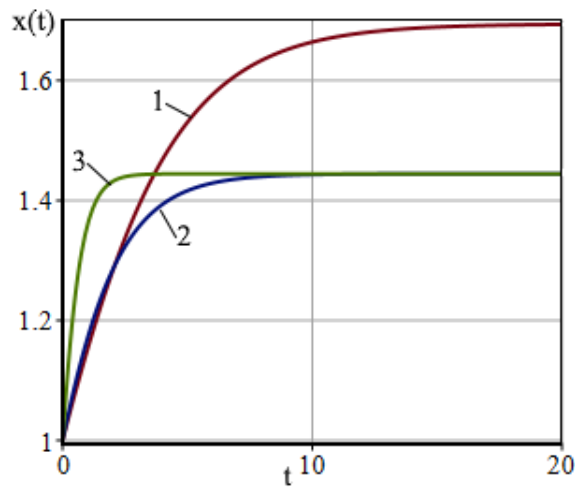


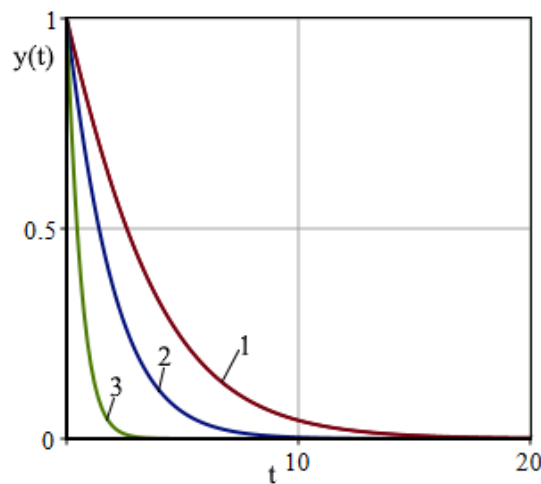
Рис. 1. Графіки кута нутації  $\theta$ : 1 -  $C = 1$ ,  $A = 1.2$ ,  $\gamma = 0.01$ ;  
 2 -  $C = 1$ ,  $A = 1.5$ ,  $\gamma = 0.01$ ; 3 -  $C = 1$ ,  $A = 1.5$ ,  $\gamma = 0.625$ .



**Рис. 2.** Графіки кута нугації  $\theta$ : 1 -  $C=1.2$ ,  $A=1$ ,  $\gamma=0.01$ ;  
2 -  $C=1.5$ ,  $A=1$ ,  $\gamma=0.01$ ; 3 -  $C=1.5$ ,  $A=1$ ,  $\gamma=0.625$ .



**Рис. 3.** Графіки змінної  $x$ : 1 -  $C=1$ ,  $A=1.2$ ,  $\gamma=0.01$ ;  
2 -  $C=1$ ,  $A=1.5$ ,  $\gamma=0.01$ ; 3 -  $C=1$ ,  $A=1.5$ ,  $\gamma=0.625$ .



**Рис. 4.** Графіки змінної  $y$ : 1 -  $C=1$ ,  $A=1.2$ ,  $\gamma=0.01$ ;  
2 -  $C=1$ ,  $A=1.5$ ,  $\gamma=0.01$ ; 3 -  $C=1$ ,  $A=1.5$ ,  $\gamma=0.625$ .

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

З наведених графіків (рис. 1, 2) еволюції кута нутації  $\theta$  випливає, що динаміка кута нутації істотно залежить від співвідношення моментів інерції  $A, C$  та величини керуючого параметра  $\gamma$ , що визначає як асимптотичну поведінку системи, так і темп затування. У випадку витягнутого тіла ( $A > C$ ) кут нутації  $\theta$  монотонно зростає та асимптотично прямує до значення  $\pi/2$ . Натомість для сплюсненого тіла ( $A < C$ ) спостерігається затухаючий характер руху, за якого кут  $\theta$  зменшується та наближається до нульового значення, що свідчить про стабілізацію обертання вздовж осі найбільшого моменту інерції.

Зауважимо, що в виразах (7) і (9) для  $\theta$  фактично на зміну кута нутації впливає  $\chi$ , значення якого залежить від параметрів  $A, C, \gamma$ . У випадку  $A > C$  коефіцієнт  $\chi > 0$ , а при  $A < C$ :  $\chi < 0$ . Збільшення значення коефіцієнта  $\gamma$  призводить до збільшення величини  $\chi$ , що в свою чергу призводить до більш швидкого зростання (рис. 1) або більш швидкого згасання (рис. 2) кута нутації.

Згідно до рис. 3 екваторіальна складова кутової швидкості  $x = a^2$  прагне до граничних значень, значення яких залежить від співвідношення між моментами інерції тіла  $A/C$ . При збільшенні  $A/C$  граничне значення  $x$  зменшується. Водночас характер її часової еволюції істотно залежить від коефіцієнта  $\gamma$ , зі збільшенням  $\gamma$  спостерігається більш інтенсивне зростання екваторіальної складової та прискорене встановлення усталеного режиму руху.

Як бачимо з рис. 4 осьова компонента кутової швидкості  $y = r^2$  спадає асимптотично наближаючись до нуля. Характер спадання залежить від співвідношення  $A/C$  та величини  $\gamma$ . Збільшення цих величини призводить до того, що проміжок часу, за який осьова компонента кутової швидкості прагне до нуля, зменшується.

## 6 ВИСНОВКИ

Проведене аналітичне та чисельне дослідження руху гіростата з рухомою масою, яка з'єднана з тілом в'язкопружним демпфером, з урахуванням керуючого параметра показало вплив співвідношення головних моментів інерції на характер еволюції основних кінематичних характеристик системи. Встановлено, що залежно від геометрії тіла реалізуються принципово різні режими руху: для витягнутого тіла відбувається монотонне зростання кута нутації з подальшим встановленням поперечного режиму обертання, тоді як для сплюсненого тіла система асимптотично стабілізується вздовж осі найбільшого моменту інерції.

Показано, що швидкість переходу до усталеного стану визначається параметром, який поєднує вплив моментів інерції та керуючого коефіцієнта. Зі збільшенням цього параметра суттєво прискорюється як процес зростання, так і згасання нутаційних рухів, що свідчить про інтенсифікацію дисипативних процесів у системі.

Аналіз кутових швидкостей у випадку витягнутого тіла підтвердив узгодженість отриманої моделі з фізичною природою руху: екваторіальна складова прямує до скінченних граничних значень, тоді як осьова компонента асимптотично зменшується до нуля, забезпечуючи перехід системи до стабільної конфігурації обертання. Таким чином, запропонована модель описує релаксаційні процеси в динаміці твердого тіла та може бути використана для аналізу рухів зі слабкими збуреннями й керуванням. Така модель дає змогу прогнозувати часові характеристики встановлення усталеного режиму руху та оцінювати вплив геометричних параметрів тіла на стабільність обертання, що є важливим для задач керування та підвищення надійності технічних систем.

## 7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

### Література

1. Leshchenko D. D., Sallam S. N. Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*, 1992. 28(8). P. 524–528.
2. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Еволюція обертань сфероїда з порожниною, заповненою в'язкою рідиною в середовищі з опором. *Праці ІПММ НАН України*, 2021. Том 35. № 2. С. 152-160. <https://doi.org/10.37069/1683-4720-2021-35-11>
3. Ivashchenko V. P. Motion of a gyroscope with a cavity filled with a viscous liquid. *Soviet Applied Mechanics*, 1978. 14(8). P. 872–876.
4. He L., Sheng T., Kumar K. D., Zhao Y., Ran D., Chen X. Attitude maneuver of a satellite using moving masses. *Acta Astronautica*, 2020. 176. P. 464–475.
5. Thomson W. T. *Introduction to Space Dynamics*. New York: Dower, 1986, 317p.
6. Jansses F. L. and Van der Ha J. C. Stability of spinning satellite under axial thrust, internal mass motion, and damping. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2015. 38 (4). P. 761-771.
7. Leshchenko D., Rachinskaya A. Evolution of rotational motions in a resistive medium of a nearly dynamically spherical rigid body with a movable mass. *Праці ІПММ НАН України*, 2024. Том 38. № 1. С. 44-53. <https://doi.org/10.37069/1683-4720-2024-38-5>
8. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи твердого тіла з рухомою масою в середовищі з опором. *Механіка та математичні методи*, 2023. Т. 5. № 2. С. 16–24 <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2023-5-2-16-24>
9. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи близького до динамічно сферичного твердого тіла з рухомою масою під дією постійних моментів в зв'язаних з тілом осях. *Механіка та математичні методи*, 2024. Т. 6. № 2. С. 18–30. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2024-6-2-18-30>
10. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи гіростата з рухомою масою в середовищі з опором. *Механіка та математичні методи*, 2025. Т. VII. № 2. С. 19–27. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2025-7-1-6-14>
11. Magnus K. *Kreisel. Theorie and Anwendungen*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1971.
12. Кошляков В. Н. *Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы*. Наука, 1985. 288с.
13. Routh E. J. *Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part II*. New York: Dover Publications, 1955. 484 p.
14. Inarrea M., Lanchares V. Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006. 41(1). P. 86–100.
15. Kononov Yu. M. Stability of a uniform rotation of an asymmetric rigid body in a resisting medium under a constant moment. *International Applied Mechanics*, 2021. 57(4). P. 432–439. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01095-1>
16. Amer, W.S., Farag, A.M. & Abady, I.M. Asymptotic analysis and numerical solutions for the rigid body containing a viscous liquid in cavity in the presence of gyrostatic moment. *Archive of Applied Mechanics*, 2021. 91. P. 3889–3902. <https://doi.org/10.1007/s00419-021-01983-5>
17. Galal, A.A., Amer, T.S., El-Kafly, H., Amer, W.S. The asymptotic solutions of the governing system of a charged symmetric body under the influence of external torques. *Results in Physics*, 2020. 18. 103160. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.103160>
18. Dissler, K., Galdi, G.P., Mazzone, G., Zunino, P. Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous liquid. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2016. 221. P. 487–526.
19. Landau L. D. and Lifshitz E. M. *Mechanics. Volume 1 of Course of Theoretical Physics*. Boston, Johannesburg, Melbourne, New Delhi, Singapore: Butterworth-Heinemann, 2000.

## References

1. Leshchenko, D. D., Sallam, S. N. (1992). Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*. 28(8). 524–528.
2. Leshchenko, D. D., Kozachenko, T. O. (2021). Evolution of rotations of a spheroid with cavity containing a viscous fluid in a resistive medium. *Proceeding of IAMM NAS of Ukraine*. 35 (2). 152-160. [in Ukrainian]. <https://doi.org/10.37069/1683-4720-2021-35-11>
3. Ivashchenko, B. P. (1978). Motion of a gyroscope with a cavity filled with a viscous liquid. *Soviet Applied Mechanics*. 14. 872–876.
4. He, L., Sheng, T., Kumar, K. D., Zhao Y., Ran D., Chen X. (2020). Attitude maneuver of a satellite using moving masses. *Acta Astronautica*. 176. 464–475.
5. Thomson, W.T. (1986). *Introduction to Space Dynamics*. New York: Dower.
6. Jansses, F. L. and Van der Ha, J. C. (2015). Stability of spinning satellite under axial thrust, internal mass motion, and damping. *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 38(4). 761-771.
7. Leshchenko, D. D. & Rachinskaya, A. L. (2024). Evolution of motions in a resistive medium of a body with a movable mass. *Proceeding of IAMM NAS of Ukraine*. 38 (1). 44-53. <https://doi.org/10.37069/1683-4720-2024-38-5>
8. Leshchenko, D., Kozachenko, T. (2023). Perturbed motions of a rigid body with a movable mass in a resistive medium. *Mechanics and Mathematical methods*. 5 (2). 16–24. [in Ukrainian] <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2023-5-2-16-24>
9. Leshchenko, D., Kozachenko, T. (2025). Perturbed motions of a rigid body with a movable mass under the action of constant torque. *Mechanics and Mathematical Methods*. 7 (1). 6–14. [in Ukrainian]. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2024-6-2-18-30>
10. Leshchenko, D., Kozachenko, T. (2025). Perturbed motions of a gyrostat with a movable mass in a resistive medium. *Mechanics and Mathematical methods*. VII (2). 19–27. [in Ukrainian] <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2025-7-1-6-14>
11. Magnus, K. (1971). *Kreisel. Theorie and Anwendungen*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
12. Koshlyakov, V. N. (1985). *Zadachi dinamiki tverdogo tela i prikladnoj teorii giroskopov: Analiticheskie metody [Problems in Dynamics of Solid Bodies and in Applied Gyroscope Theory: Analytical Methods]*. Nauka.
13. Routh, E. J. (1955). *Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part II*. New York: Dover Publications.
14. Inarrea, M., Lanchares, V. (2006). Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 41(1). 86–100.
15. Kononov, Yu. M. (2021). Stability of a uniform rotation of an asymmetric rigid body in a resisting medium under a constant moment. *International Applied Mechanics*. 57(4). 432–439. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01095-1>
16. Amer, W.S., Farag, A.M. & Abady, I.M. (2021). Asymptotic analysis and numerical solutions for the rigid body containing a viscous liquid in cavity in the presence of gyrostatic moment. *Archive of Applied Mechanics*. 91. 3889–3902. <https://doi.org/10.1007/s00419-021-01983-5>
17. Galal, A.A., Amer, T.S., El-Kafly, H., Amer, W.S. (2020). The asymptotic solutions of the governing system of a charged symmetric body under the influence of external torques. *Results in Physics*. 18. 103160. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.103160>
18. Dissler, K., Galdi, G.P., Mazzone, G., Zunino, P. (2016). Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous liquid. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 221. 487–526.
19. Landau, L. D., and Lifshitz, E. M. (2000). *Mechanics. Volume 1 of Course of Theoretical Physics*. Boston, Johannesburg, Melbourne, New Delhi, Singapore: Butterworth-Heinemann.

Стаття надійшла до редакції 15.01.2026

Стаття прийнята до друку 20.02.2026

Дата публікації статті 26.03.2026

**Лешенко Дмитро Давидович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури,  
д.ф.-м.н., професор  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029  
[leshchenko\\_d@ukr.net](mailto:leshchenko_d@ukr.net)  
ORCID: 0000-0003-2436-221X

**Козаченко Тетяна Олександрівна**

Одеська державна академія будівництва та архітектури,  
к.ф.-м.н., доцент  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029  
[kushpil.t.a@gmail.com](mailto:kushpil.t.a@gmail.com)  
ORCID: 0000-0001-9034-3776

**Лукашева Юліанна Миколаївна**

Одеська державна академія будівництва та архітектури,  
к.ф.-м.н., доцент  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029  
[lukasheva@ogasa.org.ua](mailto:lukasheva@ogasa.org.ua)  
ORCID:0009-0004-8032-8053

*Для посилань:*

Лешенко Д. Д., Козаченко Т. О., Лукашева Ю. М. Еволюція руху гіростата з рухомою масою під дією керуючого моменту. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. № 1. С. 17–27.

*For references:*

D. Leshchenko, T. Kozachenko, Yu. Lukasheva (2026). Evolution of motion of a gyrostat with a moving mass under the action of a control moment. Mechanics and Mathematical methods. VIII (1). 17–27.

Еволюція руху гіростата з рухомою масою під дією керуючого моменту © 2026 by Лешенко Д. Д., Козаченко Т. О., Лукашева Ю. М. is licensed under CC BY 4.0

УДК 614.841

## ОЦІНКА НАДІЙНОСТІ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ ПІД ВПЛИВОМ ВИБУХОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Пурденко Р. Р.<sup>1</sup>, Отрош Ю. А.<sup>1</sup>, Рашкевич Н. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Національний університет цивільного захисту України

**Анотація:** У статті наведено результати комп'ютерного моделювання напружено-деформованого стану одноповерхової виробничої будівлі зі сталевим каркасом під дією вибухової ударної хвилі. Об'єктом дослідження є будівля розмірами 60×15 м з висотою 12 м, просторову жорсткість якої забезпечують сталеві колони, ферми покриття та система зв'язків. Розглянуто аварійну ситуацію, зумовлену вибухом тринітролуолу масою 60 т на відстані 500 м від будівлі. Параметри вибухової ударної хвилі визначено за емпіричними залежностями через наведену відстань, при цьому надмірний тиск на фронті хвилі склав 9,83 МПа.

Розрахунок виконано методом комп'ютерного моделювання з урахуванням постійних, кліматичних та особливих навантажень. Вибуховий вплив змодельовано у вигляді статичної та динамічної складових, що дало змогу врахувати інерційні ефекти та вимушені коливання конструкції. Формування розрахункових поєднань здійснено за принципом найбільш несприятливих комбінацій навантажень з подальшою перевіркою елементів за I граничним станом.

За результатами розрахунку встановлено, що найбільші осьові зусилля та згинальні моменти зосереджуються в колонах сталевого каркасу; максимальний згинальний момент у колоні становить 17,4 т·м. Ферми покриття, опорні розкоси та елементи решітки працюють переважно на стиск і розтяг без істотної участі згину. Максимальні переміщення конструкції досягли 41,8 мм уздовж поздовжньої осі та 12,2 мм у вертикальному напрямку. Перевірка за I групою граничних станів показала, що колони не забезпечують нормативну міцність, тоді як інші елементи конструкції відповідають вимогам. Отримані результати дозволяють локалізувати слабкі елементи будівлі та обґрунтувати необхідність їх посилення для підвищення стійкості виробничих об'єктів до вибухових впливів в умовах воєнного стану.

**Ключові слова:** вибухова ударна хвиля, комп'ютерне моделювання, сталевий каркас, динамічне навантаження, ЛІРА-САПР.

## ASSESSMENT OF THE RELIABILITY OF BUILDING STRUCTURES UNDER THE EFFECT OF EXPLOSIVE LOADS

R. Purdenko<sup>1</sup>, Yu. Otrosh<sup>1</sup>, N. Rashkevich<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National University of Civil Defence of Ukraine

**Abstract.** The article presents the results of computer modeling of the stress–strain state of a single-storey industrial building with a steel frame subjected to a blast shock wave. The object of the study is a building measuring 60 × 15 m with a ridge height of 12 m, whose spatial stiffness is provided by steel columns, roof trusses, and a system of bracings. An emergency scenario caused by the detonation of 60 t of trinitrotoluene at a distance of 500 m from the building is considered. The parameters of the blast shock wave were determined using empirical relationships based on the scaled distance; the peak overpressure at the shock front reached 9.83 MPa.

The analysis was carried out using computer modeling with consideration of permanent, climatic, and accidental loads. The blast action was modeled by static and dynamic components, which made it possible to account for inertial effects and forced vibrations of the structure. Load combinations were formed according to the principle of the most unfavorable combinations, followed by verification of structural elements for the ultimate limit state of the first group.

The calculation results show that the highest axial forces and bending moments are concentrated in the steel frame columns; the maximum bending moment in a column is 17.4 t·m. Roof trusses,



support braces, and lattice members operate mainly in compression and tension, with no significant bending contribution. The maximum structural displacements reached 41.8 mm along the longitudinal axis and 12.2 mm in the vertical direction. Verification according to the first group of limit states indicated that the columns do not meet the required strength criteria, while the remaining structural elements satisfy the normative requirements. The obtained results make it possible to identify the most vulnerable elements of the building and substantiate the need for their strengthening in order to increase the resistance of industrial facilities to blast effects under martial law conditions.

**Keywords:** explosive shock wave, computer modeling, steel frame, dynamic load.

## 1 ВСТУП

За останні роки на території України зафіксовано низку випадків пошкодження та руйнування будівельних конструкцій, що супроводжувалися порушенням їхньої несучої здатності та цілісності окремих елементів або конструктивних систем загалом. Аналіз таких подій свідчить, що значна частина пошкоджень пов'язана з дією інтенсивних короточасних навантажень, характерних для вибухових впливів різного походження. В умовах воєнного стану частота та масштаб таких навантажень зростають, а спектр джерел вибухових впливів розширюється, що потребує оцінки працездатності будівельних конструкцій з урахуванням особливостей напружено-деформованого стану, фізико-механічних властивостей матеріалів, конструктивних схем будівель, а також технічного стану конструкцій на момент виникнення аварійного впливу.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Дослідження безпеки та надійності будівельних конструкцій в умовах динамічних навантажень, зосереджені на оцінці поведінки матеріалів та конструкцій під час вибухових та ударних впливів.

У роботі [1] розглянуто математичні моделі конструкційних матеріалів, що описують їхню динамічну поведінку під дією вибухових навантажень з урахуванням фізико-механічних властивостей бетону та армування. Запропоновано спрощений підхід із використанням коефіцієнтів динамічного зміцнення та детальний підхід, реалізований на основі рівнянь газогідродинаміки в програмному пакеті LS-DYNA. Отримані чисельні результати порівняно з експериментальними даними програми Blind Blast Test.

У роботі [2] встановлено, що за незмінної маси та висоти розташування вибухового заряду найбільший обсяг пошкодження бетону відповідає співвідношенню геометричних розмірів заряду 1:1. Показано, що зі збільшенням висоти розташування заряду за сталих інших параметрів інтенсивність пошкодження бетону зменшується, тоді як за постійного співвідношення розмірів вибухівки обсяг пошкоджень лінійно зростає зі збільшенням тротилового еквівалента вибуху.

У роботі [3] систематизовано дані щодо впливу ударно-вибухових навантажень на будівельні конструкції та обґрунтовано вимоги до проектування будівель і споруд цивільного захисту в умовах можливих вибухових впливів. Проаналізовано характер дії вибухової ударної хвилі та особливості розподілу тиску на конструкції залежно від відстані до епіцентру вибуху, а також сформульовано рекомендації щодо підвищення їх стійкості.

У роботі [4] розглянуто теоретичні та практичні аспекти випробування будівельних конструкцій під дією динамічних навантажень на фізичних моделях. Показано необхідність урахування втрати несучої здатності конструкцій при динамічних впливах і забезпечення їх роботи поза резонансними частотними діапазонами відповідно до вимог проектування та експлуатації.

У роботі [5] виконано дослідження вібраційної реакції будівель у межах реального інженерного проекту за дії вибухового навантаження з масою заряду 30 кг на відстанях 50–250 м від епіцентру. На основі поєднання теоретичного аналізу, польових випробувань і чисельного моделювання з використанням формули Садовського та програмних комплексів ANSYS/LS-DYNA встановлено закономірності поширення пікової швидкості частинок і її зв'язок із напруженим станом конструкцій.

У роботі [6] запропоновано підходи до оцінювання впливу багатоциклових вібродинамічних навантажень на надійність будівельних конструкцій. Обґрунтовано необхідність удосконалення чисельних моделей з урахуванням відмінностей між розрахунковими та експериментально визначеними динамічними характеристиками будівель і споруд.

У роботі [7] виконано аналіз стану будівель і споруд, пошкоджених унаслідок воєнних дій, з урахуванням випадків вибуху поблизу об'єкта та прямого влучання. Показано, що при непрямому впливі переважно пошкоджуються огорожувальні конструкції та покрівля, тоді як пряме влучання супроводжується частковим руйнуванням несучих елементів. За результатами порівняльного аналізу встановлено, що найбільш стійкими є каркасно-монолітні будівлі, а найменш стійкими – панельні, при цьому характер пошкоджень загалом не залежить від типу будівлі, але має конструктивно зумовлені особливості.

У роботі [8] розглянуто можливості інтеграції методів штучного інтелекту в інженерію пожежної безпеки будівель на основі аналізу сучасних підходів до чисельного моделювання пожеж. Запропоновано рекомендації щодо формування комплексних пожежних баз даних та проаналізовано алгоритми штучного інтелекту, придатні для виявлення й прогнозування сценаріїв пожеж і підтримки інтелектуальних систем пожежогасіння.

У роботі [9] автори розглядають методіку розрахунку стійкості будівель до прогресуючого обвалення під дією комбінованих навантажень пожежі та вибуху. Вона включає аналіз локального руйнування окремих елементів конструкції та подальшого перерозподілу зусиль у несучій системі, а також врахування термічного впливу пожежі на міцність матеріалів. Методика дозволяє визначати найбільш уразливі елементи конструкції та прогнозувати розвиток прогресуючого обвалення, що підвищує точність інженерних рішень при забезпеченні безпеки будівель.

У роботі [10] досліджено вибір матеріалу та товщини захисної стіни для будівель за умов вибуху водню різної потужності. Показано, що оптимальні конструктивні параметри захисних стін значно знижують ризик пошкодження основних несучих елементів. Результати мають практичне значення для проектування промислових та енергетичних об'єктів, що піддаються ризику вибухових впливів.

У роботі [11] продемонстровано програмну реалізацію методіки оцінювання стійкості будівель до прогресуючого обвалення. Програмне забезпечення дозволяє автоматизувати процес аналізу аварійних сценаріїв, урахувати різні типи початкових пошкоджень та зміну фізико-механічних властивостей матеріалів. Це підвищує оперативність та точність оцінки технічного стану будівель у надзвичайних умовах.

У роботі [12] запропоновано удосконалену термомеханічну модель поведінки залізобетонних конструкцій під дією пожежі та вибуху. Модель поєднує тепловий та механічний аналіз, враховує нелінійну поведінку матеріалів, втрату жорсткості та міцності елементів у часі. Це дозволяє більш точно прогнозувати граничні стани конструкцій і момент втрати несучої здатності, що є критично важливим для безпеки людей.

За результатами аналізу літературних джерел встановлено, що існуючі методіки оцінки стійкості будівель до вибухових та пожежних навантажень охоплюють широкий спектр підходів: від чисельного моделювання матеріалів і конструкцій до програмної реалізації оцінки аварійних сценаріїв. Водночас залишаються відкритими питання, пов'язані із комплексним урахуванням комбінованих впливів вибуху та пожежі на будівлі різного конструктивного типу, а також адаптацією методик до умов воєнного стану.

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Мета дослідження – провести аналіз надійності будівельних конструкцій будівель та споруд при дії вибухової хвилі в умовах воєнного стану з урахуванням забезпечення безпеки людей під час пожеж.

Для досягнення мети були поставлені наукові завдання:

1. Провести аналіз основних положень розрахунку будівельних конструкцій за граничними станами та виконати огляд можливостей і функцій програмного комплексу «Ліра-САПР».

2. Провести моделювання будівлі виробничого об'єкта на вплив вибухової хвилі від вибуху за допомогою методу комп'ютерного моделювання.

### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

#### 4.1. Аналіз основних положень розрахунку будівельних конструкцій за граничними станами та огляд можливостей і функцій програмного комплексу «Ліра-САПР».

Надійність будівельних конструкцій визначається якістю проектних рішень, відповідністю виконаних робіт проектній документації, правильністю виконання будівельно-монтажних робіт та умовами експлуатації. Недотримання норм і технологій призводить до пошкодження конструкцій і розвитку прогресуючого обвалення, що є критично важливим при оцінці безпеки людей.

Для забезпечення надійності будівельних конструкцій на стадії проектування застосовують чисельні методи з використанням програмних комплексів, серед яких ПК «Ліра-САПР» відзначається широкими можливостями інтеграції з технологією інформаційного моделювання будівель (BIM) та CAD-додатками через стандартизовані формати даних (DXF, IFC, STP, STL та інші). Система підтримує створення моделей будівель і споруд з урахуванням різних конструктивних схем, матеріалів та експлуатаційних умов.

ПК «Ліра-САПР» дозволяє проводити розрахунки конструкцій під статичні та динамічні навантаження, включно з сейсмічними, вітровими, імпульсними, ударними та вібраційними впливами. Для сейсмічних навантажень реалізовані вимоги нормативів України та інших країн. Комплекс дозволяє визначати головні і еквівалентні напруги та здійснювати перевірку міцності за різними теоріями: Губера-Мізеса, Мора, Друкера-Прагера, Писаренко-Лебедева, Кулона-Мора та іншими.

Фізична нелінійність матеріалів моделюється через різноманітні залежності  $\sigma$ – $\varepsilon$ , що дозволяє відстежувати розвиток тріщин, прояв деформацій повзучості та плинності матеріалів. Моделювання охоплює як моно-, так і бі-матеріальні конструкції, забезпечуючи прогнозування локального руйнування елементів та перерозподілу зусиль у несучій системі до моменту втрати несучої здатності.

ПК «Ліра-САПР» забезпечує аналіз граничних станів конструкцій, що включає перевірку міцності елементів, оцінку впливу динамічних навантажень, аналіз взаємодії окремих елементів системи та оцінку ризику прогресуючого обвалення. Це дозволяє здійснювати більш точне прогнозування технічного стану будівель і споруд, підвищуючи рівень безпеки для людей у разі аварійних навантажень, включно з вибуховими та пожежними впливами.

#### 4.2. Моделювання будівлі виробничого об'єкта на вплив вибухової хвилі від вибуху вибухової речовини за допомогою методу комп'ютерного моделювання.

Об'єктом дослідження є одноповерхова виробнича будівля зі сталевим каркасом (рис. 1). Геометричні розміри будівлі становлять: висота до конька покриття – 12 м, висота до нижнього поясу ферм – 3 м, довжина – 60 м, ширина – 15 м.

Колони каркасу виконані зі сталевих двотаврових профілів. Закріплення колон у фундаментах прийнято жорстким у повздовжньому та поперечному напрямках. Покриття будівлі спирається на сталеві ферми, виготовлені з гнутих зварних профілів; опирання ферм на колони – шарнірне. Ригелі покриття виконані зі швелерів. Просторова жорсткість каркасу забезпечується системою вертикальних і горизонтальних зв'язків по колонах і фермах, виконаних з одиночних рівнополкових кутників.

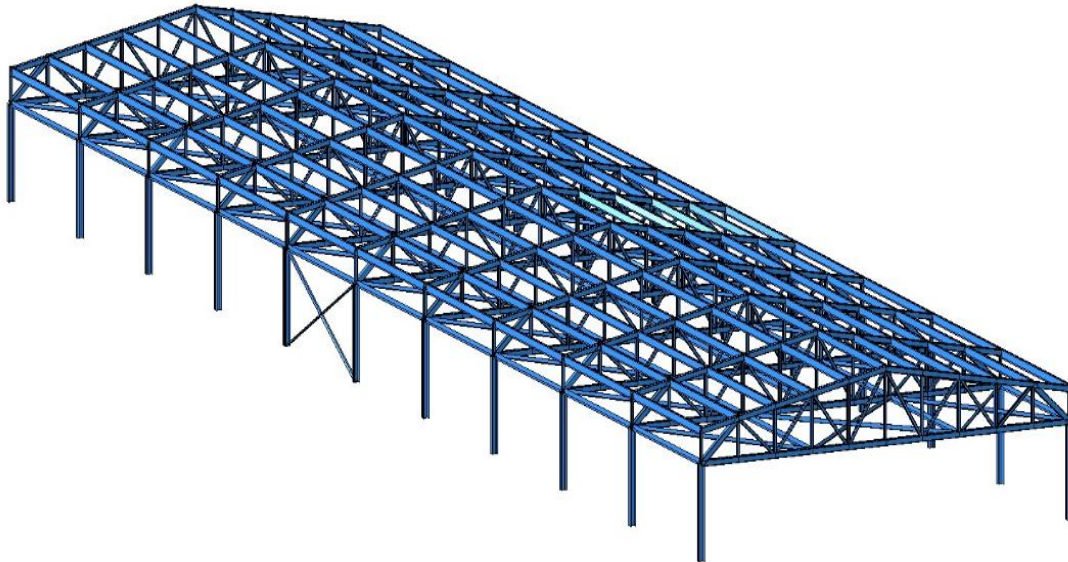


Рис. 1. Тривимірний розрахунковий схем будівлі

Аварійна дія, що розглядається, пов'язана з вибухом вибухової речовини – тринітротолуолу – на відкритій місцевості на відстані 500 м від будівлі. Вибух призводить до формування повітряної ударної хвилі, яка діє на зовнішні поверхні будівлі та її несучі елементи у вигляді короткочасного імпульсного навантаження.

У розрахунковій моделі враховано види навантажень і впливів:

1. Власна вага конструкцій – постійне навантаження, яке автоматично враховується в моделі з коефіцієнтом надійності за навантаженням 1,05.
2. Вага огорожувальних конструкцій – постійне навантаження, що включає:
  - навантаження від покрівельного огороження у вигляді рівномірно розподіленого навантаження на прогони;
  - навантаження від стінового огороження у вигляді зосереджених сил, прикладених до основних колон каркасу та колон фахверка.
3. Кліматичні навантаження – снігове та вітрове навантаження, прийняті відповідно до чинних нормативних документів (згідно з додатками).
4. Особливе навантаження – тиск вибухової ударної хвилі, спричинений вибухом вибухової речовини.

Вихідними даними для визначення параметрів вибухової ударної хвилі є маса вибухової речовини  $M_{вр}$  (кг) та відстань від центру вибуху до розглянутої точки  $R$  (м).

Параметри вибухової ударної хвилі залежать від наведеної відстані

$$R = \frac{R}{\sqrt[3]{Q_{эф}}}, \quad (1)$$

де  $Q_{эф}$  – ефективна маса, яка дорівнює

$$Q_{эф} = (1 - \varepsilon) \alpha M_{вр}, \quad (2)$$

де  $\varepsilon$  – частка енергії вибуху, що витрачається на утворення вирви, в даній ситуації прийнято рівною 0;

$\alpha$  – відношення питомої енергії вибуху вибухової речовини, дорівнює 1,0, якщо тип вибухової речовини невідомий, то можна приймати  $\alpha = 1,5$ .

За умови  $M_{вр} = 60000$  кг отримаємо:

$$Q_{эф} = (1 - 0) \cdot 1 \cdot 60000 = 60000 \text{ кг,}$$

$$R = \frac{500}{\sqrt[3]{60000}} = 12,8 (\text{м} / \text{кг}^{1/3}).$$

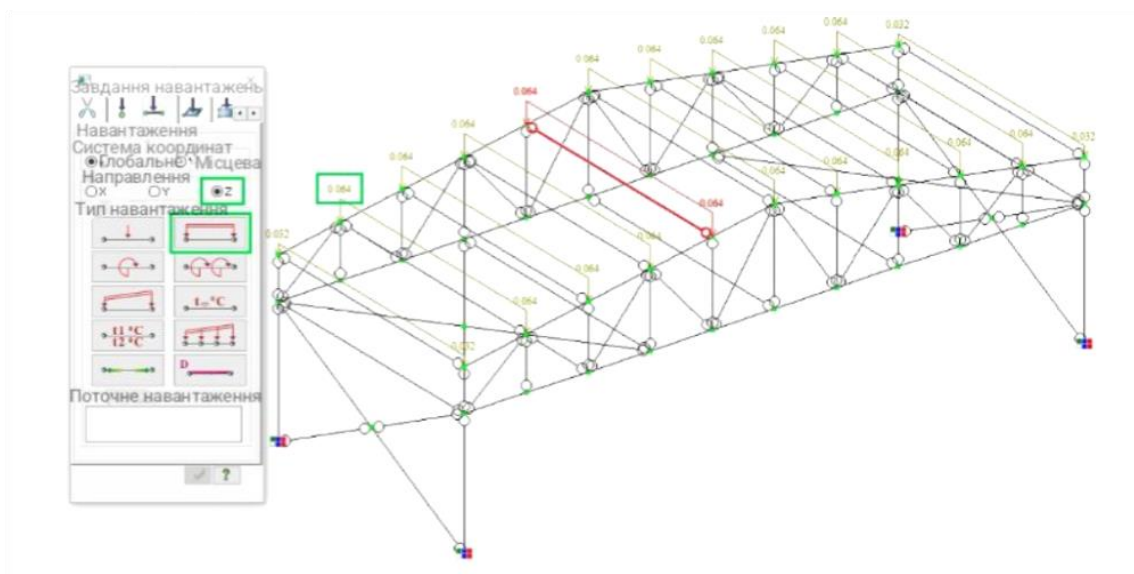
Надмірний тиск на фронті вибухової хвилі визначається за емпіричною залежністю

$$\left( \Delta\rho_{\phi} = \frac{0,92}{R} + \frac{3,5}{R^2} + \frac{10,6}{R^3} \right) \cdot 10^5. \quad (3)$$

Підставивши значення наведеної відстані, отримано  $\Delta\rho_{\phi} = 1002 \text{ тс} / \text{м}^2$  або 9,83 МПа.

Розрахований надмірний тиск вибухової хвилі прикладається в розрахунковій моделі у вигляді рівномірно розподіленого динамічного навантаження на несучі елементи будівлі, зокрема на колони сталевого каркасу, з урахуванням напрямку поширення вибухової хвилі.

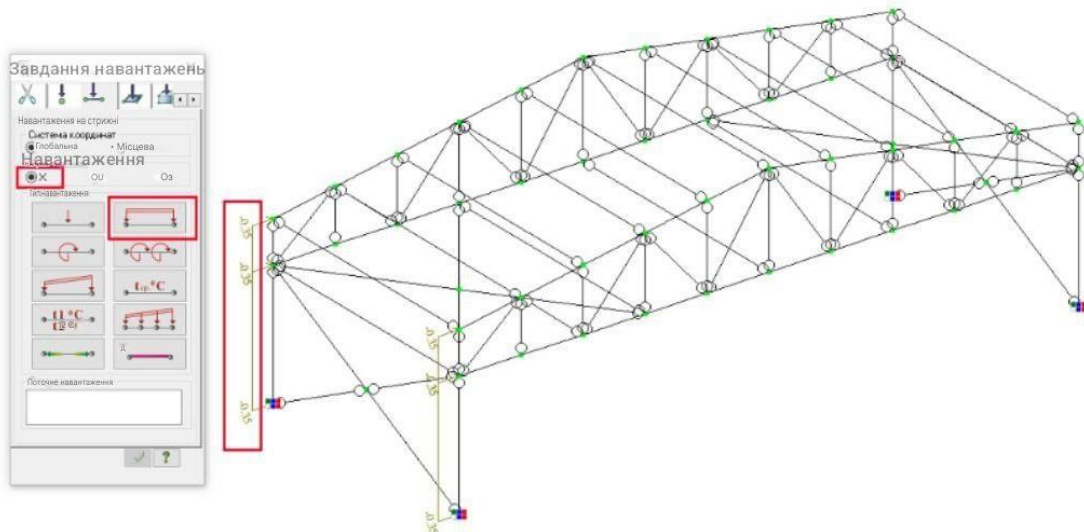
Навантаження від покриття задаються на прогони в окремому завантаженні у вигляді рівномірно розподіленого навантаження (рис. 2).



**Рис. 2.** Схема задання навантаження на прогони покриття

Кліматичні навантаження від снігу задаються аналогічним способом відповідно до нормативних вимог.

Вітрове навантаження прикладається до колон каркасу в окремому завантаженні у вигляді рівномірно розподіленого навантаження (рис. 3).



**Рис. 3.** Схема задання вітрового навантаження

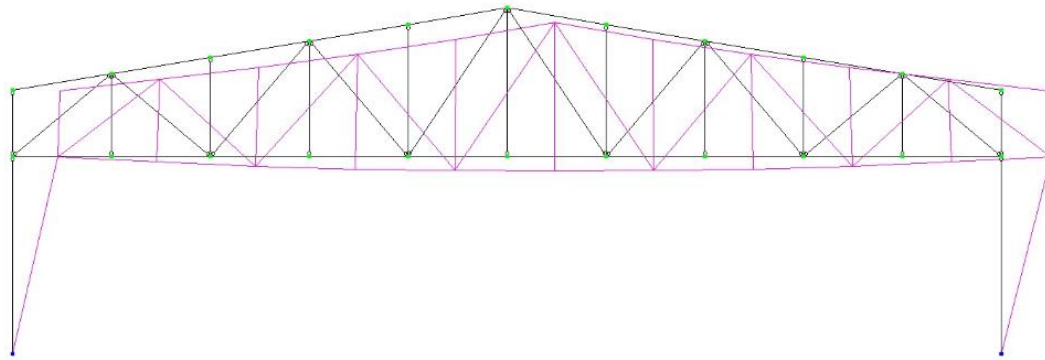
Навантаження від вибуху має імпульсний, миттєвий характер дії та викликає вимушені коливання будівлі, які формуються під впливом різкого зростання тиску на несучі елементи. Такий характер навантаження відрізняється від тривалих або квазістатичних впливів і потребує окремого підходу при моделюванні. Для коректного врахування впливу вибухової ударної хвилі розглядаються два типи завантажень: статичне та динамічне.

Статична складова вибухового навантаження застосовується до основних несучих елементів будівлі, зокрема до колон каркасу, та використовується для визначення початкового розподілу зусиль і напружень без врахування інерційних ефектів. Вона дозволяє врахувати середній рівень силового впливу вибуху та створити базову напружено-деформовану схему конструкції.

Динамічна складова задається окремим завантаженням і включає вплив статичної складової як початкове збуджувальне навантаження. Це дозволяє врахувати інерційні сили, що виникають у конструкціях через швидку зміну навантаження, а також оцінити реакцію будівлі у вигляді додаткових переміщень і зусиль. Такий підхід забезпечує можливість прогнозування локальної концентрації напружень, розвитку деформацій та потенційних зон ушкоджень у конструкції.

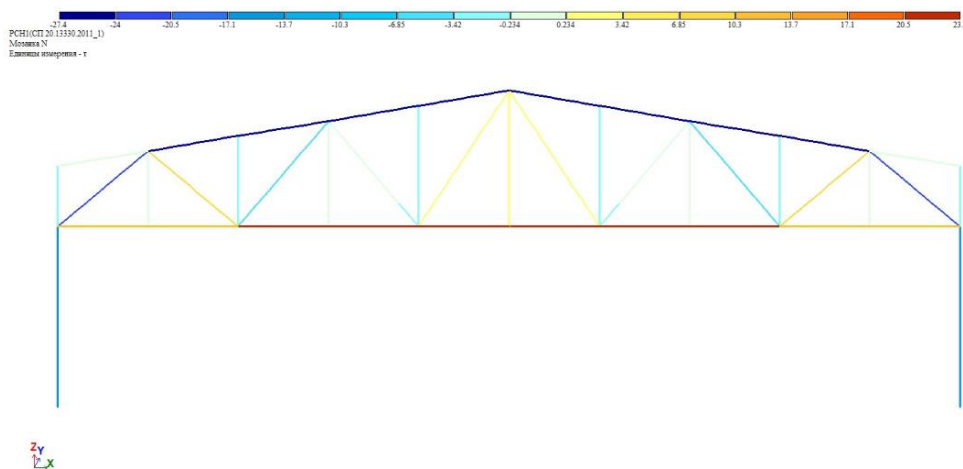
Після задання всіх постійних, тимчасових, кліматичних та особливих навантажень формується набір розрахункових поєднань. Будівельні конструкції розраховуються на найбільш несприятливі комбінації навантажень, що дозволяє визначити критичні умови роботи елементів конструкції. Для кожного поєднання проводиться перевірка відповідності граничним станам першої та другої групи, що забезпечує оцінку міцності, стійкості та працездатності конструкції.

Результатом розрахунку є визначені внутрішні зусилля та переміщення елементів конструкції, що використовуються для подальшого конструктивного аналізу та оптимізації будівельних рішень. На основі цих даних формується деформована схема будівлі, що дозволяє візуалізувати слабкі ділянки конструкції та оцінити ефективність обраних заходів щодо забезпечення безпеки (рис. 4).



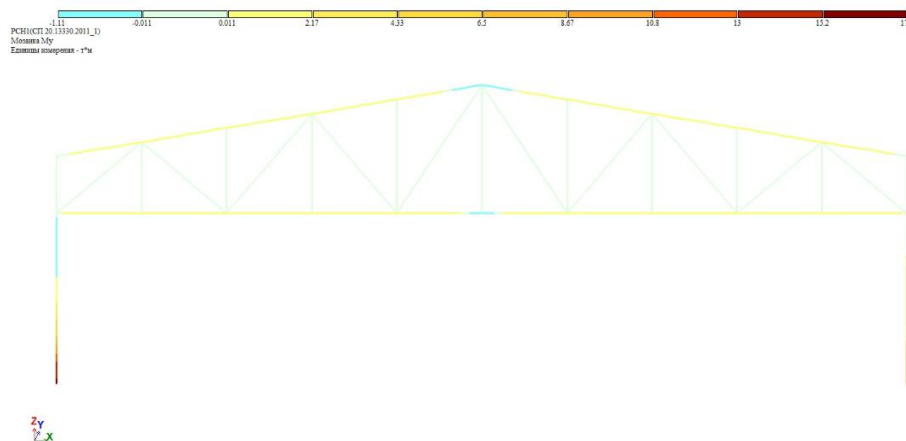
**Рис. 4.** Деформована схема будівлі

Результати розрахунку показали розподіл внутрішніх зусиль та переміщень у елементах рами під впливом вибухової ударної хвилі. Максимальні осьові зусилля  $N$  у колоні рами наведені на рис. 5.



**Рис. 5.** Максимальні осьові зусилля  $N$  в елементах рами

Аналіз згинальних моментів  $M_y$  показав, що найбільше навантаження припадає на колони, де  $M_y = 17,4$  (рис. 6). В інших елементах рами – верхньому та нижньому поясах ферми, опорних розкосах та решітках ферми – згинальні моменти практично відсутні, що свідчить про їхню переважну роботу на розтяг та стиск, а не на згин.



**Рис. 6.** Максимальні згинальні моменти  $M_y$  в елементах рами

Максимальні переміщення конструкції також були визначені для двох головних осей координат: вздовж осі  $X$  – 41,8 мм (рис. 7), вздовж осі  $Z$  – 12,2 мм (рис. 8). Ці значення відображають реакцію конструкції на миттєве навантаження вибуху та дозволяють оцінити потенційні деформації, які можуть впливати на працездатність несучих елементів та огорожувальних конструкцій.

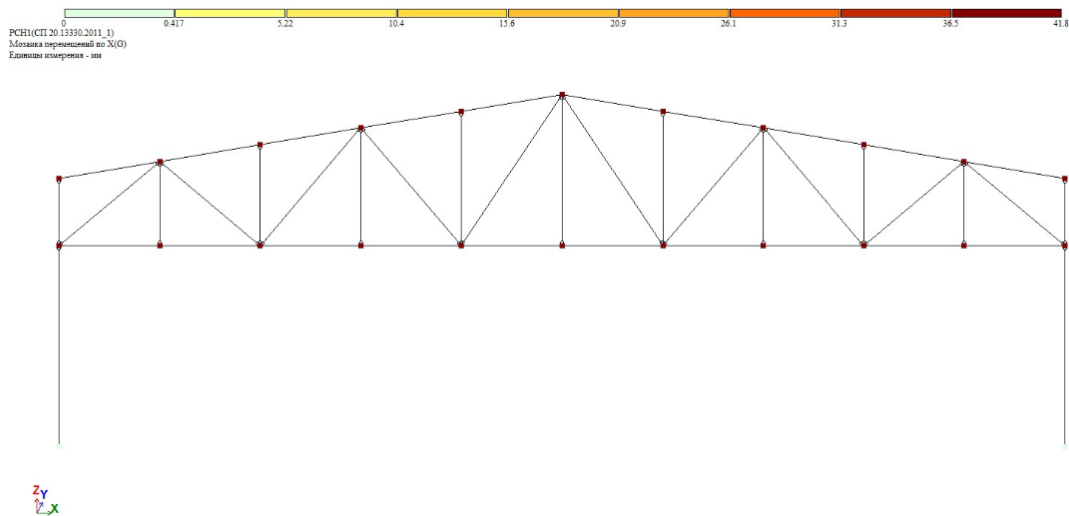


Рис. 7. Мозаїка переміщень уздовж осі  $X$ , мм

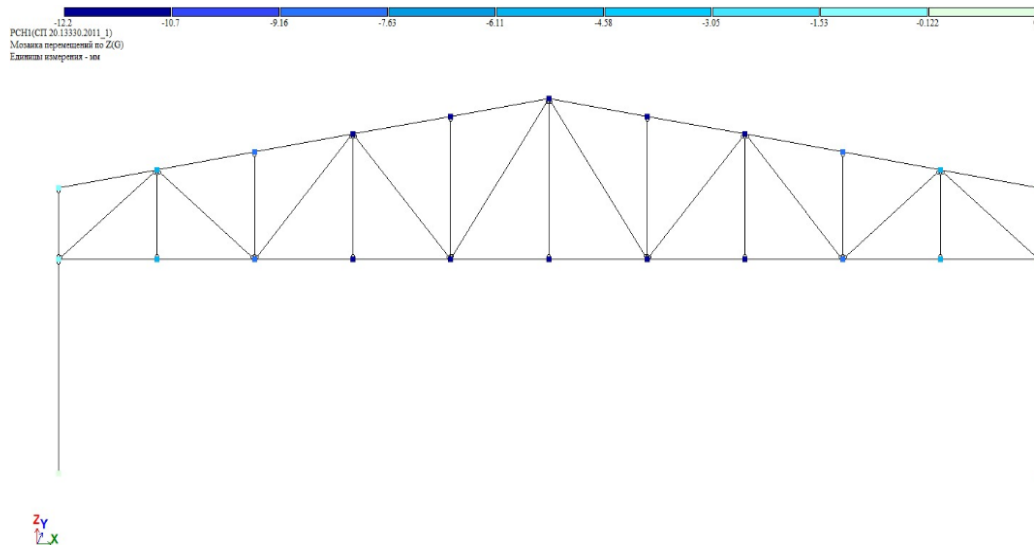


Рис. 8. Мозаїка переміщень уздовж осі  $Z$ , мм

Перевірка конструкції за I групою граничних станів показала, що міцність колони не забезпечена, тобто даний елемент не відповідає нормативним вимогам. Інші елементи – нижній та верхній пояси ферми, опорний розкіс ферми та решітка ферми – задовольняють вимоги I групи граничних станів. Це означає, що при розглянутих навантаженнях вони здатні витримати прикладені сили без локального руйнування або втрати несучої здатності.

Отримані результати дозволяють ідентифікувати слабкі елементи конструкції, які слід укріпити або замінити матеріал для забезпечення безпечної експлуатації будівлі під впливом вибухових навантажень.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянуті можливості програмного комплексу «ЛІРА-САПР» забезпечують реалізацію розрахунків за граничними станами для різних конструктивних схем і типів навантажень, з урахуванням нелінійної роботи матеріалів. Застосування модулів динамічного аналізу, критеріїв міцності та засобів моделювання фізичної нелінійності створює умови для чисельного відтворення напружено-деформованого стану конструкцій і визначення граничних умов їх працездатності в аварійних режимах.

## 6 ВИСНОВКИ

1. Основні положення розрахунку будівельних конструкцій за граничними станами орієнтовані на використання чисельних методів з урахуванням фізичної та геометричної нелінійності для оцінювання надійності та безпеки будівель і споруд за дії складних навантажень. Урахування динамічних впливів є необхідним для коректного визначення напружено-деформованого стану конструкцій, аналізу локальних пошкоджень, перерозподілу зусиль у несучих системах та можливого розвитку прогресуючого обвалення.

2. За результатами моделювання встановлено, що найбільше навантаження від вибухової ударної хвилі припадає на колони сталевого каркасу, де виникають максимальні осьові зусилля та згинальні моменти, тоді як ферми, опорні розкоси та решітка конструкції працюють переважно на стиск і розтяг. Динамічний вплив вибуху спричиняє миттєві переміщення будівлі, що вказує на можливі локальні концентрації напружень та деформацій. Перевірка за I групою граничних станів показала, що колони не забезпечують необхідну міцність, тоді як інші елементи конструкції відповідають нормативним вимогам, що дозволяє визначити слабкі ділянки для посилення або заміни матеріалу.

## 7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

## Література

1. Kelasyev, N.G., Avdeev, K.V., Levin, D.I., Bobrov, V.V. (2023). Models of Concrete and Reinforcement under Explosive Loads. <https://doi.org/10.24000/0409-2961-2023-3-14-21>
2. Yao, H.W., Jia, X., Huang, Z.X., Yang, C.Z., Shang, W. (2023, April). Research on the damage law of reinforced concrete beams caused by cuboid explosives under contact explosion. Journal of Physics: Conference Series. 2460(1). 012090. IOP Publishing. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2460/1/012090>
3. Ivanchenko, H., Hetun, H., Bezklubenko, I., Solomin, A., Posternak, O. (2023). Influence of Explosive Loads on Buildings and Structures of the Population Civil Protection. Strength of Materials and Theory of Structures. 111. 39–48.
4. Rotaru, A. (2023). Dynamic load assessment of building structures. E3S Web of Conferences. 402. 07015. EDP Sciences. URL: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202340207015>
5. Yuan, Y., Gao, Z., He, L., Lei, Z. (2024). Research on the Vibration Response of High-Rise Buildings under Blasting Load. Mathematics. 12(20). 3165. URL: <https://doi.org/10.3390/math12203165>
6. Mogilyuk, Z.G., Tereshin, A.A., Alekseev, G.V. (2024). Computational Models of Dynamic Load Sources for Modeling of Construction Structures Operation Used in Monitoring of Technical Condition of Buildings and Structures. Buildings. 14(10). DOI: <https://doi.org/10.3390/buildings14103193>

7. МЕНЕЙЛЮК О.І., МЕНЕЙЛЮК І.О., РУССКИЙ В.В. Дослідження стану будівель та споруд пошкоджених внаслідок воєнних дій. *Building Production*. 2023. № 75. С. 17–26. URL: <https://doi.org/10.36750/2524-2555.75.17-26>
8. Ruchit, P. (2024). Applications of artificial intelligence in enhancing building fire safety. *International Journal*. 13(1). 1117–1132.
9. Майборода Р.І., Отрош Ю.А. Дослідження методики розрахунку стійкості до прогресуючого обвалення будівель внаслідок пожежі та вибуху. *Комунальне господарство міст*. 2025. № 3(191). С. 485–495. URL: <https://doi.org/10.33042/2522-1809-2025-3-191-485-495>
10. Skob, Y., Dreval, Y., Vasilchenko, A., Maiboroda, R. (2023). Selection of Material and Thickness of the Protective Wall in the Conditions of a Hydrogen Explosion of Various Power. *Key Engineering Materials*. 952. 121–129. URL: <https://doi.org/10.4028/p-ST1VeT>
11. Майборода Р.І., Отрош Ю.А. Програмна реалізація оцінювання стійкості будівель до прогресуючого обвалення. *Проблеми надзвичайних ситуацій*. 2025. № 1(41). С. 177–193. URL: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/25353>
12. Maiboroda, R., Otroch, Yu. (2025). Improved thermomechanical model for predicting the behaviour of reinforced concrete structures under fire and explosion conditions. *Mechanics and Mathematical Methods*. VII(2). 66–85. URL: <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2025-7-2-66-85>.

## References

1. Kelasyev, N.G., Avdeev, K.V., Levin, D.I., Bobrov, V.V. (2023). Models of Concrete and Reinforcement under Explosive Loads. <https://doi.org/10.24000/0409-2961-2023-3-14-21>
2. Yao, H.W., Jia, X., Huang, Z.X., Yang, C.Z., Shang, W. (2023, April). Research on the damage law of reinforced concrete beams caused by cuboid explosives under contact explosion. *Journal of Physics: Conference Series*. 2460(1). 012090. IOP Publishing. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2460/1/012090>
3. Ivanchenko, H., Hetun, H., Bezklubenko, I., Solomin, A., Posternak, O. (2023). Influence of Explosive Loads on Buildings and Structures of the Population Civil Protection. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 111. 39–48.
4. Rotaru, A. (2023). Dynamic load assessment of building structures. *E3S Web of Conferences*. 402. 07015. EDP Sciences. URL: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202340207015>
5. Yuan, Y., Gao, Z., He, L., Lei, Z. (2024). Research on the Vibration Response of High-Rise Buildings under Blasting Load. *Mathematics*. 12(20). 3165. URL: <https://doi.org/10.3390/math12203165>
6. Mogilyuk, Z.G., Tereshin, A.A., Alekseev, G.V. (2024). Computational Models of Dynamic Load Sources for Modeling of Construction Structures Operation Used in Monitoring of Technical Condition of Buildings and Structures. *Buildings*. 14(10). DOI: <https://doi.org/10.3390/buildings14103193>
7. Meneylyuk, O.I., Meneylyuk, I.O., Russky, V.V. (2023). Doslidzhennya stanu ta poshkodzhennya budivel' vnaslidok voyennykh diy. *Building Production*. 75. 17–26. URL: <https://doi.org/10.36750/2524-2555.75.17-26>
8. Ruchit, P. (2024). Applications of artificial intelligence in enhancing building fire safety. *International Journal*. 13(1). 1117–1132.
9. Mayboroda, R.I., Otrosh, Yu.A. (2025). Doslidzhennya metody rozrakhunku stiykosti do prohresu obvalennya budivel' vnaslidok pozhezhi vybukhu. *Komunal'ne hospodarstvo mist*. 3(191). 485–495. URL: <https://doi.org/10.33042/2522-1809-2025-3-191-485-495>
10. Skob, Y., Dreval, Y., Vasilchenko, A., Maiboroda, R. (2023). Selection of Material and Thickness of the Protective Wall in the Conditions of a Hydrogen Explosion of Various Power. *Key Engineering Materials*. 952. 121–129. URL: <https://doi.org/10.4028/p-ST1VeT>
11. Mayboroda, R.I., Otrosh, Yu.A. (2025). Prohramna realizatsiya otsinky konstruktsiyi do prohresuvannya stiykosti obvalennya. *Problemy nadzvychaynykh sytuatsiy*. 1(41). 177–193. URL: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/25353>

12. Maiboroda, R., Otroch, Yu. (2025). Improved thermomechanical model for predicting the behaviour of reinforced concrete structures under fire and explosion conditions. Mechanics and Mathematical Methods. VII(2). 66–85. URL: <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2025-7-2-66-85>

Стаття надійшла до редакції 21.01.2026

Стаття прийнята до друку 28.02.2026

Дата публікації статті 26.03.2026

**Пурденко Роман Русланович**

Національний університет цивільного захисту України  
аспірант

вул. Онопрієнка, 8, Черкаси, Україна, 18000

ORCID: 0000-0001-6467-4133

**Отрош Юрій Анатолійович**

Національний університет цивільного захисту України

д.т.н., професор, начальник кафедри

вул. Онопрієнка, 8, Черкаси, Україна, 18000

[otrosh\\_yurii@nuczu.edu.ua](mailto:otrosh_yurii@nuczu.edu.ua)

ORCID: 0000-0003-0698-2888

**Рашкевич Ніна Владиславна**

Черкаський державний технологічний університет

доктор філософії, доцент

вул. Онопрієнка, 8, Черкаси, Україна, 18000

[rashkevych\\_nina@nuczu.edu.ua](mailto:rashkevych_nina@nuczu.edu.ua)

ORCID: 0000-0001-5124-6068

*Для посилань:*

Пурденко Р. Р., Отрош Ю. А., Рашкевич Н. В. Оцінка надійності будівельних конструкцій під впливом вибухових навантажень . Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. № 1. С. 28–40.

*For references:*

R. Purdenko, Yu. Otrosh, N. Rashkevich (2026). Assessment of the reliability of building structures under the effect of explosive loads. Mechanics and mathematical methods. VIII (1). 28–40.

Оцінка надійності будівельних конструкцій під впливом вибухових навантажень © 2026 by Пурденко Р. Р., Отрош Ю. А., Рашкевич Н. В. is licensed under CC BY 4.0

УДК 691.32

## ПОШУК ОПТИМАЛЬНИХ СКЛАДІВ БЕТОНІВ ДОРОЖНІХ ПОКРИТТІВ І ТРАНСПОРТНИХ СПОРУД З ВИКОРИСТАННЯМ ВТОРИННОГО ЩЕБЕНЮ ПОКРОКОВИМ СКАНУВАННЯМ ПОЛІВ ВЛАСТИВОСТЕЙ

Кровяков С. О.<sup>1</sup>, Шимченко П. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Анотація:** Зруйновані та демонтовані залізобетонні конструкції є перспективною сировиною для виробництва щебеню. Бетони на основі вторинного щебеню вигідно використовувати в транспортному будівництві.

За оптимальним планом проведений експеримент, в якому варіювалися 3 фактори складу бетону на вторинному щебені: частина цементу, що замінюється золою виносом (від 0 до 20%); кількість суперпластифікатора полікарбоксилатного типу (від 3,0 до 4,8 кг/м<sup>3</sup>); кількість поліпропіленової фібри (від 0 до 3,0 кг/м<sup>3</sup>). Всі бетонні суміші мали рухомість S1. Розраховано комплекс експериментально-статистичних (ЕС) моделей, що описують вплив варійованих факторів на міцність бетону на стиск, міцність на розтяг при згині, морозостійкість, стиранність та собівартість виготовлення 1 м<sup>3</sup> суміші.

Пошуку оптимальних складів бетонів для жорстких дорожніх покриттів і транспортних споруд реалізовано покроковим сканування полів властивостей за ЕС-моделями. Оптимальні склади мають забезпечувати нормативні рівні міцності на стиск (не менш 40 МПа для бетонів дорожніх покриттів та не менш 50 МПа для бетонів транспортних споруд), міцності на розтяг при згині (не менш 5 МПа), морозостійкості (не менш F200) та зносостійкості (не більш 0,5 г/см<sup>2</sup>) бетону при мінімізації собівартості їх виготовлення. Крок генерації координат розрахункових точок при скануванні прийнято відповідно до технологічних особливостей процесу виготовлення бетонних сумішей в промислових умовах. В кожній з генерованих точок за відповідними ЕС-моделями були розраховані значення досліджених механічних показників, які автоматично порівнювалися з рівнем висунутих критеріїв обмеження. За результатами перевірки було проведено відсіювання точок (наборів координат), які не забезпечували виконання одночасно всіх критеріїв обмеження. Надалі точки, що залишилися з початкового масиву, були проранжовані за значенням показника собівартості 1 м<sup>3</sup>, що дало змогу з високою точністю визначити оптимальні склади бетонів. Визначені склади бетонів забезпечують необхідний рівень механічних показників матеріалу, мають мінімальну собівартість з врахуванням поточних ринкових цін, та є ефективними з екологічної точки зору.

**Ключові слова:** вторинний щебень, фібра, зола виносення, експериментально-статистичне моделювання, сканування полів властивостей, жорстке дорожнє покриття, оптимізація.

## SEARCH FOR OPTIMAL COMPOSITIONS OF CONCRETE FOR RIGID PAVEMENT AND TRANSPORT STRUCTURES USING RECYCLED AGGREGATE BY STEP-BY-STEP SCANNING OF PROPERTY FIELDS

S. Kroviakov<sup>1</sup>, P. Shymchenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract:** Destroyed and dismantled reinforced concrete structures represent a promising raw material source for the production of recycled aggregate. Concrete based on recycled aggregate is advantageous for use in transportation construction.

An experiment was carried out according to an optimal experimental design, in which three composition factors of concrete with recycled aggregate were varied: the proportion of cement



replaced by fly ash (from 0 to 20%); the dosage of polycarboxylate-based superplasticizer (from 3.0 to 4.8 kg/m<sup>3</sup>); and the content of polypropylene fiber (from 0 to 3.0 kg/m<sup>3</sup>). All concrete mixtures had a slump class S1. A set of experimental–statistical (ES) models was developed to describe the influence of the varied factors on compressive strength, flexural tensile strength, freeze–thaw resistance, abrasion resistance, and the production cost of 1 m<sup>3</sup> of concrete mixture.

The search for optimal concrete compositions for rigid pavements and transportation structures was implemented through step-by-step scanning of property fields using the ES models. The optimal compositions were required to ensure normative performance levels of compressive strength (not less than 40 MPa for rigid pavement concretes and not less than 50 MPa for concretes of transportation structures), flexural tensile strength (not less than 5 MPa), freeze–thaw resistance (not less than F200), and abrasion resistance (not more than 0.5 g/cm<sup>2</sup>), while minimizing production cost. The step size for generating calculation points during scanning was adopted in accordance with the technological features of concrete production under industrial conditions. At each generated point, the values of the investigated mechanical properties were calculated using the corresponding ES models and automatically compared with the specified constraint criteria. Based on the verification results, points (sets of coordinates) that failed to satisfy all constraint criteria simultaneously were eliminated. The remaining points from the initial dataset were ranked according to the cost indicator of 1 m<sup>3</sup> of concrete mixture, which made it possible to determine the optimal concrete compositions with high accuracy. The identified compositions ensure the required mechanical performance of the material, have minimal production cost considering current market prices, and are environmentally efficient.

**Keywords:** recycled aggregate, fiber, fly ash, experimental–statistical modeling, property field scanning, rigid pavement, optimization

## 1 ВСТУП

В результаті бойових дій чисельних пошкоджень зазнала транспортна інфраструктура України, повністю або частково зруйновано багато будівель та споруд [1]. Відновлення інфраструктури потребує значних обсягів бетонних робіт, відповідно витрат бетону. Найбільшим за питомою вагою компонентом бетонної суміші є щебінь. Зруйновані та демонтовані конструкції є сировиною для виробництва вторинних заповнювачів, зокрема щебеню. Використання вторинного щебеню є важливою економічною і екологічною задачею, при цьому саме транспортне будівництво можна вважати найбільш перспективним об'єктом застосування перероблених заповнювачів. Тому актуальною є задача розробки ефективних бетонів для конструкцій дорожніх покриттів і транспортних споруд на основі вторинного щебеню та з максимальним залученням відходів виробництва. Можливість отримання бетонів з високими показниками міцності та довговічності при використанні вторинного щебеню, насамперед з перероблених залізобетонних конструкцій, підтверджена в роботах багатьох авторів [2, 3 та ін.].

Задача зниження енерговитрат на виробництво бетонів залишається актуальною для України та інших країн. Серед компонентів бетонної суміші найбільше енергії витрачається на виробництво цементу. Відповідно доцільним є заміна частини цементу золою або іншими відходами виробництва [4]. Також це сприяє зниженню викидів CO<sub>2</sub> в атмосферу, що відповідає задачам сталого розвитку [5]. Ефективність використання золи в бетонах жорстких дорожніх покриттів підтверджена у роботах [6, 7, 8 та ін.]. Завдяки різноспрямованим та динамічним навантаженням на конструкції для бетонів дорожніх покриттів та транспортних споруд також ефективним є дисперсне армування, зокрема поліпропіленовою фіброю [9, 10].

При виробництві бетонів жорстких дорожніх покриттів задача економії ресурсів та/або зниження екологічних наслідків має вирішуватися з врахуванням вимог до фізико-механічних властивостей бетонів. Тобто на практиці необхідно проводити оптимізацію складу бетонної суміші в залежності від фактично використаних матеріалів для її приготування, забезпечивши необхідний для конкретного типу конструкцій рівень міцності, морозостійкості та інших унормованих механічних показників бетону [11, 12].

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Одним з найбільш ефективних і якісно опрацьованих методів багатокритеріальної оптимізації складів бетонів як композиційних матеріалів є пошук рішень за комплексом експериментально-статистичних (ЕС) моделей, розрахованих за результатами планованого експерименту [11, 13, 14]. Кожна ЕС-модель комплексу відображає вплив варійованих факторів на один конкретний фізико-механічний або структурний показник. Завдяки тому, що всі моделі комплексу побудовані в однакових межах факторного простору експерименту, їх спільний аналіз при суміщенні полів властивостей (відгуків) дозволяє проводити пошук оптимальних рішень. При суміщенні визначається область припустимих рішень, тобто у який методом випадковим виконуються вимоги щодо всіх висунутих критеріїв обмеження. В даній області з врахуванням критерію або критеріїв оптимізації визначається оптимальне рішення [13, 15].

Пошук рішень за описаним вище принципом може проводитися графічним методом на відповідних діаграмах або методом випадкового сканування полів властивостей (методом Монте-Карло). Перевагою графічного методу вибору

оптимальних рішень є його наочність, що робить його достатньо зручним в інженерній практиці. Прикладами застосування графічного методу аналізу діаграм для пошуку оптимальних складів бетонів є роботи [12, 16, 17, 18 та ін.].

При реалізації методу випадковим сканування полів властивостей (Монте-Карло) генерується набір випадкових координат у межах факторного простору експерименту, наприклад 10000 координат. Для задач оптимізації складу бетону – це відповідний набір різних складів бетону. Координати кожного випадково генерованого складу підставляються у відповідні ЕС-моделі. Далі проводиться процес «фільтрації» за критеріями обмеження та формується набір точок на суміщених полях властивостей, в яких рівні проаналізованих властивостей відповідають всім критеріям – тобто згадана вище область припустимих рішень. В даній області за відповідною ЕС-моделлю розраховується значення критерію оптимізації для всього набору точок та приймається рішення. Ця процедура для підвищення точності може проводитися в декілька ітерацій з поступовим наближенням до оптимального рішення. Прикладами застосування методом випадкового сканування полів властивостей для визначення оптимальних складів будівельних композитів є роботи [19, 20, 21 та ін.].

Метод випадкового сканування полів властивостей (метод Монте-Карло) дозволяє знаходити оптимальні рішення з високою точністю. Фактично точність рішення може залежати від кількості проведених випадкових «сканувань» поля властивостей, тобто генерованих випадкових координат точок у факторному просторі. Але для сучасних обчислювальних потужностей не важким завданням є генерація навіть мільйонів таких точок. Відповідно точність рішень у більшій мірі визначається точністю апроксимації досліджених властивостей самими ЕС-моделями.

Важливо зазначити, що за результатами реалізації методу випадкового сканування полів властивостей для пошуку оптимального складу бетону рішення, що буде знайдено, навіть при своїй точності може знаходитися не у повній відповідності до реальних технологічних можливостей промислового обладнання. Тобто наприклад відповідати дозуванню портландцементу з точністю до сотих кг на м<sup>3</sup>, або фібри з точністю до грамів на м<sup>3</sup>. Звичайно, таке рішення можна без суттєвої втрати точності «округлити» до найближчого технологічно можливого. Проте це, по-перше, вимагає відповідної кваліфікації дослідника, по-друге, робить не ефективною обробку занадто значної кількості випадкових координат у межах факторного простору експерименту.

З урахуванням наведеного вище автори пропонують відповідно до технологічних особливостей процесу виготовлення бетонних сумішей у промислових умовах для пошуку оптимального складу бетону реалізовувати сканування полів властивостей за ЕС-моделями не випадковою генерацією координат точок, а покроковою генерацією з технологічно обґрунтованим кроком.

### **3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ**

Метою роботи є визначення оптимальних складів бетонів дорожніх покриттів і транспортних споруд з використанням вторинного щебеню за рахунок проведення покрокового сканування полів властивостей. Оптимальні склади мають забезпечувати нормативні рівні міцності, морозостійкості та зносостійкості бетону при мінімізації собівартості їх виготовлення.

### **4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ**

За 15-ти точковим симетричним планом Бокса-Бенкена [13, 14] був проведений 3-х факторний експеримент, в якому варіювалися наступні фактори складу бетону на вторинному щебені:

$X_1$ , частина цементу, що замінюється золою виносу Даницької ТЕЦ (м. Київ), від 0 до 20%. «Базовий» склад бетонної суміші містив 300 кг/м<sup>3</sup> цементу. Для заміни 10% цементу (30 кг/м<sup>3</sup>) використовувалося 70 кг золи виносу, для заміни 20% цементу (60 кг/м<sup>3</sup>) – 140 кг золи виносу;

$X_2$ , кількість суперпластифікатору полікарбоксилатного типу MC-PowerFlow 3200, від 3,0 до 4,8 кг/м<sup>3</sup>, що відповідало діапазону від 1,0 до 1,6% від маси цементу в сумішах «базового» складу;

$X_3$ , кількість поліпропіленової фібри Vaumesh (довжина волокон 36 мм, діаметр 0,68 мм), від 0 до 3,0 кг/м<sup>3</sup>.

Для приготування бетонів використовувався вторинний щебінь фракції 5-20 мм, отриманий в результаті переробки залізобетонних конструкцій, кварцовий пісок з  $M_{кр} = 2,3$  та портландцемент ПЦ II/A-III-500. Всі бетонні суміші мали рухомість S1, що досягалося підбором кількості води у їх складі. Детально умови проведення експерименту, його план і склади досліджених бетонів наведено у [22].

Для кожного з 15-ти досліджених у експерименті складів бетону згідно діючим стандартам визначалася міцність на стиск ( $f_{cm}$ ), міцність на розтяг при згині ( $f_{ctk}$ ), морозостійкість ( $F$ ) та стиранність ( $G$ ). Нижче наведені адекватні ЕС-моделі, які описують вплив варійованих факторів складу на дані фізико-механічні показники. При побудові ЕС-моделей згідно методик [13, 14] натурний діапазон варіювання факторів  $X_i$  кодувався в безрозмірний  $x_i$  зі значеннями від -1 до 1.

$$f_{cm} \text{ (МПа)} = 53,17 - 4,10x_1 + 1,58x_2 + 0,75x_3 - 6,11x_1^2 \pm 0x_2^2 + 1,41x_3^2 \pm 0x_1x_2 + 1,62x_1x_3 \pm 0x_2x_3, \quad (1)$$

$$f_{ctk} \text{ (МПа)} = 5,092 - 0,056x_1 + 0,048x_2 + 0,191x_3 - 0,168x_1^2 - 0,058x_2^2 - 0,063x_3^2 \pm 0x_1x_2 \pm 0x_1x_3 - 0,036x_2x_3, \quad (2)$$

$$F \text{ (марка)} = 198,6 + 5,0x_1 + 20,0x_2 + 20,0x_3 \pm 0x_1^2 - 21,40x_2^2 - 21,4x_3^2 - 6,3x_1x_2 - 6,3x_1x_3 + 6,3x_2x_3 \quad (3)$$

$$G \text{ (г/см}^2\text{)} = 0,471 + 0,007x_1 - 0,005x_2 - 0,020x_3 + 0,008x_1^2 + 0,004x_2^2 + 0,007x_3^2 + 0,002x_1x_2 \pm 0x_1x_3 + 0,003x_2x_3. \quad (4)$$

Також для кожного складу була розрахована собівартість виготовлення 1 м<sup>3</sup> бетонної суміші в цінах січня 2026 року. Звичайно, фактична собівартість виготовлення суміші в промислових умовах буде також залежною від обсягу виробництва, плеча доставки компонентів та інших чинників. Проте розрахункова собівартість в цілому є об'єктивною і може використовуватися для аналізу та оцінки економічної ефективності запропонованих рішень. Таким чином, ЕС-модель, що описує вплив варійованих факторів складу на собівартість виготовлення бетонної суміші має вигляд:

$$\text{Соб(грн / м}^3\text{)} = 3585,37 - 95,77x_1 + 150,35x_2 + 344,06x_3 - 1,22x_1^2 \pm 0x_2^2 - 0,46x_3^2 - 0,43x_1x_2 \pm 0x_1x_3 \pm 0x_2x_3 \quad (5)$$

Проводився вибір оптимального складу бетону жорсткого дорожнього покриття для автомобільних доріг II і III категорій (перший варіант пошуку). Дороги даних категорій є найбільш розповсюдженими в Україні та можуть розглядатися як основні об'єкти для використання бетонів на основі перероблених заповнювачів та відходів виробництва. Згідно до вимог ДБН В.2.3-4:2015 [23] та ДСТУ 8858:2019 [24] у якості

критеріїв обмеження використовувалися такі значення механічних характеристик бетону жорсткого дорожнього покриття:

- міцність на стиск  $f_{cm} \geq 40 \text{ МПа}$  (клас В30, С25/30);
- міцність на розтяг при згині  $f_{ctk} \geq 5 \text{ МПа}$  (клас Вbtb4,0);
- морозостійкість  $\geq \text{F200}$ ;
- стиранисть  $G \leq 0,50 \text{ г/см}^2$  (марка за стиранистю G3).

У якості критерію оптимізації використовувалася собівартість виготовлення  $1 \text{ м}^3$  бетонної суміші, яку необхідно мінімізувати.

Пошук оптимального складу бетону здійснювався покроковим скануванням полів наведених вище властивостей. Для кожного з 3-х варійованих факторів складу було обрано технологічно обґрунтований крок, з яким проводилася генерація відповідних координат точок в факторному просторі експерименту. Обґрунтування базується на реальних можливостях технологічного обладнання щодо дозування компонентів бетонної суміші при її приготуванні.

Для фактору  $X_1$  приймався крок в 1 кг цементу на  $\text{м}^3$  бетонної суміші, що дорівнювало заміні 0,5% цементу золою. З врахуванням того, що золою замінювалося до 20% цементу, тобто до  $60 \text{ кг/м}^3$ , отримуємо 60 кроків по 0,0(3) в унормованому безрозмірному факторному просторі, що відповідає 61 рівню фактору  $x_1$  від -1 до +1. Для фактору  $X_2$  приймався крок в  $0,05 \text{ кг/м}^3$  суперпластифікатору MC-PowerFlow 3200. Це 36 кроків по 0,0(5) в унормованому факторному просторі та відповідно 37 рівнів фактору  $x_2$ . Для фактору  $X_3$  приймався крок в  $0,05 \text{ кг/м}^3$  поліпропіленової фібри. Це аналогічно кроку 1го фактору дає 60 кроків по 0,0(5) в унормованому факторному просторі та відповідно 61 рівень фактору  $x_3$ . Прийняті кроки зміни варійованих факторів при скануванням полів властивостей бетону графічно відображені на рис.1.

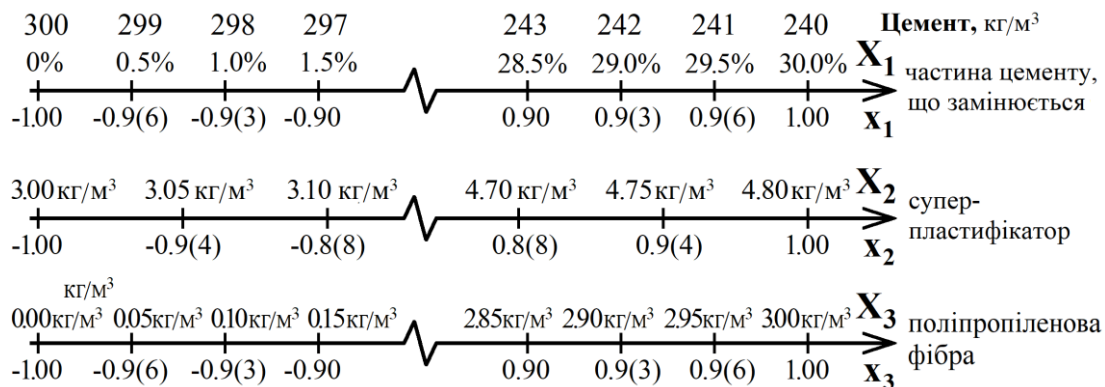


Рис. 1. Прийняті кроки зміни варійованих факторів при скануванням полів властивостей бетону

Таким чином, загальна кількість розрахункових точок (наборів координат) при покроковому скануванні полів властивостей бетону дорівнювала 137677 ( $61 \times 36 \times 61$ ). У створеній в Microsoft Excel таблиці в кожній з цих точок за ЕС-моделями (1)-(5) були розраховані значення міцності на стиск  $f_{cm}$ , міцності на розтяг при згині  $f_{ctk}$ , морозостійкості  $F$ , стиранисті  $G$  та собівартості  $Соб$ . При розрахунку рівні  $f_{cm}$ ,  $f_{ctk}$ ,  $F$  та  $G$  автоматично порівнювалися з відповідними критеріями обмеження. При виконанні умови критерію логічна функція присвоювала відповідній клітинці таблиці значення «1», при невиконанні – «0» (рис.2). Надалі результати перевірок перемножилися і відповідно добуток був рівним «1» лише за умови, якщо всі критерії обмеження виконувалися. Це також дозволило автоматично визначити, який відсоток

факторного простору займає область припустимих рішень. В даному випадку він дорівнював 24,3%.

На завершальному етапі пошуку координати точки, яка відповідає оптимальному складу бетону, було проведено відсіювання всіх точок (наборів координат), які не забезпечували виконання одночасно всіх критеріїв обмеження. Надалі всі 33389 точки, що залишилися з початкового масиву у 137677 точок, були проранжовані за значенням показника собівартості, який визначався у відповідному стовпці таблиці (рис.3). Таким чином, найменшу собівартість  $3511 \text{ грн}/\text{м}^3$  мають бетони у точці з координатами  $x_1 = 0,533, x_2 = 0, x_3 = -0,067$ , що відповідає оптимальному складу.

|  |  |                  |         |        |        |        |        |        |        |       | критерії обмеження |                         |                          |     |  |  |
|--|--|------------------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|--------------------|-------------------------|--------------------------|-----|--|--|
|  |  | b0               | b1      | b2     | b3     | b11    | b22    | b33    | b12    | b13   | b23                | f <sub>cm</sub> не менш | 40                       |     |  |  |
|  |  | f <sub>cm</sub>  | 53,17   | -4,10  | 1,58   | 0,75   | -6,11  | 0      | 1,41   | 0     | 1,62               | 0                       |                          |     |  |  |
|  |  | f <sub>ctk</sub> | 5,092   | -0,056 | 0,048  | 0,191  | -0,168 | -0,058 | -0,063 | 0     | 0                  | -0,036                  | f <sub>ctk</sub> не менш | 5,0 |  |  |
|  |  | F                | 198,6   | 5,0    | 20     | 20     | 0      | -21,4  | -21,4  | -6,3  | -6,3               | 6,3                     | F не менш                | 200 |  |  |
|  |  | G                | 0,471   | 0,007  | -0,005 | -0,02  | 0,008  | 0,004  | 0,007  | 0,002 | 0                  | 0,003                   | G не більше              | 0,5 |  |  |
|  |  | Соб              | 3585,37 | -95,77 | 150,35 | 344,06 | -1,22  | 0      | -0,46  | -0,43 | 0                  | 0                       |                          |     |  |  |

|     |  | Добуток усіх результатів перевірок |                  |       |       |         |
|-----|--|------------------------------------|------------------|-------|-------|---------|
|     |  | f <sub>cm</sub>                    | f <sub>ctk</sub> | F     | G     | Соб     |
| min |  | 40,39                              | 4,472            | 104,5 | 0,456 | 2993,94 |
| max |  | 57,16                              | 5,225            | 212,4 | 0,523 | 4174,29 |

|  |  | контроль умов    |      |     |     |     |
|--|--|------------------|------|-----|-----|-----|
|  |  | % поля влас      | 100% | 52% | 28% | 93% |
|  |  | f <sub>cm</sub>  | 1    | 0   | 0   | 0   |
|  |  | f <sub>ctk</sub> | 1    | 0   | 0   | 0   |
|  |  | F                | 1    | 0   | 0   | 0   |
|  |  | G                | 1    | 0   | 0   | 0   |

|   |   | значення показника у точці |                  |        |        |       |       |       |         |
|---|---|----------------------------|------------------|--------|--------|-------|-------|-------|---------|
|   |   | f <sub>cm</sub>            | f <sub>ctk</sub> | F      | G      | Соб   |       |       |         |
| 1 | 1 | -1,000                     | -1,000           | -1,000 | 51,868 | 4,584 | 104,5 | 0,513 | 3184,62 |
| 2 | 2 | -1,000                     | -0,944           | -1,000 | 51,955 | 4,595 | 107,9 | 0,512 | 3193,00 |
| 3 | 3 | -1,000                     | -0,889           | -1,000 | 52,043 | 4,606 | 111,2 | 0,511 | 3201,37 |
| 4 | 4 | -1,000                     | -0,833           | -1,000 | 52,130 | 4,616 | 114,3 | 0,510 | 3209,75 |
| 5 | 5 | -1,000                     | -0,778           | -1,000 | 52,218 | 4,626 | 117,4 | 0,509 | 3218,13 |
| 6 | 6 | -1,000                     | -0,722           | -1,000 | 52,305 | 4,635 | 120,3 | 0,508 | 3226,50 |
| 7 | 7 | -1,000                     | -0,667           | -1,000 | 52,393 | 4,644 | 123,0 | 0,507 | 3234,88 |
| 8 | 8 | -1,000                     | -0,611           | -1,000 | 52,480 | 4,653 | 125,7 | 0,507 | 3243,26 |
| 9 | 9 | -1,000                     | -0,556           | -1,000 | 52,568 | 4,661 | 128,2 | 0,506 | 3251,63 |

**Рис. 2.** Зовнішній вигляд таблиці Microsoft Excel, в якій реалізовано сканування полів властивостей бетону та порівняння розрахованих показників з відповідними критеріями обмеження. Перший варіант пошуку. Бетон жорсткого дорожнього покриття

Вміст компонентів у обраному складі бетону жорсткого дорожнього покриття (склад №1) та його розрахункові механічні характеристики та собівартість наведено у таблиці 1.

|   |        | Fly Ash |                |                | Plasticizer    |                 | Fiber            | значення показника у точці |         |     |  |  |
|---|--------|---------|----------------|----------------|----------------|-----------------|------------------|----------------------------|---------|-----|--|--|
|   |        | No      | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | f <sub>cm</sub> | f <sub>ctk</sub> | F                          | G       | Соб |  |  |
| 1 | 104877 | 0,533   | 0,000          | -0,067         | 49,143         | 5,001           | 200,0            | 0,478                      | 3511,00 |     |  |  |
| 1 | 102584 | 0,500   | 0,056          | -0,100         | 49,537         | 5,005           | 200,0            | 0,478                      | 3511,11 |     |  |  |
| 1 | 102549 | 0,500   | 0,167          | -0,133         | 49,671         | 5,003           | 200,5            | 0,479                      | 3516,32 |     |  |  |
| 1 | 104878 | 0,533   | 0,056          | -0,067         | 49,231         | 5,004           | 200,9            | 0,478                      | 3519,34 |     |  |  |
| 1 | 102585 | 0,500   | 0,111          | -0,100         | 49,625         | 5,007           | 200,7            | 0,478                      | 3519,45 |     |  |  |
| 1 | 100292 | 0,467   | 0,167          | -0,133         | 50,012         | 5,010           | 200,4            | 0,478                      | 3519,55 |     |  |  |
| 1 | 107207 | 0,567   | -0,056         | 0,000          | 48,796         | 5,003           | 200,4            | 0,478                      | 3522,37 |     |  |  |
| 1 | 104914 | 0,533   | 0,000          | -0,033         | 49,192         | 5,008           | 200,7            | 0,478                      | 3522,47 |     |  |  |
| 1 | 102621 | 0,500   | 0,056          | -0,067         | 49,582         | 5,012           | 200,7            | 0,478                      | 3522,58 |     |  |  |
| 1 | 100328 | 0,467   | 0,111          | -0,100         | 49,964         | 5,015           | 200,5            | 0,478                      | 3522,68 |     |  |  |

**Рис. 3.** Пошук оптимального складу бетону (координат оптимального рішення) в таблиці Microsoft Excel ранжуванням стовпця, у якому розраховується значення критерію оптимізації (за умови виконання всіх висунутих критеріїв обмеження). Перший варіант пошуку. Бетон жорсткого дорожнього покриття

Надалі аналогічна описаній вище процедура пошуку оптимального складу бетону була реалізована при умові підвищення вимог щодо міцності бетону на стиск до 50 МПа (рівня критерію обмеження). Такі умови є більш притаманними для транспортних

споруд. Таким чином, при пошуку оптимального складу бетону для конструкцій транспортних споруд у якості критеріїв обмеження використовувалися такі значення механічних характеристик (другий варіант пошуку):

- міцність на стиск  $f_{cm} \geq 50 \text{ МПа}$ ;
- міцність на розтяг при згині  $f_{ctk} \geq 5 \text{ МПа}$ ;
- морозостійкість  $\geq \text{F200}$ ;
- стираність  $G \leq 0,50 \text{ г/см}^2$ .

За таких умов відсоток факторного простору експерименту, який займає область припустимих рішень, складає 21,8%. Це природно менше, ніж при першій процедурі пошуку, завдяки більш високим вимогам щодо міцності на стиск.

**Таблиця 1**

Обрані оптимальні склади бетонів, їх механічні характеристики та собівартість

| Номер обраного складу | Координати точки у факторному просторі експерименту | Склад бетону, кг/м <sup>3</sup>  | Розрахункові механічні характеристики та собівартість   |
|-----------------------|---|--|---|
| №1                    | $x_1 = 0,533$<br>$x_2 = 0$<br>$x_3 = 0,067$         | Цемент – 254<br>Зола – 107,3<br>Вторинний щебінь – 1085<br>Пісок – 736<br>Суперпластифікатор – 3,9<br>Фібра Baumesh – 1,4<br>Вода – 133  | Міцність на стиск 49,1 МПа;<br>Міцність на розтяг при згині 5,00 МПа;<br>Морозостійкість F200;<br>Стираність 0,478 г/см <sup>2</sup> ;<br>Собівартість 3511,00 грн/м <sup>3</sup> . |
| №2                    | $x_1 = 0,467$<br>$x_2 = 0,167$<br>$x_3 = 0,133$     | Цемент – 256<br>Зола – 102,7<br>Вторинний щебінь – 1085<br>Пісок – 740<br>Суперпластифікатор – 4,05<br>Фібра Baumesh – 1,3<br>Вода – 132 | Міцність на стиск 50,0 МПа;<br>Міцність на розтяг при згині 5,01 МПа;<br>Морозостійкість F200;<br>Стираність 0,478 г/см <sup>2</sup> ;<br>Собівартість 3519,55 грн/м <sup>3</sup> . |

На рис.4 наведено результат пошук оптимального складу бетону для конструкцій транспортних споруд (координати оптимального рішення) в таблиці Microsoft Excel, яка описана вище. Наведено завершальний етап розрахунків після відсіювання точок, які не забезпечували виконання критеріїв обмеження, та ранжування за собівартістю. Вміст компонентів у обраному складі бетону (склад №2) та його розрахункові механічні характеристики і собівартість наведено у таблиці 1.

| 8  |           |        | Fly Ash        | Plasticizer    | Fiber          | значення показника у точці |                  |       |       |         |
|----|-----------|--------|----------------|----------------|----------------|----------------------------|------------------|-------|-------|---------|
| 9  | всі умови | No     | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | f <sub>cm</sub>            | f <sub>ctk</sub> | F     | G     | Соб     |
| 10 | 1         | 100292 | 0,467          | 0,167          | -0,133         | 50,012                     | 5,010            | 200,4 | 0,478 | 3519,55 |
| 11 | 1         | 98035  | 0,433          | 0,167          | -0,133         | 50,340                     | 5,017            | 200,2 | 0,478 | 3522,78 |
| 12 | 1         | 100257 | 0,467          | 0,278          | -0,167         | 50,151                     | 5,006            | 200,3 | 0,479 | 3524,76 |
| 13 | 1         | 98071  | 0,433          | 0,111          | -0,100         | 50,290                     | 5,021            | 200,4 | 0,477 | 3525,91 |
| 14 | 1         | 95778  | 0,400          | 0,167          | -0,133         | 50,653                     | 5,023            | 200,0 | 0,477 | 3526,01 |
| 15 | 1         | 100293 | 0,467          | 0,222          | -0,133         | 50,100                     | 5,012            | 200,8 | 0,478 | 3527,89 |
| 16 | 1         | 98000  | 0,433          | 0,278          | -0,167         | 50,480                     | 5,013            | 200,1 | 0,478 | 3527,99 |
| 17 | 1         | 98107  | 0,433          | 0,056          | -0,067         | 50,243                     | 5,026            | 200,4 | 0,477 | 3529,04 |
| 18 | 1         | 95814  | 0,400          | 0,111          | -0,100         | 50,602                     | 5,028            | 200,2 | 0,477 | 3529,14 |
| 19 | 1         | 100329 | 0,467          | 0,167          | -0,100         | 50,052                     | 5,017            | 201,1 | 0,477 | 3531,02 |
| 20 | 1         | 98036  | 0,433          | 0,222          | -0,133         | 50,427                     | 5,018            | 200,7 | 0,478 | 3531,12 |
| 21 | 1         | 98143  | 0,433          | 0,000          | -0,033         | 50,199                     | 5,030            | 200,1 | 0,476 | 3532,17 |
| 22 | 1         | 95850  | 0,400          | 0,056          | -0,067         | 50,553                     | 5,032            | 200,2 | 0,476 | 3532,27 |
| 23 | 1         | 93557  | 0,367          | 0,111          | -0,100         | 50,900                     | 5,034            | 200,1 | 0,476 | 3532,36 |

**Рис. 4.** Пошук оптимального складу бетону (координат оптимального рішення) в таблиці Microsoft Excel. Другий варіант пошуку. Бетон конструкцій транспортних споруд.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Слід зазначити, що обрані склади бетонів є оптимальними саме з позиції їх застосування в конструкціях жорстких дорожніх покриттів або транспортних споруд з урахуванням мінімізації собівартості в поточних середніх цінах на ринку. Так на собівартість розглянутих в даному дослідженні бетонів та відповідно рішення щодо обраних складів суттєво впливала кількість поліпропіленової фібри Vaumesh та суперпластифікатора MC-PowerFlow 3200, які є достатньо дорогими. Фактична вартість компонентів може суттєво змінюватися, зокрема в залежності від розташування виробничих потужностей, а в умовах руйнування значної кількості ТЕЦ в Україні може виникати дефіцит золи виносення, що вплине на ефективність використання даного відходу.

При висуванні інших вимог до механічних показників бетонів та критеріїв оптимальності оптимальний склад бетону буде іншим. Наприклад, в країнах Європейського Союзу при виробництві бетонів не менш важливим показником, ніж собівартість, є значення вуглецевого сліду як одного з основних екологічних впливів. Не менш важливим з екологічної точки зору є використання вторинного щебеню в складі бетону.

## 6 ВИСНОВКИ

Реалізація покрокового сканування полів властивостей дозволила швидко і з великою точністю знайти оптимальні склади бетонів для жорстких дорожніх покриттів і конструкцій транспортних споруд. За рахунок того, що крок зміни рівнів варійованих факторів при скануванні був технологічно обґрунтованим, знайдені склади відповідають технічним можливостям дозувального обладнання бетонних заводів.

Визначені склади бетонів на вторинному щебені забезпечують необхідний рівень міцності на стиск, міцності на розтяг при згині, морозостійкості та зносостійкості, що забезпечує необхідну довговічність матеріалу в типових для умов експлуатації дорожніх покриттів і транспортних споруд. При цьому визначені оптимальні склади мають мінімальну собівартість з урахуванням поточних ринкових цін та є ефективними з екологічної точки зору.

## 7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

## Література

1. Мірошніченко В.В. Регіональні відмінності в рівнях ушкодження інфраструктури України внаслідок російської агресії. Наукові записки НаУКМА. Економічні науки, 2025. Т. 10, вип. 1. С. 146-152. <https://doi.org/10.18523/2519-4739.2025.10.1.146-152>
2. Skocek J., Ouzia A., Vargas Serrano E., Pato N. Recycled Sand and Aggregates for Structural Concrete: Toward the Industrial Production of High-Quality Recycled Materials with Low Water Absorption. Sustainability, 2024. 16. 814. <https://doi.org/10.3390/su16020814>
3. Bhardwaj A., Rankavat S. Treatment of Recycled Coarse Aggregate Using Hybrid Technique for Rigid Pavements Incorporating Fly Ash. Lecture Notes in Civil Engineering, 2025. 621. P. 59-74. [https://doi.org/10.1007/978-981-96-1984-9\\_6](https://doi.org/10.1007/978-981-96-1984-9_6)
4. Дворкін Л.Й. Ефективні золоті цементі, бетони та розчини. Рівне: НУВГП, 2022. 419 с.

5. Sanytsky M.A., Rusyn B.G., Kropyvnytskyi T.S., Trefler R. Yu. Low-carbon Nanomodified Rapid-hardening High-performance Concretes. *Materials Science*, 2025. 61. P. 23-27. <https://doi.org/10.1007/s11003-025-00955-2>
6. Suryani F.M., Rizal S., Abdullah A., Isya M. Fly Ash Substitution in Lightweight Concrete for Rigid Pavement Construction on Low-Bearing-Capacity Soil. *Sustainability*, 2023. 15. 15239. <https://doi.org/10.3390/su152115239>
7. Mashaan N.S., Kibutu S., Dassanayake C., Ghodrati A. Sustainable Utilisation of Mining Waste in Road Construction: A Review. *Journal of Experimental and Theoretical Analyses*, 2025. 3. 19. <https://doi.org/10.3390/jeta3030019>
8. Kamplimath H., Urmil D. Mechanical Properties and Life Cycle Assessment of Sustainable Concrete Pavement Utilizing High Volume Fly Ash and Manufactured Sand. *Journal of Structural Design and Construction Practice*, 2026. 31 (1). <https://doi.org/10.1061/JSDCCC.SCENG-1869>
9. Kroviakov S., Finohenov O., Ihnatenko A. Determination of the Effect of the Amount of Polypropylene Fiber and Plasticizer on the Strength and Abrasion Resistance of Concretes for Rigid Pavement. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2025. 2 (6 (134)). P. 53-60. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.322590>
10. Wang L., Zhang H., Zhao B., Wang B., Zhao Q., Sun M. Experimental Investigation on Physical Properties of Concrete Containing Polypropylene Fiber and Water-Borne Epoxy for Pavement. *Coatings*, 2023. 13. 452. <https://doi.org/10.3390/coatings13020452>
11. Дворкін Л.Й. Експериментально-статистичне моделювання при проектуванні складів бетонів. К.: Кондор. 2020. 205 с.
12. Кровяков С.О., Ігнатенко А.В., Фіногенов О.І., Лапіна О.І. Оптимізація складу фібробетону жорсткого дорожнього покриття з використанням комплексу експериментально-статистичних моделей. *Дороги і мости*, 2025. Вип. 32. С. 113-123. <https://doi.org/10.36100/dorogimosti2025.32.113>
13. Ляшенко Т.В., Вознесенский В.А. Методология рецептурно-технологических полей в компьютерном строительном материаловедении. Одеса: Астропрінт, 2017. 168 с.
14. Вознесенский В.А., Ляшенко Т.В., Огарков Б.Л. Численные методы решения строительно-технологических задач на ЭВМ. К.: Вища школа, 1989. 327 с.
15. Li Z., Lum D., Gao X. Optimization of mixture proportions by statistical experimental design using response surface method - A review. *Journal of Building Engineering*, 2021. 36. 102101. <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2020.102101>
16. Гамеляк І.П., Шургая А.Г., Якименко Я.М., Чиженко Н.П. Математичні моделі властивостей високоміцних цементобетонів для дорожнього будівництва. *Збірник наукових праць Українського державного університету залізничного транспорту*, 2017. № 169. С.103-110. <https://doi.org/10.18664/1994-7852.169.2017.111084>
17. Теліцина Н.С., Квітка О.О., Шахновський А.М. Експериментально-статистичне моделювання складу сухих будівельних сумішей: визначення оптимальної частки модифікуючої добавки. *Вісник Херсонського національного технічного університету*, 2023. № 1(84). С.72-79. <https://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2023.1.9>
18. Кровяков С.О., Ігнатенко А.В., Шестаков Л.Є., Заволока М.В. Пошук оптимальних складів фібробетонів жорсткого дорожнього покриття з використанням експериментально-статистичних моделей. *Механіка та математичні методи*, 2024. Т. 6. № 1. С. 6-16. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2024-6-1-6-16>
19. Moskalova K., Lyashenko T., Aniskin A., Orešković M. Modelling the Influence of Composition on the Properties of Lightweight Plaster Mortar and Multicriteria Optimisation. *Materials*, 2023. 16(7). 2846. <https://doi.org/10.3390/ma16072846>
20. Lyashenko T.V., Antoniuk N.R. Multicriterial Search for Rational Solutions when Developing Building Composites. *Bulletin of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*, 2020, no. 79, P. 99-108. <https://doi.org/10.31650/2415-377X-2020-79-99-108>
21. Lyashenko T.V., Voznesensky V.A., Gavriiliuk V.P. Multicriterial Optimisation of Autoclaved Aerated Concrete Properties and Expenditure of Energy Resources. *Brittle Matrix Composites* 9. Woodhead Publishing: 2009, P. 219-226. <https://doi.org/10.1533/9781845697754.219>

22. Kryzhanovskiy V., Kroviakov S., Shymchenko P., Aksyonova I. Design of Recycled Aggregate Fiber-Reinforced Concrete for Road and Airfield Applications Using Polypropylene Fibers and Fly Ash. *Construction Materials*, 2026, 6(1), 2. <https://doi.org/10.3390/constrmater6010002>
23. ДБН В.2.3-4:2015. Автомобільні дороги. Частина І. Проектування. Частина ІІ. Будівництво. [Чинний від 2016-04-01]. Вид. офіц. Київ, 2015. 113 с.
24. ДСТУ 8858:2019. Суміші цементобетонні дорожні та цементобетон дорожній. Технічні умови. [Чинний від 2020-07-01]. Вид. офіц. Київ, 2019. 16 с

## References

1. Miroschnychenko, V.V. (2025). Regional differences in the levels of damage to Ukraine's infrastructure due to Russian aggression. *Scientific Papers NaUKMA. Economics*. 10 (1). 146–152 [in Ukraine]. <https://doi.org/10.18523/2519-4739.2025.10.1.146-152>
2. Skocek, J., Ouzia, A., Vargas Serrano, E., Pato, N. (2024). Recycled Sand and Aggregates for Structural Concrete: Toward the Industrial Production of High-Quality Recycled Materials with Low Water Absorption. *Sustainability*. 16. 814. <https://doi.org/10.3390/su16020814>
3. Bhardwaj, A., Rankavat, S. (2025). Treatment of Recycled Coarse Aggregate Using Hybrid Technique for Rigid Pavements Incorporating Fly Ash. *Lecture Notes in Civil Engineering*. 621. 59–74. [https://doi.org/10.1007/978-981-96-1984-9\\_6](https://doi.org/10.1007/978-981-96-1984-9_6)
4. Dvorkin L.Y. (2022). Efektyvni zolovmisni tsementy, betony ta rozchyny [Effective ash-containing cements, concretes and mortars]. Rivne. NUVHP [in Ukraine].
5. Sanytsky, M.A., Rusyn, B.G., Kropyvnytskyi, T.S., Trefler, R.Yu. (2025). Low-carbon Nanomodified Rapid-hardening High-performance Concretes. *Materials Science*. 61. 23–27. <https://doi.org/10.1007/s11003-025-00955-2>
6. Suryani, F.M., Rizal, S., Abdullah, A., Isya, M. (2023). Fly Ash Substitution in Lightweight Concrete for Rigid Pavement Construction on Low-Bearing-Capacity Soil. *Sustainability*. 15. 15239. <https://doi.org/10.3390/su152115239>
7. Mashaan, N.S., Kibutu, S., Dassanayake, C., Ghodrati, A. (2025). Sustainable Utilisation of Mining Waste in Road Construction: A Review. *Journal of Experimental and Theoretical Analyses*. 3. 19. <https://doi.org/10.3390/jeta3030019>
8. Kamplimath, H., Urmil, D. (2026). Mechanical Properties and Life Cycle Assessment of Sustainable Concrete Pavement Utilizing High Volume Fly Ash and Manufactured Sand. *Journal of Structural Design and Construction Practice*. 31 (1). <https://doi.org/10.1061/JSDCCC.SCENG-1869>
9. Kroviakov, S., Finohenov, O., Ihnatenko, A. (2025). Determination of the Effect of the Amount of Polypropylene Fiber and Plasticizer on the Strength and Abrasion Resistance of Concretes for Rigid Pavement. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2 (6 (134)). 53–60. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.322590>
10. Wang, L., Zhang, H., Zhao, B., Wang, B., Zhao, Q., Sun, M. (2023). Experimental Investigation on Physical Properties of Concrete Containing Polypropylene Fiber and Water-Borne Epoxy for Pavement. *Coatings*. 13. 452. <https://doi.org/10.3390/coatings13020452>
11. Dvorkin, L.Y. (2022). Eksperymental'no-statystychnye modelyuvannya pry proektuvanni skladiv betoniv [Experimental and statistical modelling in the design of concrete compositions]. Kyiv. Kondor [in Ukraine].
12. Kroviakov, S.O., Ignatenko, A.V., Finogenov, O.I., Lapina, O.I. (2025). Optyimizatsiya skladu fibrobetonu zhorstkoho dorozhn'oho pokryvu z vykorystannyam kompleksu eksperymental'no-statystychnykh modeley [Optimisation of the composition of fibre-reinforced concrete for rigid pavement using a set of experimental-statistical models]. *Roads and Bridges*. 32. 113–123 [in Ukraine]. <https://doi.org/10.36100/dorogimosti2025.32.113>
13. Lyashenko, T.V., Voznesenskiy, V.A. (2017). Metodologiya retsepturno-tekhnologicheskikh poley v komp'yuternom stroitel'nom materialovedenii [Composition-process fields methodology in computational building materials science]. Odesa. Astroprint [in Russian].

14. Voznesensky, V.A., Lyashenko, T.V., Ogarkov, B.L. (1989). Chislennyye metody resheniya stroitel'no-tehnologicheskikh zadach na EVM [Numerical methods for solving construction and technological problems on a computer]. Kyiv. Vishcha shkola [in Russian].
15. Li, Z., Lum, D., Gao, X. (2021). Optimization of mixture proportions by statistical experimental design using response surface method - A review. Journal of Building Engineering. 36. 102101. <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2020.102101>
16. Gameliak, I.P., Shurgaya, A.G., Jakymenko, J.M., Chyzhenko, N.P. (2017). Matematychni modeli vlastyvostey vysokomitsnykh tsementobetoniv dlya dorozhn'oho budivnytstva [Mathematical models of the properties of high-strength cement-concrete for road construction]. Collected scientific works of Ukrainian state university of railway transport. 169. 103–110 [in Ukraine]. <https://doi.org/10.18664/1994-7852.169.2017.111084>
17. Telitsyna, N.E., Kvitka O.O., Shakhnovsky, A.M. (2023). Eksperymental'no-statystychni modelyuvannya skladu sukhykh budivel'nykh sumishey: vyznachennya optimal'noyi chastky modyfikuyuchoyi dobavky [Experimental statistical modeling of dry construction mixtures formulation: optimal content of the modifying admixture determination]. Visnyk of Kherson National Technical University. 1(84). 72–79 [in Ukraine]. <https://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2023.1.9>
18. Kroviakov, S.O., Ihnatenko, A.V., Shestakova, L.Ye., Zavaloka, M.V. (2024). Poshuk optimal'nykh skladiv fibrobetoniv zhorstkoho drozhn'oho pokryttya z vykorystannyam eksperymental'no-statystychnykh modeley [Search for optimal compositions of fiber-reinforced concretes for rigid screeds using experimental and statistical models]. Mechanics and mathematical methods. 6 (1). 6–16 [in Ukraine]. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2024-6-1-6-16>
19. Moskalova, K., Lyashenko, T., Aniskin, A., Orešković, M. (2023). Modelling the Influence of Composition on the Properties of Lightweight Plaster Mortar and Multicriteria Optimisation. Materials. 16(7). 2846. <https://doi.org/10.3390/ma16072846>
20. Lyashenko, T.V., Antoniuk, N.R. (2020). Multicriterial Search for Rational Solutions when Developing Building Composites. Bulletin of Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture. 79. 99–108. <https://doi.org/10.31650/2415-377X-2020-79-99-108>
21. Lyashenko, T.V., Voznesensky, V.A., Gavriiliuk, V.P. (2009). Multicriterial Optimisation of Autoclaved Aerated Concrete Properties and Expenditure of Energy Resources. Brittle Matrix Composites 9. Woodhead Publishing. 219–226. <https://doi.org/10.1533/9781845697754.219>
22. Kryzhanovskiy, V., Kroviakov, S., Shymchenko, P., Aksyonova, I. (2026). Design of Recycled Aggregate Fiber-Reinforced Concrete for Road and Airfield Applications Using Polypropylene Fibers and Fly Ash. Construction Materials. 6(1), 2. <https://doi.org/10.3390/constrmater6010002>
23. DBN V.2.3-4:2015. Avtomobil'ni dorohy. Sporudy transportu. Chastyna I. Proektuvannya. Chastyna II. Budivnytstvo [Automobile roads. Part I. Design. Part II. Construction]. Ministry of Regional Development, Construction, Housing and Communal Services of Ukraine, 2015 [in Ukraine].
24. DSTU 8858:2019. Sumishi tsementobetonni dorozhni ta tsementobeton dorozhniy. Tekhnichni umovy. [Cement-concrete road mixtures and cement-concrete road. Technical conditions]. Kharkiv National Automobile and Road University, 2019 [in Ukraine].

Стаття надійшла до редакції 25.12.2025

Стаття прийнята до друку 18.02.2026

Дата публікації статті 26.03.2026

**Кровяков Сергій Олексійович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури,

д.т.н., професор

вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна 65029

[skrovyakov@ukr.net](mailto:skrovyakov@ukr.net),

ORCID: 0000-0002-0800-0123



**Шимченко Павло Володимирович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури,  
аспірант  
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, Україна 65029  
[1210867@gmail.com](mailto:1210867@gmail.com),  
ORCID: 0000-0002-1656-9432

*Для посилань:*

Кровяков С. О., Шимченко П. В. Пошук оптимальних складів бетонів дорожніх покриттів і транспортних споруд з використанням вторинного щебеню покроковим скануванням полів властивостей. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. № 1. С. 41–53.

*For references:*

S. Kroviakov, P. Shymchenko. (2026). Search for optimal compositions of concrete for rigid pavement and transport structures using recycled aggregate by step-by-step scanning of property fields. Mechanics and Mathematical Methods. VIII (1). 41–53.

Пошук оптимальних складів бетонів дорожніх покриттів і транспортних споруд з використанням вторинного щебеню покроковим скануванням полів властивостей © 2026 by Кровяков С. О., Шимченко П. В. is licensed under CC BY 4.0

УДК 004.8

## МЕТОД ГЕНЕРАЦІЇ ІГРОВОГО КОНТЕНТУ ЗА ДОПОМОГОЮ НЕЙРОМЕРЕЖ

Завгородня Г. А.<sup>1</sup>, Завгородній В. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

**Анотація:** У статті представлено комплексний метод нейромережевої генерації ігрового контенту, спрямований на створення структурованих, логічно узгоджених та стилістично цілісних елементів ігрового середовища. Актуальність дослідження пов'язана зі швидким зростанням масштабів та складності сучасних відеоігор, що потребує автоматизованих рішень для розроблення великої кількості унікальних рівнів, карт, сюжетних фрагментів і структурних компонентів без суттєвого збільшення витрат на ручне проектування. Запропонований підхід поєднує латентне просторове представлення даних, стохастичні моделі послідовностей та механізми багаторівневого семантичного контролю, що забезпечує адаптивне управління процесом генерації та можливість формування контенту з керованою складністю.

На відміну від традиційних генеративних моделей (VAE, LSTM та трансформерних генераторів), метод доповнено модулем оцінювання якості та зворотної корекції, який дозволяє автоматично регулювати параметри генерації відповідно до вимог щодо структурної цілісності, складності чи стилістичної відповідності. Додатково впроваджено механізм «семантичного фільтрування», що зменшує ймовірність появи нелогічних структур, артефактів або порушення внутрішніх правил рівня.

У роботі наведено формальні математичні описи компонентів методу та архітектурні рішення моделі. Експериментальна частина містить результати синтезу ігрових рівнів, представлених у вигляді графів, а також їх оцінювання за метриками структурної зв'язності, стилістичної узгодженості, різноманітності та стабільності процесу генерації. Продемонстровано, що запропонований підхід забезпечує стабільніше формування валідних рівнів, вищу семантичну узгодженість та більшу варіативність у порівнянні з базовими моделями. Візуалізовані приклади згенерованих карт підтверджують можливість контролювати рівень складності та типологію елементів.

Отримані результати свідчать про ефективність розробленого методу та його потенціал для інтеграції у сучасні рушії й інструменти створення ігрового контенту. Запропонований підхід може бути використаний у завданнях автоматизованого проектування рівнів, сюжетних структур та процедурного наповнення ігрових світів у широкому спектрі жанрів.

**Ключові слова:** нейронні мережі, генерація контенту, ігрові рівні, машинне навчання, процедурна генерація, генеративні моделі.

## METHOD OF GAME CONTENT GENERATION USING NEURAL NETWORKS

G. Zavorodnia<sup>1</sup>, V. Zavorodnii<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

**Abstract:** The article presents a comprehensive approach to automated game content generation based on neural network models, focusing on the synthesis of game levels, structural layouts, narrative fragments and auxiliary environment elements. The relevance of the research stems from the increasing complexity of modern video games, which requires scalable methods for producing diverse and adaptive content without significantly increasing the workload of designers and developers. The proposed method combines latent spatial representations, stochastic sequence models and mechanisms



of semantic control, enabling the generation of structured, logically coherent and stylistically consistent game elements.

Unlike conventional generative approaches, the presented methodology incorporates an adaptive quality-assessment module operating in a feedback loop. This module automatically adjusts model parameters according to the required level of complexity or variability and implements a semantic filtering mechanism that reduces the occurrence of illogical, inconsistent or structurally invalid components. The study provides formal mathematical descriptions of the model, details of the training procedure and a generalized algorithm for controlled content synthesis.

The paper presents formal mathematical descriptions of the method's components and architectural solutions of the model. The experimental section includes the results of synthesizing game levels represented as graphs, as well as their evaluation using metrics of structural connectivity, stylistic consistency, diversity, and generation stability. It is demonstrated that the proposed approach provides more stable formation of valid levels, higher semantic coherence, and greater variability compared to baseline models. The visualized examples of generated maps confirm the ability to control the level of difficulty and the typology of elements.

Special attention is given to the practical applicability of the method, including its integration potential with modern game engines and content-production pipelines. The obtained results confirm the effectiveness of the proposed approach and its suitability for use in automated interactive content design, procedural generation systems and AI-assisted development workflows.

**Keywords:** neural networks, content generation, game levels, machine learning, procedural generation, generative models.

## 1 ВСТУП

Стрімкий розвиток нейронних мереж та генеративних моделей суттєво змінює підходи до створення цифрового контенту, зокрема ігрових рівнів, сценаріїв та інтерактивних завдань. Сучасні відеоігри характеризуються складними нелінійними структурами, високим рівнем варіативності та вимогами до адаптивної поведінки, що значно ускладнює процес ручного проектування контенту. У цих умовах зростає потреба у методах, здатних забезпечити автоматичне створення якісних контентних елементів із дотриманням логічної узгодженості, стилістичної цілісності та цільової складності [1–3].

Нейромережеві моделі нового покоління, зокрема трансформери, варіаційні автоенкодерери та дифузійні моделі, демонструють значний потенціал у задачах генерації структурованих даних, що робить їх перспективними для використання в індустрії ігор [4, 5]. Однак існуючі рішення здебільшого фокусуються на окремих аспектах генерації – візуальних або текстових – і рідко враховують комплексність ігрового процесу, необхідність контролю над семантикою та забезпеченням ігрового балансу. Дослідження останніх років також вказують на потребу у методах, здатних адаптивно реагувати на зміни параметрів складності та поведінкових сценаріїв гравця [6, 7].

Попри значний прогрес у генеративному моделюванні, проблема отримання контрольованого, логічно зв'язаного та придатного для гри контенту залишається недостатньо вирішеною. Ефективні підходи повинні поєднувати моделі латентного простору, механізми оцінювання якості, адаптивні зворотні зв'язки та можливість інтеграції в реальні розробницькі пайплайни. Це визначає наукову й практичну значущість даної роботи, яка спрямована на розроблення уніфікованого методу нейромережевої генерації контенту з механізмами семантичного та структурного контролю [8–10].

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Аналіз сучасних досліджень демонструє значний інтерес до методів автоматизованої генерації контенту, що поєднують процедурні алгоритми та машинне навчання. У роботах [2, 3, 11] представлено підхід до створення ігрових структур на основі процедурної генерації, що забезпечує формування базових топологічних шаблонів. Однак відсутність семантичного контролю та залежність від ручного налаштування параметрів обмежують застосовність таких рішень у задачах генерації складних ігрових сценаріїв.

У працях [1, 12, 13] досліджено математичне моделювання при формальному аналізі генеративних систем, де автори акцентують увагу на важливості точних структурних моделей для опису поведінки комп'ютерних систем. Це підкреслює необхідність формалізованих методів і у сфері нейромережевої генерації контенту, де відсутність формальних критеріїв оцінювання ускладнює контроль якості результатів.

У джерелах [4, 14, 15] запропоновано метод синтезу штучних текстур із контрольованими параметрами, що демонструє ефективність поєднання моделей глибинного навчання зі структурними обмеженнями. Подібний підхід має перспективи для генерації ігрових рівнів, де важливим є не лише стиль, а й логічна організація простору. У дослідженні [5, 16] розглянуто застосування машинного навчання для пошуку аномалій у даних, що особливо важливо для валідації згенерованого контенту та виявлення логічних помилок.

Загалом сучасні роботи вказують на значний прогрес у використанні нейронних мереж для генеративних задач, зокрема трансформерних архітектур, дифузійних

моделей та стохастичних послідовностей [17–19]. Проте більшість підходів сфокусовані на окремих фрагментах контенту (текст, зображення, топології), тоді як проблема інтегрованої генерації з урахуванням семантики, структурних залежностей та адаптивної складності лишається недостатньо розв'язаною [20–22].

Отже, не вирішеною залишається задача створення комплексного методу генерації ігрового контенту, який здатен:

- поєднувати різні типи латентних представлень (структурні граfi рівнів, просторові ознаки, семантичні описи) та узгоджено працювати з ними в єдиній моделі;
- забезпечувати багаторівневий семантичний контроль, що гарантує логічну цілісність і стилістичну відповідність згенерованих елементів;
- автоматично адаптувати складність контенту відповідно до заданих параметрів (щільність зв'язності, кількість кімнат, варіативність топології);
- містити механізми виявлення аномалій та структурних порушень, а також здійснювати корекцію графової структури на основі формалізованих метрик якості;
- інтегруватися в сучасні пайплайни ігрової розробки, забезпечуючи можливість подальшої обробки та використання згенерованих структур в ігрових рушіях.

Вирішення перелічених аспектів визначає постановку проблеми даного дослідження і формує вимоги до розробки комплексного нейромережевого методу генерації ігрового контенту.

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою дослідження є розроблення узагальненого методу нейромережевої генерації структурованого ігрового контенту, здатного забезпечувати логічну цілісність, семантичну узгодженість та контрольовану складність створюваних рівнів. Запропонований підхід передбачає використання латентних просторових представлень та алгоритмів стохастичної генерації графових структур, що дозволяє автоматизувати формування карт ігрового середовища та адаптивно керувати їх властивостями.

Відповідно до поставленої мети у дослідженні сформульовано такі завдання:

- проаналізувати існуючі генеративні методи, зокрема моделі VAE, LSTM та трансформерні архітектури, з точки зору їх здатності створювати структурований ігровий контент. Це дало можливість окреслити недоліки традиційних підходів та визначити вимоги до нового методу;
- розробити математичну модель генерації контенту, яка поєднує латентне представлення простору карт із механізмами випадкової побудови структур та формування семантичних обмежень під час генерації;
- створити алгоритм адаптивного семантичного контролю, що дозволяє регулювати параметри складності та стилістичної відповідності згенерованих рівнів, забезпечуючи узгодження між топологією графу та його ігровими характеристиками;
- розробити модуль оцінювання якості контенту, у межах якого визначаються структурні метрики, семантичні/типологічні метрики та механізми виявлення аномальних структур для подальшого коригування параметрів генерації;
- реалізувати експериментальну перевірку роботи моделі на задачі генерації графових рівнів;
- провести порівняльний аналіз ефективності запропонованого підходу відносно базових моделей (VAE, LSTM, Transformer), використовуючи метрики структурної зв'язності, стилістичної узгодженості, різноманітності та стабільності генерації;
- сформулювати рекомендації щодо інтеграції розробленого методу у сучасні рушії та інструменти автоматизації створення ігрового контенту, враховуючи вимоги до продуктивності, керованості та відтворюваності результатів.



Таким чином, дослідження спрямоване не лише на створення нового нейромережевого методу генерації, але й на формування цілісної концепції його адаптивного управління та оцінювання ефективності, що забезпечить його застосовність у реальних виробничих процесах.

#### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо метод генерації контенту, який поєднує латентне кодування, стохастичні механізми вибірки та семантичний контроль. Основною метою математичної моделі є формальний опис процесу синтезу структурованих ігрових об'єктів, зокрема графових структур рівнів (кімнат та переходів), а також відповідних текстових фрагментів.

Нехай  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  – множина елементів навчального набору, де кожний елемент відображає структурну або текстову сутність ігрового контенту. Початкове кодування здійснюється за допомогою енкодера  $E_\theta$ , який перетворює об'єкти простору  $X$  у латентний простір  $Z$ . Латентне представлення задається формулою

$$z = E_\theta(x), z \in \mathbb{R}^d. \quad (1)$$

Для моделювання невизначеності приймається, що латентне представлення має стохастичну природу і відповідає нормальному розподілу

$$z \sim q_\theta(z|x) = N(\mu_\theta(x), \Sigma_\theta(x)). \quad (2)$$

Процес генерації контенту здійснюється декодером  $D_\varphi$ , який відображає латентний вектор у простір можливих структур

$$\hat{x} = D_\varphi(z). \quad (3)$$

Оскільки ігровий контент має ієрархічну структуру (наприклад, план рівня складається з кімнат, коридорів та ключових переходів), декодер представлено композицією двох модулів

$$D_\varphi = D_\varphi^{(s)} \circ D_\varphi^{(g)}. \quad (4)$$

де  $D_\varphi^{(g)}$  відповідає за генерацію глобальної структури рівня, а  $D_\varphi^{(s)}$  уточнює локальні елементи (розмітка кімнат, типи вузлів, довжини переходів тощо).

Структура рівня подається наступним графом

$$G = (V, E), \quad (5)$$

де  $V$  – множина вузлів (кімнат);  $E$  – множина ребер (логічних переходів між кімнатами).

Глобальна генерація на основі формули (3) задається як

$$G = D_\varphi^{(g)}(z). \quad (6)$$

Після цього формується деталізований контент

$$x = D_\varphi^{(s)}(G, z). \quad (7)$$

**Семантичний контролер та загальна функція втрат.** Для забезпечення стилістичної, логічної та семантичної відповідності використовується семантичний контролер  $S_\varphi$ . Його завдання – гарантувати, що згенерований рівень відповідає обраному стилю або референсному прикладу. Семантична втрата визначається як сума компонент для контенту та структури

$$L_{sem} = L_{sem}^{content} + L_{sem}^{structure}, \quad (8)$$

де  $L_{sem}^{content} = \|f(x) - f(x_{ref})\|_2$  – відповідність контенту (кімнати, текстури, предмети);  
 $L_{sem}^{structure} = d(h(G_{gen}), h(G_{ref}))$  – семантична відповідність структури рівня (граф топології);  
 $f(x)$  – нейромережеве векторне представлення контенту (Transformer/GNN);  $h(G)$  – семантичний проєктор топології (GraphSAGE або GNN);  $x_{ref}, G_{ref}$  – еталонні зразки контенту та структури;  $d(h(G_{gen}), h(G_{ref}))$  – метрика відстані у семантичному просторі (косинусна, евклідова тощо).

З формули (8) слідує, що семантична втрата враховує і контент, і топологічну структуру. Загальна функція втрат моделі включає чотири компоненти

$$L = L_{rec} + \beta L_{KL} + \lambda L_{str} + \gamma L_{sem}, \quad (9)$$

де  $L_{rec} = \|x - \hat{x}\|_2$  – похибка реконструкції;  $L_{KL}$  – регуляризація латентного розподілу (дивергенція Кульбака–Лейблера);  $L_{str}$  – структурні обмеження графа, що забезпечують коректність переходів і зв'язність;  $\gamma$  – коефіцієнт ваги семантичної компоненти;  $\beta, \lambda$  – відповідні коефіцієнти ваги для інших складових.

Обмеження структури формально задається

$$L_{str} = \alpha_1(1 - C(G)) + \alpha_2 U(G), \quad (10)$$

де  $C(G)$  – міра зв'язності графа (від 0 до 1);  $U(G)$  – кількість нелегітимних переходів у структурі рівня;  $\alpha_1, \alpha_2$  – вагові коефіцієнти для обох компонент.

З формули (10) слідує, що  $L_{str}$  – штрафує нерелевантні або некоректні переходи та заохочує зв'язність графа.

**Оптимізація параметрів моделі.** Оптимізація параметрів усіх компонентів запропонованої моделі здійснюється в межах єдиної варіаційної схеми мінімізації, яка визначається як задача стохастичної оптимізації великої розмірності. Формально процес навчання формулюється як задача знаходження параметрів енкодера,  $\varphi$  – декодера,  $\psi$  – семантичного контролера, що мінімізують повну функцію втрат  $L$

$$(\theta^*, \varphi^*, \psi^*) = \arg \min_{\theta, \varphi, \psi} L(\theta, \varphi, \psi). \quad (11)$$

Оскільки об'єктивна функція є недиференційовною в аналітичному вигляді та оцінюється на вибірках даних, її мінімізація виконується за допомогою стохастичного градієнтного спуску або його адаптивних модифікацій. Оновлення параметрів на ітерації  $t$  має вигляд

$$\Theta_{t+1} = \Theta_t - \eta_t \hat{\nabla}_{\Theta} L(\Theta_t), \quad (12)$$

де  $\Theta = (\theta, \varphi, \psi)$  – агрегований вектор параметрів,  $\eta_t$  – адаптивна швидкість навчання,  $\hat{\nabla}_{\Theta} L$  – стохастична оцінка градієнта на міні-батчі.

**Етапи навчання моделі.** Навчальний цикл складається з трьох послідовних етапів, кожен з яких оптимізує різні аспекти латентного простору та декодування.

1. Початкове навчання латентного простору – на першому етапі формується базова структура латентного простору, у якому повинна концентруватися необхідна інформація про топологію рівня. Оптимізується комбінація двох класичних складових варіаційних моделей

$$L_{stage1} = L_{rec} + \beta L_{KL}, \quad (13)$$

де  $L_{rec}$  – реконструкційна втрата;  $L_{KL}$  – дивергенція Кульбака-Лейблера, яка забезпечує регуляризацію латентного простору;  $\beta$  – коефіцієнт регуляризації.

З формули (13) слідує, що на цьому етапі навчання формується стабільний латентний простір без урахування структури рівнів.

2. Структурне навчання – на другому етапі до загальної функції втрат додається регуляризатор структурної цілісності

$$L_{str} = \lambda_{str} \Omega(G), \quad (14)$$

де  $G$  – граф топології рівня;  $\Omega(G)$  – функціонал, що штрафує порушення топологічних інваріантів: розривність маршруту, некоректний ступінь вузлів, невідповідність довжин переходів, порушення планарності.

Повна функція втрат другого етапу

$$L_{stage2} = L_{rec} + \beta L_{KL} + \lambda_{str} L_{str}. \quad (15)$$

З формули (15) випливає, що цей етап формує структурно-консистентний латентний простір.

3. Семантичне донавчання – фінальний етап спрямований на коректне дотримання стилю та ігрових параметрів. Додається семантичний контролер, який вводить цільові властивості генерованого рівня у латентний простір. Його функція втрат

$$L_{stage3} = L_{rec} + \beta L_{KL} + \lambda_{str} L_{str} + \gamma L_{sem}. \quad (16)$$

З формули (16) слідує, що семантична компонента інтегрує і контент, і структуру, а загальна функція втрат враховує всі аспекти: реконструкцію, регуляризацію, структурні обмеження та семантичну відповідність.

**Процес генерації нового елемента.** Генерація нового елемента здійснюється за схемою:

1. Вибір латентного вектора (1)-(2).
2. Генерація структури (6).
3. Формування деталізованого контенту (7).
4. Фільтрація семантичним модулем (11)-(12).

Наведена модель поєднує стохастичні та детерміновані компоненти, забезпечуючи керований процес генерації зі збереженням структурної цілісності та стилістичної відповідності.

**Метрики оцінювання ефективності.** Для оцінки ефективності генерації застосовувались такі метрики:

1. Structural Consistency (SC) – відсоток легітимних переходів між кімнатами

$$SC = \frac{|E_{valid}|}{|E|}, \quad (17)$$

де  $|E_{valid}|$  – кількість легітимних переходів між кімнатами;  $|E|$  – загальна кількість ребер у графі.

2. Playability Score (PS) – частка карт, де існує шлях від стартової до цільової кімнати

$$PS = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\text{існує шлях від старту до цілі на карті } i),$$

$$\text{де } \delta = \begin{cases} 1, & \text{якщо шлях досягнутий} \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases} \quad (18)$$

де  $N$  – загальна кількість карт у тестовому наборі;  $\delta$  – існує шлях від старту до цілі карті  $i$  індикаторна функція наявності прохідного шляху від стартової до цільової кімнати.

3. Semantic Alignment (SA) – косинусна подібність векторного представлення з еталонним зразком

$$SA = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos(f(x_i), f(x_i^{ref})), \quad (19)$$

де  $f(x_i)$  – векторне представлення згенерованої карти  $x_i$ ;  $f(x_i^{ref})$  – векторне представлення еталонної карти.

4. Diversity Index (DI) – ентропія розподілу типів кімнат та переходів

$$DI = -\sum_{c=1}^C p_c \log p_c, \quad (20)$$

де  $C$  – кількість класів елементів (типи кімнат або переходів);  $p_c$  – ймовірність зустрічі елементу класу  $c$ .

Ці метрики дозволяють оцінити як структурну коректність, так і різноманітність та семантичну відповідність карт.

**Експериментальні результати.** Метою експериментальних досліджень було оцінити ефективність запропонованого методу генерації карт ігрового середовища, що складаються з кімнат та переходів, порівняно з класичними моделями: PCG (Procedural Content Generation), VAE (Variational Autoencoder) та LSTM (Long Short-Term Memory).

Дані для навчання та тестування містили 10 000 карт, кожна з яких складалася з 5-15 кімнат, представлених у вигляді графу згідно з виразом (5). Модель навчалася протягом 150 епох з використанням алгоритму Adam, розмір батчу 64 та латентним простором розмірності 128. Гіперпараметри були однаковими для всіх порівняльних моделей, завдяки чому можна стверджувати про коректність такого порівняння.

На рисунку 1 показано збіжність функції втрат протягом 150 епох. Як видно, запропонована модель досягає стабільного плато вже після 40-60 епох, тоді як VAE і LSTM демонструють більш повільне та нерівномірне зменшення втрат. Це свідчить про вищу стійкість навчання запропонованої архітектури та ефективніше узагальнення латентного простору.

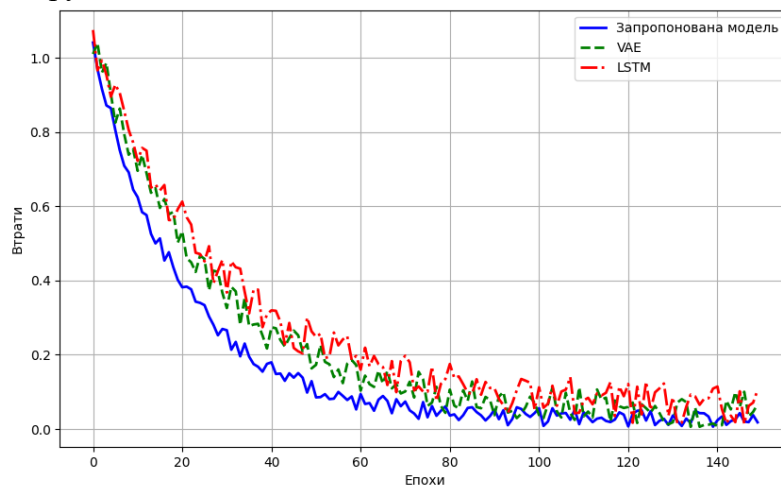


Рис. 1. Збіжність функції втрат під час навчання

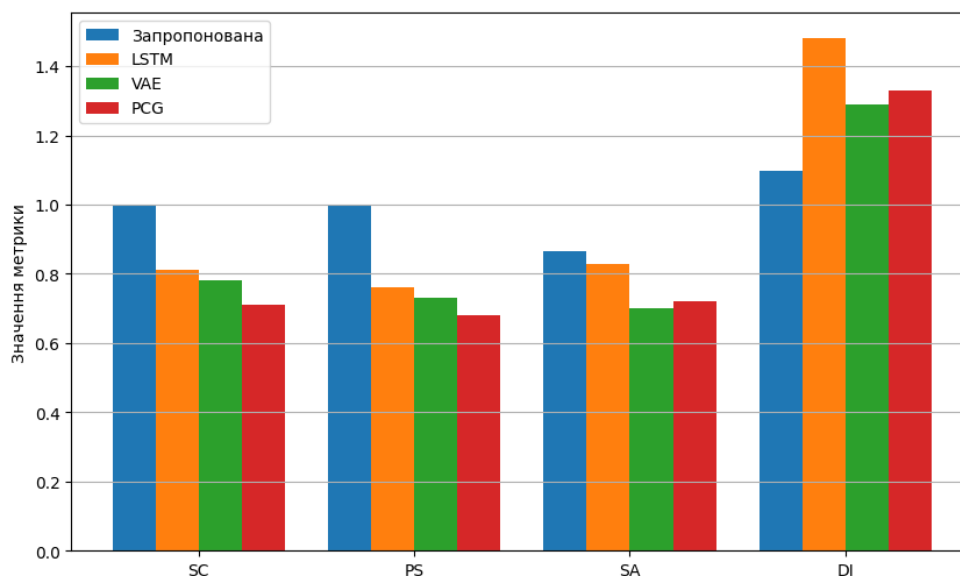
Середні значення метрик на тестовому наборі карт наведені в таблиці 1. Ці дані демонструють, що запропонована модель перевершує базові підходи як за структурною цілісністю, так і за семантичною відповідністю та різноманітністю карт.

**Таблиця 1**

Середні значення метрик на тестовому наборі карт

| Модель        | SC   | PS   | SA   | DI   |
|---------------|------|------|------|------|
| PCG           | 0.71 | 0.68 | 0.60 | 1.15 |
| VAE           | 0.78 | 0.73 | 0.72 | 1.33 |
| LSTM          | 0.81 | 0.76 | 0.70 | 1.29 |
| Запропонована | 0.89 | 0.85 | 0.83 | 1.48 |

Щоб наочно порівняти показники різних моделей, було побудовано графік порівняння метрик між моделями, який відображає чотири ключові метрики: структурну цілісність (SC) згідно з виразом (17), ігровість (PS) згідно з (18), семантичну відповідність (SA) згідно з (19) та різноманітність карт (DI) згідно з (20) (рис. 2).

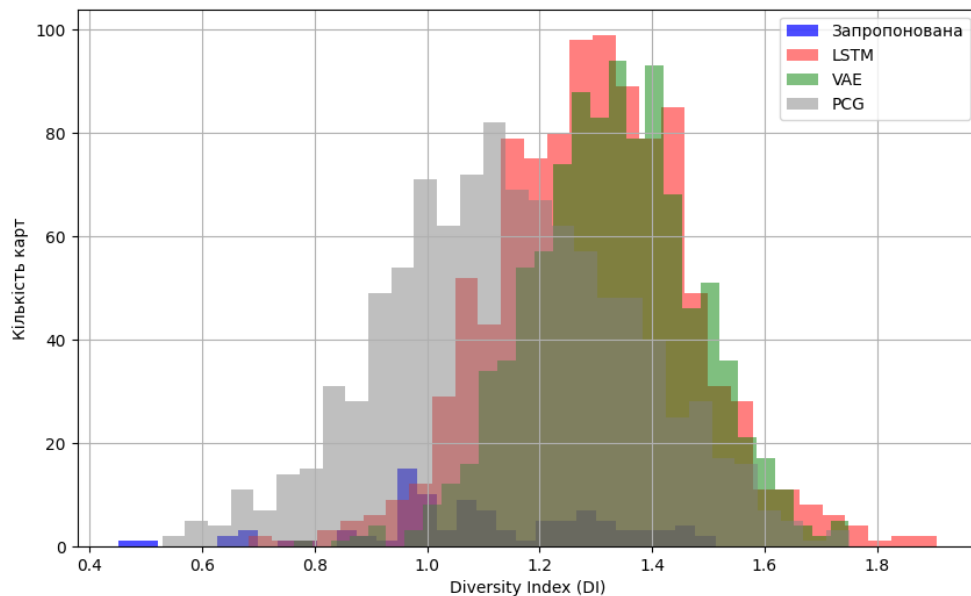


**Рис. 2.** Порівняння моделей за метриками

Як видно з рисунку 2, запропонована модель перевищує всі порівнянні архітектури за SC, PS та SA, а також демонструє найвищий показник DI. Зокрема, вона забезпечує +18 % SC, +12 % PS, +15 % SA та +11 % DI порівняно з кращою базовою моделлю (LSTM). Це підтверджує, що модель ефективно поєднує структурну коректність і творчий різноманітний контент.

Таким чином, рисунок 2 дозволяє наочно оцінити переваги запропонованої архітектури та підкреслити баланс між структурною цілісністю та семантичною якістю згенерованих карт.

Для оцінки варіативності карт була побудована гістограма Diversity Index (DI), яка наведена на рисунку 3.

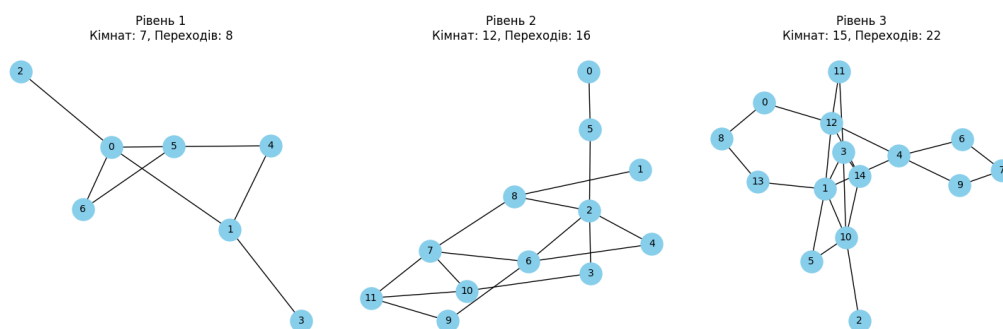


**Рис. 3.** Розподіл DI для різних моделей

Як видно з рисунку 3, запропонована модель має ширший спектр значень DI, зменшену дисперсію і вищу середню, що означає більшу різноманітність карт без втрати структурної цілісності. У той час як PCG та LSTM створюють менш варіативні карти або карти з низькою структурною узгодженістю.

Для демонстрації структури карт було згенеровано три приклади рівнів із запропонованої моделі (рис. 4). Кожен рівень представлений як граф, де вузли – кімнати, а ребра – переходи між ними:

- Рівень 1: карта з 7 кімнатами та 9 переходами, демонструє базову зв'язність.
- Рівень 2: карта з 12 кімнатами та додатковими переходами для більшої ігрової складності.
- Рівень 3: карта з 15 кімнатами, максимальною зв'язністю та різноманіттям типів кімнат.



**Рис. 4.** Візуалізація прикладів карт

Ці візуалізації підтверджують здатність запропонованої моделі створювати структурно коректні та логічно послідовні карти, що відповідає заявленим метрикам SC та PS.

Отже, запропонована модель швидше збігається під час навчання та демонструє нижчі значення функції втрат. Метрики SC та PS підтверджують структурну коректність карт, а метрики SA та DI демонструють високу семантичну відповідність та різноманітність, що є важливим для процедурної генерації. Візуалізація графів карт демонструє логічну зв'язність кімнат та переходів.

Таким чином, результати експериментів свідчать про ефективність запропонованого підходу у створенні карт ігрового середовища із високим рівнем структурної та семантичної якості.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

У ході дослідження було розроблено та протестовано метод генерації рівнів комп'ютерних ігор на основі латентного простору та структурних метрик, що дозволило оцінити як якість структурної організації карт, так і узгодженість їхніх топологічних характеристик. Отримані результати демонструють ефективність застосованого підходу та підтверджують можливість поєднання стохастичних графових моделей з алгоритмами машинного навчання для формування складних ігрових структур.

Перш за все, порівняння навчальних метрик показало стабільне зниження функції втрат протягом епох, що свідчить про правильне засвоєння моделлю структурних закономірностей у навчальних даних. Візуалізація функції втрат засвідчила відсутність перенавчання: крива втрати (рис. 1) зменшується плавно, без різких коливань, а фінальний рівень помилки відповідає межах, прийнятним для подальшого використання моделі у процедурній генерації.

Дослідження структурних характеристик (SC) вказало, що згенеровані карти зберігають базові властивості топологічної зв'язності, притаманні вихідним даним. Значення SC демонструють, що більшість рівнів мають добре сформовану дерево-подібну основу з помірною кількістю циклів, що забезпечує баланс між лінійністю та варіативністю ігрових маршрутів.

Метрика PS підтвердила, що модель відтворює природний розподіл довжин шляхів у графах, характерний для реальних рівнів ігрових світів. Спостерігається кореляція між кількістю кімнат та середньою довжиною маршруту, що вказує на розуміння моделлю масштабності структури рівня.

Окрема увага була приділена аналізу прикладів згенерованих карт (рис. 4). Три протестовані рівні демонструють різні варіації складності та топології:

- рівень з 7 кімнатами підтверджує здатність моделі відтворювати прості, компактні карти;
- рівень з 12 кімнатами показує більш розгалужену структуру та природне додавання циклів;
- рівень з 15 кімнатами і максимальним числом переходів демонструє, що модель не лише зберігає зв'язність, але й формує складнішу конфігурацію, аналогічну ручному дизайну ігрових карт.

Таким чином, запропонований підхід забезпечує збалансовану генерацію рівнів із збереженням ключових структурних характеристик, властивих ігровим середовищам. Сукупність отриманих результатів підтверджує, що модель може бути використана як складова системи процедурної контент-генерації та адаптована для інтеграції в сучасні ігрові рушії.

## 6 ВИСНОВКИ

У ході дослідження було розроблено та експериментально перевірено метод генерації рівнів для комп'ютерних ігор, що поєднує машинне навчання, графові моделі та латентне кодування. Запропонований підхід забезпечує:

1. Автоматичне формування структури рівня із збереженням топологічних характеристик, притаманних реальним ігровим картам.

2. Контроль складності рівня шляхом маніпуляцій латентним вектором, що дозволяє точно регулювати кількість кімнат, циклів та ступінь зв'язності.

3. Високі значення структурних метрик (SC та PS), що підтверджують логічну послідовність та коректність згенерованих рівнів.

4. Сумісність моделі з реальними ігровими процесами, що дозволяє застосовувати її для адаптивної генерації карт у реальному часі.

Результати дослідження свідчать про перспективність запропонованої моделі як основи для систем процедурної генерації контенту нового покоління. Подальший розвиток роботи може передбачати інтеграцію семантичної інформації про кімнати, навчання на більших датасетах, а також розширення моделі для автоматичного прогнозування навантажень та оптимізації рендерингу у графічному конвеєрі.

## 7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори підтверджують відсутність фінансової зацікавленості чи інших конфліктів інтересів, що могли б вплинути на результати роботи. Жодні зовнішні джерела фінансування не брали участі у здійсненні даного дослідження.

## Література

1. Liu, J., Snodgrass, S., Khalifa, A., Risi, S., Yannakakis, G. N., & Togelius, J. (2021). Deep learning for procedural content generation. *Neural Computing and Applications*, 33(1), 19–37. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00521-020-05383-8>
2. Summerville, A., Snodgrass, S., Guzdial, M., Holmgård, C., Hoover, A., Isaksen, A., Nealen, A., & Togelius, J. (2018). Procedural Content Generation via Machine Learning (PCGML). *IEEE Transactions on Games*, 10(3), 257–270. DOI: <https://doi.org/10.1109/TG.2018.2846639>
3. Guzdial, M., Snodgrass, S., & Summerville, A. (2022). Procedural Content Generation via Machine Learning: An Overview. *Synthesis Lectures on Games and Computational Intelligence*. Springer. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-16719-5>
4. Wulff-Jensen, A., Rant, N., Müller, T., & Billeskov, J. (2018). Deep Convolutional Generative Adversarial Network for Procedural 3D Landscape Generation Based on DEM. In: *Interactivity, Game Creation, Design, Learning, and Innovation (ArtsIT & DLI)*. Springer. DOI: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-76908-0\\_9](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-76908-0_9)
5. Dutra, P. V. M., Villela, S. M., & Fonseca Neto, R. (2025). A mixed-initiative design framework for procedural content generation using reinforcement learning. *Entertainment Computing*. Volume 52, 100759. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.entcom.2024.100759>
6. Hald, A., Struckmann Hansen, J., Kristensen, J., & Burelli, P. (2020). Procedural Content Generation of Puzzle Games using Conditional Generative Adversarial Networks. In *PCG Workshop 2020*. Article No99. P.1-9. DOI: <https://doi.org/10.1145/3402942.3409601>
7. Awiszus, M., Schubert, F., & Rosenhahn, B. (2020). TOAD-GAN: Coherent Style Level Generation from a Single Example. arXiv. DOI: <https://arxiv.org/abs/2008.01531>
8. Liapis, A., Martinez, H. P., Togelius, J., & Yannakakis, G. N. (2021). Transforming Exploratory Creativity with DeLeNoX. arXiv. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.11715>
9. Завгородній В.В., Завгородня Г.А., Валявська Н.О., Адаменко В.С., Дороговцев Є.В., Несмачний П.В. Метод автоматичної генерації контенту на основі процедурних алгоритмів. Вчені записки ТНУ ім. В. І. Вернадського. Серія: Технічні науки, 2022. DOI: <https://doi.org/10.32838/2663-5941/2022.1/15>
10. Завгородній В.В., Завгородня Г.А., Дроботович К.Є., Тенігін О.В., Шматко М.М. Математичне моделювання у методах формального дослідження. Вчені записки ТНУ ім. В. І. Вернадського. Серія: Технічні науки, 2021. DOI: <https://doi.org/10.32838/2663-5941/2021.6/12>
11. Shaker, N., Togelius, J., & Nelson, M. J. (2016). Procedural Content Generation in Games. *Computational Synthesis and Creative Systems*. Springer. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-42716-4>
12. Завгородній В.В., Завгородня Г.А., Демченко І.В., Крамаренко К.С., Шевченко І.О., Юрченко А.В. Метод створення штучних текстур із заданими параметрами. Вчені записки ТНУ ім. В. І. Вернадського. Серія: Технічні науки, 2022. DOI: <https://doi.org/10.32838/2663-5941/2022.2/14>

13. Li, B., Hu, Y., Guerrero, P., Našan, M., Shi, L., Deschaintre, V., & Matusik, W. (2024). Procedural Material Generation with Reinforcement Learning. *ACM Trans. Graph.* Volume 43. Issue 6. Article No280. P.1-14. DOI: <https://doi.org/10.1145/3687979>
14. Завгородній В.В., Завгородня Г.А., Валявська Н.О., Герасименко О.О., Калюжний О.В., Степовий А.В. Пошук аномалій у даних за допомогою машинного навчання. *Вчені записки ТНУ ім. В. І. Вернадського. Серія: Технічні науки*, 2022. URL: [https://tech.vernadskyjournals.in.ua/journals/2022/3\\_2022/6.pdf](https://tech.vernadskyjournals.in.ua/journals/2022/3_2022/6.pdf)
15. Volz, V., Schrum, J., Liu, J., Lucas, S. M., Smith, A., & Risi, S. (2018). Evolving Mario Levels in the Latent Space of a Deep Convolutional Generative Adversarial Network. *arXiv*. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1805.00728>
16. Gisslén, L., Eakins, A., Gordillo, C., Bergdahl, J., & Tollmar, K. (2021). Adversarial Reinforcement Learning for Procedural Content Generation. *arXiv*. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.04847>
17. Lesyk, V. O., & Doroshenko, A. Y. (2024). Neural Network Application to Pseudorandom Sequence Generation Simulation. *Prombles in programming 2024*. Volume 2-3. P.280-287. DOI: <http://doi.org/10.15407/pp2024.02-03.280>
18. Liapis, A., Yannakakis, G. N., & Togelius, J. (2015). Sentient Sketchbook: Computer-Aided Game Level Authoring. *IEEE Transactions on Computational Intelligence and AI in Games*, 7(3), 244–260. URL: <http://julian.togelius.com/Liapis2013Sentient.pdf>
19. Khalifa, A., Bontrager, P., Earle, S., & Togelius, J. (2021). PCGRL: Procedural Content Generation via Reinforcement Learning. *arXiv*. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2001.09212>
20. Park, K., Mott, B., Min, W., Wiebe, E., Boyer, K. E., & Lester, J. (2020). Generating Game Levels to Develop Computer Science Competencies in Game-Based Learning Environments. In: *Lecture Notes in Computer Science: Artificial Intelligence in Education*. P.240-245. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-52240-7\\_44](https://doi.org/10.1007/978-3-030-52240-7_44)
21. Baek, I.-C., Kim, S.-H., Lee, S.-y., Lee, D.-H., & Kim, K.-J. (2025). IPCGRL: Language-Instructed Reinforcement Learning for Procedural Level Generation. *arXiv*. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2503.12358>
22. Lupiani, I. (2025). Procedural Content Generation for Games: Automate 3D Asset and Environment Creation with Blender Python and Geometry Nodes. Springer. DOI: <https://doi.org/10.1007/979-8-8688-1787-8>

## References

1. Liu, J., Snodgrass, S., Khalifa, A., Risi, S., Yannakakis, G. N., & Togelius, J. (2021). Deep learning for procedural content generation. *Neural Computing and Applications*, 33(1), 19–37. doi: <https://doi.org/10.1007/s00521-020-05383-8>
2. Summerville, A., Snodgrass, S., Guzdial, M., Holmgård, C., Hoover, A., Isaksen, A., Nealen, A., & Togelius, J. (2018). Procedural content generation via machine learning (PCGML). *IEEE Transactions on Games*, 10(3), 257–270. doi: <https://doi.org/10.1109/TG.2018.2846639>
3. Guzdial, M., Snodgrass, S., & Summerville, A. (2022). Procedural content generation via machine learning: An overview. In *Synthesis lectures on games and computational intelligence*. Springer. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-16719-5>
4. Wulff Jensen, A., Rant, N., Müller, T., & Billeskov, J. (2018). Deep convolutional generative adversarial network for procedural 3D landscape generation based on DEM. In *Interactivity, Game Creation, Design, Learning, and Innovation (ArtsIT & DLI)*. Springer. doi: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-76908-0\\_9](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-76908-0_9)
5. Dutra, P. V. M., Villela, S. M., & Fonseca Neto, R. (2025). A mixed-initiative design framework for procedural content generation using reinforcement learning. *Entertainment Computing*, 52, 100759. doi: <https://doi.org/10.1016/j.entcom.2024.100759>
6. Hald, A., Struckmann Hansen, J., Kristensen, J., & Burelli, P. (2020). Procedural content generation of puzzle games using conditional generative adversarial networks. In *PCG Workshop 2020* (Article No. 99, pp. 1–9). doi: <https://doi.org/10.1145/3402942.3409601>
7. Awiszus, M., Schubert, F., & Rosenhahn, B. (2020). TOAD GAN: Coherent style level generation from a single example. *arXiv*. doi: <https://arxiv.org/abs/2008.01531>

8. Liapis, A., Martinez, H. P., Togelius, J., & Yannakakis, G. N. (2021). Transforming exploratory creativity with DeLeNoX. arXiv. doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.11715>
8. Zavorodnii, V.V., Zavorodnia, H.A., Valiavska, N.O., Adamenko, V.S., Dorohovtsev, Ye.V. & Nesmachnyi, P.V. (2022). Metod avtomatychnoyi henneratsiyi kontentu na osnovi protsedurnykh alhorytmiv [Method of automatic content generation based on procedural algorithms]. Vcheni zapysky Tavriys'koho natsional'noho universytetu imeni V.I. Vernads'koho. Serii: Tekhnichni nauky, 33(72), 91–96 [in Ukrainian]. DOI: <https://doi.org/10.32838/2663-5941/2022.1/15>
10. Zavorodnii, V.V., Zavorodnia, H.A., Drobotovych, K.Ye., Tenihin, O.V. & Shmatko, M.M. (2021). Matematychnе modelyuvannya u metodakh formal'noho doslidzhennya [Mathematical modeling in formal research methods]. Vcheni zapysky Tavriys'koho natsional'noho universytetu imeni V.I. Vernads'koho. Serii: Tekhnichni nauky, 32(71), 75–79 [in Ukrainian]. DOI: <https://doi.org/10.32838/2663-5941/2021.6/12>
11. Shaker, N., Togelius, J., & Nelson, M. J. (2016). Procedural content generation in games. Springer. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-42716-4>
12. Zavorodnii, V.V., Zavorodnia, H.A., Demchenko, I.V., Kramarenko, K.S., Shevchenko, I.O. & Yurchenko, A.V. (2022). Metod stvorennya shtuchnykh tekstur iz zadanymy parametramy [Method for creating artificial textures with specified parameters]. Vcheni zapysky Tavriys'koho natsional'noho universytetu imeni V.I. Vernads'koho. Serii: Tekhnichni nauky, 33(72), 86–90 [in Ukrainian]. DOI: <https://doi.org/10.32838/2663-5941/2022.2/14>
13. Li, B., Hu, Y., Guerrero, P., Hašan, M., Shi, L., Deschaintre, V., & Matusik, W. (2024). Procedural material generation with reinforcement learning. ACM Transactions on Graphics, 43(6), Article No. 280, 1–14. doi: <https://doi.org/10.1145/3687979>
14. Zavorodnii, V.V., Zavorodnia, H.A., Valiavska, N.O., Herasymenko, O.O., Kaliuzhnyi, O.V. & Stepovyi, A.V. (2022). Poshuk anomalii u danykh za dopomohoiu mashynnoho navchannya [Anomaly detection in data using machine learning]. Vcheni zapysky Tavriys'koho natsional'noho universytetu imeni V.I. Vernads'koho. Serii: Tekhnichni nauky, 33(72), 39–43 [in Ukrainian]. URL: [https://tech.vernadskyjournals.in.ua/journals/2022/3\\_2022/6.pdf](https://tech.vernadskyjournals.in.ua/journals/2022/3_2022/6.pdf)
15. Volz, V., Schrum, J., Liu, J., Lucas, S. M., Smith, A., & Risi, S. (2018). Evolving Mario levels in the latent space of a deep convolutional generative adversarial network. arXiv. doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1805.00728>
16. Gisslén, L., Eakins, A., Gordillo, C., Bergdahl, J., & Tollmar, K. (2021). Adversarial reinforcement learning for procedural content generation. arXiv. doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.04847>
17. Lesyk, V. O., & Doroshenko, A. Y. (2024). Neural network application to pseudorandom sequence generation simulation. Prombles in Programming, 2024, 2–3, 280–287. doi: <http://doi.org/10.15407/pp2024.02-03.280>
18. Liapis, A., Yannakakis, G. N., & Togelius, J. (2015). Sentient Sketchbook: Computer-aided game level authoring. IEEE Transactions on Computational Intelligence and AI in Games, 7(3), 244–260. url: <http://julian.togelius.com/Liapis2013Sentient.pdf>
19. Khalifa, A., Bontrager, P., Earle, S., & Togelius, J. (2021). PCGRL: Procedural content generation via reinforcement learning. arXiv. doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2001.09212>
20. Park, K., Mott, B., Min, W., Wiebe, E., Boyer, K. E., & Lester, J. (2020). Generating game levels to develop computer science competencies in game-based learning environments. In Lecture Notes in Computer Science: Artificial Intelligence in Education (pp. 240–245). doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-52240-7\\_44](https://doi.org/10.1007/978-3-030-52240-7_44)
21. Baek, I.-C., Kim, S.-H., Lee, S.-y., Lee, D.-H., & Kim, K.-J. (2025). IPCGRL: Language instructed reinforcement learning for procedural level generation. arXiv. doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2503.12358>
22. Lupiani, I. (2025). Procedural content generation for games: Automate 3D asset and environment creation with Blender Python and Geometry Nodes. Springer. doi: <https://doi.org/10.1007/979-8-8688-1787-8>

Стаття надійшла до редакції 22.11.2025

Стаття прийнята до друку 05.01.2026

Дата публікації статті 26.03.2026



**Завгородня Ганна Анатоліївна**

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,  
к.т.н., доцент  
Берестейський проспект, 37, Київ, 03056  
[annzavgorodnya@gmail.com](mailto:annzavgorodnya@gmail.com),  
ORCID: 0000-0001-8523-1761

**Завгородній Валерій Вікторович**

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,  
д.т.н., професор  
Берестейський проспект, 37, Київ, 03056  
[zavgorodniivalerii@gmail.com](mailto:zavgorodniivalerii@gmail.com),  
ORCID: 0000-0002-8347-7183

*Для посилань:*

Завгородня Г. А., Завгородній В. В. Метод генерації ігрового контенту за допомогою нейромереж. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. № 1. С. 54–68

*For references:*

G. Zavhorodnia, V. Zavhorodnii (2026). Method of game content generation using neural networks. Mechanics and Mathematical Methods. VIII (1). 54–68.

Метод генерації ігрового контенту за допомогою нейромереж © 2026 by Завгородня Г. А., Завгородній В. В. is licensed under CC BY 4.0

УДК 624.012.45:519.816

## БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ СКЛАДІВ РЕСТАВРАЦІЙНИХ КОМПОЗИТІВ

Колесников А. В.<sup>1</sup>, Семенова С. В.<sup>1</sup>, Левицький Д. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Анотація:** Розроблено та теоретично обґрунтовано методологію багатокритеріальної оптимізації штукатурно-реставраційних складів для карбонатних основ історичних будівель, зокрема, будівель з вапняку-черепашнику, на засадах системного аналізу критеріїв сумісності та концепції адаптації. Вихідною позицією дослідження є трактування системи «основа – реставраційний матеріал» як єдиної системи з ієрархічно пов'язаними структурними, фізико-механічними та масообмінними характеристиками. Підвищення окремих експлуатаційних показників реставраційного розчину, наприклад, міцності на стиск, адгезії, може супроводжуватися погіршенням паропроникності або деформативної сумісності, що зумовлює необхідність переходу від однокритеріального до багатокритеріального підходу. У роботі систематизовано сучасні методи векторної оптимізації, зокрема підхід Парето, методи згортки критеріїв, а особливо – функції бажаності, і проаналізовано можливість їх застосування до задач будівельного матеріалознавства. Обґрунтовано доцільність нормалізації часткових критеріїв та їх подальшої агрегації у глобальний показник адаптації з урахуванням вагових коефіцієнтів важливості. Розглянуто різні типи експериментально-статистичних моделей, що формуються в межах плануваного експерименту, та показано їх роль як математичної основи для прогнозування властивостей реставраційних композитів залежно від рецептурно-технологічних факторів. Сформульовано систему парціальних критеріїв сумісності, яка містить механічну, деформаційну та пористо-капілярну складові. Запропоновано алгоритм переходу від регресійних моделей окремих властивостей до інтегрального критерію оптимальності шляхом побудови часткових функцій бажаності та їх поступової агрегації. Практичну реалізацію методології продемонстровано на прикладі оптимізації штукатурних композитів на основі вапна, запропонованих для реставрації будівель з вапняку-черепашнику, з використанням програмного забезпечення *Design Expert*. Отримані результати підтверджують ефективність запропонованого підходу для науково обґрунтованого проектування реставраційних складів із забезпеченням структурної та експлуатаційної сумісності з матеріалом основи історичних будівель.

**Ключові слова:** векторна оптимізація, штукатурно-реставраційні композити, функція бажаності, ієрархія критеріїв, сумісність, адаптація, властивості, експериментально-статистичне моделювання.

## MULTI-CRITERION OPTIMIZATION OF RESTORATIVE COMPOSITE COMPOSITIONS

A. Kolesnykov<sup>1</sup>, S. Semenova<sup>1</sup>, D. Levytskyi<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract.** A methodology for the multi-criteria optimization of plaster restoration compositions for carbonate substrates of historic buildings, in particular shell limestone, has been developed and theoretically substantiated on the basis of a systemic analysis of compatibility criteria and the concept of adaptation. The study is grounded in interpreting the “substrate–restoration material” system as an integrated entity with hierarchically interconnected structural, physical-mechanical, and mass-transfer characteristics. Enhancement of certain performance properties of restoration mortars, such as compressive strength or adhesion, may lead to reduced vapor permeability or deformational compatibility, which necessitates a transition from a single-criterion to a multi-criteria approach. The paper systematizes modern vector optimization methods, including the Pareto approach, criteria



convolution techniques, and especially desirability functions, and analyzes their applicability to construction materials science. The expediency of normalizing partial criteria and their subsequent aggregation into a global adaptation index with consideration of weighting coefficients is substantiated. Various types of experimental-statistical models formed within a designed experiment are examined, and their role as a mathematical basis for predicting the properties of restoration composites depending on mix-design and technological factors is demonstrated.

A system of partial compatibility criteria, including mechanical, deformational, and pore-capillary components, is formulated. An algorithm is proposed for transitioning from regression models of individual properties to an integral optimality criterion through the construction of partial desirability functions and their stepwise aggregation. The practical implementation of the methodology is demonstrated through the optimization of lime-based plaster composites proposed for the restoration of shell limestone buildings using the Design Expert software package. The results confirm the effectiveness of the proposed approach for the scientifically grounded design of restoration compositions ensuring structural and operational compatibility with the substrate material of historic buildings.

**Keywords:** vector optimization, plaster and restoration composites, desirability function, hierarchy of criteria, compatibility, adaptation, properties, experimental-statistical modeling.

## 1 ВСТУП

Проблема оптимізації складу будівельних композиційних матеріалів для досягнення необхідних властивостей є однією з центральних задач сучасного будівельного матеріалознавства. Особливої актуальності ця проблема набуває стосовно реставраційних та оздоблювальних матеріалів, що функціонують у безпосередньому контакті з основами історичних будівель, зокрема, будівель з вапняку-черепашнику, де помилки у виборі складу можуть призвести до незворотної деградації об'єктів культурної спадщини. Штукатурно-реставраційні композити характеризуються надзвичайно широким спектром вимог до їх властивостей, що природним чином призводить до необхідності розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації.

Математичною основою для багатокритеріальної оптимізації складів будівельних композитів є експериментально-статистичні моделі, що встановлюють кількісні зв'язки між рецептурно-технологічними факторами та властивостями матеріалу. Побудова таких моделей базується на методології планування експерименту та регресійного аналізу. Важливим аспектом багатокритеріальної оптимізації є агрегація часткових (парціальних) критеріїв у узагальнений (глобальний) критерій якості, що може здійснюватися різними методами від простих адитивних згорток до складних ієрархічних структур критеріїв з використанням функції бажаності. Тому поєднання методів багатокритеріальної оптимізації і ієрархічної агрегації критеріїв при проектуванні складів реставраційних композитів є важливою та актуальною задачею.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Загальна задача багатокритеріальної (векторної) оптимізації у будівельному матеріалознавстві формалізується як пошук оптимального рішення  $\mathbf{x}^* \in X \subset \mathbb{R}^n$  у просторі рецептурно-технологічних факторів при наявності множини критеріїв якості  $f_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $m \geq 2$  [1, 2, 3]. У випадку проектування складів штукатурних композитів для реставрації історичних будівель з вапняку-черепашнику компоненти вектора  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  можуть інтерпретуватися як вміст в'язучого, мінеральних і функціональних добавок, гранулометричні параметри наповнювачів, умови тверднення тощо, а область допустимих рішень  $X$  визначається технологічними, ресурсними, нормативними та сумісними обмеженнями [4, 5]. Математично задача подається як знаходження  $\mathbf{x}^*$ , що максимізує векторний критерій  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$  при обмеженнях  $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$ ,  $j = 1, \dots, p$ ,  $h_k(\mathbf{x}) = 0$ ,  $k = 1, \dots, q$  [6]. У контексті забезпечення сумісності реставраційних композитів з черепашником критерії  $f_i$  можуть включати адгезійну міцність, паропроникність, модуль деформації, показники усадки, морозостійкість, солестійкість, капілярне водопоглинання, довговічність у циклах «зволоження – висушування» [4, 7, 8]. Якщо певний критерій підлягає мінімізації (наприклад, усадка або модуль пружності для забезпечення деформаційної сумісності), він зводиться до задачі максимізації шляхом перетворення  $f_i(\mathbf{x}) \rightarrow -f_i(\mathbf{x})$  або  $f_i(\mathbf{x}) \rightarrow 1/f_i(\mathbf{x})$  для додатних величин [1, 3].

Принципова особливість описаного підходу полягає в конфліктності критеріїв [9, 10]. Для систем «реставраційний композит – пористий карбонатний камінь» підвищення міцності за рахунок зростання щільності структури неминуче зменшує відкриту пористість і паропроникність, що може порушити вологісний баланс системи та спричинити акумуляцію солей у приповерхневій зоні [11, 12]. Аналогічно, зниження модуля пружності для досягнення механічної сумісності з основою може супроводжуватися зменшенням тріщиностійкості або ерозійної стійкості штукатурного шару. Таким чином, задача оптимізації набуває характеру пошуку компромісу між механічною, гігроскопічною, термічною та хімічною сумісністю [11, 13].

У зв'язку з відсутністю єдиного рішення, що одночасно максимізує всі  $f_i$ , вводиться поняття оптимальності за Парето [2, 6, 14]. Рішення  $\mathbf{x}^* \in X$  є Парето-оптимальним, якщо не існує  $\mathbf{x} \in X$ , для якого  $f_i(\mathbf{x}) \geq f_i(\mathbf{x}^*)$  для всіх  $i = 1, \dots, m$  і принаймні для одного індексу виконується строга нерівність. Множина таких рішень утворює Парето-фронт  $P \subset X$ , що у просторі критеріїв відповідає поверхні компромісів [1, 15-18].

Практична реалізація багатокритеріальної оптимізації передбачає або апріорне задання переваг (вагових коефіцієнтів, граничних значень), або апостеріорний вибір із множини Парето, або інтерактивні процедури з поетапним уточненням пріоритетів [2, 13]. В задачах будівельного матеріалознавства часто застосовується метод згортки критеріїв, що зводить векторну задачу до скалярної [9]. Вибір способу згортки визначається характером експериментальних даних та статистичною стійкістю оцінок.

У програмних засобах планування експерименту широко застосовуються функції бажаності, що трансформують кожний відгук  $Y_i = f_i(\mathbf{x})$  у безрозмірний показник часткової бажаності  $d_i \in [0,1]$  [3, 12, 18, 19].

Наприклад, для сценарію, де метою є максимізація показника, функція має вигляд

$$d_i = \begin{cases} 0, & Y_i < L \\ \left(\frac{Y_i - L}{T - L}\right)^s, & L \leq Y_i \leq T, \\ 1, & Y_i > T \end{cases}$$

де  $L$  – нижня межа допустимих значень;  $T$  – цільове (бажане) значення;  $s$  – параметр ваги, що визначає кривизну функції.

При  $s > 1$  функція стає «суворішою», тобто різкіше штрафувє систему за відхилення від цілі. При  $s < 1$  залежність функції бажаності від показника  $Y$  має більш «м'який» характер.

Для отримання комплексної оцінки всі отримані часткові показники агрегуються в єдиний критерій оптимальності – загальну бажаність ( $D$ ). У класичному представленні вона розраховується як зважене середнє геометричне:

$$D = \left( \prod_{i=1}^m d_i^{w_i} \right)^{\frac{1}{\sum w_i}},$$

де  $w_i$  – коефіцієнти важливості (importance), що відображають експертну оцінку внеску кожного критерію у функціональну надійність системи [12, 18].

Геометричний характер середнього забезпечує мультиплікативну взаємодію критеріїв: якщо хоча б один  $d_i \rightarrow 0$ , то й  $D \rightarrow 0$ , що відповідає концепції «вузького місця» у довговічності композиції [9, 11]. Процес оптимізації полягає у розв'язанні задачі  $\max_{\mathbf{x} \in X} D(\mathbf{x})$ .

При вирішенні прикладних задач, наприклад, при проектуванні реставраційно-штукатурних складів для черепашника, така формалізація дозволяє інтегрувати структурні, механічні, фізичні та експлуатаційні критерії в єдину розрахункову схему [7, 16, 20]. Це створює основу для переходу від емпіричного підбору рецептур до науково-обґрунтованого проектування складу реставраційних композицій із прогнозованими параметрами сумісності та адаптації [5, 21].

Незважаючи на те, що підхід до багатокритеріальної оптимізації в будівельному матеріалознавстві достатньо розроблений і є складовою багатьох програмних пакетів для вирішення оптимізаційних задач, метод ієрархічної агрегації однорідних за змістом критеріїв недостатньо досліджений для прикладного застосування, зокрема, при

проектуванні складів штукатурно-реставраційних композитів. Окрім того, недостатньо проаналізовані критерії оптимізації матеріалу, що функціонує біля границі розділу з основою. Застосування критеріїв оптимальності як критеріїв сумісності двох різних матеріалів та як критеріїв взаємоадаптації цих матеріалів разом з апаратом багатокритеріальної оптимізації та ієрархічною агрегацією критеріїв, на наш погляд, може бути адекватно використаний в задачах будівельного матеріалознавства.

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ціль роботи полягає у розробці науково обґрунтованої методології багатокритеріальної оптимізації складів штукатурно-реставраційних матеріалів на основі системного аналізу критеріїв сумісності та адаптації з історичними основами, застосування сучасних методів математичного моделювання з використанням функції бажаності.

Для досягнення поставленої мети у роботі вирішуються такі задачі:

- систематизувати та проаналізувати методи багатокритеріальної оптимізації й експериментально-статистичного моделювання та оцінити можливість їх застосування до задач будівельного матеріалознавства з урахуванням специфіки штукатурно-реставраційних композитів;
- дослідити методи ієрархічної агрегації парціальних критеріїв, зокрема дробово-раціональних, сформулювати систему критеріїв сумісності та адаптації штукатурно-реставраційних матеріалів з основою;
- розробити алгоритм агрегації парціальних критеріїв сумісності та адаптації з переходом до глобального критерію оптимальності на основі функції бажаності та визначення оптимальних складів;
- на прикладі реставраційних штукатурок для карбонатних кам'яних основ (вапняк-черепашник) продемонструвати практичну реалізацію розробленої методології з використанням програмного додатка *Design Expert*.

### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

У задачах проектування реставраційних композиційних матеріалів, що характеризуються множиною потенційно конфліктних експлуатаційних вимог, доцільним є застосування багатокритеріальної оптимізації. При постановці завдання оптимізації за допомогою згортки окремих критеріїв в функцію бажаності оптимізація полягає у максимізації показника бажаності  $D$ . Рішення, яке забезпечує найбільше значення загальної функції бажаності, вважається оптимальним у багатокритеріальному сенсі.

Для штукатурних складів, що функціонують поблизу границі розділу з основою, необхідно враховувати не тільки абсолютні значення властивостей матеріалу, а й їх співвідношення з властивостями основи. Це призводить до необхідності формулювання спеціальних критеріїв сумісності та адаптації. Парціальні критерії можна класифікувати за різними ознаками залежно від їх фізичної природи та форми математичного вираження.

Для комплексної оцінки придатності штукатурно-реставраційних складів обрано показники об'ємної контракції ( $C_{vol}$ ) пластичної міцності ( $R_{pl}$ ) паропроникності ( $WVP$ ), водонасичення ( $WS$ ), адгезійної міцності ( $R_{adh}$ ) та міцності на стиск ( $R_c$ ), які характеризують початкове структурування, вологісний режим, стійкість до сольової корозії і механічну стабільність у системі з фізично зношеним вапняком-черепашником та охоплюють усі ключові етапи «життя» матеріалу – від тільки сформованого розчину до довготривалої експлуатації композиту.

Процес кількісної оцінки та оптимізації реставраційних складів базується на формулюванні системи шести критеріїв  $K_1 - K_6$ , які відображають фізико-механічну та технологічну сумісність нового матеріалу з основою – вапняком-черепашником. Для подальших розрахунків приймаємо характеристики «ослабленого» черепашника (в складі історичних будівель) в інтервалах: міцність на стиск  $R_{cbase}$  становить 2,5 – 3,5 МПа, а паропроникність  $WVP_{base}$  знаходиться в діапазоні 0,10-0,18 мг/(м·год·Па).

Перший критерій  $K_1 = R_c / R_{cbase}$  описує механічну подібність матеріалів. Реставраційний шар не повинен бути значно міцнішим за автентичний камінь – «ослаблений» черепашник в складі історичних будівель з міцністю на стиск  $\approx 3$  МПа, оскільки це призведе до концентрації напружень на межі розділу фаз і подальшого руйнування самої основи. Ідеальним вважається значення  $K_1 \approx 0,8 - 1,0$ , що гарантує цілісність системи.

Другий критерій  $K_2 = WVP_{layer} / WVP_{base}$  характеризує дифузійну сумісність (відношення паропроникностей). Вапняк-черепашник має високу паропроникність  $WVP_{base} \approx 0,14$  мг/(м·год·Па), і порушення цього показника призведе до накопичення вологи під шаром штукатурки.

Третій критерій  $K_3 = C_{vol}$  відображає об'ємну контракцію складу під час твердіння, в відсотках. Обґрунтуванням вибору цього параметра є необхідність мінімізації усадочних явищ, які для реставраційного матеріалу, що контактує з пористим черепашником, є критичними. Висока контракція викликає появу мікротріщин, тому критерій формулюється як пряме значення контракції у відсотках з метою його подальшої мінімізації до нуля.

Четвертий критерій  $K_4 = R_{pl} / T_{pl}$  оцінює технологічну сумісність через пластичну міцність у критичний момент часу (10 годин). Вибір цільового значення  $T_{pl} \approx 50$  кПа базується на необхідності балансу: склад повинен бути достатньо структурованим, щоб не сповзати з вертикальної стіни, але залишатися пластичним для релаксації початкових напружень.

П'ятий критерій  $K_5$  – адгезія до черепашника, що виражається в абсолютних одиницях напруження розриву (МПа). Критерій формулюється як пряме значення адгезії, де за цільовий рівень прийнято 0,54 МПа, що відповідає високій надійності зчеплення.

Шостий критерій  $K_6$  – водонасичення системи «штукатурний шар - основа» – визначає довговічність реставрації в умовах приморського клімату (зокрема м. Одеса) та, з огляду на високу пористість вапняку-черепашнику, оцінюється як відсоткове вологонасичення всієї системи, причому оптимальним вважається рівень менше 4%, що обмежує зволоження контактної зони без створення герметичного бар'єра і забезпечує природне висихання каменю.

Таким чином, сформована система критеріїв  $K_1 - K_6$  охоплює всі аспекти взаємодії реставраційного шару з пористою основою, створюючи базу для подальшої математичної оптимізації.

В роботі досліджували реставраційний композиційний матеріал з наступним складом: повітряне вапно, портландцемент, глиниста домішка (каолінова глина), кварцовий пісок і подрібнений черепашник (питома поверхня 3000 см<sup>2</sup>/г). Кількісні співвідношення та рівні варіювання факторів складу при проведенні планованого експерименту за 15-точковим планом надані в табл. 1.

**Таблиця 1**

Фактори та рівні їх варіювання

| №     | Фактори                                   | Рівні варіювання |     |     |
|-------|---|------------------|-----|-----|
|       |   | -1               | 0   | +1  |
| 1     | 2   | 3                | 4   | 5   |
| $X_1$ | Вміст цементу в загальній суміші в'язучих | 5%               | 10% | 15% |

Продовження таблиці 1

| 1              | 2                                       | 3  | 4     | 5   |
|----------------|---|----|-------|-----|
| X <sub>2</sub> | Вміст глини в загальній суміші в'язучих | 5% | 7,5%  | 10% |
| X <sub>3</sub> | Вміст меленого черепашика в наповнювачі | 0% | 37,5% | 75% |

В результаті проведення експериментального дослідження були отримані експериментально-статистичні (ЕС) моделі наступних властивостей: адгезійної міцності, паропроникності, вологонасичення, міцності на стиск, об'ємних деформацій, пластичної міцності [22]. На основі результатів досліджень та побудованих моделей були розраховані критерії оптимальності  $K_1 - K_6$ , у яких поряд з фізичними властивостями композиційного матеріалу використовувалися показники властивостей вапняку-черепашику для порівняння згідно з розробленими підходами до аналізу сумісності та адаптації. Для цих критеріїв побудовані ЕС-моделі (табл. 2) та графічне відображення, наприклад, для  $K_1$  (відносна міцність на стиск),  $K_2$  (відносна паропроникність) (рис. 1).

Таблиця 2

Експериментально-статистичні моделі критеріїв оптимальності складів реставраційних КОМПОЗИТІВ

| Критерії        | Експериментально-статистичні моделі критеріїв  |
|-----------------|--|
| $K_1 (R_c)$     | $K_1 = 0,85 + 0,09x_1 + 0,13x_2 - 0,29x_3 - 0,087x_1x_2 - 0,068x_2x_3 + 0,046x_1^2 - 0,062x_2^2 - 0,11x_3^2$ |
| $K_2 (WVP)$     | $K_2 = 0,58 - 0,29x_1 + 0,27x_3 - 0,092x_1x_3 + 0,25x_1^2 + 0,14x_3^2$                                       |
| $K_3 (C_{vol})$ | $K_3 = 0,22 + 0,069x_1 - 0,027x_2 + 0,028x_3 + 0,024x_1x_2 + 0,026x_3^2$                                     |
| $K_4 (R_{pl})$  | $K_4 = 1,79 + 0,40x_1 + 0,11x_2 + 0,25x_3 + 0,018x_1x_2 + 0,038x_1x_3 - 0,15x_1^2 - 0,092x_2^2 - 0,14x_3^2$  |
| $K_5 (R_{adh})$ | $K_5 = 0,38 + 0,074x_1 + 0,062x_2 + 0,078x_3 - 0,044x_2x_3 - 0,046x_1^2$                                     |
| $K_6 (WS)$      | $K_6 = 6,60 - 0,80x_1 + 0,45x_2 + 3,53x_3 - 0,19x_1x_2 - 0,14x_2x_3 + 0,28x_1^2 - 0,27x_2^2 + 1,33x_3^2$     |

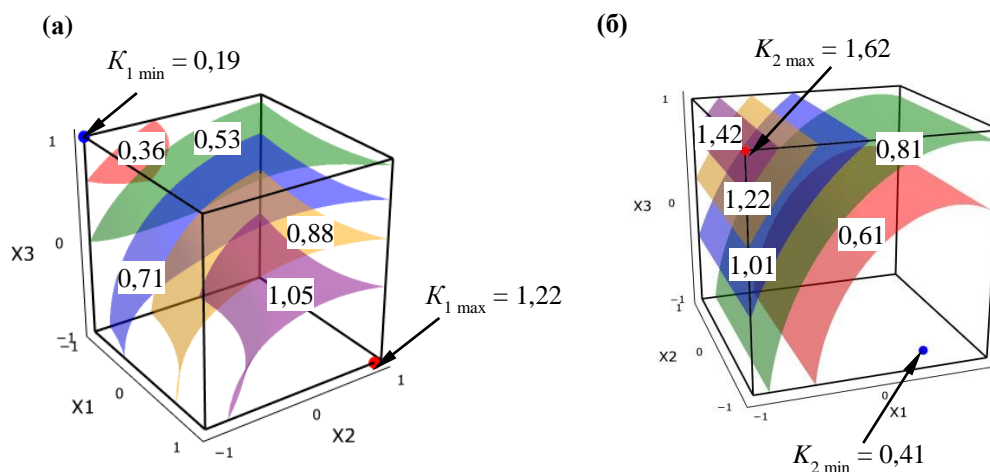


Рис. 1. Графічне відображення моделей критеріїв: а –  $K_1$ ; б –  $K_2$

Аналіз отриманих регресійних моделей критеріїв показав, що відносна міцність на стиск знижується зі зростанням частки пористого черепашика, тоді як цемент і глина сприяють її підвищенню, однак їх надмірне поєднання може мати зворотний ефект через підвищену водопотребу. Відносна паропроникність істотно зменшується під впливом цементу внаслідок кольматації пор, тоді як черепашик відкриває структуру матеріалу, причому зміни мають нелінійний характер. Об'ємна контракція зростає зі збільшенням вмісту цементу, глина частково стабілізує деформації, але висока концентрація обох компонентів підвищує ризик усадки. Відносна пластична міцність відображає прискорення раннього структурування за участі всіх складників, особливо

цементу й черепашника, хоча надмірне насичення твердої фази може сповільнювати розвиток пластичних властивостей. Адгезія до основи загалом покращується зі зростанням вмісту компонентів, проте між глиною та дрібнодисперсним наповнювачем можлива конкуренція за контактну поверхню. Водонасичення системи істотно підвищується за рахунок капілярної активності черепашника, тоді як цемент ущільнює структуру та зменшує зволоження, сприяючи підвищенню довговічності покриття.

Можливість варіювання ваговими коефіцієнтами у методі функції бажаності дозволяє адаптувати один і той самий набір експериментальних даних під специфічні реставраційні задачі. Оскільки кожен із 15 складів має унікальний баланс властивостей, зміна акцентів при агрегації критеріїв допомагає обрати оптимальний варіант для конкретних умов експлуатації об'єкта.

Для ефективного відновлення будівель із вапняку-черепашнику доцільно виділити чотири типові сценарії застосування реставраційних композитів різних складів, де пріоритетність властивостей суттєво різниться.

Максимально «дихаючий» склад а. Тут домінуючим чинником є паропроникність, щоб штукатурка не стала «паробар'єром», який спричиняє накопичення конденсату всередині каменю. У цьому сценарії для  $d_{wvp}$  встановлюється високе значення  $s > 1$ , що робить функцію «суворою»: навіть невелике зниження паропроникності призведе до різкого падіння  $d_i$ . При агрегації цьому параметру присвоюється найвищий рівень важливості. Для адгезії встановлюється середня суворість ( $s = 1$ ), щоб дозволити системі знайти компроміс із паропроникністю, але зберігаємо високу важливість ( $r = 4$ ), щоб гарантувати фіксацію на стіні.

Склад б для зволжених стін. У цьому випадку на перше місце виходить капілярна рівновага та мінімізація водонасичення. Для критерію водонасичення  $d_{ws}$  обирається  $s > 2$ , щоб максимально «штрафувати» склади з високим поглинанням. Постійна присутність вологи на межі розділу фаз створює ризик гідродинамічного відшарування. Тому для адгезії параметр суворості  $s$  підвищується до 3, щоб жорсткіше відсікати склади з низьким зчепленням, а важливість встановлюється на рівні 5, оскільки в умовах вологості адгезія є головним запобіжником довговічності.

Реставраційно-штукатурний склад в для частково зруйнованого вапняку-черепашнику. Тут критично важливою стає структурно-механічна сумісність: міцність складу повинна бути максимально наближеною до міцності основи (але не перевищувати її), а усадка (контракція) має бути мінімальною. Параметри  $s$  для  $d_{Rc}$  та  $d_{cvol}$  слід брати на рівні 2–3, створюючи вузький коридор допустимих значень, поза яким бажаність стає майже нульовою. Для адгезії встановлюється максимальна суворість  $s = 3$  та важливість  $w = 5$ . Це створює "фільтр", який пропускає лише ті склади, що здатні глибоко проникати в пори зруйнованого каменю та надійно з ним зчеплюватися.

Склад г, що застосовується в умовах реставрації поблизу морського узбережжя. Для пластичної міцності  $R_{pl}$  задається висока вага  $w$ , щоб виділити склади, які миттєво набирають структуру, мінімізуючи вплив сольового аерозолі на свіжий розчин. У випадку морського узбережжя динамічні навантаження (вітер, удари крапель) та агресивне середовище вимагають бездоганної адгезії. Параметр  $s$  встановлюється на рівні 3, оскільки будь-яке мікро-відшарування миттєво заповниться морською сіллю, що призведе до швидкої корозії контактної зони.

Для переходу до кількісного аналізу критеріїв оптимальності кожен відгук трансформували у парціальну функцію бажаності. Першим етапом є розрахунок парціальних критеріїв  $K_i$  для п'яти ключових властивостей.

Для оцінки механічної сумісності використовували критерій міцності на стиск  $K_1 = R_c / R_{cbase}$ . Оскільки для слабкого черепашника надмірна міцність реставраційного шару є шкідливою, цільове значення встановлено на рівні  $T = 0,8$ . Відповідна

парціальна функція бажаності  $d_1$  при  $s = 1$  була розрахована за двосторонньою лінійною моделлю: якщо  $K_1 \leq 0,8$ , то  $d_1 = (K_1 - 0,22) / (0,8 - 0,22)$ , а якщо  $K_1 > 0,8$ , то  $d_1 = (1,2 - K_1) / (1,2 - 0,8)$ , де межі 0,22 та 1,2 визначають область допустимих значень.

Другим критерієм є дифузійна сумісність, що оцінювалась через паропроникність  $K_2 = WVP_{layer} / WVP_{base}$ . Для забезпечення «дихаючих» властивостей черепашника необхідно, щоб  $K_2 \geq 1$ . Оскільки всі досліджені склади перевищують цей поріг, функція бажаності  $d_2$  для них приймана рівною 1,0.

Третій показник – об'ємна контракція  $K_3 = C_{vol}$ , яка характеризує усадку матеріалу. Мета оптимізації полягає у її мінімізації, тому функція бажаності  $d_3$  при  $s = 1$  визначена через відношення до експериментального максимуму та мінімуму:  $d_3 = (0,382 - K_3) / (0,382 - 0,18)$ , де 0,382 – найгірший результат (мінімальна бажаність), а 0,118 – найкращий.

Четвертий критерій описує кінетику структурування через пластичну міцність  $K_4 = R_{pl} / 50$  кПа. Технологічно оптимальним є набір міцності в інтервалі 40 – 60 кПа через 10 годин. Функція бажаності  $d_4$  при  $s = 1$  побудована навколо цілі 50 кПа: при  $R_{pl} < 50$  кПа маємо  $d_4 = (R_{pl} - 20) / (50 - 20)$ , а при  $R_{pl} \geq 50$  розраховувалась як  $d_4 = (85 - R_{pl}) / (85 - 50)$ , що дозволило відсіяти занадто жорсткі суміші, схильні до раннього розтріскування.

П'ятим, важливим показником, є адгезія до основи  $K_5$ . Для забезпечення надійного зчеплення з черепашником критерій максимізується. Функція бажаності  $d_5$  при  $s = 1$  розрахована відносно нижньої межі 0,02 МПа та цільового значення  $R_{adh,max} = 0,52$  МПа за формулою  $d_5 = (K_5 - 0,02) / (0,52 - 0,02)$ .

Для перетворення критерію  $K_6$  у парціальну функцію бажаності  $d_6$  при  $s = 1$  використовували модель мінімізації з цільовим інтервалом. Оскільки дані показують значний розкид – від 3,4% до 12,7%, межі встановлені наступним чином: ідеальним (цільовим) значенням  $T$  вважаємо мінімально зафіксоване поглинання 3,4%, а верхньою допустимою межею  $H$ , після якої склад вважається непридатним через ризик розмокання основи – 13,0%. Формула розрахунку основи бажаності при  $s = 1$  набула вигляду  $d_6 = (13,0 - WS) / (13,0 - 3,4)$ .

На першому рівні ієрархії були сформовані три агреговані функції бажаності. Технологічна бажаність обчислювалась як

$$D_{tech} = (d_{C_{vol}}^{w_3} d_{R_{pl}}^{w_4})^{\frac{1}{w_3+w_4}},$$

де враховано об'ємну контракцію та пластичну міцність.

Фізичний критерій бажаності, що відповідає за вологісний обмін, визначений як

$$D_{phys} = (d_{WVP}^{w_2} d_{WS}^{w_6})^{\frac{1}{w_2+w_6}}, \text{ з урахуванням паропроникності та водонасичення.}$$

Структурно-механічна бажаність сфокусована на міцності затверділого складу:

$$D_{mech} = (d_{R_c}^{w_1} d_{R_{adh}}^{w_5})^{\frac{1}{w_1+w_5}}.$$

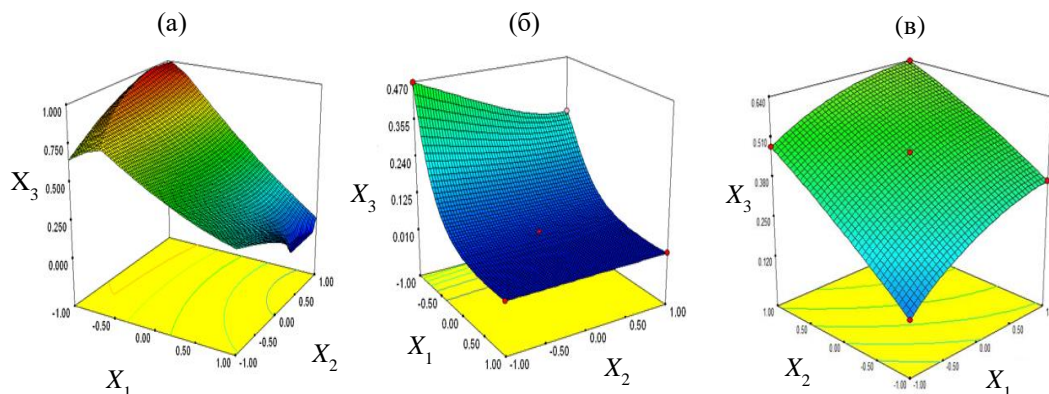
Приклад графічного відображення моделей бажаностей для складу  $a$  відображено на рис.2 (при  $X_3$ , що відповідає найбільшій бажаності).

Аналіз моделі технологічної бажаності (рис.2, а) показав, що мінімальна концентрація цементу ( $X_1 \approx -1$ ) радикально знижує об'ємну контракцію, нівелюючи основне джерело хімічної усадки. Надлишок глини ( $X_2 \approx 1$ ) утворює розвинені гідратні оболонки, які забезпечують необхідну пластичність та здатність системи до релаксації напружень. Використання інертного піску замість пористого черепашника ( $X_3 \approx -1$ ) стабілізує скелет композиту, запобігаючи надмірному водопоглинанню наповнювачем

та нерівномірному пересиханню. Таке поєднання забезпечує ідеальний технологічний баланс: низьку усадку при збереженні стабільної консистенції.

Фізичний критерій бажаності для моделі *a* відображений на більш наочному в цьому випадку поверхневому графіку на рис.2, б. Максимум бажаності за фізичними умовами при мінімальному вмісті в'язучих ( $X_1, X_2 \approx -1$ ) та максимумі меленого черепашника ( $X_3 \approx 1$ ) пояснюється капілярною однорідністю системи. Мінімальна частка цементу та глини запобігає щільному кольматуванню пор, що дозволяє зберегти високу паропроникність на рівні природного каменю. Використання черепашника як наповнювача замість піску забезпечує ідентичність пористої структури шару та основи, що гармонізує вологоперенос і водонасичення. У результаті матеріал працює як єдине ціле з автентичною кладкою, уникаючи накопичення вологи на межі розділу фаз.

Максимум структурно-механічної бажаності (рис.2, в) досягається при граничному насиченні системи в'язучими ( $X_1, X_2 \approx 1$ ), що забезпечує найвищу щільність кристалізаційної структури та міцність на стиск. Глина в даному випадку працює як дрібнодисперсний наповнювач, який утворює додаткові зв'язки в контактній зоні, суттєво підвищуючи адгезію до пористої основи. Мінімальний вміст черепашника ( $X_3 \approx -1$ ) усуває слабку ланку – пористий компонент, що дозволяє отримати жорсткий та монолітний реставраційний шар із максимальною енергією зчеплення.



**Рис 2.** Моделі агрегованих критеріїв бажаності: а – технологічна бажаність для складу *a* ( $X_3 = -1$ ); б – фізична бажаність для складу *a* ( $X_3 = 1$ ); в) структурно-механічна бажаність для складу *a* ( $X_3 = -1$ )

На завершальному етапі всі агреговані показники об'єднали у глобальну функцію бажаності  $D_{global}$ , яка є критерієм оптимальності всього реставраційного складу

$$D_{global} = (D_{tech}^{W_{tech}} \cdot D_{phys}^{W_{phys}} \cdot D_{mech}^{W_{mech}})^{\frac{1}{W_{tech}+W_{phys}+W_{mech}}},$$

де  $W_j$  – вагові коефіцієнти відповідних груп властивостей.

Такий підхід дозволив отримати єдине числове значення для кожного з 15 варіантів складів (згідно плану експерименту), що дає змогу однозначно визначити склад, який найкраще відповідає вимогам сумісності з вапняком-черепашником. Отримані в програмі *Design Expert* оптимальні рішення наведені в табл. 3, в якій для кожної області застосування наведено найкращий склад.

**Таблиця 3**

Оптимальні склади чотирьох типів і відповідні критерії оптимальності

| Склад    | № | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $K_1$<br>( $R_c$ ) | $K_2$<br>( $WVP$ ) | $K_3$<br>( $C_{vol}$ ) | $K_4$<br>( $R_{pl}$ ) | $K_5$<br>( $R_{adh}$ ) | $K_6$<br>( $WS$ ) | $D$   |
|----------|---|-------|-------|-------|--------------------|--------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-------------------|-------|
| <i>a</i> | 1 | -1    | 1     | 0,79  | 0,606              | 1,481              | 0,142                  | 1,331                 | 0,345                  | 11,536            | 0,528 |
| <i>б</i> | 1 | -0,4  | -0,61 | -0,49 | 0,800              | 0,615              | 0,220                  | 1,352                 | 0,250                  | 5,091             | 0,321 |
| <i>в</i> | 1 | -1    | 1     | 0,4   | 0,800              | 1,277              | 0,131                  | 1,314                 | 0,332                  | 9,597             | 0,551 |
| <i>г</i> | 1 | -0,56 | -0,6  | -0,6  | 0,800              | 0,674              | 0,208                  | 1,227                 | 0,220                  | 5,014             | 0,335 |

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Формування математичної моделі оптимізації реставраційних складів базується на ієрархічному розподілі пріоритетів, де фундаментальні властивості отримують максимальні параметри суворості  $s$  та ваги  $w$ , що дозволяє перетворити абстрактні розрахунки на реальну інженерну стратегію відновлення будівель. Так, у «дихаючому» складі паропроникність має  $s = 5$  та  $w = 5$ , тоді як міцність і адгезія зберігають  $w = 4$ . Для зволоженої основи водонасичення отримує  $s = 5$ , а адгезія – максимальну вагу при зниженні значущості паропроникності до  $w = 3$ . Для зруйнованого вапняку-черепашнику міцність на стиск і контракція характеризуються  $s = 3$  та  $w = 5$ , а пластична міцність і паропроникність –  $w = 3$ ; у морських умовах водонасичення знову має  $s = 5$  та  $w = 5$ , а пластична міцність –  $w = 4$ . Водночас навіть критерії з меншою вагою не можуть знижуватися нижче критичного рівня через використання зваженого середнього геометричного, а отримані значення функції бажаності (наприклад, для зволоженої поверхні) підтверджують ефективність багатокритеріальної оптимізації для добору складів, придатних до реставрації історичних об'єктів з вапняку-черепашнику, зокрема в Одеському регіоні.

## 6 ВИСНОВКИ

Розроблено формалізовану модель багатокритеріальної оптимізації складів штукатурно-реставраційних композитів, у якій система «реставраційний матеріал – основа» подана як ієрархічно організований об'єкт із сукупністю потенційно конфліктних критеріїв. Перехід від векторної постановки до скалярної задачі здійснений шляхом використання функції бажаності. Сформульована система парціальних критеріїв сумісності та адаптації охоплює механічні, деформаційні та пористо-капілярні властивості і базується на використанні відносних показників, які забезпечують коректне зіставлення властивостей матеріалу та карбонатної основи. Запропонований алгоритм ієрархічної агрегації парціальних критеріїв з використанням нелінійних функцій бажаності та зваженого середнього геометричного дозволяє формалізувати принцип лімітуючого фактора та виконувати оптимізацію шляхом максимізації узагальненого показника. Практична реалізація моделі на прикладі вапняних композитів, призначених для реставрації будівель з вапняку-черепашнику, була проведена з використанням експериментально-статистичного моделювання у програмному комплексі *Design Expert* та показала можливість керованого вибору оптимальних складів за різних сценаріїв пріоритетності критеріїв.

## 7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкрити.

## Література

1. Le, V.S., Sharko, A., Sharko, O., Stepanchikov, D., Buczkowska, K.E., et al. Multicriteria optimization of the composition, thermodynamic and strength properties of fly-ash as an additive in metakaolin-based geopolymer composites. *Scientific Reports*. 2024. Vol. 14 14. Article 10434. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-024-61123-1>
2. Zhao, H., Li, M., Zhao, L., Zang, X., Liu, X., Ren, J. Multi-objective optimization for composition design of civil materials based on data-driven method. *Materials Today Communications*. 2024. Vol. 38. Article 108143. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2024.108143>
3. Резанова, В.Г., Вільцанюк, О.А., Резанова, Н.М. Програмне забезпечення для оптимізації складу багатокомпонентних сумішей : монографія. Київ : АртЕк, 2022. 315 с.
4. Wang, X., Cui, F., Cui, L., Jiang, D. Research on a Multi-Objective Optimization Design for the Durability of High-Performance Fiber-Reinforced Concrete Based on a Hybrid Algorithm. *Coatings*. 2023. Vol. 13, No. 12. Article 2054. DOI: <https://doi.org/10.3390/coatings13122054>
5. Kaya, M., Yıldırım, Z. B., Köksal, F., Beycioğlu, A., Kasprzyk, I. Evaluation and Multi-Objective Optimization of Lightweight Mortars Parameters at Elevated Temperature via Box–Behnken Optimization Approach. *Materials*. 2021. Vol. 14, No. 23. Article 7405. DOI: <https://doi.org/10.3390/ma14237405>
6. Maaze, M.R., Das, S.K., Garg, N. et al. Economic-Environmental and Multi-Criteria Optimization for Predicting Alkaline Ratios in Waste Cement Concrete-Based Geopolymer Using Central Composite Design. *Int J Concr Struct Mater*. 2025. Vol. 19. Article 35. DOI: <https://doi.org/10.1186/s40069-025-00767-3>
7. Ye, F., Feng, Q., Qiao, H., Zhu, X., Su, L., Xue, C., Cao, H., Zhang, L. Study on multi-objective matching ratio optimization and strength development law of basalt stone powder composite cementitious materials. *Construction and Building Materials*. 2024. Vol. 417. Article 135088. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2024.135088>
8. Бевз, М., Гуцуляк, Р., Стріленко, Ю. Консервація і реставрація об'єктів культурної спадщини / за ред. І. Прокопенко. Київ : Саміт-книга, 2022. 434 с.
9. Xu, P., Ma Y., Lu W., Li M., Zhao W., Dai Z. Multi-objective optimization in machine learning assisted materials design and discovery. *J. Mater. Informatics*. 2025. Vol. 5, No. 2. Article 26. DOI: <https://doi.org/10.20517/jmi.2024.108>
10. Hanne, T., Moghaddam, M.J. A Review of the Evolution of Multi-Objective Evolutionary Algorithms. *Computers, Materials & Continua*. 2025. Vol. 85, No. 3. P. 4203–4236. DOI: <https://doi.org/10.32604/cmc.2025.068087>
11. Ortiz-Marqués, A., Caldevilla, P., Goldmann, E., Safuta, M., Fernández-Raga, M., Górski, M. Porosity and Permeability in Construction Materials as Key Parameters for Their Durability and Performance: A Review. *Buildings*. 2025. Vol. 15, No. 18. Article 3422. DOI: <https://doi.org/10.3390/buildings15183422>
12. Shahidzadeh-Bonn, N., Desarnaud, J., Bertrand, F., Chateau, X., Bonn, D. Damage in porous media due to salt crystallization. *Phys. Rev. E*. 2010. Vol. 81, No. 6. Article 066110. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.81.066110>
13. Berger, J., Dutykh, D., Mendes, N., Rysbaiuly, B. A new model for simulating heat, air and moisture transport in porous building materials. *I International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2019. Vol. 134. P. 1041-1060. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.01.025>
14. Gilodo, O., Arsirii, A., Kroviakov, S., Gimarov, O. Parametric Optimization of a Cross-Beam Glulam Floor System Using Response Surface Methodology. *Construction Materials* 2024. Vol. 5, No. 4. Article 85. DOI: <https://doi.org/10.3390/constrmater5040085>
15. Karbala, M.M., Iranfar, S., Shahsavari, M.H., Shakiba, M. Impact of dissolved salt type and content on mechanical and physical properties of porous cementitious materials. *International Journal of Geo-Engineering*. 2025. Vol. 16. Article 18. <https://doi.org/10.1186/s40703-025-00250-8>
16. Pavlík, Z., Fiala, L., Maděra, J., Pavlíková, M., & Černý R. Computational modelling of coupled water and salt transport in porous materials using diffusion–advection model. *Journal of the*

- Franklin Institute. 2011. Vol. 348, No. 7. P. 1574–1587. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2010.06.014>
17. Li, Q., Wang, Z., Guo, H., Zhao, J., Luo, H., Huang, X. A perspective view of salt crystallization from solution in porous media: morphology, mechanism, and salt efflorescence. *Scientific Reports*. 2024. Vol. 14. Article 23510. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-024-74645-5>
  18. Menke, H.P., Hood, K.M., Singh, K., Medero, G.M., Maes, J. Multi-scale flow, permeability, and heat transport in low-carbon and traditional building materials. *arXiv*. 2024. Article 2405.19930. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.19930>
  19. Теліцина, Н.С., Квітка, О.О., Шахновський, А. М. Експериментально-статистичне моделювання складу сухих будівельних сумішей: визначення оптимальної частки модифікуючої добавки. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2023. №1(84), 72-79. DOI:<https://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2023.1.9>
  20. Röding, M., Ma, Z., Torquato, S. Predicting permeability via statistical learning on higher-order microstructural information. *Scientific Reports*. 2020. Vol. 10. Article 15239. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-020-72085-5>
  21. Lyu, Q., Dai, P., Chen, A. Correlations among physical properties of pervious concrete with different aggregate sizes and mix proportions. *Road Materials and Pavement Design*. 2024. Vol. 25, No. 12. P. 2747–2771. DOI: <https://doi.org/10.1080/14680629.2024.2331193>
  22. Колесников, А.В., Левицький, Д.В. Дослідження і оптимізація складів реставраційних композитів для будівель із вапняку черепашнику. *Технічні науки та технології*, 2025. № 4(42). С. 476-491. [https://doi.org/10.25140/2411-5363-2025-4\(42\)-476-491](https://doi.org/10.25140/2411-5363-2025-4(42)-476-491)

## References

1. Le, V.S., Sharko, A., Sharko, O., Stepanchikov, D., Buczkowska, K.E., et al. (2024). Multicriteria optimization of the composition, thermodynamic and strength properties of fly-ash as an additive in metakaolin-based geopolymer composites. *Scientific Reports*, 14, 10434. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-61123-1>
2. Zhao, H., Li, M., Zhao, L., Zang, X., Liu, X., & Ren, J. (2024). Multi-objective optimization for composition design of civil materials based on data-driven method. *Materials Today Communications*, 38, 108143. <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2024.108143>
3. Rezanova, V. H., Viltsaniuk, O. A., & Rezanova, N. M. (2022). Prohramne zabezpechennia dlia optymizatsii skladu bahatokomponentnykh sumishei. Kyiv, Ukraine: ArtEk. [in Ukrainian]
4. Wang, X., Cui, F., Cui, L., & Jiang, D. (2023). Research on a Multi-Objective Optimization Design for the Durability of High-Performance Fiber-Reinforced Concrete Based on a Hybrid Algorithm. *Coatings*, 13(12), 2054. <https://doi.org/10.3390/coatings13122054>
5. Kaya, M., Yıldırım, Z. B., Köksal, F., Beycioğlu, A., & Kasprzyk, I. (2021). Evaluation and Multi-Objective Optimization of Lightweight Mortars Parameters at Elevated Temperature via Box–Behnken Optimization Approach. *Materials*, 14(23), 7405. <https://doi.org/10.3390/ma14237405>
6. Maaze, M.R., Das, S.K., Garg, N. et al. (2025). Economic-Environmental and Multi-Criteria Optimization for Predicting Alkaline Ratios in Waste Cement Concrete-Based Geopolymer Using Central Composite Design. *Int J Concr Struct Mater*, 19, 35. <https://doi.org/10.1186/s40069-025-00767-3>
7. Ye, F., Feng, Q., Qiao, H., Zhu, X., Su, L., Xue, C., Cao, H., Zhang, L. (2024). Study on multi-objective matching ratio optimization and strength development law of basalt stone powder composite cementitious materials. *Construction and Building Materials*, 417, 135088. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2024.135088>
8. Bevez, M., Hutsuliak, R., & Strilenko, Yu. (2022). Konservatsiia i restavratsiia obektiv kulturnoi spadshchyny (I. Prokopenko, Ed.). Kyiv, Ukraine: Samit-knyha. [in Ukrainian]
9. Xu, P., Ma Y., Lu W., Li M., Zhao W., & Dai Z. (2025). Multi-objective optimization in machine learning assisted materials design and discovery. *J. Mater. Informatics*, 5(2), 26. <https://doi.org/10.20517/jmi.2024.108>
10. Hanne, T., & Moghaddam, M.J. (2025). A Review of the Evolution of Multi-Objective Evolutionary Algorithms. *Computers, Materials & Continua*, 85(3), 4203–4236. <https://doi.org/10.32604/cmc.2025.068087>

11. Ortiz-Marqués, A., Caldevilla, P., Goldmann, E., Safuta, M., Fernández-Raga, M., & Górski, M. (2025). Porosity and Permeability in Construction Materials as Key Parameters for Their Durability and Performance: A Review. *Buildings*, 15(18), 3422. <https://doi.org/10.3390/buildings15183422>
12. Shahidzadeh-Bonn, N., Desarnaud, J., Bertrand, F., Chateau, X., Bonn, D. (2010) Damage in porous media due to salt crystallization. *Phys. Rev. E*, 81(6), 066110. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.81.066110>
13. Berger, J., Dutykh, D., Mendes, N., & Rysbaiuly, B. (2019). A new model for simulating heat, air and moisture transport in porous building materials. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 134, 1041-1060. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.01.025>
14. Gilodo, O., Arsirii, A., Kroviakov, S., & Gimarov, O. (2025). Parametric Optimization of a Cross-Beam Glulam Floor System Using Response Surface Methodology. *Construction Materials*, 5(4), 85. <https://doi.org/10.3390/constrmater5040085>
15. Karbala, M.M., Iranfar, S., Shahsavari, M.H., & Shakiba, M. (2025). Impact of dissolved salt type and content on mechanical and physical properties of porous cementitious materials. *International Journal of Geo-Engineering*, 16, 18. <https://doi.org/10.1186/s40703-025-00250-8>
16. Pavlík, Z., Fiala, L., Maděra, J., Pavlíková, M., & Černý R. (2011) Computational modelling of coupled water and salt transport in porous materials using diffusion–advection model. *Journal of the Franklin Institute*, 348(7), 1574-1587 <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2010.06.014>
17. Li, Q., Wang, Z., Guo, H., Zhao, J., Luo, H., & Huang, X. (2024). A perspective view of salt crystallization from solution in porous media: morphology, mechanism, and salt efflorescence. *Scientific Reports*, 14, 23510. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-74645-5>
18. Menke, H.P., Hood, K.M., Singh, K., Medero, G.M., & Maes, J. (2024). Multi-scale flow, permeability, and heat transport in low-carbon and traditional building materials. *arXiv:2405.19930*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.19930>
19. Telitsyna, N. Ye., Kvitka, O. O., & Shakhnovskiy, A. M. (2023). Eksperymentalno-statystychni modeliuvannia skladu sukhykh budivelnykh sumishei: Vyznachennia optymalnoi chastky modyfikuiuchoi dobavky. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*, 1(84), 72–79. [in Ukrainian] <https://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2023.1.9>
20. Röding, M., Ma, Z., & Torquato, S. (2020). Predicting permeability via statistical learning on higher-order microstructural information. *Scientific Reports*, 10, 15239. <https://doi.org/10.1038/s41598-020-72085-5>
21. Lyu, Q., Dai, P., & Chen, A. (2024). Correlations among physical properties of pervious concrete with different aggregate sizes and mix proportions. *Road Materials and Pavement Design*, 25(12), 2747–2771. <https://doi.org/10.1080/14680629.2024.2331193>
22. Kolesnykov, A. V., & Levytskyi, D. V. (2025). Doslidzhennia i optymizatsiia skladiv restavratsiinykh kompozytiv dlia budivel iz vapniaku cherepashnyku. *Tekhnichni nauky ta tekhnolohii*, 4(42), 476–491. [https://doi.org/10.25140/2411-5363-2025-4\(42\)-476-491](https://doi.org/10.25140/2411-5363-2025-4(42)-476-491)

Стаття надійшла до редакції 20.01.2026

Стаття прийнята до друку 20.02.2026

Дата публікації статті 26.03.2026

**Колесников Андрій Валерійович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури,  
д.т.н., доцент

вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029

[kolesnikov\\_himek@odaba.edu.ua](mailto:kolesnikov_himek@odaba.edu.ua),

ORCID: 0000-0001-8737-0933

**Семенова Світлана Володимирівна**

Одеська державна академія будівництва та архітектури,  
к.т.н., доцент

вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029

[semenova@odaba.edu.ua](mailto:semenova@odaba.edu.ua),

ORCID: 0000-0002-5309-5854

**Левицький Дмитро Валерійович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури,  
аспірант  
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029  
[924ldv@odaba.edu.ua](mailto:924ldv@odaba.edu.ua),  
ORCID: 0000-0001-5350-522X

*Для посилань:*

Колесников А.В., Семенова С. В., Левицький Д. В. Багатокритеріальна оптимізація складів реставраційних композитів. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. №1. С. 69–83.

*For references:*

A. Kolesnykov, S. Semenova, D. Levytskyi. (2026). Multi-criterion optimization of restorative composite compositions. Mechanics and Mathematical Methods. VIII (1). 69–83.

Багатокритеріальна оптимізація складів реставраційних композитів © 2026 by Колесников А. В., Семенова С. В., Левицький Д. В. is licensed under CC BY 4.0

УДК 539.34

## ПРО МОДЕЛЬ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ СЕЙСМОВИБУХОВИХ ХВИЛЬ

Ісаєв В. Ф.<sup>1</sup>, Пальчик С. С.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Анотація:** Дія вибухів на споруду в випадку, коли вони не відбуваються безпосередньо біля будівлі, передається через повітряну та ґрунтову хвилі. Ґрунтову хвилю будемо називати сейсмовибуховою хвилею. Повітряна хвиля діє, головним чином, на елементи будівлі, що знаходяться над землею. А сейсмовибухова хвиля впливає безпосередньо на підземні елементи споруди. Сейсмовибухова хвиля може викликати суттєві зміщення та привести до додаткових напружень в верхніх конструкціях будівлі.

Досвід дослідження вражених об'єктів доводить, що в багатьох випадках, руйнування споруд відбувається через дію сейсмовибухових хвиль. Спостерігались випадки, коли саме через ґрунт передавались хвилі, які руйнували всю будівлю: і фундамент, і надземну частину.

Практичний інтерес до вивчення питань утворення та поширення сейсмовибухових хвиль не вичерпується вибухами авіабомб, ракет чи артилерійських снарядів. На практиці промислові вибухи проводяться на таких глибинах, що повітряна хвиля дуже слабка, вибухів майже не чуно. Від місця вибуху поширюються сейсмовибухові хвилі і, тому вплив на споруди завдають саме вони.

Аналізуючи наслідки вибухів під час аварій на транспортних газопроводах, природно звернутись до результатів вивчення дії вибухів з застосуванням вибухових величин. Математична модель в такому випадку зводиться до вивчення алгебраїчного рівняння четвертого степеня. Одним із розв'язків цього рівняння є радіуси безпечної дії. В якості трьох коефіцієнтів даного рівняння виступають величини, що характеризують застосовану вибухову речовину та її кількість. Переходячи до розгляду вибухів на газотранспортних системах для цих коефіцієнтів необхідно знайти інші характеристики, пов'язані з процесами, які відбуваються під час таких вибухів. Для створення таких моделей в роботі вивчені обмеження, які накладаються на ці коефіцієнти властивостями існування певних розв'язків алгебраїчного рівняння четвертого порядку.

**Ключові слова:** сейсмовибухова хвиля, промислові аварії, газотранспортні системи.

## ON A MODEL OF SEISMIC-EXPLOSIVE WAVE PROPAGATION

V. Isaiev<sup>1</sup>, S. Palchyk<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract:** When an explosion occurs at some distance from a structure, its impact is transmitted through air and ground waves. The ground wave, referred to in this study as a seismic-explosive wave, primarily affects the underground elements of a structure, while the air wave mainly acts on above-ground components. Seismic-explosive waves can cause significant ground displacements and generate additional stresses in the superstructure.

Investigations of damaged facilities show that in many cases structural failure is caused mainly by seismic-explosive waves. In some events, waves propagating through the soil have led to the complete destruction of buildings, including both foundations and above-ground parts.

The study of seismic-explosive wave generation and propagation is important not only for military explosions but also for industrial and technological accidents. Industrial explosions often occur at depths where the air wave is weak or barely perceptible, while seismic-explosive waves remain the dominant damaging factor for nearby structures.



To analyse explosions associated with accidents in gas transportation systems, mathematical models traditionally used for explosive charges are considered. In this approach, the problem is reduced to the analysis of a fourth-degree algebraic equation, one of whose solutions defines the radius of safe action. For conventional explosives, the coefficients of this equation depend on the type and quantity of the explosive. For explosions in gas transportation systems, these coefficients must be redefined using parameters that describe the physical processes occurring during such events. The paper examines the constraints on these coefficients imposed by the conditions for the existence of physically meaningful solutions of the fourth-order equation.

**Keywords:** seismic–explosive wave, industrial accidents, gas transportation systems.

## 1 ВСТУП

Дія авіабомб на споруду в випадку, коли вони не влучають безпосередньо, передається через повітряну та ґрунтову хвилю. Ґрунтову хвилю будемо називати сейсмовибуховою хвилею. Повітряна хвиля діє, головним чином, на елементи будівлі, що знаходяться над землею. А сейсмовибухова хвиля впливає безпосередньо на підземні елементи споруди. Сейсмовибухова хвиля може викликати суттєві зміщення та привести до додаткових напружень в верхніх конструкціях будівлі.

Досвід дослідження вражених об'єктів доводить, що в багатьох випадках, руйнування споруд відбувається через дію сейсмовибухових хвиль. Спостерігались випадки, коли саме через ґрунт передавались хвилі, які руйнували всю будівлю: і фундамент, і надземну частину.

Практичній інтерес до вивчення питань утворення та поширення сейсмовибухових хвиль не вичерпується вибухами авіабомб, ракет чи артилерійських снарядів. На практиці промислові вибухи проводяться на таких глибинах, що повітряна хвиля дуже слабка, вибухів майже не чути. Від місця вибуху поширюються сейсмовибухові хвилі і, тому вплив на споруди завдають саме вони.

Наведені міркування вказують на актуальність вивчення впливу сейсмовибухових хвиль на споруди.

Існують цілий ряд робіт, в яких приводяться результати експериментів по вивченню даного питання. Побудовані також і теоретичні моделі для вивчення спеціальних властивостей сейсмовибухових хвиль. Ці моделі мають вигляд лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами або алгебраїчних рівнянь. Аналітичний розв'язок лінійних диференціальних рівнянь, які досить часто зустрічаються в задачах фізики, механіки та техніки, зводиться до знаходження коренів характеристичних многочленів. Необхідність явного вираження коренів через коефіцієнти для якісного аналізу фізичної природи явища виникає і як самостійна задача. Наприклад, при розв'язуванні рівняння Ван-дер-Ваальса виникає алгебраїчне рівняння третього ступеня. Також рівняння третього ступеня виникає в механіці суцільного середовища при вивченні деформацій.

В кожній точці деформованого тіла діють головні напруження, які є коренями кубічного алгебраїчного рівняння. Коефіцієнти цього рівняння не залежать від вибору системи координат і називаються відповідно лінійним, квадратичним та кубічним інваріантами тензора напруження. Головні подовження також є коренями кубічного рівняння, коефіцієнтами якого є інваріанти тензора деформації. Моделювання явищ викликаних дією сейсмовибухових хвиль приводить до алгебраїчних рівнянь четвертого ступеня.

В роботі зроблений аналіз різних найбільш відомих способів розв'язування алгебраїчних рівнянь, враховуючи можливості комп'ютерної реалізації цих способів.

Саме комп'ютерне моделювання сьогодні є заміною для практичних випробувань при вивченні сейсмовибухових хвиль. Комп'ютерні моделі дозволяють оцінити стан споруд та конструкцій після впливу на них сейсмовибухових хвиль. В свою чергу, це дасть можливість прийняти рішення про доцільність відбудови чи ремонту споруд.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Небезпека, яку несуть аварії на газопроводах людству та житловим спорудам, вимагає неперервної турботи щодо надійності трубопроводів, способів їх використання, витривалості вживаних матеріалів. Цій проблемі приділяється величезна увага вчених, які використовують найсучасніші методи для вивчення факторів, що мають вплив на надійність постачання газу. Хоча вибухи на газопроводах

відбуваються відносно рідко, але наслідки від них мають великий руйнівний характер. Результати дії відчущуються на оточуючих спорудах, промислових об'єктах, а на місці вибуху утворюються кратери. Вивченню місць враження присвячені багато робіт як вітчизняних, так і зарубіжних авторів.

В роботі [1] були описані проведені авторами експерименти на підземних трубопроводах з заданим діаметром отвору витоку. Ними були вивчені характеристики витоку за різних тисків у трубопроводі, напрямків витоку та властивостей ґрунту, і запропонували метод оцінки ризику аварійних витоків.

В статті [2] процес конвекційної дифузії природного газу в ґрунті був розділений на чотири етапи. Автори роботи [3] вивчали закони дифузії природного газу в ґрунті та обмежених просторах за допомогою експериментів, проаналізувавши функціональний зв'язок між обсягом витоку в сусідніх обмежених просторах та відстанню від центральної точки витоку.

Технологія чисельного моделювання широко застосовується в дослідженні витоку газу. В роботах [4, 5] була побудована чисельна модель для витоків з неглибоко заглиблених трубопроводів і вивчено взаємозв'язок між концентрацією, швидкістю та часом з урахуванням впливу діаметра перфорації на дифузію.

Автори робіт [6, 7, 8] запропонували модель прогнозування дифузії природного газу в ґрунті шляхом аналізу впливу таких параметрів, як відстань витоку природного газу, кількість витоку та час на розподіл концентрації природного газу в ґрунті. В статті [9] були проведені чисельні дослідження витоку з неглибоко заглибленого трубопроводу та запропонували формулу для розрахунку межі небезпеки для аварій з витоком з заглибленого трубопроводу.

В роботі Лавріка В.Е. та Булабуцького Ю.О. [10] в імпульсно-гідродинамічній постановці розглянуто дію вибуху подовженого заряду, розміщеного вздовж дна та стінок прямокутної траншеї.

Існуючі дослідження мають декілька обмежень у розкритті механізмів витоку газу та його дифузії в ґрунті, а створені моделі є недостатніми для опису прогнозування розподілу концентрації під впливом декількох факторів.

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою дослідження є вивчення явища вибуху, який викликає деформацію елементів споруд в результаті дії сейсмовибухових хвиль, за допомогою моделювання процесу в середовищі місця вибуху. В якості базової моделі використовується модель розповсюдження сейсмовибухових хвиль при використанні вибухівки. Задача дослідження: оцінити можливі значення параметрів для отримання коренів в необхідній кількості і з наперед заданими властивостями.

Зони впливу сейсмовибухових хвиль. При вибуху в твердому середовищі утворюються три зони впливу сейсмовибухової хвилі на середовище:

- 1) зона стиску;
- 2) зона руйнувань;
- 3) зона струсів (пружних деформацій).



**Рис.1.** Кратер, що спричинив вибух



**Рис.2.** Зони впливу сейсмовибухових хвиль

Зона стиску – це область, в якій речовина середовища перетворюється на пил чи уламки, або шматки, що викидаються із області руйнувань вибуховою газовою хвилею. При вибуху поблизу вільної поверхні зони стиску - це воронка, розміри якої залежать від властивостей та ваги вибухової речовини, а також від властивостей середовища, в якому відбувся вибух та віддалення центра вибуху від поверхні. При зміні глибини вибуху характер руйнувань змінюється. Якщо глибина залягання така, що воронка не утворюється, то зона стиску називається камуфлетою.

За зоною стиску знаходиться зона руйнувань. В середині цієї зони вибухова хвиля викликає появу тріщин і тому її ще називають зоною тріщиноутворення.

Далі йде зона, де вибухова хвиля викликає лише пружні деформації середовища. Її ще називають зоною струсів.

Якщо припустити, що руйнування матеріалу середовища при дії вибуху відбувається в зоні з густиною енергії більшою чи рівною деякому критичному значенню і, крім того припустити, що густина енергії вибуху обернено пропорційна об'єму фронту вибухової дії, то можна переконатися в справедливості наступного твердження.

**Теорема 1.** Радіуси зон стиску і руйнувань пропорційні кореню кубічному із ваги заряду.

Доведення.

На основі зроблених припущень можемо записати

$$E_k v = W = const. \quad (1)$$

Тут  $E_k$  – критичне значення густини енергії вибуху, що відповідає руйнуванню середовища;  $v$  – об'єм зони стиску чи руйнувань;  $W$  – енергія вибуху з урахуванням коефіцієнта корисної дії.

Величина  $W$  може бути прийнятою пропорційною вазі вибухової речовини

$$W = k_1 q.$$

Якщо об'єм зони стиску – це нормальна воронка викиду, то

$$v = \frac{1}{3} \pi R^3,$$

де  $R$  – радіус зони стиску чи руйнувань.

Якщо підставити останнє в (1), то отримаємо, що

$$R = k_0 \sqrt[3]{q}, \text{ де } k_0^1 = \sqrt[3]{\frac{3k_1}{\pi E_k h_1}}, k_0 = \sqrt[3]{\frac{3k_1}{\pi E_k}}. \quad (2)$$

Коефіцієнт  $k_0$  залежить від властивостей вибухової речовини, які визначаються коефіцієнтом  $k_1$  та  $E_k$  – густиною енергії, при якій відбуваються руйнування.

Таким чином, теорему доведено.

Формула (2) називається формулою Лебрена.

При глибині закладання заряду менше камуфлетної воронка має форму конуса, у якого радіус не дорівнює висоті. Тому для більш загального випадку формулу (2) записують в виді

$$R = k_0^1 \sqrt[3]{q}, \text{ де } k_0^1 = \sqrt[3]{\frac{3k_1}{\pi E_k h_1}}.$$

Тут  $h_1$  глибина залягання заряду.

Формула Лебрена для нормального заряду може бути записана в виді  $q = 1,83 \mu h^3$ .

Тут  $h$  – глибина воронки,  $\mu$  – коефіцієнт, який дорівнює кількості вибухової речовини, необхідної для викиду одиниці середовища.

Зона стиску, що характеризується радіусом воронки, є зоною, в якій споруди руйнуються. За зоною стиску йде зона руйнувань, або тріщини утворень. Її радіус в залежності від типу будівель та інших характеристик середовища в 2-4 рази більше зони стиску.

Третя зона впливу вибуху – це зона струсів, яка характеризується тим, що в середині цієї зони відбуваються пружні деформації. Теоретично радіус цієї зони дорівнює нескінченності, але з практичної точки зору до зони струсів відносять зону, де відбуваються небезпечні для споруд та їх конструктивних елементів пружні деформації.

Для оцінки небезпеки вибухів для споруд необхідно визначити віддалення від місця вибуху, при якому швидкість коливань ґрунту не перевищує допустиму величину. Ця відстань називається радіусом безпечної дії вибуху.

Радіус безпечної дії дорівнює сумі радіусів трьох зон впливу вибуху і може бути знайдений з наступної рівності

$$\frac{1}{R^2} + \frac{c_1}{R} + \frac{c_2}{\sqrt{R}} + c_3 = 0, \quad (3)$$

де  $R$  – радіус безпечної дії,  $c_1, c_2$  – деякі сталі,  $c_3 = -\frac{v_\delta}{\omega \rho \sqrt{q}}$ ,  $v_\delta$  – допустимі значення

коливань ґрунту,  $\rho$  – коефіцієнт пропорційності,  $\omega$  – частота вибухових хвиль. Якщо

зробити в рівнянні (3) заміну  $x = \frac{1}{\sqrt{R}}$ , то ми отримаємо рівняння

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0, \quad (4)$$

тут  $A = c_1$ ,  $B = c_2$ ,  $C = c_3$ , причому виходячи з умов дослідження  $C < 0$ .

Далі ми займемося вивченням розв'язків рівняння (4).

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянемо рівняння  $n$ -го степеня, яке має вид:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0. \quad (5)$$

При  $n \geq 5$  в загальному виді рівняння (5) не має розв'язків в радикалах. Це твердження є змістом теореми Абеля. Воно справедливе і для багатьох інших функцій крім радикалів, зокрема для всіх однозначних аналітичних функцій, таких, як  $e^z$  та  $\sin z$ . Але рівняння (5) при  $n=5$  розв'язується за допомогою еліптичних модуль-функцій. Існують числові розв'язки та чисельні методи розв'язання для рівнянь спеціального виду. Ми проведемо порівняльний аналіз розв'язків рівнянь при  $n=4$  з урахуванням можливостей комп'ютерної реалізації та застосування для розв'язання рівняння (4).

Рівняння четвертого степеня  $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$  з дійсними коефіцієнтами  $a, b, c, d$  заміною  $z = x - \frac{a}{4}$  приводиться до рівняння

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \quad (6)$$

$$\text{Тут } p = b - \frac{3a^2}{8}; \quad q = c - \frac{ab}{2}; \quad r = d - \frac{ac}{4} + \frac{a^2 b}{16} - \frac{3a^4}{256}.$$

Рівняння (6) будемо називати канонічним за умови  $r \neq 0$ .

Розглянемо питання про розподіл та кратність дійсних коренів канонічного рівняння. Для цього рівняння (6) запишемо в виді  $q = -\frac{r}{x} - px - x^3$  та вивчимо графік функції

$$q(x) = -\frac{r}{x} - px - x^3. \quad (7)$$

Очевидно, що ця функція є непарною. Знайдемо її похідну

$$q'(x) = \frac{r}{x^2} - p - 3x^2 = \frac{(r - px^2 - 3x^4)}{x^2}.$$

Точки, в яких ця похідна дорівнює нулю, знайдемо, розв'язавши бікватратне рівняння  $(x^2)_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 12r}}{6}$ .

Отже, лише ці значення  $x$  можуть бути кратними коренями канонічного рівняння.

В залежності від значень  $p$  та  $r \neq 0$  графік функції (7) має один з шести принципово різних видів. Користуючись графіком, легко визначити число додатних та від'ємних коренів рівняння (6) в залежності від значень коефіцієнтів  $p$  та  $r \neq 0$ .

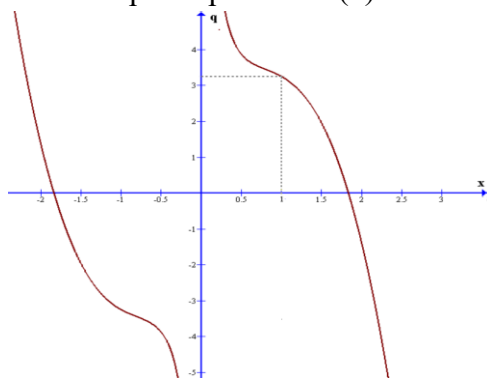


Рис.1.  $p < 0, r < -\frac{p^2}{12}$ , або  $p \geq 0, r < 0$ .

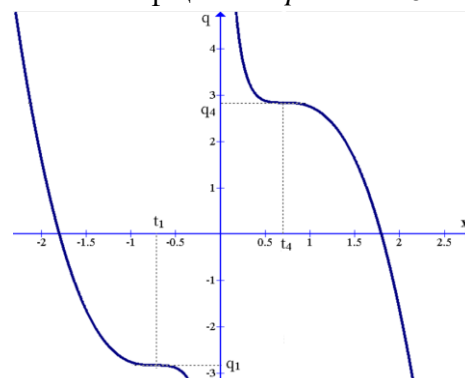


Рис.2.  $p < 0, r = -\frac{p^2}{12}$

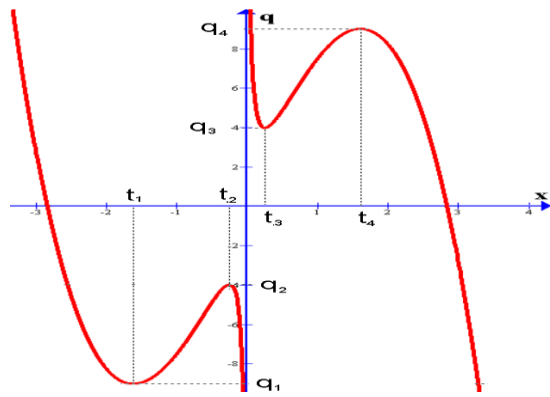


Рис.3.  $p < 0, -\frac{p^2}{12} < r < 0$

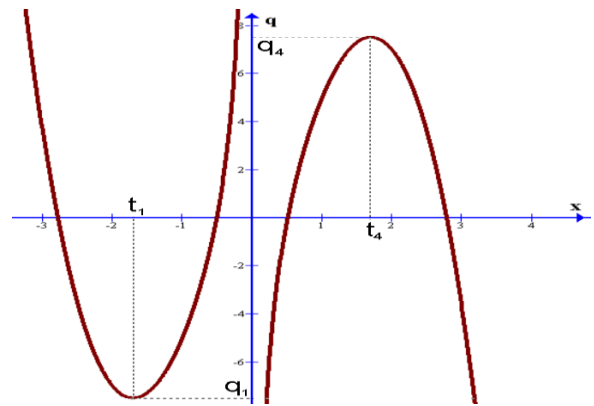


Рис.4.  $p < 0, 0 < r < \frac{p^2}{4}$

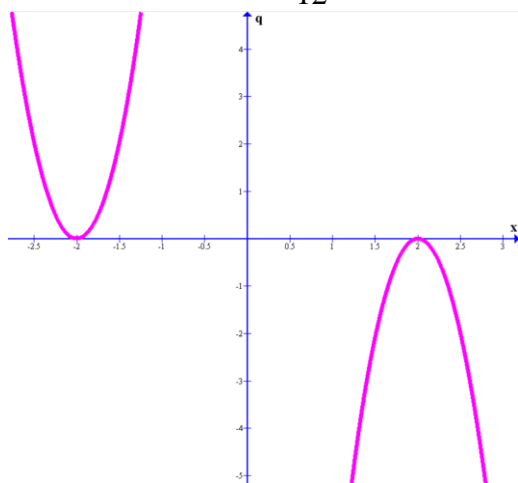


Рис.5.  $p < 0, r = \frac{p^2}{4}$

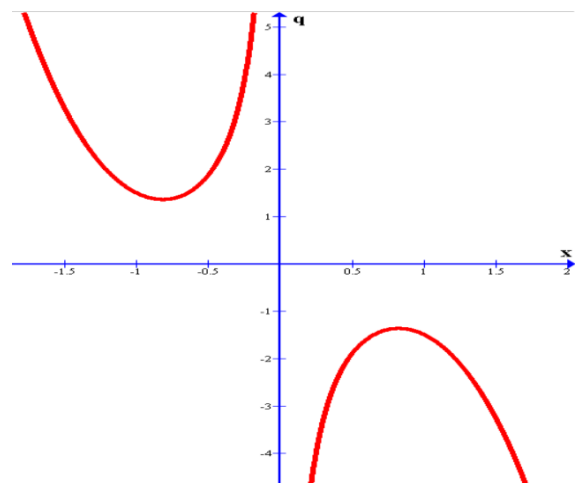


Рис.6.  $p < 0, r > \frac{p^2}{4}$  або  $p \geq 0, r > 0$

Враховуючи особливості рівняння (4), а саме, від'ємність вільного члена, можемо сформулювати наступну теорему.

**Теорема 2.** Для розв'язків рівняння (4) можливі випадки 1, 2, 3.

Зауважимо, що у випадку  $p \geq 0, r < 0$  має місце випадок 1. Також випадок 1 відповідає умовам  $p < 0$ , а  $r < -\frac{p^2}{12}$ . Досліджуючи графік першого випадку приходимо до висновку, що рівняння (6) має два дійсних різних кореня та два комплексно-спряжених.

Якщо  $p < 0$ , а  $r = -\frac{p^2}{12}$  (випадок 2), розрахунки дають наступні співвідношення:

$$x_{1,2,3} = \sqrt{-\frac{p}{6}} \text{ при } q = \sqrt{-\frac{8p^3}{27}}, \text{ або } x_{1,2,3} = -\sqrt{-\frac{p}{6}} \text{ при } q = -\sqrt{-\frac{8p^3}{27}}.$$

Тобто трикратний корінь і ще один дійсний.

Якщо  $p < 0, -\frac{p^2}{12} < r < 0$ , то графік функції  $q(x)$  має вигляд, зображений на рис.

3, а координати її екстремумів наступні:

$$t_{1,4} = \mp \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 + 12r}}{6}}, \quad t_{2,3} = \mp \sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 + 12r}}{6}}$$

Розглянемо функцію  $q_i = q(t_i)$ ,  $i = \overline{1,4}$ .

Тоді в залежності від значень  $q$  можливі три випадки:

- 1) Якщо  $q \in (-\infty, q_1) \cup (q_2, q_3) \cup (q_4, +\infty)$ , то рівняння має два дійсні та два комплексно-спряжені кореня.
- 2) Якщо  $q \in (q_1, q_2) \cup (q_3, q_4)$ , то рівняння має три різні дійсні кореня.
- 3) Якщо  $q = q_i$ , то рівняння має чотири дійсні корені, причому при  $x = t_i$  корінь буде двократним.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Таким чином, використання встановлених закономірностей дозволяє формалізувати параметри, що входять до рівняння (6), у вигляді функцій, які безпосередньо пов'язані з наслідками реальних промислових вибухів. Це створює основу для інженерної оцінки руйнівної дії вибуху на підставі легко вимірюваних польових характеристик, таких як глибина та діаметр кратера або об'єм утвореної камуфлетної порожнини. Подібний підхід значно спрощує процедуру постфактум-аналізу аварійних ситуацій і забезпечує можливість верифікації розрахункових моделей за емпіричними даними.

Особливий інтерес становить встановлення кількісного зв'язку між геометричними параметрами кратера (або камуфлети) та енергетичними характеристиками вибуху, зокрема – еквівалентною масою тротилу та питомою енергією заряду. Така кореляція дозволяє не лише реконструювати параметри вибухового навантаження за слідами на місцевості, але й прогнозувати можливі наслідки при плануванні безпечних відстаней або проектуванні захисних споруд. У подальшому це може бути покладено в основу нормативних методик оцінки ризиків, пов'язаних із вибухонебезпечними об'єктами.

## 6 ВИСНОВКИ

Таким чином, використовуючи оцінювані закономірності отримаємо можливість описати параметри, які входять в рівняння (6) так, щоб прив'язати їх до реальних наслідків промислових вибухів. Зокрема, цікавим є пошук взаємозв'язку між фізичними розмірами кратеру на місці вибуху або розмірами камуфлети.

## 7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

## Література

1. Houssin-Agbomson D., Blanchetière G., Mccollum D. et. al. Consequences of a 12-mm diameter high pressure gas release on a buried pipeline. Experimental setup and results [J]. /D. Houssin-Agbomson, G. Blanchetière, D. Mccollum// J Loss Prev Process Ind. 2018. 54:183–9.
2. Xie Yu., Wu Z. et al. Experimental Study on the diffusion of Pipeline natural gas leakage in soil [J]./ Yu. Xie, Z. Wu et.al. // China Safety Sci J. 2012. 8(04): 13–7.
3. Junbao X., Xiaomei H., Zhiwei L. et. al. Experimental study on the leakage flow and diffusion law of buried gas pipeline [J]. \ X. Junbao, H. Xiaomei, L. Zhiwei et. al. \ \ Gas & Heat. 2016. 36(06):36–42.

4. Cui J., Ma S., Liang Y. et. al. Numerical simulation of perforationcaused leakage diffusion of buried gas pipelines [J]. \ J. Cui, S. Ma, Y. Liang et. al. \ Appl Mechan Mat. 2014. 509:135–40.
5. Xinhong L., Jie M., Hans P., Renren Z. Dynamic risk investigation of urban natural gas pipeline accidents using Stochastic Petri net approach. \L. Xinhong, M. Jie, P. Hans, Z. Renren\ Process Safety and Environmental Protection. 2023. 178. <https://doi.org/10.1016/j.psep.2023.08.091>
6. Zhengbing L., Huixia F., Yongtu L., Ning X., Siming N., Haoran Z. A leakage risk assessment method for hazardous liquid pipeline based on Markov chain Monte Carlo. \L. Zhengbing, F. Huixia, L. Yongtu, X. Ning, N. Siming, Z. Haoran\ International Journal of Critical Infrastructure Protection. 2019. 27: 100325. <https://doi.org/10.1016/j.ijcip.2019.100325>
7. Liu C., Liao Y., Liang J. et. al. Quantifying methane release and dispersion estimations for buried natural gas pipeline leakages [J]. \C. Liu, Y. Liao, J. Liang et. al. \ Process Saf Environ Protect. 2021. 146:552–563.
8. Wang X., Tan Y., Zhang T. et. al. (2021) Numerical study on the diffusion process of pinhole leakage of natural gas from underground pipelines to the soil [J].\X. Wang, Y. Tan, T. Zhang et. al.\ J Nat Gas Sci Eng. 2021. 87:103792.
9. Bu F., Liu Y, Liu YB. et. al. (2021) Leakage diffusion characteristics and harmful boundary analysis of buried natural gas pipeline under multiple working conditions [J]. \F. Bu, Y. Liu, YB. Liu et. al. \ J Nat Gas Sci Eng. 2021. 94:15.
10. Лаврик В.Е., Булавацький В.М. Про розв'язок однієї задачі імпульсно-гідродинамічної теорії заглиблених зарядів. /В.Е. Лаврик, Ю.О. Булавацький//Доповіди АН УРСР, серія А, Фізико-математичні та технічні науки. 1976. 3:226-229.

## References

1. Houssin-Agbomson D., Blanchetière G., Mccollum D. et. al. (2018) Consequences of a 12-mm diameter high pressure gas release on a buried pipeline. Experimental setup and results [J]. J Loss Prev Process Ind. 54:183–9.
2. Xie Yushu, Wu Zhongzhi, LV Lianghai, et. al.(2012) Experimental Study on the diffusion of Pipeline natural gas leakage in soil [J]. China Safety Sci J, 8(04): 13–7.
3. Junbao X, Xiaomei H, Zhiwei L et al (2016) Experimental study on the leakage flow and diffusion law of buried gas pipeline [J]. Gas & Heat 36(06):36–42.
4. Cui J, Ma SY, Liang YP et. al. (2014) Numerical simulation of perforationcaused leakage diffusion of buried gas pipelines [J]. Appl Mechan Mat. 509:135–40.
5. Xinhong Li, Jie Ma, Hans Pasman, Renren Zhang. (2023) Dynamic risk investigation of urban natural gas pipeline accidents using Stochastic Petri net approach. Process Safety and Environmental Protection. 178. <https://doi.org/10.1016/j.psep.2023.08.091>
6. Zhengbing Li, Huixia Feng, Yongtu Liang, Ning Xu, Siming Nie, Haoran Zhang. (2019) A leakage risk assessment method for hazardous liquid pipeline based on Markov chain Monte Carlo. International Journal of Critical Infrastructure Protection. 27:100325. <https://doi.org/10.1016/j.ijcip.2019.100325>
7. Liu CW, Liao YH, Liang J. et. al. (2021) Quantifying methane release and dispersion estimations for buried natural gas pipeline leakages [J]. Process Saf Environ Protect 146:552–563.
8. Wang XM, Tan YF, Zhang TT et. al. (2021) Numerical study on the diffusion process of pinhole leakage of natural gas from underground pipelines to the soil [J]. J Nat Gas Sci Eng. 87:103792.
9. Bu FX, Liu Y., Liu YB et. al. (2021) Leakage diffusion characteristics and harmful boundary analysis of buried natural gas pipeline under multiple working conditions [J]. J Nat Gas Sci Eng. 94:15.
10. Lavrik V.I., Bulavackij V.M. (1976) On solution of one problem of pulse-hydrodynamic theory of explosion for deep-seated charge outburst. Reports of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. Series A. Physical, mathematical and technical sciences. 3:226-229.

Стаття надійшла до редакції 05.01.2026

Стаття прийнята до друку 27.02.2026

Дата публікації статті 26.03.2026



**Ісаєв Володимир Федорович**

Одеська державна академія архітектури та будівництва,  
к.т.н., доцент,  
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029  
[isaevv5@gmail.com](mailto:isaevv5@gmail.com),  
ORCID: 0000-0002-9947-7284

**Пальчик Сергій**

Одеська державна академія архітектури та будівництва,  
аспірант,  
вул. Дідріхсона, 4 Одеса, Україна 65029  
[spalchyk@ukr.net](mailto:spalchyk@ukr.net),  
ORCID:0009-0000-0425-4719

*Для посилань:*

Ісаєв В. Ф., Пальчик С. С. Про модель розповсюдження сейсмовибухових хвиль. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. №. 1. С. 84-94.

*For references:*

V. Isaev, S. Palchuk (2026). On a model of seismic-explosive wave propagation. Mechanics and Mathematical Methods. VIII (1). 84 –94.

Про модель розповсюдження сейсмовибухових хвиль © 2026 by Ісаєв В. Ф., Пальчик С. С. is licensed under CC BY 4.0

УДК 530.18

## АНАЛІЗ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВОЇ ХАОТИЧНОЇ ДИНАМІКИ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНИХ СИСТЕМ З НАЯВНОЮ СТРУКТУРНО-ЕВОЛЮЦІЙНОЮ ПЕРЕБУДОВОЮ

Човнюк Ю. В.<sup>1</sup>, Чередніченко П. П.<sup>1</sup>, Остапущенко О. П.<sup>1</sup>, Кравченко І. М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Київський національний університет будівництва і архітектури

**Анотація:** У роботі проведено математичне моделювання процесу перемежування у просторово-часовій хаотичній динаміці дискретно-континуальних систем з наявною структурно-еволюційною перебудовою. Зазвичай рух окремо взятої частинки речовини у деякому полі хвильового пакету моделюють диференціальним рівнянням другого порядку з регулярною (невипадковою) правою частиною. У дослідженні встановлені умови, за яких рух частинки стає стохастичним, й вона починає прискорюватися. Зі зростанням швидкості частинки час, за який вона пролітає шлях певної довжини, зменшується. Це означає, що ступінь адіабатичності збурення збільшується, і спід чекати появи межі хаосу завдяки слабкому впливу хвильового поля на динаміку частинки з високою енергією. Можливо також очікувати, що у цьому випадку хаос повинен бути дуже слабким відносно регулярної компоненти руху. Крім того, хаотична компонента руху повинна мати важкі часові та просторові масштаби на фоні високочастотного регулярного руху. У теорії турбулентності подібний характер руху прийнято називати перемежуванням.

Зазвичай під перемежуванням розуміють просторово-часову хаотичну динаміку системи з досить чітко вираженою просторово-часовою структурою. У роботі процес перемежування досліджений для дисипативних систем. У околі стійкою граничного циклу динаміка (дискретно-континуальна) системи визначається, в основному, тим спектром, котрий має цикл. Показано, що за наявності у циклу лише одного періоду, Фур'є-спектр системи у околі циклу має вид, близький до  $\delta$ -функції, з максимумом на частоті циклу. Якщо існує дуже слабкий хаос у околі циклу, спектр даної системи також близький до  $\delta$ -видного. Часову еволюцію можна наочно подати як безсистемно “зшиті” довгі ділянки регулярних осциляцій. Існування досить великих ділянок регулярного руху вже означає наявність значного ступеня динамічної регулярності. Аналогічно виглядає й просторове перемежування при русі суцільного середовища.

Встановлено, що явище перемежування пов'язане з властивістю мультифрактальності, тобто, з неоднорідним розподілом сингулярних або фрактальних властивостей у просторі й у часі.

У роботі вивчене явище гамільтонівського перемежування у задачі про рух частинки у полі хвильового пакету. Характер явища, яке описане, універсальний і притаманний багатьом, на перший погляд, ніяк не зв'язаним задачам. Гамільтонівське перемежування охоплює значний клас різноманітних фізико-математичних задач, зокрема й таких, що розглянуті у даному дослідженні, у котрих зміна фази обернено пропорційна довільному (будь-якому) ступеню дії. Існує низка додаткових можливостей для виникнення слабого хаосу.

**Ключові слова:** перемежування, просторово-часова еволюція, хаотична динаміка, дискретно-континуальні системи, структурно-еволюційна перебудова.

## ANALYSIS OF SPATIAL-TEMPORAL CHAOTIC DYNAMICS OF DISCRETE-CONTINUOUS SYSTEMS WITH STRUCTURAL- EVOLUTIONARY RESTRUCTURING

Yu. Chovnyuk<sup>1</sup>, P. Cherednichenko<sup>1</sup>, O. Ostapushchenko<sup>1</sup>, I. Kravchenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine

**Abstract:** The paper presents mathematical modeling of the alternation process in the spatiotemporal chaotic dynamics of discrete-continuous systems with existing structural-evolutionary restructuring. Usually, the motion of a single particle of matter in a certain wave packet field is modeled by a second-order differential equation with a regular (non-random) right-hand side. The study establishes the conditions under which the motion of a particle becomes stochastic and it begins to accelerate. As the

particle's speed increases, the time it takes to travel a certain distance decreases. This means that the degree of adiabaticity of the perturbation increases, and the emergence of a chaos boundary can be expected due to the weak influence of the wave field on the dynamics of a high-energy particle. It can also be expected that in this case, chaos should be very weak in relation to the regular component of motion. In addition, the chaotic component of motion should have heavy temporal and spatial scales against the background of high-frequency regular motion. In turbulence theory, this type of motion is commonly referred to as intermittent motion.

Alternation is usually understood as the spatially and temporally chaotic dynamics of a system with a fairly well-defined spatial and temporal structure. In this work, the process of alternation is investigated for dissipative systems. In the vicinity of a stable limit cycle, the dynamics of a (discrete-continuous) system is mainly determined by the spectrum of the cycle. It is shown that if the cycle has only one period, the Fourier spectrum of the system in the vicinity of the cycle has a form close to the delta-function, with a maximum at the cycle frequency. If there is very weak chaos in the vicinity of the cycle, the spectrum of this system is also close to the delta-form. The temporal evolution can be clearly represented as randomly "stitched" long sections of regular oscillations. The existence of sufficiently large sections of regular motion already implies a significant degree of dynamic regularity. The spatial alternation in the motion of a continuous medium looks similar.

It has been established that the phenomenon of alternation is associated with the property of multifractality, i.e., with the inhomogeneous distribution of singular or fractal properties in space and time.

This paper studies the phenomenon of Hamiltonian alternation in the problem of particle motion in a wave packet field. The nature of the phenomenon described is universal and inherent in many problems that, at first glance, appear to be unrelated. Hamiltonian alternation covers a significant class of diverse physical and mathematical problems, including those considered in this study, in which the phase change is inversely proportional to an arbitrary (any) degree of action. There are a number of additional possibilities for the emergence of weak chaos.

**Keywords:** intermittent, spatio-temporal evolution, chaotic dynamics, discrete-continuous systems, structural-evolutionary restructuring.

## 1 ВСТУП

При русі часточок у випадкових полях, наприклад, при перемішуванні, вібраційному ущільненні бетонних/будівельних сумішей, швидкість часточок може у середньому зростати. Такий спосіб був запропонований Е. Фермі для пояснення походження швидких космічних часточок [6]. Пізніше Улам запропонував для аналізу доволі просту модель, у якій частинка рухається між двома стінками, одна з котрих періодично коливається [7], – саме так будується типова модель віброущільнення бетонних сумішей при об'ємному/поверхневому їх формуванні (за наявності/відсутності привантаження). Чисельний та аналітичний аналізи моделі Улама, проведені у роботах [4,8], показали, що в цій моделі існує хаотична динаміка й стохастичне прискорення часточок. У подальшому ці дослідження були продовжені у багатьох роботах [3,11].

Зазвичай, під перемежуванням розуміють просторово-часову хаотичну динаміку системи з достатньо чітко вираженою просторово-часовою структурою. Простіше за все уявити собі картину перемежування у дисипативних системах. У околі стійкого граничного циклу динаміка системи визначається, в основному, тим спектром, котрий має цикл. Якщо, наприклад, цикл має тільки один період, тоді фур'є-спектр системи у околі циклу має вид, близький до  $\delta$ -функції, з максимумом на частоті циклу. У тому випадку, коли має місце дуже слабкий хаос у околі циклу, спектр системи також близький до  $\delta$ -видного. Часову еволюцію можна наочно подати як без усякого порядку “зшиті” довгі ділянки регулярних осциляцій. Існування досить великих ділянок регулярного руху вже означає наявність значного ступеня динамічної регулярності. Аналогічно виглядає й просторове перемежування при русі суцільного середовища. Властивість перемежування виявляється пов'язаною з властивістю мультифрактальності процесу, тобто з неоднорідним розподілом сингулярних чи фрактальних властивостей у просторі й у часі.

Та ж сама картина руху, дуже близького до регулярного, але з дуже слабо вираженою хаотичною динамікою можлива й у гамільтонівських системах. У даному дослідженні вивчене явище гамільтонівського перемежування у задачі про рух частинки у полі хвильового пакету. Слід зазначити, що характер явища, яке тут описане, доволі універсальний й притаманний багатьом на перший погляд ніяк незв'язаним задачам.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Основні підходи до дослідження процесів перемежування, які відбуваються у різноманітних системах, наведені у роботах [1-5,8]. Автори вказаних робіт детально та всебічно дослідили причини виникнення хаосу. Зокрема, було встановлено, що він виникає внаслідок специфічної локальної нестійкості відносно як завгодно малих збурень орбіт системи. Він проявляє себе у певних областях фазового простору, а також у певних областях значень параметрів системи. Однак найбільш привабливим у хаосі є його властивість бути непереборним у типових фізико-механічних ситуаціях. Мається на увазі наступне. При досить загальних умовах завжди існують області у фазовому просторі й у просторі значень параметрів, у котрих динаміка системи стохастична. Ці області можуть бути скільки завгодно малими, проте вони непереборні при будь-яких скінченних значеннях параметрів й фіксованій конструкції динамічної системи (тобто виді її гамільтона). Доведено, що така ситуація виникає саме при дифузії Арнольда, яка є універсальним необмеженим транспортом частинок по каналам стохастичного павутиння у системах з числом ступенів вільності руху, більшим двох. Слід зазначити, що перехід від систем, у яких зовсім відсутня хаотична динаміка, до систем з хаосом супроводжується появою малих областей – зародків хаосу. У

гамільтонівських системах такими зародками є стохастичні прошарки й стохастичне павутиння. Вони саме й реалізують слабкий хаос у системах й одночасно призводять до деякого розбиття фазового простору. Внаслідок цього топологічні властивості фазового простору виявляються тісно переплетеними з умовами та формою областей – зародків хаосу.

На думку авторів даного дослідження, моделювання процесу перемежування у просторово-часовій хаотичній динаміці дискретно-континуальних систем з наявною структурно-еволюційною перебудовою є актуальною задачею, котра вимагає подальшого вивчення, а наявні у відповідній літературі результати слід вдосконалювати, уточнювати й коригувати, оскільки рівень, досягнутий у цій царині, недостатній.

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Мета роботи полягає у обґрунтуванні фізико-механічної моделі процесу перемежування у просторово-часовій хаотичній динаміці дискретно-континуальних систем з наявною структурно-еволюційною перебудовою. Для дослідження мети роботи будуть використані підходи та методи, розвинені у роботах [1,4,8].

### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо спочатку деякі якісні міркування, котрі пояснюють, як у задачах про прискорення часточок (суміші, середовища та ін.) з'являється межа/границя хаотичної динаміки. Нехай часточка рухається у деякому полі хвильового пакету:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cos(k_n x - \omega_n t), \quad (1)$$

де  $F_n$  – амплітуда  $n$ -ої гармоніки хвильового пакету,  $m$  – маса часточки,  $k_n$  – хвильовий вектор  $n$ -ої гармоніки,  $t$  – час,  $\omega_n$  – її кругова частота,  $x$  – переміщення часточки, яке є функцією часу, тобто  $x = x(t)$ . Крім того, у (1) для хвильового пакету введені наступні параметри:

$$\Delta\omega = 2\pi/T, \quad (2)$$

$T$  – період коливань,  $\Delta\omega$  – характерна відстань між частотами  $\omega_n$ , а також:

$$\Delta k = 2\pi/L, \quad (3)$$

де  $\Delta k$  – характерна відстань між хвильовими числами  $k_n$  хвильового пакету,  $L$  – просторовий період.

Хоча права частина (1) і є регулярною (невипадковою), все ж, при деяких умовах, котрі будуть з'ясовані нижче, рух частинки стає стохастичним, й вона починає прискорюватись. Зі зростанням швидкості часточки час, за який вона пролітає шлях довжиною  $L$ , скорочується. Це, по суті, означає, що ступінь адіабатичності збурення збільшується, й слід чекати появи границі/межі хаосу завдяки слабкій дії (впливу) хвильового поля на динаміку частинки, що має високу енергію власного руху. Можна також очікувати, що у цьому випадку хаос повинен бути дуже слабким відносно регулярної компоненти руху. Крім того, хаотична компонента руху повинна мати більші часові та просторові масштаби на фоні високочастотного регулярного руху.



Просторово-часова хаотична динаміка системи з досить чітко вираженою просторово-часовою структурою, тобто з перемежуванням, характерна й для руху у гамільтонівських системах, де на близький до регулярного рух накладається слабо виражена хаотична динаміка. Саме у подальшому вивчається гамільтонівське перемежування у задачі про рух частинки у полі хвильового пакету.

Разом з тим, характер явища, яке описується, досить універсальний й притаманний багатьом, на перший погляд, ніяк не зв'язаним задачам [8].

Будемо вважати, що хвильовий пакет у (1) дуже широкий, тобто до його складу входить велике число гармонік, й усі вони у ньому мають суттєво відмінні від нуля амплітуди  $F_n$ . Цю властивість можна формально виразити, поклавши:

$$F_n \approx F_0 \quad (4)$$

для усіх  $n$ . Поклавши також:

$$\omega_n = \omega_0 + n \cdot \Delta\omega, \quad k_n \approx k_0 + n \cdot \Delta k, \quad (5)$$

та вводячи групову швидкість пакету:

$$v_g = \Delta\omega / \Delta k, \quad (6)$$

можна чітко виділити два граничних випадки:  $v > v_g$  та  $v < v_g$ . Далі будемо розглядати перший з них, оскільки досліджуване тут явище перемежування виникає при великих швидкостях часточок. За умови  $v \approx v_g$  з (5) випливає, що можна покласти  $\omega_n \approx \omega_0$  для усіх  $n$ . Використовуючи цю обставину й формули (4) і (5), замість (1) матимемо наступне рівняння:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \cdot F_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(k_0 x - \omega_0 t + n \cdot \Delta k \cdot x) = F_0 \cdot \cos \theta \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n \cdot \Delta k \cdot x), \quad (7)$$

де позначена фаза:

$$\theta = k_0 \cdot x - \omega_0 \cdot t. \quad (8)$$

Використовуючи співвідношення:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n \cdot \Delta k \cdot x) = L \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nL), \quad (9)$$

а також позначення (3), перепишемо рівняння (7) у вигляді наступного:

$$\dot{v} = \frac{F_0 \cdot L \cdot \cos \theta}{m} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nL); \quad v = \dot{x}. \quad (10)$$

Саме ця форма запису розкриває фізико-механічний зміст вихідної задачі за зроблених вище припущень (4), (5) та  $v \approx v_g$ . Якщо тільки не має місце рівність  $x = x_n$ , де

$$x_n = Ln = 2\pi n / \Delta k, \quad (11)$$

тоді  $\dot{v} = 0$ , тобто  $v = const$ , і рух частинки є вільним. У момент часу, коли координата частинки досягає значення, кратне  $n$ , частинка отримує вплив зовнішньої сили – поштовх. Поштовхи відбуваються у моменти часу ...,  $t_n$ ,  $t_{n+1}$ , ..., котрі згідно (11) повинні знаходитись з умови:



$$\dots; x(t_n) = Ln; x(t_{n+1}) = L(n \pm 1); \dots, \quad (12)$$

де знак  $\pm$  залежить від того, куди спрямована швидкість частинки після  $n$ -го поштовху. З (12), зокрема, знаходимо інтервал часу між двома послідовними «зіткненнями»

$$\Delta t_n = |x(t_{n+1}) - x(t_n)| / |v_{n+1}| = L / |v_{n+1}|, \quad (13)$$

де  $v_{n+1}$  – швидкість частинки після  $n$ -го поштовху. Побудуємо відображення, яке зв'язує координату та швидкість частинки між двома послідовними зіткненнями.

Введемо нову змінну:

$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v \cdot |v|, \quad (14)$$

модуль котрої дорівнює енергії частинки. З (14) можна виразити швидкість  $v$ :

$$v = (2 \cdot |W| / m)^{1/2} \cdot \text{sign} W. \quad (15)$$

Використовуючи визначення (11) та властивості  $\delta$ -функцій П.Дірака, знаходимо з (10) та (14):

$$\dot{W} = F_0 \cdot L \cdot \cos \theta \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_n). \quad (16)$$

Диференціювання виразу (8) для  $\theta$  дає із урахуванням формули (15):

$$\dot{\theta} = k_0 \cdot v - \omega_0 = k_0 \cdot (2 \cdot |W| / m)^{1/2} \cdot \text{sign} W - \omega_0. \quad (17)$$

Система рівнянь (16), (17) відносно нових змінних  $(W, \theta)$  є замкненою. Крім того, ці змінні є канонічно спряженою парою, оскільки має місце співвідношення:

$$\frac{\partial \dot{W}}{\partial W} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} = 0. \quad (18)$$

Для того, щоб побудувати відображення у площині  $(W, \theta)$ , слід звернути увагу на те, що послідовність моментів часу  $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$ , у котрі на частинку діє поштовх, є монотонно зростаючою, тобто має місце нерівність:  $t_n > t_k$ , якщо  $n > k$ . Однак послідовність координат  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ , у котрих діють поштовхи, не є монотонною, оскільки напрям швидкості частинки може змінюватись від поштовха до поштовха. Це, зокрема, відображене у (13).

Позначимо:

$$W_n = W(t_n - 0), \theta_n = \theta(t_n - 0). \quad (19)$$

Згідно з рівняннями руху (16), (17) при переході через поштовх змінна  $\theta$  є неперервною, тобто:

$$\theta(t_n - 0) = \theta(t_n + 0), \quad (20)$$

а змінна  $W$  знаходиться під впливом поштовху. Враховуючи властивість (20), маємо з (16), (17)



$$\begin{cases} W(t_n + 0) - W(t_n - 0) = F_0 \cdot L \cdot \cos \theta_n, \\ \theta(t_n + 0) - \theta(t_n - 0) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

На інтервалі часу  $(t_n + 0, t_n - 0)$  величина  $W$  не змінюється і, відповідно:

$$\begin{cases} W(t_{n+1} - 0) = W_{n+1} = W(t_n + 0) = W(t_n - 0) + F_0 \cdot L \cdot \cos \theta_n = \\ = W_n + F_0 \cdot L \cdot \cos \theta_n. \end{cases} \quad (22)$$

З тієї ж причини на тому ж інтервалі  $\dot{\theta}$  є константа й з (21) випливає, що:

$$\theta(t_{n+1} - 0) = \theta_{n+1} = \theta(t_n + 0) + \dot{\theta}(t_n + 0) \cdot \Delta t_n, \quad (23)$$

де  $\Delta t_n$  визначається формулою (13). З (22) та (23) випливає низка формул, які визначають  $\hat{L}$ -відображення:

$$\hat{L}: \begin{cases} W_{n+1} = W_n + F_0 \cdot L \cdot \cos \theta_n \\ \theta_{n+1} = k_0 \cdot L \cdot \text{sign} W_{n+1} - \omega_0 \cdot L \cdot \left( \frac{m}{2} \cdot |W_{n+1}| \right)^{1/2} \cdot (\text{mod } 2\pi). \end{cases} \quad (24)$$

Формули (24) зручно подати іншим чином, вводячи нові нормовані величини:

$$u = 2W / (m\omega_0^2 \cdot L^2), \quad y = \theta / 2\pi - 1/4. \quad (25)$$

Це дає:

$$\hat{L}: \begin{cases} u_{n+1} = u_n + Q \cdot \sin(2\pi y_n), \\ y_{n+1} = y_n - \frac{1}{2\pi \cdot |u_{n+1}|^{3/2}} + \tilde{y} \cdot \text{sign} u_{n+1} \pmod{1}, \end{cases} \quad (26)$$

де  $\tilde{y} = k_0 \cdot L / (2\pi)$  – постійний зсув фази та:

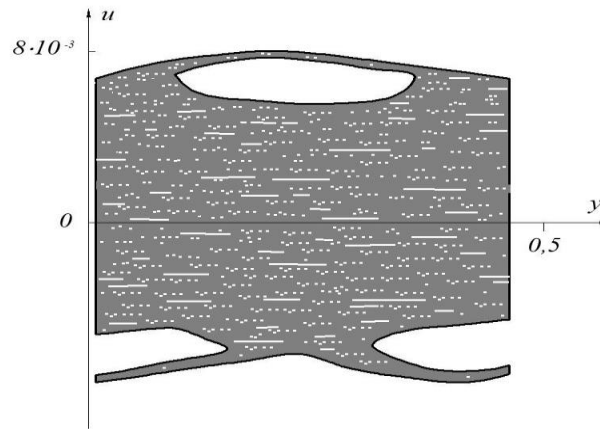
$$Q = 2F_0 / (m \cdot \omega_0^2 \cdot L). \quad (27)$$

Величина  $Q$  має зміст відношення зміни енергії частинки за одне зіткнення  $(mv \cdot \delta v \approx F_0 \cdot L)$  до енергії частинки за рахунок високочастотних осциляцій  $(\approx m\omega_0^2 L^2)$ .

Про досить малих значеннях енергії  $|u|$  зміни фази від поштовха до поштовха великі й траєкторія частинки стає стохастичною. Умови виникнення хаосу можна наближено подати у вигляді :

$$K = \left| \frac{\delta y_{n+1}}{\delta y_n} - 1 \right| = \frac{Q}{2|u|^{3/2}} |\cos(2\pi y)| \geq 1. \quad (28)$$

Фазовий портрет системи при  $Q \ll 1$  наведений на рис.1. Острівки стійкості, у котрих траєкторії регулярні, обумовлені множителем  $\cos(2\pi y)$  у (28), завдяки якому нерівність не виконується для деякої області значень  $y$ .



**Рис.1.** Фазова площина  $\hat{L}$ -відображення  
 при  $Q = 10^{-3}$ ,  $\bar{y} = 0$ .

Головна особливість  $\hat{L}$ -відображення (26), яка відрізняє його від стандартних відображень типу Чірікова-Тейлора [1,2], полягає в тому, що у рівнянні для зміни фази  $y$  змінна  $u$ , яка відіграє роль дії, стоїть у знаменнику, а не у чисельнику. При  $Q \approx 1$ , якщо первісно енергія була малою ( $|u| \ll 1$ ), тоді її зміни  $\delta u \approx Q$  також малі, й протягом тривалого часу величина  $|u|$  може залишатись малою. Однак при  $Q \gg 1$  ця картина суттєво змінюється. Вже за один поштовх маємо  $|u| \approx Q$ , навіть якщо початкове значення  $|u| \ll 1$ . Це одразу дає:

$$\delta y = |y_{n+1} - y_n| \approx \frac{1}{(2\pi \cdot Q^{1/2})} \ll 1. \quad (29)$$

Умова (29) означає дуже повільну, адиабатичну зміну фази  $y$  від одного поштовху до іншого. Розглянемо область значень  $|u| \gg Q \gg 1$ . У цій області зміна за один крок відображення буде:

$$|\delta u| \approx Q \ll |u|. \quad (30)$$

Умови (29) та (30) дозволяють з великою точністю апроксимувати  $\hat{L}$ -відображення (26) диференціальними рівняннями:

$$\begin{cases} \frac{du(n)}{du} = Q \sin(2\pi \cdot y(n)), \\ \frac{dy(n)}{du} = -\frac{1}{2\pi \cdot |u(n)|^{1/2}} + \tilde{y}. \end{cases} \quad (31)$$

Система (31) має регулярний, невинуватий розв'язок:

$$u^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot [1 + \cos(2\pi y)] + C \quad (u > 0), \quad (32)$$

який визначає інваріантну криву, де  $C$  – довільна постійна, й для простоти покладено  $\tilde{y} = 0$ . Однак рівняння (32) не описує реальну ситуацію, оскільки існують моменти часу, де вихідна система (31) втрачає зміст. За великих значень  $Q$  зміна фази  $y$  за один

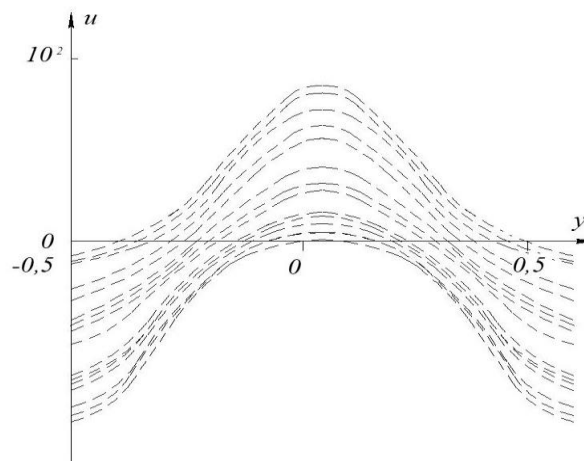
крок мала згідно (29). Так само повільно змінюються  $\sin(2\pi y)$  та величина  $u$  у  $\hat{L}$ -відображенні (26). Процес повільних змін  $u$  та  $y$  описується кривою (32), на котрій лежать точки траєкторії  $(u, y)$ . Так відбувається до тих пір,  $\sin(2\pi y)$  не стає близьким до нуля. Зміна його знаку призводить до стрибкоподібної зміни на величину:

$$\delta u = |u_{n+1} - u_n| = Q \cdot |\sin(2\pi y_n)|. \quad (33)$$

За рахунок цього тонкого ефекту і відбувається слабка стохатизація динаміки частинки. Число кроків  $u_0$ , через яке відбувається неадіабатична зміна фази  $y$ , легко оцінити з формули (29):

$$u_0 = 2\pi \cdot Q^{1/2} \gg 1. \quad (34)$$

Загальна картина такого руху чітко видна з рис.2. Фазова площина покривається, в основному, великими групами точок, число котрих порядку  $2n_0$ . Кожна група лежить на кривій (32) з деяким значенням константи  $C$ . При переході різниці  $|u_{n+1} - u_n|$  через нуль рівняння (31) втрачають можливість бути застосованими. Однак далі вони знову стають такими, хоча розв'язком їх є крива (32), але вже з іншою константою  $C$ . Ці місця, де відбуваються пересканування траєкторії частинки на іншу криву з сім'ї кривих (32), чітко видні на рис 2 поблизу осі  $0y$  при  $u=0$ . По суті, саме так можна зображати процес гамільтонівського перемежування на фазовій площині.



**Рис.2.** Фазова площина  $\hat{L}$ -відображення при  $Q = 10$ ,  $\bar{y} = 0$  відповідає випадку гамільтонівського перемежування

Сім'я кривих

$$u = u(y, C) \quad (35)$$

покриває фазову площину, і траєкторія системи являє собою ансамбль кривих (35), які «зшиті» при різних, випадково змінних значеннях константи  $C$ . Тепер можна поставити питання про граничне значення  $C_0$ , тобто про те значення, котре визначає останню інваріантну криву на рис.2 зверху, яка є границею області стохастичної динаміки, що лежить знизу.

Чисельний аналіз показує, що:

$$C_0 \approx 0,5 \cdot Q^{1/3}. \quad (36)$$

Взагалі кажучи, границя області стохастичності може бути апроксимована кривою:

$$u = \frac{1}{4} \cdot Q^2 \cdot \{1 + \cos(2\pi y + \delta_0) + Q^{-2/3}\}^2, \quad (37)$$

де зсув фази  $\delta_0 \rightarrow 0$  при  $Q \rightarrow \infty$ . Зазначимо, що при  $Q \ll 1$  формула (37) досить точно описує границю стохастичності, яка може бути отримана з (27). Тому можна очікувати, що вона має більш універсальний характер, ніж це передбачалось при її виведенні.

Явище, розглянуте й описане вище, відноситься до розряду явищ стохастичної динаміки в умовах перемежування, а також слід зазначити, що саме воно призводить до прискорення частинки, хоча цей процес є значно більш повільним, ніж при малих значеннях  $Q$ . Енергія, яка досягається в результаті прискорення, може бути доволі значною по величині. З (37) випливає наступна оцінка:

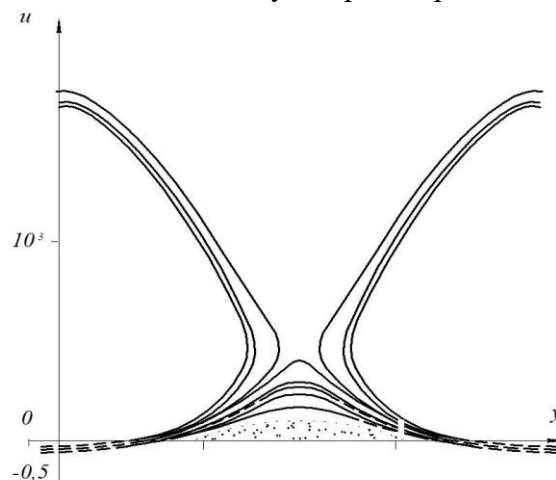
$$u_{\max} \approx Q^2 \quad (38)$$

Дійсно, процес прискорення внаслідок стохастичного перемежування дуже чутливий до деталей механізму порушення адіабатичності. Оцінка (38) не є граничною, а описана картина перемежування – єдиною.

Розглянемо випадок, коли  $\tilde{y} \neq 0$ . Будемо також вважати, що  $0 < \tilde{y} < 1$ . Тоді з (31) випливає існування двох нових особливих точок з координатами:

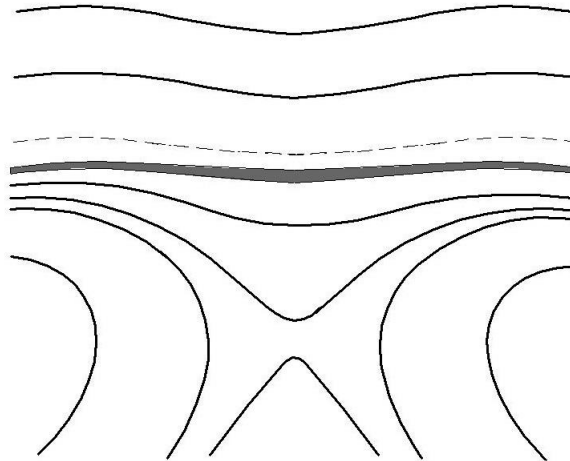
$$\left( y_1 = 0, u_1 = 1/(4\pi^2 \cdot \tilde{y}^2) \right), \left( y_2 = \frac{1}{2}, u_2 = 1/(4\pi^2 \cdot \tilde{y}^2) \right). \quad (39)$$

Перша з них – гіперболічна, друга – еліптична. Якщо точка  $(y_1, u_1)$  не попадає у область стохастичності, тоді фазовий портрет системи аналогічний тому, який зображений на рис.2. Однак, якщо гіперболічна точка розміщена доволі низько, що залежить від величини  $\tilde{y}$ , тоді виникає відгалуження тонкого стохастичного каналу вповодж вусів сепаратрис, які проходять через точку  $(y_1, u_1)$  (рис.3). Утворена область хаотичної динаміки призводить до можливості значно більш сильних прискорень, ніж ті, що випливають з оцінки (38). Так, наприклад, на рис.3 вже за малої відмінності  $\tilde{y}$  від нуля ( $\tilde{y} = 0,007$ ) ( $u_{\max} \approx Q^3$ ). Висока чутливість прискорення до зміни параметра  $\tilde{y}$  супроводжується також різкими біфуркаційними змінами характеру перемежування. Тепер у цьому процесі приймають участь дві сім'ї регулярних траєкторій – траєкторій вже описаного типу та траєкторій вповодж сепаратрис.



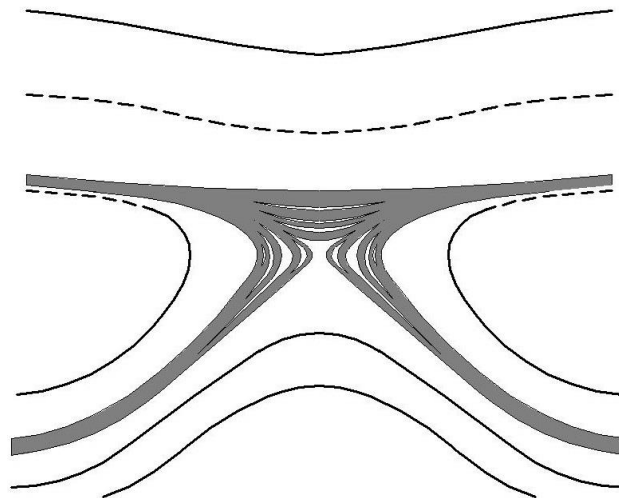
**Рис.3.** Фазова площина  $\hat{L}$ -відображення при  $Q = 10$ ,  $\tilde{y} = 0,007$  демонструє значні зміни картини перемежування

Приклад, розглянутий вище, показує, зокрема, що границя хаосу, визначена в [1] для стандартного відображення, не є універсальною величиною. Точно так само не є універсальним зв'язок між числом обертань останньої інваріантної кривої із золотим перерізом. Це є очевидним, виходячи з отриманих вище формул (32) та (37). Більш того, руйнування останньої інваріантної кривої може бути пов'язане не з переходом до т.з. глобального хаосу [1,2], а із з'єднанням всього лише двох стохастичних областей (рис.4). Руйнування інваріантної кривої біля межі хаосу пов'язане з «влипанням» сідла у область стохастичної динаміки.



а

Рис.4а. Фазовий портрет для випадку  $Q = 10$  та  $\tilde{y} = 0,003$



б

Рис.4б. Фазовий портрет для випадку  $Q = 10$  та  $\tilde{y} = 0,008$  (б)

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

У результаті проведеного дослідження було обґрунтовано фізико-механічну модель процесу перемешування в умовах просторово-часової хаотичної динаміки дискретно-континуальних систем, що супроводжується структурно-еволюційною перебудовою. Встановлено ключові властивості цього процесу на фазовій площині, зокрема виявлено особливості формування гамільтонівського перемешування. Показано, що часова еволюція перемешування характеризується неупорядкованим поєднанням тривалих інтервалів регулярних осциляцій, що свідчить про наявність

прихованої динамічної впорядкованості в системі. Аналогічні закономірності спостерігаються і в просторовому перемезуванні при русі суцільного середовища, що тісно пов'язано з явищем мультифрактальності та нерівномірним розподілом сингулярних властивостей у просторі й часі. Водночас встановлено, що гамільтонівське перемезування охоплює широкий спектр фізико-механічних задач, не обмежуючись випадками простої залежності зміни фази від ступеня дії, що визначає необхідність подальшого розвитку та уточнення підходів до дослідження даного явища.

## 6 ВИСНОВКИ

1. Обґрунтована фізико-механічна модель процесу перемезування у просторово-часовій хаотичній динаміці дискретно-континуальних систем з наявною структурно-еволюційною перебудовою.

2. Встановлені основні властивості процесу перемезування на фазовій площині й особливості утворення гамільтонівського перемезування.

3. Часова еволюція процесу перемезування зводиться до неупорядкованого «зшивання» довгих ділянок регулярних осциляцій. Саме існування таких ділянок свідчить про наявність значною мірою динамічної регулярності. Аналогічним чином виглядає й просторове перемезування при русі суцільного середовища. Цей процес суттєво пов'язаний з властивістю мультифрактальності, тобто з неоднорідним розподілом сингулярних чи фрактальних властивостей у просторі й у часі.

4. Гамільтонівське перемезування охоплює великий клас різних фізико-механічних задач. Це можуть бути, зокрема, не тільки ті задачі, у котрих зміна фази обернено пропорційна будь-якому ступеню дії. Тому дослідження у цій області вимагають подальших вдосконалень.

## 7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають будь-яких фінансових чи нефінансових інтересів щодо матеріалів, представлених у цій статті, які слід розкривати.

## Література

1. Zaslavsky G.M., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Chernikov A.A. Weak chaos and Quasi-Regular Patterns. – М.: Nauka Publishers, 1991. 240 p.
2. Zaslavsky G.M., Sagdeev R.Z. Nonlinear Physics. – N.Y.: Harwood, 1988. 368 p.
3. Lichtenberg A.J., Leiberman M.A. Regular and stochastic motion. – N.Y.: Springer-Verlag, 1983. 420 p.
4. Zaslavsky G.M. Stochasticity of dynamical systems. – М.: Nauka Publishers, 1984. 340 p.
5. Chernikov A.A., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Zaslavsky G.M. Weak chaos and structures. Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys. 1989. Vol.8.
6. Fermi E. //Phys. Rev. 1949. V.75. P. 1169.
7. Ulam S. //Proc.4<sup>th</sup> Berkeley Symp. on Math. and Prob. – Los Angeles: Berkeley, 1961. Vol.3. P.315.
8. Zaslavsky G.M., Sagdeev R.Z. Introduction to nonlinear physics. – М.: Nauka Publisher, 1988. 290 p.
9. Paladin G., Vulpiani A. //Phys. Rep. 1987. V.156. P. 148.
10. Stanley H.E., Meakin P. // Nature. 1988.V.335. P. 405.
11. Chirkov B.V. //Phys. Rep. 1979. V.52. P. 263.

## References

1. Zaslavsky G.M., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Chernikov A.A. Weak chaos and Quasi-Regular Patterns. – М.: Nauka Publishers, 1991. 240 p.
2. Zaslavsky G.M., Sagdeev R.Z. Nonlinear Physics. – N.Y.: Harwood, 1988. 368 p.

3. Lichtenberg A.J., Lieberman M.A. Regular and stochastic motion. – N.Y.: Springer-Verlag, 1983. 420 p.
4. Zaslavsky G.M. Stochasticity of dynamical systems. – M.: Nauka Publishers, 1984. 340 p.
5. Chernikov A.A., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Zaslavsky G.M. Weak chaos and structures. Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys. 1989. Vol.8.
6. Fermi E. //Phys. Rev. 1949. V.75. P. 1169.
7. Ulam S. //Proc.4th Berkeley Symp. on Math. and Prob. – Los Angeles: Berkeley, 1961. Vol.3. P.315.
8. Zaslavsky G.M., Sagdeev R.Z. Introduction to nonlinear physics. – M.: Nauka Publisher, 1988. 290 p.
9. Paladin G., Vulpiani A. //Phys. Rep. 1987. V.156. P. 148.
10. Stanley H.E., Meakin P. // Nature. 1988.V.335. P. 405.
11. Chirkov B.V. //Phys. Rep. 1979. V.52. P. 263

Стаття надійшла до редакції 06.11.2025

Стаття прийнята до друку 28.12.2025

Дата публікації статті 26.03.2026

**Човнюк Юрій Васильович**

Київський національний університет будівництва та архітектури,  
к.т.н., доцент  
проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна 03037  
[ychovnyuk@ukr.net](mailto:yhovnyuk@ukr.net)

ORCID: 0000-0002-0608-0203

**Чередніченко Петро Петрович**

Київський національний університет будівництва та архітектури,  
к.т.н., доцент  
проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна 03037  
[petro\\_che@ukr.net](mailto:petro_che@ukr.net)

ORCID: 0000-0001-7161-661X

**Остапущенко Ольга Павлівна**

Київський національний університет будівництва та архітектури,  
к.т.н., доцент  
проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна 03037  
[olga\\_ost\\_17@ukr.net](mailto:olga_ost_17@ukr.net)

ORCID 0000-0001-8114-349X

**Кравченко Ігор Миколайович**

Київський національний університет будівництва та архітектури,  
асистент  
проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна 03037  
[kim-ua@i.ua](mailto:kim-ua@i.ua)

ORCID: 0000-0001-7077-1546

*Для посилань:*

Човнюк Ю. В., Чередніченко П. П., Остапущенко О. П., Кравченко І. М. Аналіз просторово-часової хаотичної динаміки дискретно-континуальних систем з наявною структурно-еволюційною перебудовою. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. № 1. С. 95–107.

*For references:*

Yu. Chovnyuk, P. Cherednichenko, O. Ostapushchenko, I. Kravchenko (2026). Analysis of spatial-temporal chaotic dynamics of discrete-continuous systems with structural-evolutionary restructuring. Mechanics and Mathematical Methods. VIII (1). 95–107.

Аналіз просторово-часової хаотичної динаміки дискретно-континуальних систем з наявною структурно-еволюційною перебудовою © 2026 by Човнюк Ю. В., Чередніченко П. П., Остапущенко О. П., Кравченко І. М. is licensed under CC BY 4.0

UDC 537.6

## STUDY OF ELECTROMOTIVE FORCE OF THE SYSTEM $Al-Al_2O_3$ – ELECTROLYTE

L. Vilinskaya<sup>1</sup>, G. Burlak

<sup>1</sup>*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract:** The paper examines the features of space charge formation in anodic oxide films of metals, in particular within the  $Al-Al_2O_3$  – electrolyte system, which is essential for understanding physicochemical processes at phase boundaries. It is substantiated that anodic oxide films are characterized by the presence of space-charge regions that significantly affect the electrical and optical properties of the material.

The results of experimental studies aimed at investigating the electrical characteristics of the  $Al-Al_2O_3$  system in contact with various types of electrolytes are presented. It has been established that when the samples are immersed in aqueous solutions of acids, salts, and alkalis, as well as in non-aqueous electrolytes, a potential difference spontaneously arises between the electrodes. Its magnitude depends on the nature of the electrolyte, its concentration, and the experimental conditions. The performed measurements made it possible to quantitatively assess the influence of the medium composition on the electromotive force of the system. The fundamental possibility of creating primary power sources based on the studied system has been established, opening prospects for their application in micro-power engineering and autonomous sensor devices. Particular attention is paid to the luminescent properties of oxide films: it has been found that the recombination of ions arriving from the electrolyte onto the  $Al_2O_3$  surface is accompanied by light emission, the intensity of which strongly depends on the chemical composition and concentration of the electrolyte.

The obtained results indicate the potential use of anodic aluminum oxide films as sensitive elements of sensors for monitoring the composition of liquid media, which is of practical importance for environmental monitoring, chemical analysis, and technological processes.

**Keywords:** aluminum oxide films, electrolyte, potential difference, electromotive force (EMF), space charge.

## ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОРУШІЙНОЇ СИСТЕМИ $Al-Al_2O_3$ - ЕЛЕКТРОЛІТ

Вілінська Л. М.<sup>1</sup> Бурлак Г. М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація:** У роботі розглянуто особливості формування просторового заряду в анодних оксидних плівках металів, зокрема в системі  $Al-Al_2O_3$  – електроліт, що є важливою для розуміння фізико-хімічних процесів на межі поділу фаз. Обґрунтовано, що для анодних оксидних плівок характерна наявність просторово-заряджених областей, які суттєво впливають на електричні та оптичні властивості матеріалу.

Наведено результати експериментальних досліджень, спрямованих на вивчення електричних характеристик системи  $Al-Al_2O_3$  при її контакті з різними типами електролітів. Встановлено, що при зануренні зразків у водні розчини кислот, солей і лугів, а також у неводні електроліти, між електродами самочинно виникає різниця потенціалів, величина якої залежить від природи електроліту, його концентрації та умов експерименту. Проведені вимірювання дозволили кількісно оцінити вплив складу середовища на електрорушійну силу системи.

Встановлено принципову можливість створення на основі досліджуваної системи первинних джерел струму нового типу, що відкриває перспективи їх використання в мікроенергетиці та автономних сенсорних пристроях. Окрему увагу приділено дослідженню люмінесцентних властивостей оксидних плівок: виявлено, що рекомбінація іонів, які надходять



з електроліту на поверхню  $Al_2O_3$  супроводжується випромінюванням світла, інтенсивність якого істотно залежить від хімічного складу та концентрації електроліту.

Отримані результати свідчать про можливість використання анодних оксидних плівок алюмінію як чутливих елементів сенсорів для контролю складу рідких середовищ, що має практичне значення для екологічного моніторингу, хімічного аналізу та технологічних процесів.

**Ключові слова:** оксидні плівки алюмінію, електроліт, різниця потенціалів, ЕРС, просторовий заряд.

## 1 INTRODUCTION

Metal oxide films are objects with high catalytic surface activity. Adsorption of molecules and ions from the environment on the surface of the oxide is very active. As a result, energy levels of adsorption origin appear in the forbidden zone. This allows the use of oxide films as detectors of the composition of the environment. Anodic aluminum oxide is one of the promising materials for sensor applications. Anodic oxide films of many metals are characterized by the phenomenon of space charge formation. The presence of a space charge in these films, the nature of which remains uncertain, indicates the possibility of using aluminum oxide films as anode electrets, as well as sources of weak currents. In this regard, there is a need to find out the mechanism of space charge formation in aluminum oxide films. On the other hand, the task of creating current sources is based on the knowledge of this mechanism.

## 2 ANALYSIS OF LITERARY DATA AND RESOLVING THE PROBLEM

Aluminum oxide films are used to create structures metal dielectric semiconductor, capacitors, humidity sensors, development of functional micro- and nanomaterials. Due to the properties of the porous structure, the development of nanoporous anodized materials is interesting from the point of view of obtaining membranes for the removal of toxic and valuable components from liquids. [1, 2]. The work [3] describes the development of the technology of thin-film sensor coatings made of porous anodic aluminum oxide grown on aluminum films on glass substrates. Metal oxide nanostructures are promising electrode materials for lithium ion batteries and supercapacitors due to their high specific capacity [4]. Structures based on oxide films exhibit characteristic reactions when interacting with light. This makes such structures an attractive material for the development of optically active devices [5, 6]. Amorphous  $Al_2O_3$  films obtained using pulsed laser deposition can serve as materials with high dielectric constant for electronic devices of the new generation [7].

Anodic oxide films of many metals are characterized by the phenomenon of space charge formation. It was shown [8] that the Al/Nanosilicon/Al thin-film structure with a porous upper contact can spontaneously generate EMF when interacting with water vapor in the surrounding atmosphere. The main cause of EMF generation is the reaction of water with silicon nanoparticles. Water is necessary for chemical reactions and proton conduction that lead to EMF generation. The generation of electric current by nanoporous hydrocells based on metal oxide by water dissociation has been thoroughly investigated [9]. The generation of current due to the dissociation of water on the surface has been confirmed as a distinctive property of all metal oxide hydrocells.

Earlier [6, 10] we discovered that if the resulting  $Al - Al_2O_3 - SnO_2$  structure is placed in an atmosphere containing water vapor, a potential difference of 0.4 - 0.8 V occurs between the electrodes. The value of this potential difference and current depend on the technology of preparing the oxide film, as well as on the concentration of water vapor and temperature. It is shown that the EMF arises as a result of the dissociation of water molecules adsorbed on the surface of the micropores of the oxide. It is obvious that the emergence of EMF should be expected even when dissociation does not occur on the water surface, and charged ions come from the external environment, for example, the electrolyte. Negatively charged ions are able to supply electrons to the film, which, due to their greater mobility compared to ions, are able to charge the aluminum electrode negatively, leading to the emergence of EMF in the  $Al - Al_2O_3$  --electrolyte system. Despite the widespread use of anodic oxide films on aluminum in various fields of technology, their rich functional properties remain little studied and not fully understood. Due to the need to expand the functionality of microelectronic

devices based on aluminum oxide films, it was of interest to find out the specific mechanism of space charge formation in these films.

### 3 PURPOSE AND TASKS OF THE STUDY

The purpose of the work is to study the occurrence of EMF in the  $Al - Al_2O_3$  – electrolyte system and clarify the mechanism of space charge formation.

### 4 RESEARCH RESULTS

The paper studied aluminum oxide films obtained by electrochemical oxidation of aluminum foil in a 3% aqueous solution of oxalic acid [6]. The non-oxidized part of the aluminum foil was used as a contact. The second contact was a layer of  $SnO_2$  applied to the oxide film by pyrolysis of  $SnCl_4$ . The contact area was approximately 1 cm<sup>2</sup>. The  $SnO_2$  layer served as an ohmic contact, in addition, this layer has significant porosity and does not prevent water vapor from the surrounding atmosphere from penetrating to the surface of the micropores of the oxide film.

It was found that if the resulting  $Al - Al_2O_3 - SnO_2$  structure is placed in an atmosphere containing water vapor, a potential difference of 0.4 - 0.8 V occurs between the electrodes. The value of this potential difference and current depend on the technology of preparing the oxide film, as well as on the concentration of water vapor and temperature. It is shown that the EMF arises as a result of the dissociation of water molecules adsorbed on the surface of micropores of the oxide and the spatial separation of the charge along the film thickness due to the difference in the values of the diffusion coefficients of charged particles of the opposite sign, which are formed during dissociation.

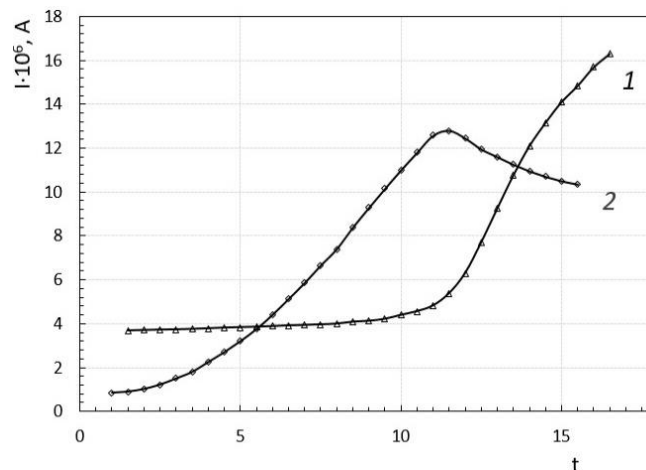
We further proposed that the occurrence of EMF should also be expected when dissociation of water on the surface does not occur, and charged ions come from the external environment, for example, the electrolyte. In this case, not neutral molecules, but charged ions of the electrolyte of both signs, reach the surface of the film from the electrolyte. Charged ions of the electrolyte interact with the surface of the oxide film. Negatively charged ions are able to supply electrons to the film, which, due to their greater mobility compared to ions, are able to charge the aluminum electrode negatively, leading to the emergence of EMF in the  $Al - Al_2O_3$ -electrolyte system. Thus, the EMF should also appear when the oxide film is placed in the electrolyte solution.

To confirm that EMF in aluminum oxide films occurs in contact with the electrolyte, we performed measurements when the investigated films were immersed in aqueous solutions of acids, salts, and bases, as well as non-aqueous electrolytes. Indeed, it was found that the EMF appeared when the system of oxide films was immersed in these electrolytes, and the magnitude of the EMF depended on the nature of the electrolyte. In all cases, the aluminum electrode with an oxide film on it acquired a negative potential.

When using electrolytes containing strong acids, bases and salts, although the EMF value was large, intense dissolution of the aluminum electrode was observed. Obviously, the oxide film, due to the presence of micropores in it, is not able to fully protect the aluminum electrode from its destruction, so the choice of electrolyte was determined by less active substances, for example, salts of weak acids and bases. Aluminum was used as the second counter electrode. In this case, due to the flow of electrochemical processes in the studied system, one should expect either the absence of a potential difference, or the electrode without a film should be negatively charged, since it should dissolve more strongly than the one covered with an oxide film. In fact, the experiment observed the presence of a potential difference, and the aluminum electrode with an oxide film is negatively charged. This speaks in favor of the fact that the formation of EMF goes largely by the proposed mechanism.

Measurements were made with aluminum oxide films immersed in a 3% solution of ammonium sulfate salt. The area of the part of the oxide film immersed in the electrolyte was 3 cm<sup>2</sup>, and its mass was 93 g. Since the dissolution of the aluminum counter-electrode was still observed during the operation of the system, a more chemically stable graphite rod was used as the second counter-electrode. EMF was observed on all samples, the value of which was 0.1-0.6 V. In fig. 1 shows typical dependences of the current strength in the  $Al - Al_2O_3$  - electrolyte system from the time of testing (16 months) at a load resistance of 1 k $\Omega$ .

After the tests, the samples were freed from the electrolyte, dried, and their weight loss was determined, which is obviously related to the flow of electrochemical processes in the system under study. Weight loss was determined by weighing and amounted to 3 mg for the sample shown in Fig. 1, curve 1, and 7 mg for the sample shown in Fig. 1, curve 2.



**Fig. 1.** Dependence of the current strength in the  $Al - Al_2O_3$  - system - electrolyte from the time of testing (16 months) at a load resistance of 1 k $\Omega$ .

The total amount of electricity passed through the system and the amount of electricity passed due to electrolysis was evaluated. The total amount of electricity that passed through the  $Al - Al_2O_3$  - electrolyte system was determined from Fig. 1 by the area under the curve and was approximately 400-450 C for each sample. The amount of electricity passed due to electrolysis was determined by the weight loss of the sample, taking into account the value of the electrochemical equivalent, which for aluminum is equal to  $9,3 \cdot 10^{-5}$  g/C, and was 30 C for sample 1, and 70 C for sample 2.

A comparison of the total amount of electricity passed through electrolysis shows that electrolysis contributes much less than the total amount of electricity. This fact suggests that electrolysis is not the main process responsible for the flow of current in the system.

It is obvious that the occurrence of EMF and the appearance of stationary current in the  $Al - Al_2O_3$  - electrolyte system occur in this way. Positively charged ions coming from the electrolyte lead to charging as a result of adsorption of the surface of the oxide film adjacent to the electrolyte. Negatively charged ions ensure the arrival of electrons to the film, which then diffuse to the aluminum electrode, as a result of which it acquires a negative potential. The neutral radicals formed at the same time leave the surface of the film, enabling the entry of other ions to it, which ensures the stationary nature of the current flow when the circuit is closed due to the resistance of the load. The recombination of ions coming from the electrolyte to the surface of the oxide film leads to the appearance of luminescence, the intensity of which also depends significantly on the concentration of certain substances in the electrolyte [6].

The value of EMF arising in the  $Al - Al_2O_3$  -- electrolyte system is the same as in the  $Al - Al_2O_3 - SnO_2$  structures located in the atmosphere of water vapor, however, their internal resistance is different, and therefore the currents that can be removed during the operation of such structures on an order of magnitude higher than for  $Al - Al_2O_3 - SnO_2$  structures. It was found that the specific capacity is  $200 - 300 Ah / kg$ , the specific energy is  $10 Wh / dm^3$ .

## 5 DISCUSSION OF THE RESULTS OF THE STUDY

The systems considered by us can obviously be used as primary elements of current sources. Since the magnitude of the current depends significantly on the nature of the electrolyte, aluminum oxide films have sensory properties and can be used to determine the concentration of certain substances in the electrolyte. Also, these films can be used to create sensors in aqueous solutions of some inorganic substances.

For the practical use of current sources, it is necessary that aluminum oxide films do not break down during operation, that is, they should be able to function for a long time. One of the ways to improve these elements of current sources is to replace the aqueous electrolyte with a chemically less active, non-aqueous electrolyte.

## 6 CONCLUSIONS

The results of studies of aluminum oxide films obtained by electrochemical oxidation of aluminum foil are given. It was found that if the resulting  $Al - Al_2O_3$  - electrolyte system is placed in an electrolyte solution, a potential difference occurs between the electrodes. The total amount of electricity passed through the system and the amount of electricity passed due to electrolysis was evaluated. It is shown that electrolysis is not the main process responsible for current flow in the system. The mechanism of formation of EMF in the studied system is proposed. An important possibility of creating primary elements of current sources has been established. It is shown that the  $Al - Al_2O_3$  - electrolyte system can be used to determine the concentration of certain substances in the electrolyte. The resulting aluminum oxide films can be used to create sensors for aqueous solutions of some inorganic substances.

## 7 ETHICS DECLARATIONS

The author has no relevant financial or non-financial interests to disclose.

## References

1. Kudelko K. O., Rozhdestvenska L. M., Borysenko Yu. V., Mikhniuk A. O., Barsukov V. Z. Formuvannia ta kharakteryzatsiia porystoho anodovanoho oksydu aliuminiuu, syntezovanoho elektrokhimichno u prysutnosti oksylenoho hrafenu. *Tekhnolohii ta inzhynirynh*, № 2, 2021. <https://vistnuk.knutd.edu.ua/wp-content/uploads/sites/2/2021/12/48-59-2-2021.pdf>  
DOI:10.30857/2786-5371.2021.2.5
2. Rozhdestvenska L.M., Kudelko K.O., Ohenko V.M., Chanh M. Membranni materialy na osnovi porystoho anodnoho oksydu aliuminiuu. *Ukrainskyi khimichnyi zhurnal*, 86(12), (2020). 67-102. <https://doi.org/10.33609/2708-129X.86.12.2020.67-102>
3. Voitovych, T. S. Lebedeva, P. B. Shpylevoi, N. V. Bednov Pokrytyia yz nanoporystoho anodnoho oksyda aliumyniia dlia sensornykh pryomenenyi // *Nanosystemy, nanomaterialy, nanotekhnolohii Nanosystems, Nanomaterials, Nanotechnologies* 2014, t. 12, № 1, S. 169–180
4. Jian Jiang , Yuanyuan Li, Jinping Liu, Xintang Huang, Changzhou Yuan, and Xiong Wen (David) Lou. Recent Advances in Metal Oxide-based Electrode Architecture Design for Electrochemical Energy Storage *Adv. Mater.* 2012, 24, 5166–5180. <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/22912066/>

5. Burlak H.M., Vylinskaia L.N. Vliyanye perekysy vodoroda na yntensyvnost liumynestsentsyy poluprovodnykovykh plenok. //Sensor electronics and microsystem technologies. №4. 2008. S.53-56.
6. Burlak G.M., Vilinskaya L.N. Luminescence properties of oxide films aluminum and tantalum in contact with an electrolyte // Photoelectronics №21, 2012. R. 65- 68.
7. Katiyar P., Jin C., Narayan R.J. Electrical properties of amorphous aluminum oxide thin films. Acta Materialia 53 (2005) 2617–2622.
8. Dorofeev S., Kononov N., Bubenov S., Kotin P., Zolotykh A., Grigoriev D. Spontaneous Generation of Electromotive Force in Thin Film Al/Nanosilicon/Al Structures. Batteries 2017, 3, 31; doi:10.3390/batteries3040031
9. Kotnala R. K., Rekha Gupta, Abha Shukla, Shipra Jain, Anurag Gaur, Jyoti Shah Metal Oxide Based Hydroelectric Cell for Electricity Generation by Water Molecule. Dissociation without Electrolyte/Acid J. Phys. Chem. C, Just Accepted Manuscript • DOI: 10.1021/acs.jpcc.8b04999 • Publication Date (Web): 24 Jul 2018 Downloaded from <http://pubs.acs.org> on July 25, 2018
10. Mykho.V.V., Koleboshyn V.Ya., Semeniuk L.M. Heneratsiia ERS u plivkakh oksydu aliuminiuu // Ukrainskyi fizychnyi zhurnal, 1995.-Т.40.-№11-12.-S.1209-1211.
11. Maslieieva N.V., Bohdan O.V., Brytavskiy Ye.V., Tarasevych D.V., Shuharov V.V. Vplyv rezhymiv sulfidnoi modyfikatsii poverkhni na mekhanizmy prokhozhenia strumiv ta morfolohiiu poverkhni u perekhodakh na osnovi GaAs // Zhurnal fizychnykh doslidzhen №25, 3 (2021). S. 3705-3708.

## Література

1. Куделко К. О., Рождественська Л. М., Борисенко Ю. В., Міхнюк А. О., Барсуков В. З. Формування та характеристика пористого анодованого оксиду алюмінію, синтезованого електрохімічно у присутності окисленого графену. *Технології та інжиніринг*, № 2, 2021. <https://vistnik.knutd.edu.ua/wp-content/uploads/sites/2/2021/12/48-59-2-2021.pdf>  
DOI:10.30857/2786-5371.2021.2.5
2. Рождественська Л.М., Куделко К.О., Огенко В.М., Чанг М. Мембранні матеріали на основі пористого анодного оксиду алюмінію. *Український хімічний журнал*, 86(12), (2020). 67-102. <https://doi.org/10.33609/2708-129X.86.12.2020.67-102>
3. Войтович, Т. С. Лебедева, П. Б. Шпилевой, Н. В. Беднов Покрытия из нанопористого анодного оксида алюминия для сенсорных применений // Наносистемы, наноматериалы, нанотехнологии Nanosystems, Nanomaterials, Nanotechnologies 2014, т. 12, № 1, С. 169–180
4. Jian Jiang , Yuanyuan Li, Jinping Liu, Xintang Huang, Changzhou Yuan, and Xiong Wen (David) Lou. Recent Advances in Metal Oxide-based Electrode Architecture Design for Electrochemical Energy Storage Adv. Mater. 2012, 24, 5166–5180. <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/22912066/>
5. Бурлак Г.М., Вилинская Л.Н. Влияние перекиси водорода на интенсивность люминесценции полупроводниковых пленок. //Sensor electronics and microsystem technologies. №4. 2008. С.53-56.
6. Burlak G.M., Vilinskaya L.N. Luminescence properties of oxide films aluminum and tantalum in contact with an electrolyte // Photoelectronics №21, 2012. P. 65 – 68.
7. Katiyar P., Jin C., Narayan R.J. Electrical properties of amorphous aluminum oxide thin films. Acta Materialia 53 (2005) 2617–2622
8. Dorofeev S., Kononov N., Bubenov S., Kotin P., Zolotykh A., Grigoriev D. Spontaneous Generation of Electromotive Force in Thin Film Al/Nanosilicon/Al Structures. Batteries 2017, 3, 31; doi:10.3390/batteries3040031
9. Kotnala R. K., Rekha Gupta, Abha Shukla, Shipra Jain, Anurag Gaur, Jyoti Shah Metal Oxide Based Hydroelectric Cell for Electricity Generation by Water Molecule. Dissociation without Electrolyte/Acid J. Phys. Chem. C, Just Accepted Manuscript • DOI: 10.1021/acs.jpcc.8b04999 • Publication Date (Web): 24 Jul 2018 Downloaded from <http://pubs.acs.org> on July 25, 2018
10. Михо В.В., Колебошин В.Я., Семенюк Л.М. Генерація ЕРС у плівках оксиду алюмінію // Український фізичний журнал, 1995.-Т.40.-№11-12.-С.1209-1211.



11. Маслєва Н.В., Богдан О.В., Бритавський Є.В., Тарасевич Д.В., Шугаров В.В. Вплив режимів сульфідної модифікації поверхні на механізми проходження струмів та морфологію поверхні у переходах на основі GaAs // Журнал фізичних досліджень №25, 3 (2021). С. 3705-3708.

Стаття надійшла до редакції 10.11.2025  
Стаття прийнята до друку 05.01.2026  
Дата публікації статті 26.03.2026

**Lyudmila Vilinskaya**

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture,  
Ph.D., Associate Professor  
Didrihsona str., 4, Odesa, Ukraine, 65029  
[vilsem56@gmail.com](mailto:vilsem56@gmail.com)  
ORCID: 0000-0003-4597-2527

**Galina Burlak**

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture,  
Ph.D., Associate Professor  
Didrihsona str., 4, Odesa, Ukraine, 65029  
[demiga89@gmail.com](mailto:demiga89@gmail.com)  
ORCID 0000-0002-3259-1568

*For references:*

L. Vilinskaya, G. Burlak (2026). Study of electromotive force of the system Al-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-electrolyte. Mechanics and Mathematical Methods. VIII (1). 108 –115.

*Для посилань:*

Вілінська Л. М., Бурлак Г. М. Дослідження електрорушійної сили системи Al-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-електроліт. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. №. 1. С. 108-115.

Study of electromotive force of the system Al-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-electrolyte © 2026 by L. Vilinskaya, G. Burlak is licensed under CC BY 4.0

УДК 531

## ВПЛИВ ПОВЗУЧОСТІ ТА СТАРІННЯ НА СТІЙКІСТЬ СТРИЖНІВ

Бекірова М. М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація:** Вирішується задача для однорідних та неоднорідних стрижнів при описі кривих повзучості функціями досить загального вигляду. Прийнято, що граничні умови постійні у всьому проміжку часу.

Розглядається гнучкий залізобетонний стрижень з постійним поперечним перерізом, що має дві осі симетрії. Армування симетричне, стрижень стиснутий постійною у часі силою. Вважається, що недосконалість у вигляді початкового викривлення або ексцентриситету призводить до вигинання стрижня у напрямку однієї осі.

Отримано інтегро-диференціальне рівняння, яке може бути використане при розгляді стрижнів шарнірно-опертих по кінцях. Після подвійного диференціювання це рівняння стає придатним для вирішення задач з будь-якою умовою опирання. У початковий момент часу інтегро-диференціальне рівняння перетворюється на відоме диференціальне рівняння пружно миттєвої задачі.

За подання міри повзучості у вигляді ряду типу, запропонованого Арутюняном Н.Х., інтегро-диференціальне рівняння зводиться до диференціального рівняння сьомого порядку з частинними похідними.

Для стрижнів як з початковим викривленням, так і з позацентрово прикладеним навантаженням отримувалося абсолютно однакове рівняння. Але це не означає, що й розв'язки будуть однаковими, оскільки для цих двох випадків відрізняються як граничні, так і початкові умови.

Отримане диференціальне рівняння - це рівняння руху стрижня. Досліджуючи це рівняння можна встановити тенденції в розвитку переміщень залежно від величини стискаючої сили.

При тривалому впливі навантаження критичною слід вважати силу, яка при часі, що прямує до нескінченності, викликає швидкість переміщень стрижня, що прямує до сталої величини, а самі переміщення - до нескінченності. Визначені характеристики переміщень справедливі для будь-якого перерізу стрижня вздовж його довжини. Таким чином можна визначити величину критичної сили в умовах повзучості.

Формули для розрахунку критичних сил справедливі для стрижнів з різними умовами опирання. Досліджуючи отримане рівняння, можна встановити тенденції у розвитку переміщень залежно від величини стискаючої сили.

**Ключові слова:** стійкість, стрижень, початкова недосконалість, повзучість лінійна, повзучість нелінійна, критична сила, переміщення.

## INFLUENCE OF DENSITY AND AGING ON ROD STRENGTH

M. Bekirova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract:** The problem is solved for homogeneous and inhomogeneous rods when describing creep curves by functions of a rather general form. It is assumed that the boundary conditions are constant throughout the time interval.

A flexible reinforced concrete rod with a constant cross-section and two axes of symmetry is considered. The reinforcement is symmetrical, the rod is compressed by a constant force in time. It is assumed that an imperfection in the form of an initial curvature or eccentricity leads to bending of the rod in the direction of one axis.



An integro-differential equation is obtained that can be used when considering rods hingedly supported at the ends. After double differentiation, this equation becomes suitable for solving problems with any resistance condition. At the initial moment of time, the integro-differential equation transforms into the well-known differential equation of the elastic instantaneous problem.

By representing the creep measure in the form of a series of the type proposed by N.H. Arutyunyan, the integro-differential equation is reduced to a seventh-order differential equation with partial derivatives.

For rods with both initial curvature and eccentrically applied load, the exact same equation was obtained. But this does not mean that the solutions will be the same, since both the boundary and initial conditions are different for these two cases.

The resulting differential equation is the equation of motion of the rod. By studying this equation, it is possible to establish trends in the development of displacements depending on the magnitude of the compressive force.

With prolonged exposure to the load, the critical force should be considered to be the force that, with time tending to infinity, causes the velocity of the rod's movements to approach a constant value, and the movements themselves to approach infinity. The determined displacement characteristics are valid for any cross-section of the rod along its length. Thus, it is possible to determine the magnitude of the critical force under creep conditions.

The formulas for calculating critical forces are valid for rods with different resistance conditions. By studying the obtained equation, it is possible to establish trends in the development of displacements depending on the magnitude of the compressive force.

**Keywords:** stability, rod, initial imperfection, eccentricity, linear creep, non-linear creep, critical force, crack, critical displacement.

## 1 ВСТУП

У дослідженнях з будівельної механіки питання стійкості займають важливе місце. При деформуванні стислих і стисло-вигнутих стрижнів рівновага між зовнішнім навантаженням і внутрішніми зусиллями може бути стійкою або нестійкою. В першому випадку стрижень, відхилений від положення рівноваги на достатньо малу величину, після усунення причини, що викликала відхилення, повертається в початковий стан рівноваги. В другому випадку відхилення після усунення причини, що його викликала, не зникає, а, навпаки, зростає. Навантаження, при перевищенні якого навіть на нескінченно малу величину, виникає втрата стійкості даного виду деформації, називається критичним. Порушення стійкості тіла, яке деформується, при якому первинна деформація переходить в інший, якісно новий вид деформації, є втратою стійкості першого роду. Порушення стійкості тіла, яке деформується, при якому первинна деформація не переходить в інший вид деформації, а починає зростати при постійному навантаженні, або, навіть, при навантаженні, яке зменшується, є втратою стійкості другого роду. Наприклад, втрата стійкості першого роду характерна для центрально-стиснутого пружного стрижня, втрата стійкості другого роду – для стисло-вигнутого стрижня, який має початкові недосконалості.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Перше теоретичне розв'язання задачі про стійкість пружного центрально-стиснутого стрижня одержано в 1744 році Леонардом Ейлером [3]. Це розв'язання наведено в численній літературі з стійкості стрижнів, з якої особливо відзначимо [5-6]. Але випробування показали, що це рішення не можна застосувати для реальних стрижнів, що пов'язано з неминучими викривленнями осі елемента у процесі виготовлення і транспортування та недосконалостями центровки в процесі монтажу. В зв'язку з цим були отримані різні рішення для стрижня під дією осьової стискаючої сили, яка прикладена з ексцентриситетом. [6]. Одна з перших публікацій, в якій був досліджений вплив початкових недосконалостей на стійкість, є монографія Ржаніцина О. Р. [1]. Початкові геометричні недосконалості найбільш суттєво впливають на стійкість тонкостінних елементів відкритого перерізу [7]. У статті [8] при описі форми початкових недосконалостей використовують поліном четвертого степеню. Ю. М. Работнов [10] та С. А. Шестеріков [11, 12] запропонували новий підхід – зв'язали питання стійкості при повзучості з класичним визначенням стійкості. Взявши за основу закон зміцнення, вони провели його лінеаризацію з урахуванням небагатьох прогинів, а потім виконали аналіз руху стрижня при дії збурень. Не можна не відзначити роботи вчених Одеської школи теорії повзучості на чолі з І.С. Прокоповичем [13-15]. Усі роботи, у яких розглядаються питання стійкості стрижнів з урахуванням повзучості, можна розбити на два напрямки. При першому, класичному підході припускають існування зміни стійких змін рівноваги – після проходження деякого часу, що називається критичним, відбувається перехід прямолінійної форми в викривлену. Вважається, що процес повзучості в стрижні веде до зменшення його жорсткості, внаслідок чого відбувається втрата стійкості.

## 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даного дослідження є отримання формул для знаходження критичних сил при тривалій дії навантаження, формул для отримання переміщень (вигинів) в будь-який момент часу, виразів для визначення напруженого стану.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

У розрахунках на стійкість при тривалому впливі навантажень необхідно визначати сили, за яких швидкість переміщень монотонно затухає. Розв'язання задачі в такій постановці є прийнятним для систем, розвиток переміщень яких у часі призводить до зміни напруженого стану. Ця умова для стиснутого стрижня виконується за наявності початкових недосконалостей (позацентрове прикладання стискальної сили, початкова викривленість тощо).

Розв'язання задачі про стійкість однорідних і неоднорідних (зокрема залізобетонних) стрижнів виконано за припущенням лінійної повзучості і відсутності тріщин.

Зазвичай при вивченні впливу повзучості на стійкість стиснутих стрижнів розглядають стрижні, шарнірно закріплені на кінцях, міра повзучості матеріалу  $C(t, \tau)$  описується найпростішими функціями, що дозволяють розв'язувати відповідні інтегральні рівняння в аналітичному вигляді, але не завжди достатньо повно описують експериментальні криві повзучості [13].

У статті таку задачу розв'язано для однорідних і неоднорідних стрижнів при описі кривих повзучості функціями досить загального вигляду. Прийнято, що граничні умови залишаються сталими протягом усього розглянутого проміжку часу.

Прийнято залежність

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \sigma(t) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad \delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau). \quad (1)$$

Розглядається гнучкий залізобетонний стрижень з постійним поперечним перерізом, що має дві симетрії  $y$  і  $z$ . Армування симетричне. Довжина стрижня  $l$ . Стрижень стиснутий постійною у часі силою  $F$ . Вважається, що недосконалисть у вигляді початкового викривлення або ексцентриситету призводить до випинання стрижня у напрямку осі  $y$ . Випинання в напрямку осі  $z$  виключається.

Використовуючи співвідношення

$$\frac{1}{\rho(x, t)} = \frac{\varepsilon_1(x, t) - \varepsilon_2(x, t)}{h} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\rho(x, t)} = \begin{cases} -\frac{\partial^2 [y(x, t) - y_0(x)]}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (3)$$

а також рівняння рівноваги та залежності (1) отримаємо інтегро-диференціальне рівняння повзучості осі стрижня

$$(1+r) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \frac{F}{EY_b} y(x, t) - \int_{t_0}^t \left[ rE \frac{\partial^2 y(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{F}{Y_c} y(x, \tau) \right] \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau =$$

$$= \begin{cases} [1 + E\delta(t, t_0)] \frac{\partial^2 y_0(x)}{\partial x^2} \\ -\frac{F}{Y_b} s\delta(t, t_0) \end{cases} \quad (4)$$

Тут



$$r = \frac{h_1^2 A_s E_s}{I_b E}, \quad E(t) = E(t_0) = E = \text{Const},$$

$A_s$  - площа арматури,

$I_b$  - момент інерції бетонної складової перерізу,

$h_1$  - відстань між центрами ваги перерізу та арматури,

$y_0(x)$  - початковий напрям (викривлення),

$s$  – ексцентриситет.

Верхні вирази в (3) і (4) стосуються стрижня з викривленням, а нижні стосуються стрижня з позакцентровим навантаженням.

У наведеному вигляді інтегро-диференціальне рівняння (4) може використовуватися при розгляданні стрижнів, шарнірно опертих по кінцях.

Після подвійного диференціювання по  $x$  це рівняння стає придатним для вирішення задач з будь-якою умовою спирання.

$$\begin{aligned} (1+r) \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{F}{EI_c} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \int_{t_0}^t \left[ rE \frac{\partial^4 y(x,\tau)}{\partial x^4} + \frac{F}{I_b} \frac{\partial^2 y(x,\tau)}{\partial x^2} \right] \frac{\partial \delta(t,\tau)}{\partial \tau} = \\ = \begin{cases} [1+rE\delta(t,t_0)] \frac{\partial^4 y_0(x)}{\partial x^4} \\ 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

При  $t = t_0$  інтегро-диференціальне рівняння (5) перетворюється на відоме диференціальне рівняння пружно миттєвої задачі. [6]

За подання міри повзучості  $C(t, \tau)$  у вигляді ряду типу, запропонованого Н. Х. Арутюняном [16],

$$\begin{aligned} C(t, \tau) = \sum_{i=1}^{i=k} \Theta_i(\tau) [1 - e^{-\gamma_i(t-\tau)}], \\ \frac{\partial \Theta_i(\tau)}{\partial \tau} < 0, \quad \Theta_i(\tau)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow C_i. \end{aligned} \quad (6)$$

і прийнятого  $K = Z$ , інтегро-диференціальне рівняння (5) зводиться до диференціального рівняння сьомого порядку з частинними похідними

$$\begin{aligned} B_1(t) \frac{\partial^7 y(x,t)}{\partial t^3 \partial x^4} + B_2(t) \frac{\partial^6 y(x,t)}{\partial t^2 \partial x^4} + B_3(t) \frac{\partial^5 y(x,t)}{\partial t \partial x^4} + \\ + B_4(t) \frac{\partial^5 y(x,t)}{\partial t^3 \partial x^2} + B_5(t) \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial t^2 \partial x^2} + B_6(t) \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial t \partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

$B_1(t), B_2(t), \dots, B_6(t)$  - функції  $t$ , пов'язані з відомими функціями та сталими, що входять у (5), включаючи величину стискальної сили  $F$ .

Для стрижнів як з початковим викривленням, так і з позакцентрово прикладеним навантаженням отримувалося абсолютно однакове рівняння (7). Але це не означає, що й розв'язки будуть однаковими, оскільки для цих двох випадків відрізняються як граничні, так і початкові умови.

Диференціальне рівняння (7) - це рівняння руху стрижня. Досліджуючи (7), можна встановити тенденції в розвитку переміщень залежно від величини стискаючої сили.



Якщо переміщення при  $t \rightarrow \infty$  прямують до кінцевої величини, то стан стрижня слід вважати стійким, і навпаки - якщо ні, то стан стрижня є нестійким.

При тривалому впливі навантаження критичною слід вважати силу, яка при  $t \rightarrow \infty$  викликає швидкість переміщень стрижня, що прямує до сталої величини, а самі переміщення до нескінченності.

Ураховуючи це, а також те, що прийняті в наведеному вище визначені характеристики переміщень справедливі для будь-якого перерізу стрижня вздовж його довжини, можна визначити величину критичної сили в умовах повзучості, виходячи з умов

$$\begin{aligned} y(x,t) \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \rightarrow Const, \\ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial t^3} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (8)$$

а також

$$A_3(t) \rightarrow \gamma_1 \gamma_2 [1 + r(1 + c)], \quad A_6(t) \rightarrow \gamma_1 \gamma_2 (1 + c) \frac{F}{EI_6},$$

де  $c = E(C_1 + C_2)$  - гранична характеристика нестаріючої, повністю зворотної частини деформацій повзучості.

За виконання умов (8) з рівняння (7) можна отримати диференціальне рівняння в звичайних похідних

$$\frac{d^4 y(x,t)}{dx^4} + \frac{F}{EI_6} \frac{1+c}{1+r(1+c)} \frac{d^2 y(x,t)}{dt^2} = 0. \quad (9)$$

Із розв'язку рівняння (9), враховуючи, що при  $t \rightarrow \infty$   $y(x,t) \rightarrow \infty$ , завжди можна отримати критичні сили при тривалому впливі навантаження.

$$F_{mp} = F_E \left( r + \frac{1}{1+c} \right); \quad F_{kp} = F_e (1+r), \quad (10)$$

де  $F_{mp}$  - критична сила при тривалій дії навантаження,  $F_{kp}$  - критична сила при короткочасній дії навантаження,  $F_E$  - Ейлерова сила для неармованого стрижня.

Якщо стрижень однорідний, то  $r = 0$ .

Залежності (10) справедливі для стрижнів з різними умовами опираючості. Аналіз інтегро-диференціального рівняння (9) показує, що формули (10) справедливі не лише при  $K = Z$  у ряді (6), але й при будь-якій кількості членів цього ряду. У загальному випадку

$$c = E \sum_{i=1}^{i=k} C_i.$$

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

В результаті дослідження були отримані формули для знаходження критичних сил при тривалій дії навантаження і формули для підрахування переміщень у будь-який момент часу. Задача була розв'язана для однорідних та неоднорідних стрижнів при описі кривих повзучості функціями достатньо загального вигляду. В такій постановці було отримано інтегро-диференціальне рівняння повзучості осі стрижня (4), яке

стосується стрижнів з викривленням осі, а також стрижнів з позацентровим навантаженням. У наведеному вигляді інтегро-диференціальне рівняння може використовуватися при розгляданні стрижнів шарнірно-опертих по кінцях. Після подвійного диференціювання по  $x$  це рівняння стає придатним для вирішення задач з будь-якою умовою опирання (5). Якщо зробити деякі зміни, інтегро-диференціальне рівняння (5) зводиться до диференціального рівняння сьомого порядку з частинними похідними (7). Таким чином було отримано рівняння руху стрижня. При його дослідженні можна встановити тенденції в розвитку переміщень в залежності від величини стискаючої сили і отримати критичну силу, яка залежить від швидкості переміщень. У результаті дослідження були одержані формули, за допомогою яких можна знайти як переміщення, так і критичні сили за будь-яких умов опирання і початкових недосконалоствях.

## 6 ВИСНОВКИ

З усього сказаного очевидно, що отримані висновки є загальними, і критична сила при тривалому впливі навантаження залежить тільки від нестаріючої частини деформацій повзучості. Останнє пов'язано з умовністю прийнятого формулювання поняття критичної сили, відповідно до якого величина цієї сили визначається за характером руху стрижня при  $t \rightarrow \infty$ , тобто коли завершиться процес старіння матеріалу.

Зрозуміло, що формули (10) дозволяють перевіряти тільки стійкість стрижнів. Міцність стрижнів, навіть при  $P < P_{np}$  ( $P < P_{kp}$ ), повинна перевірятися додатково, з урахуванням розвитку переміщень у часі.

## 7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автор не має відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

## Література

1. Ржаніцин А. Р. Деякі питання механіки систем, що деформуються у часі. М.: Держтехвид, 1949.
2. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твёрдого тела. М: Наука. 1979. 744с.
3. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума. Гостехиздат. 1934. 600 с.
4. Крутий Ю. С., Лазарева Д. В., Сур'янінов М. Г. Механіка деформованого твердого тіла. Одеса: ОДАБА, 2017. 260 с.
5. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. Москва: ГИТТЛ, 1955. 567с.
6. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Москва: Наука, 1967. 984 с.
7. Wang Y. C., Nethercot D. A. Bracing requirements for elate-rally unrestrained beams. J.Constr.Steel Res. 1990.№4. pp.305-315.
8. Mohler K., Schelling W. Zur Bemessung von Knickverbänden und Knickaussteif ungen im Holzbau. Bauingenieur. 1968. №2. pp. 43-48.
9. Чепурненко А. С., Литвинов С. В., Филенко М. А. Расчёт стержней на продольнопоперечный изгиб с учётом деформаций ползучести и начальных несовершенств. Строительство-2013: РГСУ, 2013. 1995 с.
10. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752с.
11. Шестериков С. А. Динамический критерий устойчивости при ползучести для стержней. Прикладная механика и техническая физика, 1961. №1. С.68-71.
12. Шестериков С. А. О критерии устойчивости при ползучести. Прикладная математика и механика. 1959. Т. XXIII. Вып.6. С.1101-1106.

13. Прокопович И. Е. Влияние ползучести на устойчивость тонкостенных стержней. Строительство и архитектура, 1969. №12. С.33-38.
14. Прокопович И. Е. О влиянии ползучести на устойчивость сжатых стержней. Строительная механика и расчёт сооружений, 1967. №1. С.5-9.
15. Орлов А. Н. Определение критических сил при длительном действии нагрузки для гибких стержней с опорными закреплениями, обладающими ползучестью. «Известия АН Арм.ССР.Механика». Ереван, 1977. XXX. №3.
16. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М. Гостехиздат, 1952.
17. Бамбура А. М., Безбожна М. С., Гурківський О. Б. Експериментальні дослідження напруженодеформованого стану згинних залізобетонних елементів при тривалій дії навантаження. Будівельні конструкції. Міжвідомчий науково-тех. зб. 2002. № 57. С. 21-30.
18. Pang Chen a, Geng Zhang, Shaojun Cao, Xueyuan Lv, Bin Shen. Creep and post-creep mechanical properties of reinforced concrete columns. Journal of Building Engineering. Volume 63, Part A, 2023, 105521
19. Pierre Rossi, J.L. Tailhan, F. Le Maou. Creep strain versus residual strain of a concrete loaded under various levels of compressive stress. Cement and Concrete Research. Volume 51, 2013, pp.. 32-37

## References

1. Rzhanitsyn A. R. (1949). Deiaki pytannia mekhaniky system, shcho deformuiutsia u chasi. M.: Derzhtekhvyd. [in Russian].
2. Rabotnov Yu. N. (1979). Mekhanyka deformyruemoho tverdoho tela. M: Nauka. [in Russian].
3. Eiler L. (1934). Metod nakhozhdynia kruglykh lunyi, obladaiyushchykh svoystvamy maksimuma lybo mynimuma. Hostekhyzdat. [in Russian].
4. Krutii Yu.S., Lazarieva D.V., Surianinov M.H. (2017). Mekhanika deformovanoho tverdoho tila. Odesa: ODABA. [in Russian].
5. Tymoshenko S. P. (1655). Ustoichyvost upruhykh system. Moskva: HYTTL. [in Russian].
6. Volmyr A.S. (1967). Ustoichyvost deformyruemykh system. Moskva: Nauka. [in Russian].
7. Wang Y.C., Nethercot D.A. (1990). Bracing requirements for elate-rally unrestrained beams. J.Constr.Steel Res. 4. 305-315.
8. Mohler K., Schelling W. (1968). Zur Bemessung von Knickverbanden und Knickaussteif ungen im Holzbau. Bauingenieur. 2. 43-48.
9. Chepurnenko A.S., Lytvynov S.V., Fylenko M.A. (2013). Raschet sterzhnei na prodolnopoperechnyy yzghyb s uchetom deformatsyi polzuchesty y nachalnykh nesovershenstv. Stroytelstvo-2013: RHSU. [in Russian].
10. Rabotnov Yu.N. (1966). Polzuchest elementov konstruktsyi.M.: Nauka. [in Russian].
11. Shesterykov S.A. (1961). Dynamicheskyi kryteryi ustoichyvosty pry polzuchestvy dlia sterzhnei. Prykladnaia mekhanika y tekhnicheskaiia fizyka. 1. 68-71. [in Russian].
12. Shesterykov S.A. (1959). O kryteryu ustoichyvosty pry polzuchesty. Prykladnaia matematika y mekhanika. XXIII. 6. 1101-1106. [in Russian].
13. Prokopovych Y.E. (1969). Vlyaniye polzuchesty na ustoichyvost tonkostennykh sterzhnei. Stroytelstvo y arkhytektura. 9. 12. 33-38. [in Russian].
14. Prokopovych Y.E. (1967). O vlyaniyu polzuchesty na ustoichyvost szhatykh sterzhnei. Stroytelnaia mekhanika y raschet sooruzheniy. 1. 5-9. [in Russian].
15. Orlov A. N. Determination of critical forces under long-term load action for flexible rods with support fastenings that have creep. "Izvestia of the Academy of Sciences of the Arm.SSR.Mechanics." Yerevan, 1977. XXX. No. 3.
16. Arutyunyan N.Ch. (1952). Nekotorye voprosy teorii polzuchesti. M. Gostexizdat. [in Russian].
17. Bambura A. M., Bezbozhna M. S., Gurkivsky O. B. Experimental investigation of the stressdeformed steel of molded reinforced concrete elements under extreme conditions. Building structures. Interdepartmental scientific-technical zb. 2002. No. 57. P. 21-30.

18. Pang Chen a, Geng Zhang, Shaojun Cao, Xueyuan Lv, Bin Shen. Creep and post-creep mechanical properties of reinforced concrete columns. Journal of Building Engineering. Volume 63, Part A, 2023, 105521
19. Pierre Rossi, J.L. Tailhan, F. Le Maou. Creep strain versus residual strain of a concrete loaded under various levels of compressive stress. Cement and Concrete Research. Volume 51, 2013, pp. 32-37.

Стаття надійшла до редакції 03.09.2025

Стаття прийнята до друку 03.12.2025

Дата публікації статті 26.03.2026

**Бекірова Маріам Мамбетівна**

Одеська державна академія будівництва та архітектури,

к.т.н., доцент

вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029

[bekirova@odaba.edu.ua](mailto:bekirova@odaba.edu.ua)

[bekirova.ogasa@gmail.com](mailto:bekirova.ogasa@gmail.com)

ORCID: 0000-0002-6162-9967

*Для посилань:*

Бекірова М. М. Вплив повзучості та старіння на стійкість стрижнів. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. № 1 С. 115–124.

*For references:*

M. Bekirova. (2026). Influence of density and aging on rod strength. Mechanics and Mathematical Methods. VIII (1). 115–124.

[Вплив повзучості та старіння на стійкість стрижнів](#) © 2026 by [Бекірова М.М.](#) is licensed under [CC BY 4.0](#)

УДК 629.735.03:656.7

## ПРОБЛЕМИ ЕКСПЛУАТАЦІЇ АЕРОСИСТЕМ

Кравченко О. В.<sup>1</sup>, Онищенко О. С.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Одеська державна академія будівництва і архітектури

**Анотація:** Наведено аналіз варіантів проектування аеросистем для руху повітря або димових газів енергетичних підприємств та коректності вибору вентиляторів, або димососів. Дослідження виконано для кількох варіантів подачі повітря у двох типах котелень з однаковою тепловою потужністю. Аналіз якості проектування аеросистем сьогодні виконується з використанням лише коефіцієнта ефективності основних елементів – вентиляторів чи димососів.

Виявлено протиріччя та недоліки як проектування, так і експлуатації систем подачі повітря при використанні для оптимізації вибору вентиляторів коефіцієнта ефективності  $\eta_{\text{вент}}$  як основного критерію правильності проектування аеросистем. Непропорційно велике збільшення витрат енергії на привід вентиляторів при переведенні вентиляторів на велику швидкість обертання з порівняно малим збільшенням подачі входить у суперечність збереження високих значень ефективності вентиляторів.

Показано, що збільшення подачі вентилятора за рахунок зменшення опорів у системі дає суттєве зменшення витрат електроенергії, але призводить до суперечливого зниження коефіцієнта ефективності. Для усунення протиріч використання лише коефіцієнта ефективності як критерію оптимальності проектування запропоновано варіант поліпшення параметрів роботи аеросистем за рахунок зниження опорів при русі повітря або газів.

Запропоновано використовувати поняття «динамізм» у відносній формі як обернена величина сумарного опору в елементах аеросистем. Спільне використання відносного коефіцієнта динамізму із порівняним відносним коефіцієнтом «ефективність» забезпечить системний аналіз якості проектування аеросистем. Доцільно також застосування коефіцієнта питомих витрат енергії на привід вентиляторів чи димососів  $k_{\text{н.з.}}$ , який можна розглядати як стимулюючий чинник зниження витрат енергії на власні потреби підприємств.

**Ключові слова:** аеросистема, вентилятор, потужність, ефективність, опори, витрати електричної енергії на власні потреби.

## PROBLEMS OF AEROSYSTEM OPERATION

O. Kravchenko<sup>1</sup>, O. Onishchenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract:** An analysis of design options for air systems for the movement of air or flue gases of energy enterprises and the correctness of the choice of fans or smoke exhausters is presented. The study was performed for several options for air supply in two types of boiler houses with the same thermal power. Analysis of the quality of air system design is currently performed using only the efficiency coefficient of the main elements - fans or smoke exhausters.

Contradictions and shortcomings of both the design and operation of air supply systems when using the efficiency coefficient  $\eta_{\text{вент}}$  as the main criterion for the correctness of the design of air systems to optimize the choice of fans are revealed. A disproportionately large increase in energy consumption for driving fans when switching fans to a high rotation speed with a relatively small increase in supply is a contradiction in maintaining high fan efficiency values.

It is shown that increasing the fan supply by reducing resistance in the system gives a significant reduction in electricity consumption, but leads to a contradictory decrease in the efficiency coefficient. To eliminate the contradictions of using only the efficiency coefficient as a



criterion for optimal design, a variant of improving the parameters of the operation of aerosystems by reducing resistance to the movement of air or gases is proposed.

It is proposed to use the concept of "dynamism" in a relative form as the inverse of the total resistance in the elements of aerosystems. The joint use of the relative dynamism coefficient with a comparable relative "efficiency" coefficient will provide a systematic analysis of the quality of the design of aerosystems. It is also advisable to use the coefficient of specific energy consumption for the drive of fans or smoke exhausters  $k_{p.z.}$ , which can be considered as a stimulating factor for reducing energy consumption for the own needs of enterprises.

**Keywords:** aerosystem, fan, power, efficiency, supports, electricity consumption for own needs.

## 1 ВСТУП

Рух повітря або газів є основним або базовим процесом багатьох сучасних технологій. Це аеросистеми (АС) вентиляції та охолодження будівель, технологічне охолодження комп'ютерів, а також великі системи подачі повітря на енергетичних, металургійних та інших підприємствах.

Розробку проектів на будівництво АС зазвичай виконують проектні групи за спеціальними методиками: стандартами або правилами проектування [1-7]. Стандарти США та Європейського союзу визначають аспекти проектування та розробки, конструктивного виконання, методів оптимізації роботи на основі відомих моделей, що описують закони руху рідин і газів. Зазначені стандарти добре узгоджуються з "правилами або вимогами для проектування аеросистем" ДСТУ 10616-90 [13], що були затверджені 1990 року та виключені з ужитку 2001 року. Відомо також багато методичної літератури з прикладами типових проектів технологічних процесів, у яких використовуються вентилятори та димососи для формування руху повітря або газів [19-21].

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

В останні роки, з розвитком комп'ютерної техніки, велику увагу приділяють проектуванню з чисельним моделюванням процесів. Вважають, що комп'ютерне моделювання АС знижує витрати на розробку проектів, оскільки комп'ютерні симуляції виконуються швидше, ніж фізичні випробування. Використовуючи рівняння Нав'є-Стокса та інші математичні моделі динаміки рідин і газів, виконують моделювання та вивчення потоків повітря і рідин у складних умовах, які важко відтворити в лабораторних умовах. Такі рівняння визначають області подібності процесів руху рідин і газів, що є основою наукових та інженерних досліджень у різних сферах застосування.

Так, Джебраїл Туркері та Олег Киселичник (School of Engineering, The University of Warwick, Coventry) [8] працювали над поліпшенням динамічних моделей вентиляторів і насосів, інтегрованих з асинхронними двигунами, за допомогою оцінки нейронної мережі. Генрік Лаврич (та ін.) (Faculty of Electrical Engineering, University of Ljubljana) [9], запропонували методи розроблення 2D-карт ефективності для двигунів і насосів із використанням поліноміальної підгонки поверхні. Інженери факультету Північно-Китайського університету електроенергетики (Китай) [10] розробили комплексну модель для аналізу та узагальнення фактичних проблем, що виникають у щоденних виробничих операціях, пов'язаних з експлуатацією насосів і вентиляторів. Олександр Станілов (та ін.), (Technical University, Sofia) [11] розглянули особливості, пов'язані з прогнозуванням параметрів насоса під час роботи як турбіни, так і під час роботи в системі. Костишин В.С., Курляк П.О. (Ivano Frankivsk National Technical University of Oil and Gas) [12] визначили модель магістрального відцентрового насоса для перекачування нафти, що була виконана на основі методу електрогідродинамічної аналогії та призначена для розрахунку робочих характеристик аеро та гідромашин.

Незважаючи на виконану роботу, є актуальною потреба аналізу проблем проектування аеросистем, спричинених недосконалістю моделей, коли результати проектування АС суттєво відрізняються від необхідних показників експлуатації, які можна позначити як проблеми експлуатації АС.

### 2.1. Проблеми роботи аеросистем

Розроблення проектів для монтажу або будівництва таких систем виконують проектні групи за розробленими методиками. В останні десятиліття дедалі очевиднішою стає потреба аналізу серйозних проблем експлуатації аеросистем. У

багатьох АС, що експлуатуються, головною проблемою можна констатувати істотну відмінність результатів проектування АС від необхідних показників експлуатації. Масовим явищем в Україні є "обмеження потужності котлів по дугтю", коли подача повітря вентилятором недостатня для забезпечення максимальної потужності котлів. Експлуатацію котлів з потужністю на 20-50% меншою за проектну вже 50 років в Україні можна вважати дивним, але очевидним фактом, який керівники енергетичних підприємств щороку підтверджують згідно з офіційною методикою "Положення про узгодження та затвердження обмежень встановленої електричної потужності теплових електростанцій. РД153-34.1-09.312-99"» [15].

Режимні карти двох типів котлів з однаковою тепловою потужністю КВГМ-58 (з одним вентилятором ВДн-15) та котли ПТВМ-58 (12 дугтьових вентиляторів ВЦ-14-46 №4) демонструють, що причиною обмежень потужності котлів офіційно вважають недостатню подачу вентиляторів.

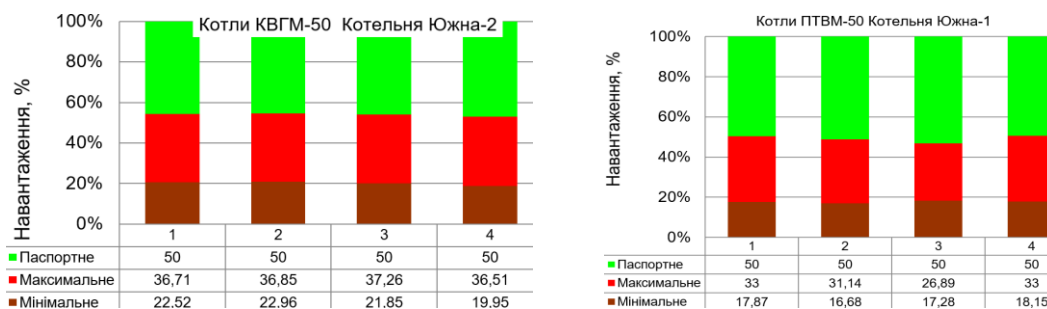


Рис 1. Дані режимних карт котлів КВГМ-58МВт і ПТВМ-58 у м. Одеса

Область, що забарвлена в зелений колір на рис. 1, показника потужності котлів, характеризує обмеження потужності через недостатню подачу вентиляторів. Необхідно відзначити ще кілька проблем, які пов'язані з недостатньою подачею: високі витрати енергії на привід (електродвигун вентилятора), підвищена вібрація і шум (вентилятори і димососи працюють із шумом понад 100 Дб).

Такі негативні явища в енергетиці та промисловості, пов'язані з технологіями руху газів, приймають як неминуче. На жаль, негативні явища в аеросистемах не пов'язують із суперечностями моделей представлення процесів. Хоча досвід реконструкцій, з метою збільшення подачі вентиляторів, зниження шуму, вібрації, збільшення терміну експлуатації повітропроводів, показав шлях до вдосконалення моделей АС, що можуть використовуватися для реального оцінювання якості роботи як вентиляторів, так і систем загалом та розвитку інноваційних методів розв'язання перелічених вище проблем [16].

## 2.2. Правила проектування аеросистем

Аналіз протиріч моделей і проблем експлуатації аеросистем найкраще почати з представлення основних вимог або правил проектування [13]. Для забезпечення якості проектування аеросистем виділяють три головні вимоги формування та оптимізації енергетичних параметрів:

1. Необхідно забезпечити розрахункову подачу  $Q_{розр}$  на 10% більшу за необхідну  $Q_{необх}$  за умовами технічного завдання на проектування.

$$Q_{розр} = 1,1 Q_{необх} \quad (1)$$

2. За робочу ділянку напірної характеристики вентилятора має прийматися та її частина, на якій значення ефективності (ККД) вентилятора  $\eta_{вент}$  перебуває в діапазоні

$$P_{v. PT} = P_{(V)}(\eta_{вент.} \geq 0,9\eta_{max.}) \quad (2)$$

3. Витрати енергії на привід вентиляторів  $N_{el}$  мають бути мінімальними.

$$N_{el\text{ ел.}} \rightarrow N_{(el\text{ ел.}min.)} \quad (3)$$

Ключовим показником оптимізації параметрів аеросистем під час проектування є забезпечення допустимого діапазону коефіцієнта **ефективності** -  $\eta$  вентилятора (10% від  $\eta_{max}$ ) в області робочої точки (РТ) графіка енергетичних параметрів вентилятора.

Робоча точка показує перетин характеристики мережі (відповідальний за розробку - проектувальник) і характеристики вентилятора (відповідальний - завод виробник). У РТ головним показником вважається повний тиск  $P_v$  або сила, яку повинен створювати вентилятор, щоб сформувати необхідну подачу  $Q$  із запасом 10%. Тобто, РТ показує корисні параметри АС, визначені в п. 1 - подачу  $Q$  і в п. 2, сила -  $P_v$ .

Робоча точка показує збіг величини тиску вентилятора з величиною втрат тиску в мережі. Цей збіг можна представити формулою, яка відображає умову формули (2).

$$P_v = P = RQ^2, \quad (4)$$

де  $R$  – сума опорів у мережі, розрахована відносно подачі вентилятора.

Одразу можна стверджувати, що вкрай рідко результати проектування забезпечують запас подачі, "обмеження потужності" вже понад 50 років вважаються актуальною, але важко розв'язуваною проблемою [15]. У США проблему недостатньої подачі вентиляторів називають "системний ефект" [2].

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Головною метою цієї роботи являється аналіз проблем експлуатації технологічних процесів, пов'язаних із рухом газових середовищ або повітря, у рамках правил проектування аеросистем.

### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

#### 4.1. Проектні та експлуатаційні параметри аеросистем

Правила проектування встановлюють вимоги до формування основних параметрів роботи аеросистеми. Дана стаття є продовженням досліджень з удосконалення моделі АС [16], де було обґрунтовано відмову від складного розрахункового показника повний натиск  $P_v$  як суми п'єзо- та динамічної складової енергії. Далі, замість розрахункового показника повний напір досліджуватимемо тільки п'єзо параметри - величини тиску і розрядження в АС, які можна визначити вимірювальними приладами і використовувати розрахункові методи прогнозування такого роду параметрів. Тобто, параметрами АС будемо вважати показання вимірювальних приладів і результати розрахунків, що підтверджують значення цих параметрів у встановлених (визначених методично) точках АС. На рис. 2 показано схему АС, яку можна розділити на 3 ділянки відповідно до встановлення п'єзо приладів: В - вакуумметр і М – манометр.

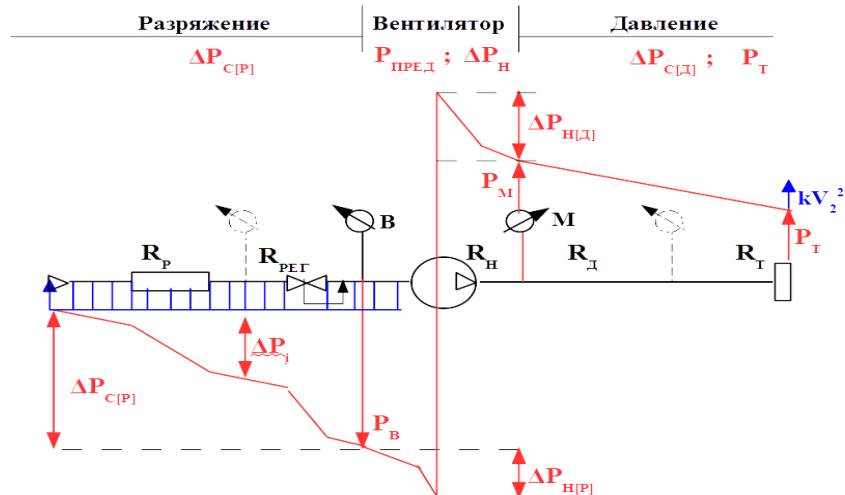


Рис. 2 Графічна схема моделі представлення параметрів аеросистеми

За місцем встановлення вимірювальних приладів можна виділити три ділянки: 1 - ділянка розрядження; 2 - вентилятор; 3 - ділянка тиску. Найчастіше 1-шу і 3-тю ділянки в розрахунках об'єднують у поняття "мережа".

Проектування АС умовно можна розділити на два етапи:

1-й етап - формує мережу, де розраховують сумарні втрати тиску  $\Delta P_{мережа}$  в зоні розрядження (0 – 1) і зоні тиску (2 – 3);

2-й етап - вибір вентилятора, який має створити силу – тиск  $P_{вент}$  для компенсації втрат тиску  $\Delta P_{мережа}$  в мережі.

До корисних параметрів роботи АС потрібно відносити аеродинамічну потужність вентилятора  $N [Bm]$ , як добуток двох параметрів: потенціалу -  $\Pi$  і динаміки  $D$ .

$$N = \Pi D . \quad (5)$$

Потенціал  $\Pi$  – п'єзо параметри: тиск і розрядження  $P$ , які вимірюються манометром і вакуумметром;

Динаміка  $D$  – залишається параметром, що потребує уточнення. Сьогодні важко виміряти швидкість потоку  $V_i$ , яка змінює величину зі зміною розмірів каналів. Легше динаміку представляти як вимірюваний параметр подачі або витрати  $Q$ , який у простій аеросистемі залишається величиною постійною. Добуток потенціалу і динаміки показує розрахунковий корисний енергетичний **показник** роботи АС – потужність  $N_{аеро} = P Q [Bm]$  як інтенсивність енергії  $E / t [Дж / с]$ .

Для аналізу параметрів АС використовують енергетичну модель у вигляді рівняння Бернуллі (для ідеальної рідини), яке представляє суму з трьох складових питомої енергії потоку:

$$P_v = e = \rho g z_1 + P_1 + \rho V_1^2 / 2 = \rho g z_2 + P_2 + \rho V_2^2 / 2 + DP = const [Pa] \quad (6)$$

де:  $P$  – потенціальна складова енергії (питомий тиск);

$\rho g z_i$  – геометрична складова енергії, якою можна знехтувати;

$\rho V_i^2 / 2$  – динамічна складова енергії.

Для спрощення аналізу цілком припустимо відмовитись від показника питомої енергії положення  $\rho g z_{(i)}$ , оскільки маса або вага повітря чи газів у сотні разів менша, ніж у рідин. Головна складність наявної моделі АС пов'язана з використанням

розрахункового показника "повний напір" -  $P_v$ . У раніше виконаних дослідженнях суперечностей АС розроблено графічну модель параметрів аеросистеми (рис. 2) [16], де обґрунтовано перехід від розрахункового показника  $P_v$  до вимірюваних п'єзо параметрів аеросистеми, які можна визначити вимірювальними приладами. В результаті збіг показань приладів з даними розрахунків може бути найкращим показником якості проектування АС.

Для забезпечення точності та однозначності розрахунків за показаннями п'єзо приладів необхідно встановити правила встановлення п'єзо приладів в аеросистемі відносно елементів основного обладнання – вентиляторів.

Проектування АС закінчується (другий етап) вибором вентилятора (основний елемент АС) з оптимізацією параметрів роботи за коефіцієнтом "ефективність" вентилятора (але не системи).

Перший етап проектування полягає у виборі та розташуванні допоміжного обладнання в зоні розрядження і зоні тиску. Результатом першого етапу є розрахунок втрат тиску в "мережі"  $\Delta P_m = \Delta P_{m(P)} + \Delta P_{m(T)}$  – тобто сума втрат тиску у двох частинах АС: у зоні розрядження і зоні тиску.

**Проектування аеросистем** умовно можна розділити на 2 етапи. **1-й етап проектування** полягає у формуванні мережі (зони розрядження та зони тиску). Підсумком першого етапу є розрахунок втрат тиску  $\Delta P = RV^n$ . Оптимізація на першому етапі виконується за допустимим діапазоном значень швидкості потоку  $V = Q/(bh)$  м/с; (у побутових системах  $V = 2-5$  м/с; на промислових об'єктах  $V = 5-10$  м/с), тому що втрати пропорційні до швидкості  $V^n$ . Сьогодні використовують  $n=2$ , хоча значення ступеня необхідно уточнити! Втрати тиску пов'язані з опорами елементів системи  $R \rightarrow \lambda; \xi$ , які обирають із довідників. Велика кількість складних довідників стала причиною втрати інтересу до зниження опорів елементів АС.

**2 етап проектування** - Вибір головного елемента АС - вентилятора.

Вентилятор вважається головним елементом системи, оскільки він створює повний тиск  $P$  – силу для подолання опорів і формування заданої подачі –  $Q$  (див. ф.(2) і ф.(4)). Оптимізація вибору вентилятора виконується за показником "ефективність" вентилятора, як відношення кінцевого результату - енергії потоку повітря або аеропотужності вентилятора  $N_{aero} = PQ$  [Вт] до вихідної або витраченої енергії  $E_{вихід}$  – електричної потужності електродвигуна, тобто приводу вентилятора:  $N_{el} = UI$  [Вт].

$$\eta_{вент.} = E_{кін.} / E_{вихід} = N_{aero} / N_{el} [Вт] / [Вт] \quad (7)$$

Для роботи вентилятора потрібен привід - двигун, який споживає електрику. Сьогодні 3 пункт правил під час проектування не виконується.

Перший і другий пункти правил проектування відповідають за формування двох складових аеропотужності  $N_{aero} = Q_{розр.} P$ , що визначає кінцеву енергію потоку.

За першим пунктом необхідно забезпечити подачу  $Q_{розр.}$  на 10% більшу за необхідну. Однак на енергетичних підприємствах України (особливо в теплофікації) частою проблемою є "обмеження потужності котлів по дуттю або тязі", коли вентилятори котельних установок не забезпечують необхідну подачу.

Другий пункт відповідає за формування сили - тиску  $P$  в  $АС$ . Саме цей пункт пов'язують з оптимізацією енергетичних параметрів аеросистеми з використанням коефіцієнта ефективності -  $\eta$ .

Головним, міжнародно визнаним, коефіцієнтом, що характеризує якість технологічних процесів в  $АС$ , як на стадії проектування, так і під час експлуатації є **ефективність**. "Директива Європейського парламенту і Ради щодо ефективності" [14] визначає розрахунковий коефіцієнт "ефективність" як відношення *кінцевого* результату виробленої енергії  $E_{(кінц)}$  (або потужності) до *вихідної* або витраченої енергії  $E_{(вихід)}$  (або потужності).

Тобто, вищевказаний документ рекомендує виключати проміжні енергетичні стани з аналізу якості роботи технологічних процесів. Аналізується співвідношення тільки корисної (кінцевої) енергії, яку ми отримали та вихідних енергетичних витрат, які є мірою витрат.

$$\eta = E_{кінц} / E_{вихід} \quad [Вт] / [Вт]$$

$$0 < \eta < 1$$

Коефіцієнт "ефективність"  $\eta$  від низьких значень для паровоза  $\eta_{(паровоз)} < 0,1$  на початку ХХ століття до середини ХХ століття досягли ефективності використання енергії палива на теплових електростанціях  $\eta_{ТЕС} = 0,4/0,6$ .

За останнє століття вдосконалення вентиляторів дало змогу збільшити їхню "ефективність" до  $\eta_{Вент.} > 0,85$ . Якщо вважати ефективність вентилятора єдиним показником якості проектування і роботи  $АС$  і те, що згідно із законом збереження енергії максимальне значення ефективності може бути  $\eta_{Вент.} \leq 1$ , то можна дійти висновку, що до визнаної максимальної якості експлуатації лише 15%.

У формулі (4) використовується коефіцієнт сумарної величини опорів  $R$ , який не використовується у формулах (1 – 3) Правил проектування. Це свідчить про виведення з оптимізації значень опорів. Насамперед це пов'язано з відносною і безрозмірною величиною коефіцієнта ефективності відповідно до формули (7). У роботі (16) запропоновано коефіцієнт пропорційності між Динамікою -  $D$  і потенціалом  $\Pi$ , як зворотна величина опорів.

$$m = 1/R = D/\Pi$$

$$0 < m < 1$$
(8)

Тоді для системного аналізу показників якості роботи можна використовувати коефіцієнт "динамізм" у відносній формі, який подібний коефіцієнту "ефективність" (але не тотожний йому). Це дасть змогу розраховувати системний показник ефективності, де враховується якість трансформації різних видів енергії (електроенергетичної потужності привода і аероенергетичної потужності вентилятора), а також якості використання потенціалу - тиску для формування подачі вентилятора.

$$\eta_{(A)} (.) (Syst) (.) = \eta_{Вент.} \mu$$
(9)

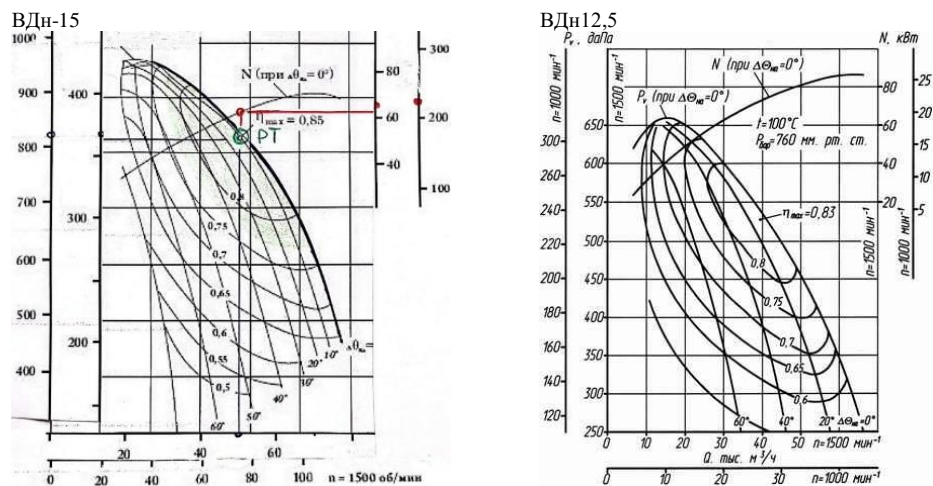
Системний показник якості роботи  $АС \eta_{syst}$  характеризує повний цикл перетворення енергії або потужності електродвигуна в корисний продукт аеросистеми - подачу  $Q$ .

*Аналіз параметрів роботи АС котлів на основі правил проектування*

Аналіз впливу вимог правил проектування аеросистем виконаємо на прикладі декількох варіантів забезпечення подачі повітря у двох типах котельних установок тепловою потужністю  $N_{мент} = 58 \text{ МВт}$ . Для аналізу використаємо два типи котлів КВГМ-58 і ПТВМ-58, що збудовані понад 50 років тому на основі типових проектів і масово експлуатуються в Україні та інших країнах [19]. Тільки в Одесі таких котлів понад 40. Мета аналізу - встановити вплив і якість виконання трьох основних пунктів правил проектування аеросистем (див. рис. 1).

1 варіант - встановлення одного великого вентилятора.

У дуттьовому тракті котла КВГМ-58 рекомендовано один вентилятор ВДн-15 (діаметр робочого колеса  $D_2 = 1,5 \text{ м}$ ), який має забезпечити для горіння палива, при номінальній тепловій потужності, подачу  $Q = 70 \text{ тис. м}^3 / \text{год}$  повітря. На рис. 3 у полі енергетичних характеристик вентилятора ВДн-15 показано дві розрахункові точки  $PT_1$  для швидкості  $n_1 = 980 \text{ м}^{-1}$  і  $PT_2$  для швидкості  $n_2 = 1480 \text{ м}^{-1}$ .



**Рис. 3** Енергетичні характеристики вентиляторів типу ВДн

Більшу частину часу (понад 4000 годин за помірно низької температури) котли КВГМ працюють із навантаженням менше 60% від номінального. Тому, для потужності  $N_{к.т} < 40 \text{ МВт}$  вентилятор ВДн-15 працює на швидкості обертання робочого колеса  $n_1 = 980 \text{ м}^{-1}$  з подачею  $Q_{вент.1} = 50 \text{ тис. м}^3 / \text{год}$ . Вентилятор у робочій точці  $PT_1$  забезпечує ефективність  $\eta_{вент} = 0,85$  (задовольняє вимоги другого пункту ПП) та витрати енергії на привід становлять до  $N_{ел. дв} = 60 \text{ кВт}$ .

У період пікових холодів (не більше 300 годин) потрібно збільшити теплове навантаження котлів до максимальних значень 58 МВт. Для збільшення подачі вентилятора до  $Q_{вент.2} = 70 \text{ тис. м}^3 / \text{год}$  необхідно перемкнути вентилятор на другу швидкість  $n_2 = 1480 \text{ хв}^{-1}$ . Зберігаючи максимальне значення ефективності  $\eta_{вент} = 0,85$ , подача збільшується до  $Q_{вент.2} = 70 \text{ тис. м}^3 / \text{год}$ . Витрати енергії на роботу електродвигуна збільшаться до  $N_{ел. дв} = 180 \text{ кВт}$ . Тобто, при збільшенні подачі в 1,4 раза, витрати енергії на привід збільшуються в 3 рази.

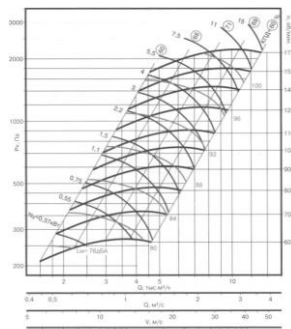
Двошвидкісний варіант регулювання подачі взято з досвіду експлуатації теплових електростанцій (ТЕС), де більшу частину часу (більше 70%) вентилятори працюють на другій - більшій швидкості, і тільки в разі зменшення електричного навантаження енергоблоків (менше ніж 30% часу) вентилятори перемикають на

меншу швидкість, що забезпечує істотну економію енергії на роботу вентиляторів. Непропорційне збільшення витрат енергії на привід порівняно з малим збільшенням подачі входить у протиріччя з збереженням високих значень ефективності вентиляторів. У багатьох котельнях з котлами КВГМ-58 воліють використовувати вентилятори з однією малою швидкістю двигуна. Через це котли не можуть забезпечувати максимальне навантаження (див. рис. 1) і щороку керівники міських котельень обґрунтовують причину "обмежень потужності котлів по дуттю або тязі" [15,24].

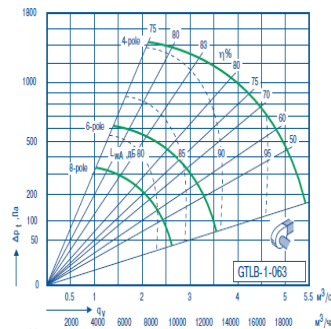
Дивно, що для котлів КВГМ-58 не використовують 2 вентилятори ВДн-12,5 (по одному вентилятору на кожен палиник). Згідно з другим пунктом *ПП* ефективність  $ВДн-12,5 \eta_{вент} = 0,83$  за умови подачі повітря  $Q = 76 \text{ тис. м}^3 / \text{год}$ . Згідно з третім пунктом *ПП* витрати енергії на привід можна було б зменшити до  $N_{ел. дс} < 150 \text{ кВт}$ .

2 варіант - встановлення декількох вентиляторів менших розмірів.

Варіант встановлення декількох вентиляторів менших розмірів реалізовано на типових котлах ПТВМ-58. Для забезпечення подачі повітря  $Q = 70 \text{ тис. м}^3 / \text{год}$  встановлюють 12 вентиляторів ВЦ-14-46 №4 для 12 палиників. Вентилятори мають загнуті вперед робочі лопатки, тому максимальна ефективність  $\eta_{вент} = 0,71$ . Сумарні витрати енергії на приводи 12-ти вентиляторів зменшуються до  $N_{ел} = 80 \text{ кВт}$ . На рис. 4 показано енергетичні характеристики двох типів вентиляторів: ВЦ-14-46 з ефективністю  $\eta_{вент} = 0,71$  і GTLB-1-0,63 з ефективністю  $\eta_{вент} = 0,83$ .



$VЦ-14-46 Q = 6 \text{ тис. м}^3 / \text{год}$   
 $\eta_{вент} = 0,71 N_{(ел)} = 6 \text{ кВт}$



$GTLB-1-0,63 Q = 11 \text{ тис. м}^3 / \text{год}$   
 $\eta_{вент} = 0,83 N_{(ел)} = 5 \text{ кВт}$

**Рис. 4** Енергетичні характеристики вентиляторів ВЦ-14-46 і GTLB-1-0,63

Для котлів ПТВМ-58 можна використовувати 6 вентиляторів GTLB. Згідно з другим пунктом *ПП* ефективність GTLB за подачі повітря  $Q = 76 \text{ тис. м}^3 / \text{год}$  дорівнює  $\eta_{вент} = 0,83$ . Згідно з третім пунктом *ПП*, витрати енергії на привід зменшаться до  $N_{ел. дс} < 40 \text{ кВт}$ .

Виникає питання про суперечність оцінки якості параметрів  $AC$  у разі використання для оптимізації вибору вентиляторів коефіцієнта ефективності  $\eta_{вент}$  як критерію правильності проектування  $AC$  із різними параметрами роботи вентиляторів.

Багато років третій пункт правил проектування про мінімізацію витрат електроенергії  $N_{ел}$  на привід вентиляторів сприймався як декларація, тому що не мав коефіцієнтів, які б характеризували та стимулювали зниження витрат енергії на власні потреби. Нещодавно почали використовувати коефіцієнт питомих витрат на подачу [16].

$$k_{y.z} = \Delta N_{el.BП} / Q < 1кВт / м^3 \quad (10)$$

Таблиця 1

|                              |                                     | Котли КВГМ-58 |            | Котли ПТВМ-58 |             |
|------------------------------|-------------------------------------|---------------|------------|---------------|-------------|
| Потужність котла             | МВт                                 | 58            | 58         | 58            | 58          |
| Вентилятори                  |                                     | ВДн-15        | 2*ВДн-12,5 | 12*ВЦ-14-46   | 6*GTLB-0,63 |
| Подача повітря в котел       | 10 <sup>3</sup> м <sup>3</sup> /год | 65            | 70         | 72            | 72          |
| Витрати електричної енергії  | кВт                                 | 180           | < 150      | 75            | < 40        |
| Ефективність $\eta_{вент}$   | -                                   | 0,85          | 0,85       | 0,71          | 0,83        |
| Пит. витр. енергії $k_{п.в}$ | кВт/м <sup>3</sup>                  | 2,77          | 2,1        | 1,05          | 0,7         |

Аналіз параметрів роботи АС навіть у межах наявних правил проектування показує, що виконання 2-го пункту правил проектування (ефективність вентилятора) призводить до суперечностей виконання як 1-го, так і 3-го пункту правил. Саме коефіцієнт питомих витрат на подачу  $k_{y.в}$  можна розглядати як стимулюючий фактор якості проектування АС.

**Інноваційний варіант** підвищення подачі вентиляторів з істотним зниженням витрат енергії на привід за рахунок зниження опорів проточних частин.

У 2006 році в м. Чорноморськ (Одеська область) планували встановити додатковий котел, оскільки теплової потужності двох котлів КВГМ-58, що працювали, не вистачало для теплопостачання міста, яке зростало. Теплова потужність працюючих котлів була на 40% меншою за номінальну і становила  $N_{к.т.} = 40МВт$  через "обмеження теплової потужності котлів по дуттю" з огляду на недостатню подачу вентилятора ВДн-15.

Як інноваційний варіант поліпшення параметрів роботи АС було виконано реконструкцію аеросистеми з метою поліпшення параметрів роботи завдяки зниженню опорів як у вентиляторі, так і в аеросистемі. До реконструкції параметри роботи вентилятора ВДн-15 у точці  $A_{(0)}$  (мережа 1): за обертів  $n_1 = 980 хв^{-1}$  подача  $Q_{вент} = 45 тис. м^3 / год$ , ефективність  $\eta_{вент.А.0} = 0,82$ , витрати на привід  $N_{ел} = 55кВт$ .

Реконструкція полягала у зменшенні опорів у мережі. Пальники замінено на нові СНТ (м. Київ), опір яких у 3 рази менший, а також виконано зміну поворотів зі зменшенням опорів у 5 разів.

Максимальну теплову потужність котла збільшено до 52 МВт за рахунок поліпшення параметрів ВДн-15 у точці С. Не змінюючи оберти вентилятора  $n_1 = 980 хв^{-1}$ , подачу збільшено до  $Q_{вент} = 70 тис. м^3 / год$ , витрати на привід зменшено до  $N_{ел} = 70кВт$  (порівняно з 180кВт - див. варіант 1). Парадокс у тому, що ефективність вентилятора зменшилася до  $\eta_{вент.А.0} = 0,77$ .

На мал.6 представлено результати реконструкції аеросистеми (дугтьового тракту) котла КВГМ-58 у м. Чорноморськ.

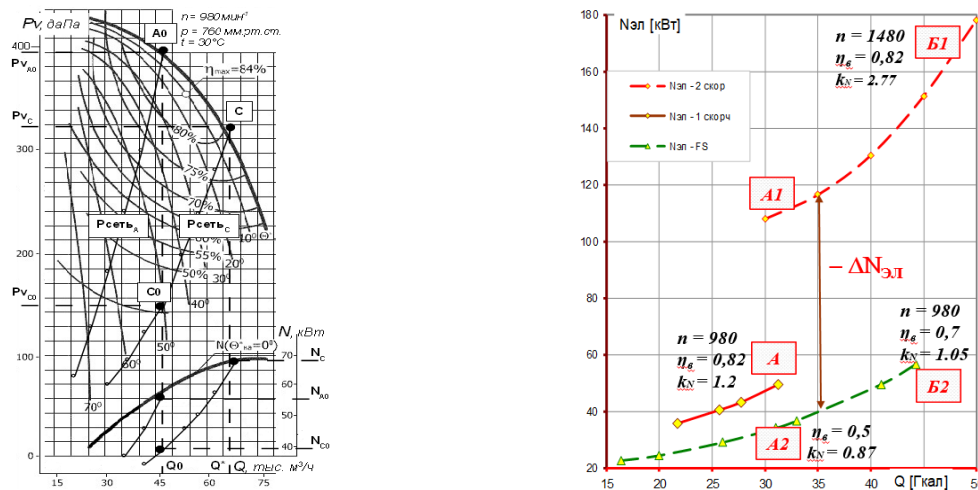


Рис. 6. Інноваційний варіант - збільшення подачі вентилятора ВДн-15 за рахунок зменшення опорів елементів дугтьового тракту котла

Зниження опорів аеросистем забезпечило підвищення подачі вентиляторів на 40%. Витрати електричної енергії на привід знижені у 2,5 раза. Однак, ефективність вентилятора парадоксально зменшилася до  $\eta_{\text{вент. Б2}} = 0,77$ . За третім пунктом III - витрати енергії на привід були знижені згідно з коефіцієнтом питомих витрат енергії вентилятора до  $k_{\text{н.в. инн}} = 68/70 = 0,95 \text{ Вт/м}^3$  порівняно з витратами за більшої швидкості вентилятора  $k_{\text{н.в. минив}} = 180/70 = 2,77 \text{ Вт/м}^3$ . Коефіцієнт питомих витрат енергії вентилятора для оптимізації 3п. ПП використовується вкрай рідко, але більшість котелень використовують одношвидкісні вентилятори і щороку обґрунтовують причину обмежень потужності котлів по дугтю. В інтернеті тема обмежень потужності практично відсутня.

У таблиці 2 порівняємо два варіанти показників роботи вентилятора ВДн-15 за підсумками реконструкції

Таблиця 2

| Назва  | Од. вим.                 | Вентилятор ВДн-15-2ск Старі III |      | 1 Вентилятор ВДн-15 (зменшення опорів) |      |
|--|--------------------------|---------------------------------|------|--|------|
|  |                          | 40                              | 58   | 40                                     | 58   |
| Теплова потужність котла                       | МВт                      | 40                              | 58   | 40                                     | 58   |
| Подача повітря в котел                         | Тис. м <sup>3</sup> /Год | 45                              | 75   | 45                                     | 75   |
| Витрати електроенергії на двигуни вентиляторів | кВт                      | 55                              | 180  | 39                                     | 70   |
| Ефективність $\eta_{\text{вент}}$              | -                        | 0,85                            | 0,85 | 0,55                                   | 0,75 |
| Пит. витр. енергії $k_{\text{н.з}}$            | 1кВт/м <sup>3</sup>      | 1,22                            | 2,77 | 0,87                                   | 0,95 |

Подібні результати отримано на ТЕС Браш (Колорадо, США, 1997 р.), на Криворізькій ТЕС (2011 і 2013 р.), Молдавській ГРЕС (2011 р.). Але реконструкції з метою поліпшення якості роботи аеросистем за рахунок зниження аеродинамічних опорів поки що не отримали належної уваги.

Можна запропонувати зміну основних вимог під час проектування систем транспортування повітря або газів.

|   |  |
|---|--|
| 1. Необхідно забезпечити подачу $Q$                                 |  |
| $Q_{\text{розрах}} = 1,1 Q_{\text{потреб}}$                         | $Q_{\text{розрах}} = 1,3 Q_{\text{потреб}}$                      |
| 2. Оптимізація енергетичних параметрів аеросистем                   |  |
| $P_{(V)(PT)} = P_{(V)(\eta_{\text{вент}})} > 0,9\eta_{\text{max}}$  | $Q_{PT} = Q > Q\eta_{\text{max}}$                                |
| $P_V \rightarrow P_{V.PT} \rightarrow P_{V_{\text{рик}}}$           | $R R_{\text{min}} \rightarrow$<br>Динамізм $0 < \mu = 1 / R < 1$ |
| Ефективність<br>$0 < \eta_{\text{вент}} < 1$                        | 2 етап Ефективність<br>$0 < \eta_{\text{вент}} < 1$              |
| 3. Витрати енергії на привід вентиляторів повинні бути мінімальними |  |
| $N_{el} \rightarrow N_{el} \cdot \chi_v$                            | $\kappa_{п.в} < 1 \text{ кВт} / \text{м}^3$                      |

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Обґрунтовано наявність проблем експлуатації технологій, пов'язаних з рухом газових середовищ у рамках правил проектування аеродинамічних систем. Вже кілька десятиліть результати типових проектів дутьових та тягових трактів котельних установок суттєво відрізняються від зазначених у паспортних показниках експлуатації підприємств комунальної енергетики.

## 6 ВИСНОВКИ

Розглянуто інноваційний варіант моделі проектування аеросистем, де для оптимізації параметрів використовується прийом зниження аероопорів. Реконструкції з метою збільшення подачі вентиляторів за рахунок зниження опорів забезпечують зменшення витрат енергії на привід, а також знижують шум і вібрацію, збільшують термін надійної експлуатації вентиляторів і аеросистеми в цілому.

Використання поняття «динамізм» у відносній формі, який можна порівняти з коефіцієнтом «ефективність», дозволить розраховувати системний показник якості роботи аеросистем та оптимізувати не тільки якість трансформації різних видів енергії, а й забезпечувати більшу продуктивність вентиляторів з меншими витратами енергії на власні потреби.

## 7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

## Література

1. Related AMCA Standards and Publications / Publication 200 *AIR SYSTEMS* / System Pressure Losses, Fan Performance Characteristics, System Effect, System Design Tolerances.
2. Publication 201 *FANS AND SYSTEMS* / Fan Testing and Rating, The Fan "Laws" Air Systems, Fan and System Interaction, System Effect Factors.
3. Publication 202 *TROUBLESHOOTING* / System Checklist, Fan Manufacturer's Analysis, Master Troubleshooting Appendices.\

4. Publication 203 *FIELD PERFORMANCE MEASUREMENTS OF FAN SYSTEMS* ./ Acceptance Tests/Test Methods and Instruments, Precautions, Limitations and Expected Accuracies Calculations.
5. Improving Fan System Performance a sourcebook for industry / U.S. Department of Energy / sourcebook for industry /2003. [https://www.nrel.gov/docs/fy\\_03osti/29166.pdf](https://www.nrel.gov/docs/fy_03osti/29166.pdf).
6. ASHRAE. 1999. ANSI/ASHRAE Standard 51-1999 (ANSI/ AMCA Standard 210-99), Laboratory Methods of Testing Fans for Aerodynamic Performance Rating. Atlanta: American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, Inc.
7. ASHRAE. 2000. 2000 ASHRAE Handbook—HVAC Systems and Equipment, Chapter 18, Fans. Atlanta: American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, Inc.
8. Dynamical Modelling of a Centrifugal Fan Driven by an Induction Motor and Experimental Validation. Cebraıl Turkeri. Oleh Kiselychnyk. School of Engineering, The University of Warwick, Coventry CV4 7AL, UK. *Energies* 2023, 16(18), 6658; <https://doi.org/10.3390/en16186658>.
9. Model-Based Assessment of Energy Efficiency in Industrial Pump Systems: A Case Study Approach. Henrik Lavrič. Klemen Drobnič. Rastko Fišer. Faculty of Electrical Engineering, University of Ljubljana, Tržaška cesta 25, 1000 Ljubljana, Slovenia. <https://doi.org/10.3390/app142210430>.
10. Discussion on Energy Saving Technology of Pumps and Fans in Thermal Power Plants Hao Bian \* School of North China Electric Power University, Baoding, China. doi:10.1088/1755-1315/450/1/012082.
11. Experimental study of a pump in turbine mode, energy characteristics, selection methods and operation in a system. Александр Станилов. doi:10.1088/1755-1315/1234/1/012008.
12. DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL FOR ENERGY EFFICIENCY OF A CENTRIFUGAL PUMP. Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas. Andrii Lahoida. Andrii. <https://doi.org/10.30888/2663-5712.2023-21-01-039>.
13. Правила или требования для проектирования аэро систем (вент систем) ГОСТ 10616-90 Вентиляторы радиальные та осевые. Размеры і параметри (СТ СЭВ 4483-84)
14. Директива з енергоефективності (ЄС) 2023/1791 <https://enefcities.org.ua/novyny/dyrektyva-z-energoefektyvnosti-yes-2023-1791-nabula-chynnosti/> 23 окт. 2023 г.
15. Arsiri V. Reconstruction of turbomachines on the basis of the flow structure visual diagnostics. Arsiri Vasyıl, Kravchenko Oleg. *Mechanics and Mechanical Engineering*, Volume 22, Issue 2, Pages 405–414, eISSN 2354-0192, DOI: <https://doi.org/10.2478/mme-2018-0032>.
16. Predicting the Performance of an Industrial Centrifugal Fan Incorporating Cambered Plate Impeller Blades / Lucio Cardillo, Alessandro Corsini, Giovanni Delibra, Franco Rispoli, Anthony G. Sheard, Paolo Venturini/ *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering* / 58(1), pp. 15-25, 2014 DOI:10.3311/PPme.7397.
17. Lee Y.-T., Impact of fan gap flow on the centrifugal impeller aerodynamics / *Journal of Fluids Engineering*, 132(9), 1-7 (2010). DOI: 10.1115/1.4002450.
18. Бузников У.Ф., Раддатис К.Ф., Берзиньш Э.Я. Производственные и отопительные котельные / - М Энергомашиздат, 1984.
19. ГОСТ 1616-90 Вентиляторы радиальные и осевые. Размеры и параметры. М.: Издательство стандартов, 1990 .
20. Аэродинамический расчет котельных установок (нормативный метод). под ред. С.И. Мовчана. Л., Энергия.1977.
21. Пат. PST 5.812.423 USA Method of determining for working media motion and designing flow structures for same // Maisotsenko V. S., Arsiri V. A.. ¾ Publ. 22.09.1998.
22. Черноусенко О.Ю. Стан енергетики України та результати модернізації енергоблоків ТЕС/ *Проблеми загальної енергетики*, 2014, вип. 4 (39) С. 20–28.
23. ПРАВИЛА технічної експлуатації систем теплопостачання комунальної енергетики України / згідно Наказу Державного комітету з питань житлово – комунального господарства №234 (v0234508-04) від 29.12. 2004.
24. U.S. Department of Energy (2004) Improving Fan System Performance / <https://www.nrel.gov/docs/fy3osti/29166.pdf>.

25. U.S. Department of Energy (2013a). Energy Efficiency Program for Commercial and Industrial Equipment: Public Meeting and Availability of the Framework Document for Commercial and Industrial Fans and Blowers. Federal Register, 78/22: 7387, 1 February.
26. U.S. Department of Energy (2013b). Presentation slides: Energy Conservation Standards for Commercial & Industrial Fans and Blowers: Framework Public Meeting. Docket number EERE-2013-BTSTD-0006, 15 February

## References

1. Related AMCA Standards and Publications / Publication 200 *AIR SYSTEMS* / System Pressure Losses, Fan Performance Characteristics, System Effect, System Design Tolerances.
2. Publication 201 *FANS AND SYSTEMS* / Fan Testing and Rating, The Fan "Laws" Air Systems, Fan and System Interaction, System Effect Factors.
3. Publication 202 *TROUBLESHOOTING* / System Checklist, Fan Manufacturer's Analysis, Master Troubleshooting Appendices.\
4. Publication 203 *FIELD PERFORMANCE MEASUREMENTS OF FAN SYSTEMS* ./ Acceptance Tests/Test Methods and Instruments, Precautions, Limitations and Expected Accuracies Calculations.
5. Improving Fan System Performance a sourcebook for industry / U.S. Department of Energy / sourcebook for industry /2003. [https://www.nrel.gov/docs/fy\\_03osti/29166.pdf](https://www.nrel.gov/docs/fy_03osti/29166.pdf).
6. ASHRAE. 1999. ANSI/ASHRAE Standard 51-1999 (ANSI/ AMCA Standard 210-99), Laboratory Methods of Testing Fans for Aerodynamic Performance Rating. Atlanta: American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, Inc.
7. ASHRAE. 2000. 2000 ASHRAE Handbook—HVAC Systems and Equipment, Chapter 18, Fans. Atlanta: American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, Inc.
8. Dynamical Modelling of a Centrifugal Fan Driven by an Induction Motor and Experimental Validation. Cebrail Turkeri. Oleh Kiselychuk. School of Engineering, The University of Warwick, Coventry CV4 7AL, UK. *Energies* 2023, 16(18), 6658; <https://doi.org/10.3390/en16186658>.
9. Model-Based Assessment of Energy Efficiency in Industrial Pump Systems: A Case Study Approach. Henrik Lavrič. Klemen Drobnič. Rastko Fišer. Faculty of Electrical Engineering, University of Ljubljana, Tržaška cesta 25, 1000 Ljubljana, Slovenia. <https://doi.org/10.3390/app142210430>.
10. Discussion on Energy Saving Technology of Pumps and Fans in Thermal Power Plants Hao Bian \* School of North China Electric Power University, Baoding, China. doi:10.1088/1755-1315/450/1/012082.
11. Experimental study of a pump in turbine mode, energy characteristics, selection methods and operation in a system. Александр Станилов. doi:10.1088/1755-1315/1234/1/012008.
12. DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL FOR ENERGY EFFICIENCY OF A CENTRIFUGAL PUMP.Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas. Andrii Lahoida. Andrii. <https://doi.org/10.30888/2663-5712.2023-21-01-039>.
13. Pravyla yly trebovaniya dlia proektyrovaniya aэro system (vent system) HOST 10616-90 Ventyliatory radialni ta osovi. Rozmiry i parametry (ST SЭV 4483-84).
14. Dyrektyva z enerhoefektyvnosti (YeS) 2023/1791 <https://enecities.org.ua/novyny/dyrektyva-z-energoefektyvnosti-yes-2023-1791-nabula-chynnosti/> 23 okt. 2023 h.
15. Arsiri V. Reconstruction of turbomachines on the basis of the flow structure visual diagnostics. Arsiri Vasyl, Kravchenko Oleg. Mechanics and Mechanical Engineering, Volume 22, Issue 2, Pages 405–414, eISSN 2354-0192, DOI: <https://doi.org/10.2478/mme-2018-0032>.
16. Predicting the Performance of an Industrial Centrifugal Fan Incorporating Cambered Plate Impeller Blades / Lucio Cardillo, Alessandro Corsini, Giovanni Delibra, Franco Rispoli, Anthony G. Sheard, Paolo Venturini/ Periodica Polytechnica Mechanical Engineering / 58(1), pp. 15-25, 2014 DOI:10.3311/PPme.7397.
17. Lee Y.-T., Impact of fan gap flow on the centrifugal impeller aerodynamics / Journal of Fluids Engineering, 132(9), 1-7 (2010). DOI: 10.1115/1.4002450.
18. Buznykov U.F., Raddatys K.F., Berzynsh Э.Яа. Proyzvodstvennye y otopytelnye kotelnye / - М Энергомашыздат, 1984.

19. HOST 1616-90 Ventyliatory radyalnye y osevye. Razмеры y parametry. M.: Yzdatelstvo standartov, 1990 .
20. Aerodynamicheskiy raschet kotelnykh ustanovok (normativnyi metod). pod red. S.Y. Movchana. L., Enerhiya.1977.
21. Пат. PST 5.812.423 USA Method of determining for working media motion and designing flow structures for same // Maisotsenko V. S., Arsiri V. A. ¾ Publ. 22.09.1998.
22. Chernousenko O.Yu. Stan enerhetyky Ukrainy ta rezultaty modernizatsii enerhobloktiv TES/ Problemy zahalnoi enerhetyky, 2014, vyp. 4 (39) S. 20–28.
23. PRAVYLA tekhnichnoi ekspluatatsii system teplopostachannia komunalnoi enerhetyky Ukrainy / zghidno Nakazu Derzhavnoho komitetu z pytan zhytlovo – komunalnoho hospodarstva №234 (v0234508-04) vid 29.12. 2004.
24. U.S. Department of Energy (2004) Improving Fan System Performance / <https://www.nrel.gov/docs/fy3osti/29166.pdf>.
25. U.S. Department of Energy (2013a). Energy Efficiency Program for Commercial and Industrial Equipment: Public Meeting and Availability of the Framework Document for Commercial and Industrial Fans and Blowers. Federal Register, 78/22: 7387, 1 February.
26. U.S. Department of Energy (2013b). Presentation slides: Energy Conservation Standards for Commercial & Industrial Fans and Blowers: Framework Public Meeting. Docket number EERE-2013-BTSTD-0006, 15 February

Стаття надійшла до редакції 02.09.2025

Стаття прийнята до друку 05.12.2025

Дата публікації статті 26.03.2026

**Кравченко Олег Володимирович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури,  
к.т.н, доцент

вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029

[sir.Kravchenko777@gmail.com](mailto:sir.Kravchenko777@gmail.com)

ORCID: 0000-0001-9765-2344

**Онищенко Олександр Сергійович**

Одеська державна академія будівництва та архітектури,  
аспірант,

вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029

[alexander.cyclon@gmail.com](mailto:alexander.cyclon@gmail.com)

ORCID: 0009-0000-4729-2993

*Для посилань:*

Кравченко О. В., Онищенко О. С. Проблеми експлуатації аеросистем. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. №. 1. с. 125–140.

*For references:*

O. Kravchenko, O. Onishchenko. (2026). Problems of aerosystem operation. Mechanics and Mathematical Methods. VIII (2). 125-140.

[Проблеми експлуатації аеросистем](#) © 2026 by [Кравченко О. В., Онищенко О. С.](#) is licensed under [CC BY 4.0](#)

UDC 624.012.41

## DETERMINATION OF THE INFLUENCE OF TECHNOLOGICAL DAMAGE TO CONCRETE ON ITS PRISM STRENGTH

N. Oliynyk<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

**Abstract:** Despite almost two hundred years of experience in use and significant volumes of use, which no composite material can match, reinforced concrete is still far from being fully studied. It is necessary to clarify the calculation of structures in order to fully take into account the factors that affect their operation under load.

Due to the peculiarities of its structure, concrete is a multicomponent and multiphase polycrystalline formation that has a developed system of macro- and microdefects that arise in the structure during molding.

Since concrete as a structural material is formed directly in the structure or product itself, it is practically possible to control its quantitative and qualitative parameters only after receiving the finished product or structure.

Since the composition of concrete affects the structure, strength characteristics and deformation properties of reinforced concrete structures operating under the influence of external influences, there is a need for a more thorough study of it and the determination of optimal components in order to ensure the operational reliability of structures.

During the technological processing of concrete, technological cracks appear in products at all levels of structural inhomogeneities in the material, which, being structural parameters of concrete, determine damage to structures, and thereby their operational reliability.

A directed change in technological damage allows you to change the nature of crack formation and structural failure. The use of mineral filler in certain quantities and a certain dispersion allows you to control the processes of organizing the structure of concrete and regulate its initial volumetric changes, and therefore, technological damage in order to obtain building structures with the necessary properties.

The results of the research revealed the influence of fillers on the initial damage of concrete and on its prismatic strength. Since technological damage significantly affects the strength properties of concrete, this allows you to assign concrete compositions with specified characteristics.

**Keywords:** reinforced concrete, cracks, technological damage, prismatic strength.

## ВИЗНАЧЕННЯ ВПЛИВУ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПОШКОДЖЕНЬ БЕТОНУ НА ЙОГО ПРИЗМАТИЧНУ МІЦНІСТЬ

Олійник Н. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Анотація:** Незважаючи на майже двохсотрічний досвід застосування та значні обсяги використання, з якими не може зрівнятися жоден інший композиційний матеріал, залізобетон і досі залишається недостатньо вивченим. Необхідно уточнювати методи розрахунку конструкцій з метою повного врахування факторів, що впливають на їхню роботу під навантаженням.

Через особливості своєї структури бетон є багатокомпонентним і багатофазним полікристалічним утворенням, що має розвинену систему макро- та мікродефектів, які виникають у процесі формування.

Оскільки бетон як конструкційний матеріал формується безпосередньо в самій конструкції або виробі, практично можливим є контроль його кількісних і якісних параметрів лише після отримання готового виробу чи конструкції.



Оскільки склад бетону впливає на структуру, міцнісні характеристики та деформаційні властивості залізобетонних конструкцій, що працюють під дією зовнішніх впливів, виникає необхідність його більш ґрунтовного дослідження та визначення оптимальних компонентів з метою забезпечення експлуатаційної надійності конструкцій.

Під час технологічної обробки бетону у виробі виникають технологічні тріщини на всіх рівнях структурних неоднорідностей матеріалу, які, будучи структурними параметрами бетону, визначають пошкоджуваність конструкцій, а отже — їхню експлуатаційну надійність.

Спрямована зміна технологічної пошкодженості дозволяє змінювати характер тріщиноутворення та руйнування структури. Використання мінерального наповнювача у певній кількості та з визначеною дисперсністю дає змогу керувати процесами формування структури бетону та регулювати його початкові об'ємні зміни, а отже — технологічну пошкодженість, з метою отримання будівельних конструкцій із заданими властивостями.

Результати дослідження виявили вплив наповнювачів на початкову пошкодженість бетону та на його призматичну міцність. Оскільки технологічна пошкодженість суттєво впливає на міцнісні властивості бетону, це дозволяє призначати склади бетону із заданими характеристиками.

**Ключові слова:** залізобетон, тріщини, технологічна пошкодженість, призматична міцність.

## 1 INTRODUCTION

The quality and operational reliability of a structure largely depend on the materials from which it is made. The load-bearing capacity of a structure is determined by the ability of the material to continue performing its functions under new conditions. Therefore, the task of obtaining construction materials and equipment with specified quality parameters while reducing material consumption remains relevant. One of the ways to reduce the material consumption of structural building materials is the use of fillers.

Fillers are defined as particles of arbitrary shape and surface activity, the size of which does not allow them to create fields of deformation and stress in the surrounding binder, but instead causes their participation in the processes of organizing the structure of the elementary structural elements of the binder.

## 2 ANALYSIS OF LITERARY DATA AND RESOLVING THE PROBLEM

The properties of a structure are determined both by the individual properties of all its subsystems (concrete, reinforcement) and by changes in these properties during internal structural interactions. In turn, the material of the structure (concrete) is itself a subsystem consisting of characteristic structural inhomogeneities. Therefore, when considering composite building materials (CBMs), it is advisable to represent them as complex organized systems arranged according to the principle of “structure within a structure” or “composite within a composite.” This makes it possible to view CBMs as complex self-organizing systems with a hierarchical subordination of different levels of structural inhomogeneities and qualitatively different mechanisms of structure formation.

Operational loads acting on a structure cause deformations and stresses, which the material perceives and redistributes among its structural elements. The load-bearing capacity of a structure is determined by the ability of the material to continue performing its functions under new conditions.

Thus, the structure of a construction can be represented by various models, the type of which depends on the purpose of the analysis and the study of its behavior under operational loads. Describing the structure of a construction makes it possible to identify the most important elements that determine the load-bearing capacity of its individual parts and of the entire structure within similar systems, to reveal the role of the material in its performance, and to determine ways for the targeted design of materials for a specific structure.

In composite materials and structures, in the general case, several characteristic types of damage can be distinguished, differing in their mechanisms of formation [1–2]:

- damage of individual components introduced with them into the material and the structure (initial);
- damage arising during the technological processing of the initial components into the material and its incorporation into the structure (technological);
- damage occurring under the action of operational loads on the structural material (operational).

## 3 PURPOSE AND TASKS OF THE STUDY

Since the composition of concrete affects the structure, strength characteristics, and deformation properties of reinforced concrete structures operating under external influences, there is a need for more in-depth study and determination of optimal components in order to ensure the operational reliability of structures. During the technological processing of concrete into products, technological cracks arise at all levels of structural inhomogeneities in

the material. Being structural parameters of concrete, these cracks determine the damage level of structures and, consequently, their operational reliability. The use of fillers optimized in type, quantity, and dispersion makes it possible to control technological damage in concrete and reinforced concrete structures, thereby improving their physical and technical characteristics.

Operational loads acting on a structure cause deformations and stresses, which the material perceives and redistributes among its structural elements. The load-bearing capacity of a structure is determined by the ability of the material to continue performing its functions under new conditions. The failure of concrete is always associated with the accumulation of damage in its initial structure at different levels and with the absorption of deformation energy, followed by its release on the surfaces of newly formed failure cracks [1, 2].

The object of analysis is defects that arise during the technological processing involved in the production of construction materials and structures. Such defects are classified as technological, initial, or inherent (hereditary) defects. According to [1, 2], technological (inherent) defects include pores, capillaries, cracks of various types, etc., which appear during material and structure formation and are present before the application of operational loads. Since the mechanical characteristics of composite materials, including construction materials, are largely determined by cracks, in what follows technological defects are understood as cracks that arise in the material of building structures during structure formation and exist prior to the application of external loads. It is assumed that cracks formed in the material automatically become cracks of the structure, thereby determining its crack resistance, deformability, and load-bearing capacity. For example, in precast reinforced concrete elements, the share of technologically induced cracks among all defects reaches about 60% [1].

Experimental studies have confirmed that operational cracks develop from technological ones. Since concrete is a material of the “structure within a structure” type, where each larger block consists of a combination of smaller ones, it can be assumed that volumetric deformations of each such block may lead to its fragmentation into sub-blocks. In this case, the crack pattern within a block reproduces the crack pattern at a higher scale level. Such fragmentation of structural blocks leads to the intensive development of operational cracks. Since the mechanical characteristics of composite materials are largely determined by cracks, it is assumed that cracks define the level of damage in the material and, consequently, in the structure.

A directed change in technological damage makes it possible to alter the nature of crack formation and structural failure. The use of mineral fillers in specific amounts and with a certain dispersion allows control over the processes of concrete structure formation and regulation of its initial volumetric changes, and thus technological damage, in order to obtain building structures with the required properties.

Mineral fillers, influencing the physical and mechanical properties of cement paste, determine its material consumption, which depends on the efficiency of using the clinker component of cement. Fillers are particles of arbitrary shape and surface activity, whose size does not allow them to create deformation and stress fields in the surrounding viscous medium but ensures their participation in the processes of structuring a material with specified properties. Fillers that do not contain chemically active components (low-activity mineral fillers) do not enter into chemical reactions with other components of the cement binder and mixing water. However, by influencing the physical and mechanical properties of cement paste, they determine its material consumption, which depends on how efficiently the clinker component is utilized. The more fully the potential properties of the most expensive and energy-intensive component of cement composites are used, the lower the material

consumption. It has been proven that material consumption can be reduced by 15–21% through the use of fillers optimized in type and qualitative composition.

#### 4 BASIC RESULTS

To obtain experimental data for the study of bending reinforced concrete elements and concrete specimens, an experiment consisting of nine tests was conducted. Portland cement with a specific surface area close to 300 m<sup>2</sup>/kg, produced by co-grinding clinker and dihydrate gypsum, was used as the binder. Fine quartz sand with specific surface areas of  $S_y = 100$ , 200, and 300 m<sup>2</sup>/kg, previously ground in a ball mill, was used as the filler. The sand was added to the binder in amounts of 8, 10, and 12% by mass. The specific surface area and quantity of the filler, depending on the concrete composition, are presented in Table 1. The filler was introduced directly into the concrete mix during its preparation.

The concrete composition per 1 m<sup>3</sup> was as follows: crushed stone – 1100 kg, sand – 171 kg, water – 140 kg, cement – 350 kg. Experimental studies were carried out on prism specimens with dimensions of 10 × 10 × 40 cm.

To study the initial (technological) damage of concrete prisms, attention was focused on the network of surface cracks. For a more accurate assessment of the technological damage of the specimens, crack manifestation was observed after the specimens had reached an age of 200–220 days, following carbonation—that is, the development of physical and chemical processes under the influence of atmospheric CO<sub>2</sub> in the presence of moisture, during which the concrete surface became covered with a network of fine cracks. Surface cracks were revealed by immersing the specimens in tannin solutions for 30–40 minutes and then dried in the laboratory for two days. Changes in the alkalinity of the concrete around the cracks altered the color of the tannin, thereby revealing and recording the cracks.

As a result of the studies on the lateral faces of the prisms, the crack lengths ( $T_o$ , cm) and the following average characteristics were obtained: the coefficient of technological damage by area, and the coefficients of technological damage in characteristic sections of the prisms (longitudinal and transverse), which are presented in Table 1.

**Table 1**

Coefficients of technological damage ( $K_pL$ ,  $K_nS$ ) and lengths of technological cracks ( $T_o$ ) determined for the prisms

| № composition | $H$ , % | $S_y$ , m <sup>2</sup> /kg | Longitudinal section ( $L_L = 40$ sm) |                  | Transverse section ( $L_n = 10$ sm) |                  | Виділена площа ( $S = 100$ sm <sup>2</sup> ) |                  |
|---------------|---------|----------------------------|---------------------------------------|------------------|-------------------------------------|------------------|--|------------------|
|               |         |                            | $T_o$ , sm                            | $K_{nL}$ , sm/cm | $T_o$ , см                          | $K_{pL}$ , cm/cm | $T_o$ , см                                   | $K_{nS}$ , cm/cm |
| 1             | 8       | 100                        | 100,3                                 | 0,399            | 27,3                                | 0,367            | 136  | 1,36             |
| 2             |         | 200                        | 113                                   | 0,354            | 29,3                                | 0,341            | 125  | 1,25             |
| 3             |         | 300                        | 135,7                                 | 0,295            | 35,3                                | 0,283            | 78   | 0,78             |
| 4             | 10      | 100                        | 127                                   | 0,315            | 32,2                                | 0,311            | 88   | 0,88             |
| 5             |         | 200                        | 120,6                                 | 0,332            | 32,5                                | 0,308            | 99   | 0,99             |
| 6             |         | 300                        | 142                                   | 0,282            | 38,5                                | 0,260            | 65   | 0,65             |
| 7             | 12      | 100                        | 112                                   | 0,357            | 30,8                                | 0,325            | 116  | 1,16             |
| 8             |         | 200                        | 110,3                                 | 0,363            | 31,4                                | 0,318            | 106  | 1,06             |
| 9             |         | 300                        | 129,8                                 | 0,308            | 33,5                                | 0,299            | 73   | 0,73             |

Analyzing the influence of the amount and dispersion of the filler on the technological damage of concrete prisms, it was found that the maximum value of the technological damage coefficient of concrete, determined from the transverse section of prism specimens, is

achieved at a filler content of  $H = 8\%$  by mass of the binder and a dispersion of  $S_y = 100 \text{ m}^2/\text{kg}$  (0.367), while the minimum value is observed at a filler content of  $H = 10\%$  and a dispersion of  $S_y = 300 \text{ m}^2/\text{kg}$  (0.26).

The maximum value of the technological damage coefficient of concrete, determined from the longitudinal section of prism specimens, is achieved at a filler content of  $H = 8\%$  by mass of the binder and a dispersion of  $S_y = 100 \text{ m}^2/\text{kg}$  (0.399), while the minimum value is observed at a filler content of  $H = 10\%$  and a dispersion of  $S_y = 300 \text{ m}^2/\text{kg}$  (0.282).

The maximum value of the technological damage coefficient of concrete, determined over the area of prism specimens, is achieved at a filler content of  $H = 8\%$  by mass of the binder and a dispersion of  $S_y = 100 \text{ m}^2/\text{kg}$  (1.36), while the minimum value is observed at a filler content of  $H = 10\%$  and a dispersion of  $S_y = 300 \text{ m}^2/\text{kg}$  (0.65).

To assess the influence of technological damage in concrete, nine series of concrete prisms with different compositions were tested, and the prismatic strength of concrete ( $R_b$ ), presented in Table 2, was determined. The value of the prismatic strength of concrete, depending on the quantity and quality of the filler, varies within the range from 27.14 to 34.35 MPa (by 26.6%).

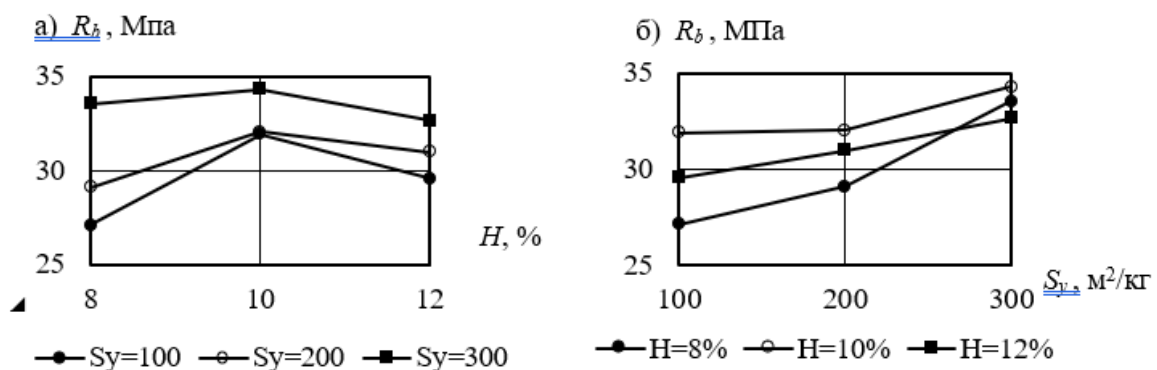
**Table 2**

Values of prismatic strength

| № composition | $H, \%$ | $S_y, \text{m}^2/\text{kg}$ | $R_b, \text{MPa}$ |
|---------------|---------|-----------------------------|-------------------|
| 1             | 8       | 100                         | 27,14             |
| 2             |         | 200                         | 29,12             |
| 3             |         | 300                         | 33,58             |
| 4             | 10      | 100                         | 31,95             |
| 5             |         | 200                         | 32,07             |
| 6             |         | 300                         | 34,34             |
| 7             | 12      | 100                         | 29,58             |
| 8             |         | 200                         | 31,00             |
| 9             |         | 300                         | 32,67             |

The influence of filler content on the prismatic strength of concrete is shown in Fig. 1a. The maximum change in prismatic strength (17.7%) is achieved when increasing  $H$  from 8% to 10% at  $S_y = 100 \text{ m}^2/\text{kg}$ . The minimum change in  $R_b$  is observed when varying  $H$  from 8% to 10% at  $S_y = 300 \text{ m}^2/\text{kg}$ .

The influence of filler dispersion on the prismatic strength of concrete is shown in Fig. 1b.

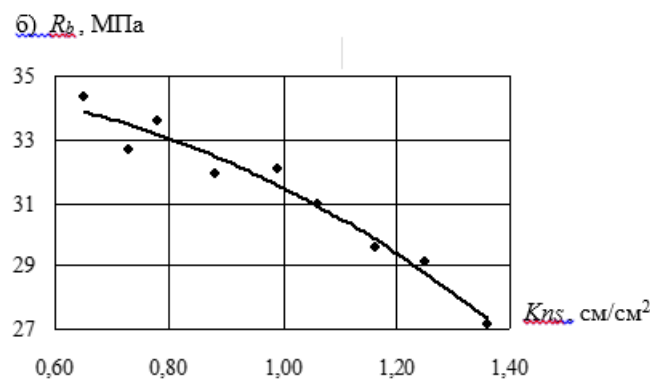


**Fig. 1.** Influence on the prismatic strength of concrete of the following factors:  
(a) filler content; (b) filler dispersion

The maximum value of the prismatic strength of concrete is observed at a filler content of  $H = 10\%$  by mass of the binder and a dispersion of  $Sy = 300 \text{ m}^2/\text{kg}$  (34.35 MPa), while the minimum value of  $R_b$  is recorded at a filler content of  $H = 8\%$  and a dispersion of  $Sy = 100 \text{ m}^2/\text{kg}$  (27.14 MPa).

Analyzing the values of prismatic strength (Table 1) and the coefficients of technological damage of prism specimens (Table 2), it can be noted that the minimum strength value of 27.14 MPa ( $H = 8\%$ ;  $Sy = 100 \text{ m}^2/\text{kg}$ ) corresponds to the maximum value of the coefficient  $K_nS = 1.36 \text{ cm}/\text{cm}^2$  over the selected area. Similarly, for  $K_pL$  along both directions, the values are 0.399 in the transverse section and 0.367 in the longitudinal section.

Conversely, the maximum strength value of 34.34 MPa ( $H = 10\%$ ;  $Sy = 300 \text{ m}^2/\text{kg}$ ) corresponds to the minimum value of the coefficient  $K_nS = 0.65 \text{ cm}/\text{cm}^2$ . The values of  $K_pL$  for both considered directions are also minimal (0.282 and 0.260, respectively) in the same sections of the prisms. This relationship is clearly illustrated in Figs. 2 and 3.



**Fig. 2.** Influence of technological damage, determined over the selected area of prism specimens, on prismatic strength

The influence of technological damage on the prismatic strength of concrete has been established. For  $R_b$ , the minimum value of 27.14 MPa ( $H = 8\%$ ;  $Sy = 100 \text{ m}^2/\text{kg}$ ) corresponds to the maximum value of the coefficient  $K_nS = 1.36 \text{ cm}/\text{cm}^2$  over the selected area. Conversely, the maximum value of 34.34 MPa ( $H = 10\%$ ;  $Sy = 300 \text{ m}^2/\text{kg}$ ) corresponds to the minimum value of the coefficient  $K_nS = 0.65 \text{ cm}/\text{cm}^2$ .

Figure 4a presents the relationship between the prismatic strength of concrete and technological damage determined from the transverse section of the prism and expressed through the technological damage coefficient  $K_nL$  in the form

$$R_b = -225.35 K_nL^2 + 69.24 K_nL + 31.833.$$

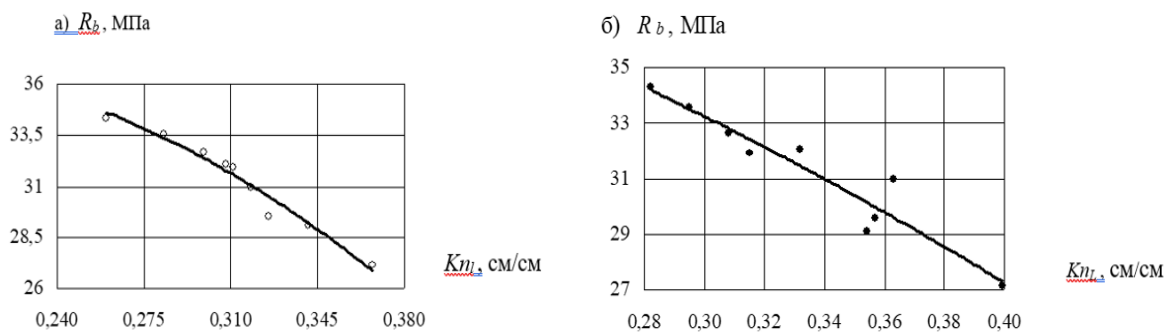
As can be seen from the graph, with an increase in  $K_nL$ , the strength decreases from 34.7 to 27.05 MPa (by 28.28%). The largest deviation from the graph (1.49%) is observed at a filler content of  $H = 12\%$  and a dispersion of  $Sy = 100 \text{ m}^2/\text{kg}$ ; the smallest deviation (0.06%) is observed in other cases. In general, the deviations range from 1.6% to 0.08%.

Figure 3b shows the relationship between the prismatic strength of concrete and technological damage determined from the longitudinal section of the prism and expressed through the technological damage coefficient  $K_nL$  in the form

$$R_b = -57.727 K_nL^2 - 19.449 K_nL + 44.274.$$

As follows from the graph, with an increase in  $K_nL$ , the strength decreases from 34.25 to 27.39 MPa (by 25.05%). The maximum deviation from the graph (2.89%) is observed at a filler content of  $H = 12\%$  and a dispersion of  $Sy = 200 \text{ m}^2/\text{kg}$ ; the minimum deviation (0.05%)

is observed at  $H = 10\%$  and  $H = 12\%$  with  $S_y = 300 \text{ m}^2/\text{kg}$ . In other cases, the deviations range from 0.12% to 1.39%.



**Fig. 3.** Influence of technological damage on prismatic strength, determined from: (a) the transverse section of prism specimens; (b) the longitudinal section of prism specimens.

## 5 DISCUSSION OF THE RESULTS OF THE STUDY

The study confirmed that the composition of concrete significantly affects its structure, strength, and deformation properties of reinforced concrete structures. During the technological processing of concrete into products, technological cracks form at all levels of structural heterogeneity, determining the initial damage of the material and, consequently, the operational reliability of the structures. Experimental data showed that most service cracks develop from technological ones, highlighting the role of initial defects in the behavior of structures under load.

The analysis indicated that technological cracks forming in the concrete before the application of service loads automatically become structural defects of the construction, influencing its crack resistance, deformability, and load-bearing capacity. In precast reinforced concrete elements, the proportion of technological cracks reaches approximately 60% of the total defects. Due to the “structure-in-structure” nature of concrete, volumetric deformations of large blocks can lead to their fragmentation into sub-blocks, reproducing the crack pattern at a larger scale and contributing to the intensive development of service cracks.

The use of mineral fillers with optimal type, quantity, and dispersion allows control over the concrete structure formation, regulation of its initial volumetric changes, and technological damage, thereby enhancing the physical and mechanical properties of concrete and reinforced concrete structures. Mineral fillers, affecting the properties of the cement stone, determine the material consumption of the concrete mix, which depends on the efficiency of clinker utilization. Experimental results confirmed the possibility of reducing material consumption by 15–21% through the optimal selection of fillers by type and dispersion, simultaneously improving the operational reliability of structures.

Thus, the results emphasize the critical role of technological cracks in determining the strength and durability of concrete structures and demonstrate the effectiveness of using optimized fillers to control technological damage.

## 6 CONCLUSIONS

The conducted studies allow us to conclude that as the damage of concrete increases, its strength decreases, whereas a reduction in damage leads to an increase in strength. The

mechanical characteristics of composite materials are largely determined by cracks; therefore, cracks define the damage of the material and, consequently, of the structure.

Such an influence of fillers on the initial damage allows for the design of concrete mixes with specified properties and highlights the need for further research, particularly regarding the deformation properties of concrete.

## 7 ETHICS DECLARATIONS

The author has no relevant financial or non-financial interests to disclose

## References

1. Dorofeev V.S., Vyrovyy V.M. Technological damage to building materials and structures. – Odesa: Misto maystriv, 1998. – 168 p.
2. Oliynyk N.V. The influence of technological damage to concrete on the strength and crack resistance of bending reinforced concrete elements in normal sections: Abstract. Odesa, 2007. 17 p.
3. Dorofeyev Vitaliy and Pushkar Natalia. The bearing-capacity of precast beams with vertical contact plane // III International Scientific Conference “EcoComfort and current construction issues”, September 14-16, 2022. Lecture Notes in Civil Engineering // Lviv, Ukraine: Lviv Polytechnic National University, 2022. – P. 67-75.
4. Dorofeev V.S., Mironenko I.M., Pushkar N.V. The influence of concrete composition on the formation of technological damage and physical and mechanical properties // Materials of the conference “Problems of emergency situations”. – Kharkiv, 2022. – P. 59-60.
5. Dorofeyev Vitaliy, Myronenko Igor and Pushkar Natalia. The Effect of Technological Damage on the Properties and Reliability of Construction Materials and Structures / Applied Mechanics and Materials (AMM ) ISSN: 1662-7482, Vol. 908, pp 149-156, Trans Tech Publications Ltd, Switzerland, 08.2022.
6. Dorofeev V.S., Zinchenko G.V., Pushkar N.V. The influence of the structure and technological damage of concrete on the full deformation diagram // Bulletin of the Kherson National Technical University No. 4 (83). – Kharkiv, 2022. – P. 9-15.
7. Blikharsky, Y., Selejdak, J., kopiika, N., Vashkevych, R.: Study of concrete under combined action of aggressive environment and long-term loading. materials 14(21), 6612 (2021). <https://doi.org/10.3390/ma14216612>.
8. Blikharsky, Z., Sobol, k., markiv, T., Selejdak, J.: Properties of concretes incorporating recycling waste and corrosion susceptibility of reinforcing steel bars. materials 14(10), 2638 (2021).

## Література

1. Дорофеев В.С., Вировий В.М. Технологічна пошкодженість будівельних матеріалів і конструкцій. – Одеса: Місто майстрів, 1998. – 168 с.
2. Олійник Н.В. Вплив технологічної пошкодженості бетону на міцність та тріщиностійкість згинаються залізобетонних елементів за нормальними перерізами : Автореферат. Одеса, 2007. 17 с.
3. Dorofeyev Vitaliy and Pushkar Natalia. The bearing-capacity of precast beams with vertical contact plane // III International Scientific Conference “EcoComfort and current construction issues”, September 14-16, 2022. Lecture Notes in Civil Engineering // Lviv, Ukraine: Lviv Polytechnic National University, 2022. – P. 67-75.
4. Дорофеев В.С., Мироненко І.М., Пушкар Н.В. Вплив складу бетону на формування технологічної пошкодженості і фізико-механічні властивості // Матеріали конференції «Проблеми надзвичайних ситуацій». – Харків, 2022. – С. 59-60.
5. Dorofeyev Vitaliy, Myronenko Igor and Pushkar Natalia. The Effect of Technological Damage on the Properties and Reliability of Construction Materials and Structures / Applied Mechanics and Materials (AMM ) ISSN: 1662-7482, Vol. 908, pp 149-156, Trans Tech Publications Ltd, Switzerland, 08.2022.



6. Дорофєєв В.С., Зінченко Г.В., Пушкар Н.В. Вплив структури і технологічної пошкодженості бетону на повну діаграму деформування // Вісник Херсонського національного технічного університету №4 (83). – Харків, 2022. – С. 9-15.
7. Blikharskyu, Y., Selejdak, J., kopiiika, N., Vashkevych, R.: Study of concrete under combined action of aggressive environment and long-term loading. materials 14(21), 6612 (2021). <https://doi.org/10.3390/ma14216612>.
8. Blikharskyu, Z., Sobol, k., markiv, T., Selejdak, J.: Properties of concretes incorporating recycling waste and corrosion susceptibility of reinforcing steel bars. materials 14(10), 2638 (2021).

Стаття надійшла до редакції 02.10.2025

Стаття прийнята до друку 10.12.2025

Дата публікації статті 26.03.2026

**Natalia Oliynyk**

Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

PhD., Assistant Professor

Didrikhson 4, str., Odesa, Ukraine 65029

[natali@odaba.edu.ua](mailto:natali@odaba.edu.ua)

ORCID ID: 0000-0003-4492-7003

*For references:*

N. Oliynyk (2026). Determination of the influence of technological damage to concrete on its prism strength. Mechanics and Mathematical Methods. VIII (1). 141–150.

*Для посилань:*

Олійник Н. В. Визначення технологічної міцності бетону та її вплив на призматичну міцність, 2026. Т. VIII. № 1. С. 141–150.

[Determination of the influence of technological damage to concrete on its prism strength](#) © 2026 by [N. Oliynyk](#) is licensed under [CC BY 4.0](#)

УДК 530.145:519.21

## АНАЛІЗ МУЛЬТИМНОЖИННОЇ РОЗМІРНОСТІ В НЕЧІТКИХ ГРАФАХ ДІЛЬНИКІВ НУЛЯ, ПОВ'ЯЗАНИХ З КОМУТАТИВНИМИ КІЛЬЦЯМИ

Стахів Р. Ю.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

**Анотація:** У статті проведено ґрунтовний аналіз концепції мультимножинної розмірності у нечітких графах дільників нуля, що моделюють внутрішню структуру комутативних кілець. Розглянуто як класичні підходи до побудови графів дільників нуля, так і сучасні модифікації, що враховують як мультиплікативну, так і адитивну структуру кілець. Введено формальні означення мультимножинної розмірності у нечітких графах, побудованих на основі функцій нечіткої належності, що дозволяють відображати ступінь зв'язку між дільниками нуля у дробовій формі. Наведено приклади обчислення мультимножинної розмірності для конкретних класів кілець, зокрема для кільця залишків за модулем добутку простих чисел, що демонструє залежність цього інваріанта від фундаментальних алгебраїчних характеристик. Показано, що мультимножинна розмірність може бути використана як кількісна характеристика складності нечіткого графа дільників нуля та як засіб для класифікації кілець за топологічними властивостями їхніх графових моделей.

Особливу увагу приділено аналізу наявних підходів у світовій літературі, зокрема роботам, присвяченим стисненим графам дільників нуля та нечітким зірковим або двочастковим структурам для кілець із простими параметрами. На цій основі обґрунтовано доцільність узагальнення метрик мультимножинної розмірності для більш складних алгебраїчних об'єктів, зокрема для модульних структур, фактор-модулів та нескінченних ланцюгів підмодулів.

У роботі окреслено перспективи застосування отриманих результатів у дослідженнях не лише комутативних, а й некомутативних кілець, що відкриває можливості для формування універсальної методики опису внутрішніх взаємозв'язків елементів алгебраїчних систем за допомогою нечітких графових моделей. Результати можуть бути використані у подальших теоретичних дослідженнях з алгебри, комбінаторики та теорії нечітких структур, а також слугувати підґрунтям для практичних застосувань у криптографії, теорії кодів та інших галузях, де важлива характеристика складності алгебраїчних структур.

З огляду на отримані результати, робота відкриває перспективи для дослідження взаємозв'язків між нечіткими графами дільників нуля та іншими графовими інваріантами комутативних і некомутативних кілець, що може стати підґрунтям для побудови більш загальних моделей аналізу алгебраїчних структур у суміжних галузях, таких як криптографія, теорія інформації та топологічна алгебра.

**Ключові слова:** функція належності, нечітка множина, розкладання, нечітка матриця, ідеал кільця.

## ANALYSIS OF MULTISSET DIMENSION IN FUZZY ZERO-DIVISOR GRAPHS ASSOCIATED WITH COMMUTATIVE RINGS

R. Stakhiv<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

**Abstract:** The article provides a thorough analysis of the concept of multiset dimension in fuzzy graphs of zero divisors that model the internal structure of commutative rings. Both classical approaches to constructing zero divisor graphs and modern modifications that take into account both the multiplicative and additive structures of rings are considered. Formal definitions of multi-set dimension in fuzzy graphs constructed on the basis of fuzzy membership functions are introduced,



allowing the degree of connection between zero divisors to be represented in fractional form. Examples of calculating multi-set dimension for specific classes of rings are given, in particular for the ring of residues modulo the product of prime numbers, which demonstrates the dependence of this invariant on fundamental algebraic characteristics. It is shown that multiset dimension can be used as a quantitative characteristic of the complexity of a fuzzy graph of zero divisors and as a means for classifying rings according to the topological properties of their graph models.

Particular attention is paid to the analysis of existing approaches in the world literature, in particular to works devoted to compressed graphs of zero divisors and fuzzy star or bipartite structures for rings with simple parameters. On this basis, the feasibility of generalizing multi-set dimension metrics for more complex algebraic objects, in particular for modular structures, factor modules, and infinite chains of submodules, is justified.

The paper outlines the prospects for applying the obtained results in the study of not only commutative but also noncommutative rings, which opens up opportunities for the formation of a universal methodology for describing the internal relationships between elements of algebraic systems using fuzzy graph models. The results can be used in further theoretical research in algebra, combinatorics, and fuzzy structure theory, as well as serve as a basis for practical applications in cryptography, code theory, and other fields where the complexity of algebraic structures is important.

Given the results obtained, the work opens up prospects for studying the relationships between fuzzy graphs of zero divisors and other graph invariants of commutative and noncommutative rings, which may become the basis for constructing more general models for analyzing algebraic structures in related fields such as cryptography, information theory, and topological algebra.

**Keywords:** membership function, fuzzy set, decomposition, fuzzy matrix, ring ideal.

## 1 ВСТУП

В межах структури комутативних кілець дільники нуля відіграють центральну роль, оскільки вони відображають інформацію про внутрішній розклад і взаємодію елементів всередині алгебраїчної структури. Елемент  $x$  певного комутативного кільця  $R$  є тоді дільником нуля, коли він принаймні має один ненульовий елемент  $y$ , тобто щоб було дійсним  $xy = 0$ :

$$Z(R) = \{x \in R \exists y = 0 : xy = 0\} \quad (1)$$

Аналіз множини всіх дільників нуля забезпечує розуміння основоположних властивостей кілець, особливо у контексті концепції ідеальних структур та розкладання на множники.

Задля забезпечення наочності комплексних взаємовідношень між дільниками нуля, у межах поточного дослідження вводяться нечіткі графи у ролі моделі. На відміну від класичних графів, нечіткі графи уможливають поступове зважування залежностей між парами дільників нуля, таким чином математично фіксуючи концептуальну нечіткість цих взаємовідношень. Іншими словами, якщо у класичного графа між вершинами (дільниками нуля) або є зв'язок, або його немає, нечіткий граф ж дозволяє сказати, що зв'язок між двома вершинами може бути частковим, тобто з певним «ступенем» сили. Наприклад, що два елементи пов'язані на 70%, або що їхній зв'язок сильніший чи слабший. Цей ступінь зв'язку виражається числом від 0 до 1, і це є «зважуванням» залежності.

Основною задачею поточної роботи є введення мультимножинної розмірності в якості ключової складової, яка чисельно визначає складність взаємозв'язку у таких нечітких графах. За допомогою цієї величини вимірюється необхідна кількість характерних референтних елементів для виявлення різниці між усіма вершинами на базі чітких патернів їхніх взаємозв'язків з цими елементами. Самі референтні елементи являють собою спеціально вибрані вершини у графі, які виконують роль опорних точок, з якими порівнюються всі інші вершини.

Отже, головним питанням, яке досліджуватиметься у цій роботі, полягає у тому, як взаємозалежать мультимножинна розмірність нечіткого графа дільника нуля та алгебраїчна структура комутативного кільця, яке лежить в основі цього графа.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Дослідження структури комутативних кілець за допомогою графових моделей має глибокі теоретичні витoki й постійно розвивається завдяки внеску низки науковців, які послідовно розширюють класичні підходи та формулюють нові концепції. Так, у роботі А. Черрабі, Х. Ессануні, Е. Джаббурі та А. Уадфеля [4] запропоновано новий напрямок у вивченні графів дільників нуля, де вершинами виступають ненульові дільники нуля кільця  $R$ . Цей підхід логічно продовжує класичні праці Д. Андерсона та А. Бадаві [3], у яких основна увага зосереджувалася на побудові графа дільників нуля, де зв'язки між вершинами встановлюються за умови, що добуток відповідних елементів дорівнює нулю. На відміну від цих традиційних конструкцій, А. Черрабі разом зі співавторами розширюють поняття зв'язності, вводячи критерій сполучення вершин не лише через нульовий добуток, а й через належність суми відповідних елементів множині дільників нуля. Це нововведення дозволяє водночас враховувати як мультиплікативну, так і адитивну структуру кільця, що відкриває ширші можливості для аналізу внутрішньої організації кільцевих елементів.

Для ілюстрації відмінностей між класичним та розширеним варіантами графа

автори демонструють приклади для конкретних кілець, зокрема  $Z_6$  і  $Z_2 \times Z_4$ , показуючи, як змінюється індукований підграф загального графа кільця. Особливу увагу у цьому контексті приділено метричним характеристикам: доведено, що новий тип графа завжди є зв'язним, має діаметр не більший за два, а принаймні за трьох вершинах обхват дорівнює трьом, що засвідчує гарантовану наявність трикутників у його структурі. Також встановлено умови, за яких розширений граф збігається з класичними варіантами, зокрема для скінченних комутативних кілець повнота графа виявляється тісно пов'язаною з локальністю чи з будовою кільця як добутку тіл, а для кілець цілих чисел за модулем – із простими степенями або добутками двох простих чисел. Серед інших важливих аспектів варто відзначити розгляд зіркоподібної підструктури, що виникає завдяки наявності вершин, з'єднаних з усіма іншими, а також аналіз гіпотріангульованості як наслідку існування трикутників і квадратів у топології графа.

Інший напрямок розвитку цієї теми пов'язаний з нечіткими графами дільників нуля. Так, А. Куппан та Дж. Раві Санкар [7] запропонували концепцію нечіткої вершинної та нечіткої ребрової множини для кільця залишків по модулю  $n$ . У їхній роботі наведено побудову графа для випадків, коли  $n$  набуває вигляду  $2p, 3p, 5p, 7p, 2p, 3p, 5p, 7p$  або  $pq$ , де  $p$  і  $q$  – прості числа. Для кожного з цих сценаріїв автори строго доводять, що відповідна нечітка структура набуває форми або зірки, або повного двочасткового графа в нечіткій інтерпретації. Ключовим тут є поділ вершин на дві нечіткі підмножини, де зв'язки задаються множинами нечітких ребер з вагами, що визначаються простими дільниками. Такий підхід дозволяє моделювати ступінь участі кожного елемента через дробові значення належності, зокрема шляхом виокремлення підмножин кратних простому числу. Як наслідок, для структур виду  $Z_{2p}$  утворюється нечіткий зірковий граф, тоді як для  $Z_{3p}, Z_{5p}, Z_{7p}$  і  $Z_{pq}$  – нечіткі повні двочасткові графи з кількістю вершин, що визначається простими параметрами.

У цьому контексті доречно згадати також дослідження Д. Должана [5], який акцентує увагу на метричній розмірності графів дільників нуля для матричних напівкілець, побудованих над комутативними повністю антинегативними напівкільцями. Автор розробляє комбінаційний підхід для знаходження точної формули метричної розмірності графа  $\Gamma(M_n(B))$ , де  $B$  – булеве напівкільце. Використовуючи множини  $T_{i,j}$ , що задають матриці з визначеними нульовими рядками та стовпцями, Д. Должан демонструє, що всі такі матриці мають однакове сусідство у графі та становлять класи близнюків. Застосування принципу включень-виключень дозволяє точно підрахувати кількість унікальних шаблонів матриць і довести, що будь-яка розв'язуюча множина повинна містити всі, крім щонайбільше одного представника кожного класу близнюків. Важливим результатом цього підходу є формулювання узагальненої комбінаційної формули для метричної розмірності для довільного  $n$  з можливістю перенесення висновків на загальний випадок скінченних комутативних повністю антинегативних напівкілець.

Особливе місце у сучасних дослідженнях посідає також поняття мультимножинної розмірності, яке розвивають Н. Алі, Х. М. А. Сідіккі, М. І. Куреші та інші [2; 1]. Зокрема, Н. Алі з колегами досліджують властивості стиснених графів дільників нуля (Compressed Zero-Divisor Graphs, CZDG), які відрізняються від класичних тим, що враховують еквівалентність елементів кільця за їх англіяторами. Такий підхід дозволяє значно зменшити кількість вершин без втрати інформації про структуру дільників нуля, що спрощує аналіз та класифікацію кілець за допомогою інваріантів CZDG. У цих роботах наведено умови для визначення розмірності CZDG, наведено приклади для

скінченних локальних кілець, кілець цілих чисел по модулю  $p^2$ , циклічних кілець і кілець многочленів, що підкреслює універсальність застосування цього поняття. Водночас у подальших дослідженнях автори [1; 10] розширюють цю концепцію на нечіткі графи дільників нуля, де мультимножинна розмірність розглядається як засіб глибшого опису внутрішньої топології зв'язків у нечітких структурах.

Отже, наявний аналіз літературних джерел засвідчує як сталість інтересу до вивчення графів дільників нуля, так і послідовний розвиток нових підходів – від класичних конструкцій І. Бека та Д. Ф. Андерсона до сучасних досліджень мультимножинної розмірності в нечітких та стиснених графах. Це створює обґрунтоване підґрунтя для постановки задачі подальшого дослідження, яке спрямоване на комплексний аналіз мультимножинної розмірності в нечітких графах дільників нуля для ширшого класу комутативних кілець, а також на пошук універсальних інваріантів, здатних описати структурну складність таких графів і встановити нові зв'язки між властивостями кілець та їх графових моделей.

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Комутативне кільце  $(R, +, \cdot)$  являє собою алгебраїчну структуру, яка утворює Абелеву (комутативну) групу  $(R, +)$ , в якій операція множення є асоціативною, містячи одиничний елемент  $1 \neq 0$ . Ідеал  $I \subseteq R$  являє собою адитивну підгрупу, яка замкнена відносно множення на будь-який елемент кільця (2)

$$\forall r \in R, \forall a \in I : ra \in I, \quad (2)$$

причому елемент  $x \in R$  є тільки тоді дільником нуля, коли діє умова  $\exists y \in R, y \neq 0, xy = 0$ , в результаті чого впливає (3):

$$\forall x, y \in R, xy = 0 \rightarrow x \in Z(R) \text{ або } y \in Z(R). \quad (3)$$

Для більшої наочності концепції дільників нуля наведено приклади декількох комутативних кілець:

- кільце залишкового класу  $Z_n$ :  $Z(Z_n) = \{k \in Z_n \mid \gcd(k, n) = 1, k \neq 0\}$ , де, у наприклад  $Z_{12}$  такі числа виступають в ролі дільників нуля: 2,3,4,6,8,9,10;
- фактор-кільце  $Z_{[x]}/(x^2)$ , яке містить усі елементні форми  $a + bx$ , де  $x^2 = 0$ ; таким чином кожне  $bx$  являє собою дільник нуля;
- просте локальне кільце з головним ідеалом, тобто те, яке має чіткий максимальний ідеал, тобто  $Z_{pk}$  де  $p$  є простим числом.

Основними властивостями таких кілець виступають: той факт, що в результаті прямого добутку двох кілець діє (4):

$$Z(R_1 \times R_2) = (Z(R_1) \times R_2) \cup (R_1 \times Z(R_2)); \quad (4)$$

та той факт, що у фактор-кільці дільник нуля зберігається, якщо ідеал, за яким здійснюється розкладення, сам є дільником нуля. Множина дільників нуля  $Z(R)$  як правило не утворює жодного ідеалу, оскільки вона зазвичай не є замкненою відносно додавання.

Виходячи з  $Z(R)$ , будується граф, який формально може бути описаний за допомогою (5):



$$G_f(Z(R)) = (V, E, \mu), \quad (5)$$

де  $V = Z(R)$ ,  $\{0\}$  відповідає множині вершин,  $E$  є множиною ребер, а  $\mu: V \times V \rightarrow [0,1]$  є функцією належності, яка призначає ступінь нечіткості кожній парі вершин. Множина вершин створюється з усіх ненульових дільників нуля. Як вже було зазначено у вступі, два різних дільників нуля  $x, y \in V$  об'єднуються за рахунок ребер, сили яких розглядаються не просто в якості бінарної характеристики, а оцінюються з точки зору нечіткості за посередництва функції належності  $\mu$  між 0 та 1, тобто  $\mu: V \times V \rightarrow [0,1]$ .

Для двох елементів  $x, y$  застосовується (6):

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{|x| + |y|}{|R|}, & \text{якщо } xy = 0; \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \quad (6)$$

Тут,  $|x|$  є належною нормою, або оцінкою, яка відображає відносний розмір у кільцевій структурі. Це визначення передбачає, що належність  $\mu(x, y)$  кількісно визначатиме ступінь взаємодії між елементами, тобто чим “меншими” є залучені елементи, тим сильніше може зважуватися їхнє відношення в графі.

Таким чином, формально повна структура нечіткого графа може виражатися таким (7) чином:

$$G_f(Z(R)) = (V, E, \mu), \mu: V \times V \rightarrow [0,1] \quad (7)$$

Отже, після побудови формальної моделі нечіткого графа дільників нуля на основі множини  $Z(R)$ , далі доцільно зосередитися на кількісній характеристиці складності такої структури, що здійснюється за допомогою мультимножинної розмірності в якості числового показника, що дозволяє оцінити мінімальну кількість опорних вершин, необхідних для повного розрізнення всіх вершин графа на основі унікальних шаблонів їхніх нечітких взаємозв'язків.

#### 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Враховуючи, що для нечіткого графа дільників нуля  $G = (V, E, \mu)$  виконується (8):

$$\dim_M(G) := \min\{k \exists W = \{w_1, \dots, w_k\} \subseteq V, \forall u \in V : r(u|W) - \text{попарно} \quad (8)$$

де ідентифікатор нечіткості (профільний вектор) визначається як

$$r(u|W) = (\mu(u, w_1), \dots, \mu(u, w_k)),$$

він збирає нечіткі відношення між вершинами  $u$  до всіх елементів  $W$  [1].

В якості прикладу необхідно розглянути малий граф з 3 вершинами  $V = \{v_1, v_2, v_3\}$  та даною нечіткою матрицею належності

$$\mu(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 - 6i + j, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$



Якщо обрати  $W = \{v_1, v_2\}$ , тоді профільні вектори відповідають:

$$\begin{cases} r(v_1 | W) = (0, \mu(v_1, v_2)), \\ r(v_2 | W) = (\mu(v_2, v_1), 0), \\ r(v_3 | W) = (\mu(v_3, v_1), \mu(v_3, v_2)). \end{cases}$$

випадку виявлення, що ці вектори є попарно різними, з'являється можливість перевірки того, чи є  $W$  чинною ідентифікаційною множиною. Якщо так, тоді  $\dim_M(G) \leq 2$ . Визначення мінімальної мультимножинної регресії графа здійснюється за рахунок покрокової ідентифікації підходящої підмножини  $W \subseteq V$ , яка робить кожен вершину однозначно відмінною за їхніми профільними векторами [10].

Загалом, процес включає такі покрокові процедури:

- створення нечіткої матриці  $M : M = [\mu(v_i, v_j)]_{i,j}$ , яка містить відповідний кожній парі вершин  $(v_i, v_j)$  ступінь належності;
- пошук кандидатів для опорної вершини  $W : W = \{w_1, \dots, w_k\} \subseteq V$ , де  $k$  покроково збільшується. При цьому мета полягає у тому, що знайти найменше можливе  $k$ ;
- обчислення профільних векторів для кожної вершини  $v_i \in V$  відносно  $W : r(v_i | W) = (\mu(v_i, w_1), \dots, \mu(v_i, w_k))$ ;
- перевірка розрізненості:  $r(v_i | W) = r(v_j | W), \forall i = j$ . Якщо така множина  $W$  знаходиться, виконується  $\dim_M(G) = k$ .

На прикладі тривершинного графа, матриця суміжності (9) якого зображена нижче:

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}, M = \begin{bmatrix} 0 & \mu(v_2, v_1) & \mu(v_3, v_1) \\ \mu(v_1, v_2) & 0 & \mu(v_3, v_2) \\ \mu(v_1, v_3) & \mu(v_2, v_3) & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

якщо обирається  $W = \{v_1, v_2\}$ , тоді для кожної вершини  $v_i : r(v_i | W) = (\mu(v_i, v_1), \mu(v_i, v_2))$ .

В результаті умова набуває такої (10) форми:

$$r(v_1 | W) = r(v_2 | W) = r(v_3 | W) = r(v_i | W). \quad (10)$$

Якщо розглядати топологічну складність графу у контексті цієї розмірності, то здебільшого, розмір, структура ідеалів та можливі розкладення на прямі множники найсильніше впливають на неї. Наприклад, по мірі збільшення кільця  $R$ , множина дільників нуля стає як правило також більш обширною. У зв'язку з цим може збільшуватися кількість вершин у графі, що розширює кількість потенційних пар вершин і таким чином з'єднувальну різноманітність профільних векторів. У багатьох випадках, це сприяє підвищенню необхідної чисельності опорних вершин задля точного забезпечення однозначності.

З точки зору розкладання на прямі множники, якщо кільце  $R$  представляється в якості добутку  $R = R_1 \times R_2$ , тоді для множини дільників нуля виконується (11):

$$Z(R) = (Z(R_1) \times R_2) \cup (R_1 \times Z(R_2)). \quad (11)$$

Вихідна структура графа при цьому може інтерпретуватися як роз'єднане сполучення графів множників, з чого випливає адитивне відношення (12):

$$\dim_M(G_f(Z(R_1 \times R_2))) = \dim_M(G_f(Z(R_1))) + \dim_M(G_f(Z(R_2))). \quad (12)$$

При цьому варто враховувати тенденції, які є різними у випадку застосування окремих варіативностей графів:

- для простих фактор-кілець як  $Z_{p^k}$ , множина дільників нуля зазвичай є “просто” структурованою, що сприяє меншій розмірності;
- у випадку добуткових кілець як наприклад  $Z_6 \cong Z_2 \times Z_3$ , діє адитивне збільшення, згідно з яким мультимножинна розмірність виходить із суми розмірностей часткових кілець;
- щодо кілець із “розгалуженою” структурою ідеалів, тобто тих, де наявні модулярні кільця з декількома простими множниками, вони можуть значно збільшувати кількість відмінних відношень між дільниками нуля. Іншими словами, чим більше простих множників має кільце (розгалужена структура), тим більше різних комбінацій нульових і ненульових частин існує. Це створює багато різних пар елементів, які перемножуються і дають нуль, тобто багато різних відношень.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Задля доведення практичної цінності наведених вище теоретичних надбань необхідно зразково продемонструвати процес визначення мультимножинної розмірності на конкретних комутативних кільцях.

**Приклад 1:**  $Z_{12}$ , в якому для кожної пари  $(x, y)$  визначається проста функція нечіткості (13):

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}(|x| + |y|), & \text{якщо } xy = 0; \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \quad (13)$$

Тоді матриця нечіткості  $M$  для підмножини  $\{2, 6, 8\}$  частково відповідає такому (14) формулюванню:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \mu(6, 2) & \mu(8, 2) \\ \mu(2, 6) & 0 & \mu(8, 6) \\ \mu(2, 8) & \mu(6, 8) & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Якщо обирається  $W = \{2, 6\}$ , результати для  $v_i \in \{2, 6, 8\}$  відповідають (15):

$$r(v_i | W) = (\mu(v_i, 2), \mu(v_i, 6)). \quad (15)$$

У підсумку проводиться перевірка, чи є ці вектори попарно відмінними. Якщо так,  $|W|=2$  є достатнім.

**Приклад 2:** фактор-кільце  $Z_{[x]}/(x^2)$ , де можлива функція нечіткості наведена у (16):

$$\mu(u, v) = \begin{cases} 2/1, & \text{якщо } u \vee v = 0, \\ 0, & u = v; \\ \text{немає зв'язку} & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \quad (16)$$

Якщо обрати 3 елемента  $u_1 = x, u_2 = 1 + x, u_3 = 2 + 3x$  та визначити  $W = \{x\}$ , тоді виконується (17):

$$r(u_i | W) = (\mu(u_i, x)). \quad (17)$$

В результаті показано, що для певних  $u_i$  можуть виникати однакові профільні значення, що означає необхідність наступного референтного елемента.

**Приклад 3:** добуткове кільце  $Z_2 \times Z_4$ , де дільники нуля відповідають  $Z(Z_2 \times Z_4) = (Z(Z_2) \times Z_4) \cup (Z_2 \times Z(Z_4))$ .

Оскільки  $Z_2$  в якості дільника нуля має тільки 0,  $Z_4$  має  $\{2\}$  в якості нього, впливає (18):

$$Z(R) = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,2)\}, \quad (18)$$

де функція нечіткості (19):

$$\mu((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} 0.7, & \text{якщо } (x_1, y_1) = 0 \text{ або } (x_2, y_2) = 0; \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \quad (19)$$

Матриця нечіткості та профільні вектори результують (20) з цього аналогічним чином:

$$M = [\mu(v_i, v_j)], r(v_l | W) = (\mu(v_i, w_1), \dots, \mu(v_i, w_k)). \quad (20)$$

Проте, незважаючи на чітко сформульоване теоретичне підґрунтя щодо мультимножинної розмірності, ефективно застосовуване на практиці, воно має декілька природних обмежень, які вимагають подальшого опрацювання.

Описане у поточному дослідженні адитивне розкладання є лише безпосередньо тоді дійсним, коли структура кільця насправді являє собою пряме добуткове кільце. Для загальний модулів, які характеризуються лише прямим розкладанням суми, або описуються завдяки інших видів розкладання, як наприклад просте, ця адитивність не є гарантованою.

Крім того, викладений матеріал перш за все зосереджувався на застосуванні до скінченних (finite) комутативних кілець. Проте у випадку нескінченних (infinite), до яких наприклад входять  $Z, Q[x]$  або поліноміальні дроби, які передбачають нескінченні множини вершин, виникає ситуація, коли не існує жодної скінченної множини  $W$ , яка б усе ще дозволяла однозначно розрізняти кожну вершину. Це особливо ймовірно, якщо граф дільників нуля має нескінченну кількість компонент або нескінченну щільність.

## 6 ВИСНОВКИ

Отже, проведені обчислення у прикладних випадках демонструють, що мультимножинна розмірність стоїть у прямій залежності від фундаментальних

параметрів кілець. Таким чином, чітко структуровані кільця характеризують як правило невеликою розмірністю, в той час, як розгалужені, або ті, що складаються з розкладань множників, здебільшого корелюють із вищою комплексністю.

Для подальших досліджень, основним питанням виступає можливість застосування теоретичних надбань до загальних модульних структур, де досліджується взаємодія підмодулів, фактор-модулів або нескінченних модульних ланцюгів. До того ж, є сенс розширення представленої методики до некомунікативних кілець.

## 7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автор не має відповідних фінансових чи нефінансових інтересів щодо матеріалів, які слід розкривати.

## Література

1. Ali, N., Siddiqui, H. M. A., Qureshi, M. I., Abdalla, M. E. M., Abd EL-Gawaad, N. S., Tolasa, F. T. On study of multiset dimension in fuzzy zero divisor graphs associated with commutative rings. *International Journal of Computational Intelligence Systems*. 2024. Vol. 17. Article 298. DOI: <https://doi.org/10.1007/s44196-024-00706-2>
2. Ali, N., Siddiqui, H. M. A., Qureshi, M. I., Abdallah, S. A. O., Almahri, A., Asad, J., Akgül, A. Exploring ring structures: Multiset dimension analysis in compressed zero-divisor graphs. *Symmetry*. 2024. Vol. 16. No. 7. Article 930. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym16070930>
3. Anderson D. F., Badawi A. The total graph of a commutative ring. *Journal of Algebra*. 2008. Vol. 320. P. 2706–2719.
4. Cherrabi A., Essannouni H., Jabbouri E., Ouadfel A. On a new extension of the zero-divisor graph. *arXiv* : website. 2019. URL: <https://arxiv.org/abs/1806.11442v2> (last accessed: 06.07.2025).
5. Dolžan D. The metric dimension of the zero-divisor graph of a matrix semiring. *arXiv* : website. 2021. URL: <https://arxiv.org/abs/2111.07717v1> (last accessed: 06.07.2025).
6. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V. Algebras, rings and modules. Vol. 1. Mathematics and its applications. Kluwer Academic Publishers, 2005. 450 p.
7. Kuppan A., Ravi Sankar J. Fuzzy zero divisor graph in a commutative ring. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*. 2021. Vol. 11. Special Issue. P. 42–50. URL: [https://jaem.isikun.edu.tr/web/images/articles/vol.11-Special\\_Issue/05.pdf](https://jaem.isikun.edu.tr/web/images/articles/vol.11-Special_Issue/05.pdf) (last accessed: 27.06.2025).
8. Lucas T. G. The diameter of zero divisor graph. *Journal of Algebra*. 2006. Vol. 301. P. 174–193.
9. Ravi Sankar J., Meena S. Changing and unchanging the domination number of a commutative ring. *International Journal of Algebra*. 2012. Vol. 6. № 27. P. 1343–1352.
10. Simanjuntak, R., Siagian, P., Vetrík, T. The multiset dimension of graphs. *arXiv* : website. 2019. URL: <https://arxiv.org/abs/1711.00225v2> (last accessed: 06.07.2025).

## References

1. Ali, N., Siddiqui, H. M. A., Qureshi, M. I., Abdalla, M. E. M., Abd EL-Gawaad, N. S., & Tolasa, F. T. (2024). On study of multiset dimension in fuzzy zero divisor graphs associated with commutative rings. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 17, Article 298. <https://doi.org/10.1007/s44196-024-00706-2> [In English].
2. Ali, N., Siddiqui, H. M. A., Qureshi, M. I., Abdallah, S. A. O., Almahri, A., Asad, J., & Akgül, A. (2024). Exploring ring structures: Multiset dimension analysis in compressed zero-divisor graphs. *Symmetry*, 16(7), Article 930. <https://doi.org/10.3390/sym16070930> [In English].
3. Anderson, D. F., & Badawi, A. (2008). The total graph of a commutative ring. *Journal of Algebra*, 320, 2706–2719. [In English].

4. Cherrabi, A., Essannouni, H., Jabbouri, E., & Ouadfel, A. (2019). On a new extension of the zero-divisor graph. *arXiv*. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/1806.11442v2> (last accessed: 06.07.2025) [In English].
5. Dolžan, D. (2021). The metric dimension of the zero-divisor graph of a matrix semiring. *arXiv*. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/2111.07717v1> (last accessed: 06.07.2025) [In English].
6. Hazewinkel, M., Gubareni, N., & Kirichenko, V. V. (2005). *Algebras, rings and modules* (Vol. 1). Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers. [In English].
7. Kuppan, A., & Ravi Sankar, J. (2021). Fuzzy zero divisor graph in a commutative ring. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 11(Special Issue), 42–50. Retrieved from [https://jaem.isikun.edu.tr/web/images/articles/vol.11-Special\\_Issue/05.pdf](https://jaem.isikun.edu.tr/web/images/articles/vol.11-Special_Issue/05.pdf) (last accessed: 27.06.2025) [In English].
8. Lucas, T. G. (2006). The diameter of zero divisor graph. *Journal of Algebra*, 301, 174–193. [In English].
9. Ravi Sankar, J., & Meena, S. (2012). Changing and unchanging the domination number of a commutative ring. *International Journal of Algebra*, 6(27), 1343–1352. [In English].
10. Simanjuntak, R., Siagian, P., & Vetrík, T. (2019). The multiset dimension of graphs. *arXiv*. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/1711.00225v2> (last accessed: 06.07.2025) [In English].

Стаття надійшла до редакції 03.09.2025  
Стаття прийнята до друку 03.12.2025  
Дата публікації статті 26.03.2026

**Стахів Ростислав Юрійович**

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,  
аспірант  
вул. Шевченка, 57 Івано-Франківськ, Україна 76018  
[rost.stakhiv@gmail.com](mailto:rost.stakhiv@gmail.com)  
ORCID: 0009-0002-5044-1229

*Для посилань:*

Стахів Р. Ю. Аналіз мультимножинної розмірності в нечітких графах дільників нуля, пов'язаних з комутативними кільцями. *Механіка та математичні методи*, 2026. Т. VIII. № 1. С. 151–161.

*For references:*

R. Stakhiv (2026). Analysis of multiset dimension in fuzzy zero-divisor graphs associated with commutative rings. *Mechanics and mathematical methods*. VIII (1). 151–161.

[Аналіз мультимножинної розмірності в нечітких графах дільників нуля, пов'язаних з комутативними кільцями](#) © 2026 by [Стахів Р. Ю.](#) is licensed under [CC BY 4.0](#)

УДК 512.816.1+517.53+519.21

## ДІЙСНІ СУПЕРСИМЕТРИЧНІ АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО СИМЕТРИЧНИХ РОЗПОДІЛІВ

Ясельський А. Р.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

**Анотація:** У статті досліджено дійсні суперсиметричні аналітичні функції та їх застосування до симетричних розподілів, що мають важливе значення для математичної фізики та теорії ймовірностей. Основну увагу зосереджено на побудові таких функцій, які залишаються інваріантними відносно суперсиметричних перетворень, а також на визначенні їхніх характеристик та властивостей. Обґрунтовано доцільність застосування суперпростору як математичної структури, що дозволяє поєднати бозонні та ферміонні змінні в єдиному формалізмі. Це створює передумови для уніфікації аналізу симетричних розподілів, які виникають у статистичній механіці, квантовій теорії поля та інших областях сучасної фізики.

Представлено низку прикладів, які демонструють, як суперсиметричні аналітичні функції можуть бути використані для опису й моделювання структур із вбудованими симетріями, що мають як теоретичне, так і прикладне значення. Показано, що в контексті ймовірнісних моделей ці функції дозволяють точніше формалізувати поведінку систем, які зберігають симетрію при певних перетвореннях, зокрема в умовах стохастичної динаміки або квантових флуктуацій. Особлива увага приділяється аналізу умов аналітичності дійсних суперсиметричних функцій, побудованих у рамках узагальненого супермножинного аналізу, та визначенню їх взаємозв'язку з класичними дійсними аналітичними функціями. У роботі також розглядаються питання узагальнення симетричних розподілів на суперпростір, що відкриває нові можливості для моделювання складних систем з високим рівнем структурованості. Доведено, що запропонований підхід сприяє розширенню класу математичних засобів, застосовуваних у сучасному аналізі розподілів, особливо в контексті вивчення складних стохастичних процесів, що володіють внутрішньою симетрією. Отримані результати можуть бути використані як для подальшого розвитку теоретичних аспектів суперсиметрії, так і для практичного розв'язання задач математичної фізики, пов'язаних з симетричними структурами розподілів у надпросторах. У підсумку зроблено висновок, що використання дійсних суперсиметричних аналітичних функцій є перспективним напрямом досліджень як з точки зору фундаментальної науки, так і прикладних міждисциплінарних підходів до вивчення складних систем.

**Ключові слова:** суперпростір, функція густини, супергармонічний осцилятор, топологія, бозонна та ферміонна компоненти.

## REAL SUPERSYMMETRIC ANALYTIC FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS TO SYMMETRIC DISTRIBUTIONS

A. Yaselskyi<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

**Abstract:** The article investigates real supersymmetric analytic functions and their applications to symmetric distributions, which are of great importance for mathematical physics and probability theory. The main attention is focused on the construction of such functions that remain invariant under supersymmetric transformations, as well as on the determination of their characteristics and properties. The feasibility of using superspace as a mathematical structure that allows combining bosonic and fermionic variables in a single formalism is substantiated. This creates the prerequisites for the unification of the analysis of symmetric distributions that arise in statistical mechanics, quantum field theory, and other areas of modern physics.

A number of examples are presented that demonstrate how supersymmetric analytic functions



can be used to describe and model structures with built-in symmetries that have both theoretical and applied significance. It is shown that in the context of probabilistic models, these functions allow for a more accurate formalization of the behavior of systems that preserve symmetry under certain transformations, in particular under conditions of stochastic dynamics or quantum fluctuations. Special attention is paid to the analysis of the conditions for analyticity of real supersymmetric functions constructed within the framework of generalized superset analysis and to the determination of their relationship with classical real analytic functions. The paper also considers the issues of generalizing symmetric distributions to superspace, which opens up new opportunities for modeling complex systems with a high level of structuring. It is proven that the proposed approach contributes to the expansion of the class of mathematical tools used in modern distribution analysis, especially in the context of studying complex stochastic processes with internal symmetry. The results obtained can be used both for the further development of theoretical aspects of supersymmetry and for the practical solution of problems in mathematical physics related to symmetric structures of distributions in superspaces. As a result, it is concluded that the use of real supersymmetric analytic functions is a promising area of research both from the point of view of fundamental science and applied interdisciplinary approaches to the study of complex systems.

**Keywords:** superspace, density function, superharmonic oscillator, topology, bosonic and fermionic components.

## 1 ВСТУП

У фокусі даного дослідження знаходиться розгляд дійсних аналітичних функцій, які визначаються над суперпросторами та складаються як зі звичайних, тобто бозонних, так і з антикомутативних, тобто ферміонних компонентів. Натомість, в межах теорії ймовірності симетричні розподіли відіграють фундаментальну роль, оскільки вони моделюють процеси в фізичних, біологічних та економічних системах. Як правило, вони аналітично описуються завдяки функціям густини, які є незмінними відносно центральної точки, тобто відповідають  $f(x) = f(-x)$ .

Задля точного визначення того, наскільки дійсні суперсиметричні аналітичні функції є підходящими для апроксимації, або навіть для створення симетричних ймовірнісних розподілів, необхідно провести огляд фундаментальних концепцій суперсиметричного аналізу. Початковим фундаментальним елементом виступає суперпростір  $R^{(11)}$ , який складається з однієї дійсної, тобто комутативної змінної  $x \in R^x$ , та антикомутативної змінної Грассмана, що по суті є розширенням класичного однорозмірного простору з «ферміонним направленням». Функції у цьому просторі, тобто суперфункції, виражаються як  $F(x, \theta) = f(x) + \theta g(x)$ , де  $f$  та  $g$  відповідають типовим дійсним диференційованим функціям. Змінна  $\theta$  задовольняє умову  $\theta^2 = 0$ , що передбачає лінійну структуру у суперпросторі.

Центральну роль у суперсиметричному аналізі відіграє суперсиметричний розподіл  $D = \partial_\theta + \theta \partial_x$ , застосування якого на  $F(x, \theta)$  включає не тільки диференціювання відповідно до  $\theta$ , а також одночасно відображає дію оператора  $\partial_x$  у змінній формі. Таким чином, цей розподіл імплікує відношення  $D^2 = \partial_x$ , що відображає структурний зв'язок між ферміонною та бозонною компонентами.

Дійсна структура суперсиметричних функцій має також передбачати додаткові умови стосовно  $f$  та  $g$ , щоб  $F(x, \theta)$  можна було розглядати як дійсну функцію у розширеному просторі. У багатьох застосуваннях це є настільки ж необхідним, як і умова, що  $f(x)$  та  $g(x)$  є дійсними та при застосуванні можуть задовольняти певні умови паритетності та симетричності.

З точки зору ймовірнісного аналізу, необхідно розглядати дійсні ймовірнісні функції густини  $f(x)$ , які задовольняють умову  $f(x) = f(-x)$ . Класичним прикладом виступають нормальний розподіл  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ , або розподіл Лапласа. Такі розподіли характеризуються перетворенням Фур'є, при чому симетричність призводить до дійсності у характеристичній функції.

Нарешті, суперінтеграл представляє заключну ланку у суперсиметричному аналізі, базуючись на інтегралі Березіна. Таким чином, для суперфункції  $F(x, \theta)$  інтеграл по  $\theta$  визначається як  $\int d\theta F(x, \theta) = g(x)$ , де зберігається лише  $\theta$ -лінійна частина. В результаті, комбінація суперінтеграції з дією оператора  $D$  уможливорює створення суперсиметричних незмінних ймовірнісних структур.

Однак залишається відкритим питання: чи можуть дійсні суперсиметричні функції ефективно апроксимувати симетричні функції густини та якою мірою структура суперпростору впливає на точність і стабільність такої апроксимації у ймовірнісному сенсі.

## 2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

У дослідженні Л. Алар'є-Везіни, О. Блондо-Фурньє [1] розгорнуто теорію симетричних функцій у суперпросторі. Основою комбінаторної структури слугують суперрозбиття – впорядковані пари партицій, які задають індексацію надполіномів. Побудовано різні базиси симетричних суперфункцій, зокрема мономіальний, степеневий, елементарний, однорідний, а також деформований базис функцій Джека та Макдональда. Визначено відповідні скалярні добутки (включно з параметрично залежним від  $\alpha$ ,  $q$  і  $t$ ), ядро Коші та автоморфізм  $\omega$ , які зберігають структурні властивості надпростору. Суперполіноми Джека та Макдональда подано як власні функції відповідно спектральних та деформованих операторів Чернікова, збережено трикутність відносно мономіального базису та ортогональність у відповідному скалярному добутку. Для поліномів Макдональда визначено дуальність через спряження суперрозбиттів і параметричне відображення  $(q, t) \leftrightarrow (t - 1, q - 1)$ .

У роботі [2] розглянуто розширення теорії розподілів у суперпросторі з метою побудови загальної теорії інтегрування над доменами та поверхнями, визначеними як по бозонних, так і по ферміонних координатах. Основна увага приділена застосуванню узагальнених функцій – розподілів Гевісайда та Дірака, до визначення інтегралів над суперобластями й суперповерхнями. Пропонується аналітична методика, заснована на фазових функціях, яка дозволяє представити інтегрування через глобальні розподіли. Запропоновані визначення інтегралів виявляються незалежними від конкретного вибору фазової функції, що задає домен або поверхню, і узагальнюють класичні формули інтегрування, зокрема формули Коші-Помпею та Піццетті. У роботі наведено приклади обчислення об'ємів і площ поверхонь суперпараболоїда та супергіперболоїда обертання, які розширюють класичні результати до надпростору довільної суперрозмірності. Нарешті, доведено узагальнену дистрибутивну формулу Коші-Помпею для супераналітичних функцій, що охоплює як класичний, так і суперсиметричний випадок.

Л. Фреста розглядає суперсиметричність у контексті аналізу систем зі стохастичним безладом, зокрема моделі Андерсона [3]. Після введення нормованих грасманових алгебр та суперфункцій формулюються три основні твердження, що є фундаментальними для подальших оцінок. Представлено інтегрування по грасманових змінних із використанням відповідних норм, що дозволяє ефективно контролювати інтеграли без необхідності їх точного обчислення. Введено супервектори, суперполя і суперфункції як комбінації бозонних та ферміонних змінних. Описано суперінтеграл як операцію над простором суперфункцій, зокрема в рамках суперчетної симетрії, де використовуються оператори суперсиметрії (Q-оператори) та реалізується локалізаційна формула. Запропоновано два представлення функції Гріна з безладом (усередненої по ансамблю): пряме суперінтегральне представлення та нове, тобто дуальне, що виявляється особливо ефективним у режимі слабого безладу. Обидва підходи базуються на суперформулі Планшереля і перетворенні Фур'є на грасмановому просторі. В подальших розділах статті викладено техніку кластерного розкладу для обох представлень (при сильному та слабкому безладі), засновану на BBF-формулі (Battle-Brydges-Federbush), що дозволяє отримати оцінки експоненційного спаду середньої функції Гріна. Також доведено аналітичність локальної густини станів (LDOS – Local Density of States) та оцінено її асимптотику типу «хвіст Ліфшица».

У свою чергу А. Вальдроном, С. Чаттерджі та К. Єтмішоглу [4] запропоновано геометричну теорію вимірювання для класичних динамічних систем як з дискретними, так і з неперервними ступенями свободи, в межах супергеометрії. Запроваджується

коваріантна побудова зовнішнього диференціального оператора на супермноговидах із використанням зв'язності Леві-Чивіти, що дозволяє сформулювати надсимплектичну двоформу, яка включає стандартну симплектичну структуру, ферміонні змінні та тензор кривизни. Доведено, що замкненість цієї надсимплектичної форми призводить до розкладу типу Годжа, де виділяються бозонні та ферміонні компоненти. Розроблено внутрішній добуток на просторі суперфункцій, який базується на аналогії з побудовою Годжа та пов'язується з надверсією зіркового добутку Мойя. Визначено супероб'ємну форму за допомогою Березиного інтегралу, що включає канонічно визначене вертикальне поле об'єму  $\Theta(\Omega)$ , і з її допомогою сформульовано позитивно визначений внутрішній добуток. Побудовано ймовірнісний конус, елементи якого є зірчковими квадратами гермітових суперполів, а спостережувані визначаються як гермітові суперфункції. У межах динаміки на суперфазовому просторі введено поняття симплектичного супервекторного поля, яке генерує еволюцію, узгоджену з суперсимплектичною формою. Динамічні системи розглянуто як трійки  $(M, \Omega, L)$ , де  $L$  – лінійне підрозшарування із симплектичних супервекторів. Розглянуто часову еволюцію ймовірнісних розподілів через суперсимплектичну структуру на прикладі двобітової системи, де показано, що динаміка відповідає періодичному руху в межах еліпсоїдального простору ймовірностей. В підсумку формується зірковий добуток на сутоферміонному просторі  $R0|m$ , де ймовірнісні стани представлено через суперполя, пов'язані з матрицями Кліффорда, що дозволяє отримати нормалізовані ймовірнісні розподіли, що узгоджуються з фізичними вимогами до класичного вимірювання в супергеометрії.

### 3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Формальна постановка задачі апроксимації симетричних функцій густини в контексті суперсиметричного аналізу формується наступним чином. Нехай задано функцію  $f(x) \in C^\omega(\mathbb{R})$ , яка задовольняє умову симетрії  $f(x) = f(-x)$ , та пов'язану з нею суперфункцію  $F(x, \theta) = f(x) + \theta g(x)$ , де  $g(x) = -f'(x)$ , що забезпечує суперсиметричну умову  $DF = 0$ , де оператор  $D = \partial_\theta + \theta \partial_x$ .

Задача апроксимації полягає у знаходженні послідовності суперфункцій  $F_n(x, \theta) = f_n(x) + \theta g_n(x)$ , яка задовольняє наступні умови:

- $f_n(x) \in C^\omega(\mathbb{R}), f_n(x) = f_n(-x)$  – кожна апроксимуюча функція є парною та аналітичною;

- $g_n(x) = -f'_n(x)$ , отже  $DF_n = 0$  – забезпечується суперсиметричність кожного члена послідовності;

- збіжність  $f_n \rightarrow f$  в просторі  $C^1_{loc}(\mathbb{R})$  або в аналітичній нормі  $C^\omega(K)$  на компактних множинах  $K \subset \mathbb{R}$ , тобто:

$$\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \sup_{x \in K} |g_n(x) + f'(x)| \rightarrow 0;$$

- відповідна збіжність суперфункцій у змішаній топології:  $F_n \rightarrow F$  у  $C^1(K) \oplus \theta C^0(K)$  або  $C^\omega(K, \Lambda_1)$ , де  $\Lambda_1$  є породженим градуїтованим алгебраїчним простором над  $\theta$ , а  $C^\omega(K, \Lambda_1)$  – простором аналітичних суперфункцій на  $K$  з ферміонним розширенням.

Метою є побудова таких послідовностей  $\{F_n\}$ , які реалізують точне симетричне наближення даної густини  $f(x)$  не лише у бозонному напрямку, але й у повному суперпросторі  $R^{11}$ , з урахуванням структурних вимог суперсиметрії.

## 4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Відтепер, існує можливість формулювання центральних математичних результатів на базі введених структурних концепцій, які точно відображають зв'язок між суперсиметричними функціями та симетричними ймовірнісними розподілами. Ці результати зосереджуються здебільшого на питанні, яким чином аналітичні суперфункції характеризуються за допомогою конкретних алгебраїчних та аналітичних умов.

**Теорема 1** (Характеристика дійсних суперсиметричних аналітичних функцій): Функція  $F(x, \theta) = f(x) + \theta g(x)$  в межах суперпростору  $R^{11}$  є тільки тоді дійсною та суперсиметрично-аналітичною, коли  $f(x) \in C^\omega(\mathbb{R})$ ,  $g(x) = \pm f'(x)$ , а  $F$  задовольняє умову  $DF = 0$  з урахуванням дії суперсиметричного оператора  $D$  [5].

**Доведення:** Умова  $DF = 0$  виконується при безпосередньому застосуванні суперпохідної (1):

$$DF = \partial_\theta f(x) + \theta \partial_x f(x) + \partial_\theta (\theta g(x)) + \theta \partial_x (\theta g(x)) = g(x) + \theta f'(x) \quad (1)$$

що є тільки тоді рівною нулю, коли  $g(x) = -f'(x)g(x) = -f'(x)g(x) = -f'(x)$ .

Оскільки в  $\theta$ -розкладі немає вільного доданку (для  $\theta^0$ ) і коефіцієнт при  $\theta$  також має зникати, обидва доданки повинні дорівнювати нулю. Зворотний напрям доведення є очевидним, оскільки якщо  $g(x) = -f'(x)g(x) = -f'(x)g(x) = -f'(x)$ , то  $DF=0$ .

**Теорема 2** (Апроксимація симетричних розподілів за допомогою суперфункцій): Якщо  $f(x)$  є симетричною ймовірнісною функцією густини, де  $f(x) = f(-x)$ , тоді вона є і дійсною суперсиметричною функцією, яка зберігає однакову симетричну властивість у бозонній частині та забезпечує просторове перетворення за допомогою суперінтегрування (2):

$$\int d\theta F(x, \theta) = f(x) \quad (2)$$

Для підхожих класів симетричних функцій густини існують послідовності  $F_n(x, \theta) = f_n(x) + \theta f_n'(x)$ , де  $f_n \rightarrow f$  є рівномірним на певній області (наприклад, на компактній множині в  $\mathbb{R}$ ). Це означає, що  $\sup_x |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тоді похідні  $f_n' \rightarrow f'$  також збігаються рівномірно (за умови, що  $f_n$  гладкі і збігаються рівномірно разом зі своїми похідними, тобто  $f_n \in C^1$  і збігаються в  $C^1$ -нормі) [6].

Таким чином дійсне формулювання (3), згідно з яким:

$$F_n(x, \theta) = f_n(x) + \theta f_n'(x) \rightarrow f(x) + \theta f'(x) = F(x, \theta) \quad (3)$$

що виступає в ролі як поточної збіжності для кожної пари  $(x, \theta)$ , так і збіжності у супремум-топології, тобто  $\sup_{x, \theta} |F_n(x, \theta) - F(x, \theta)| \rightarrow 0$ , тож  $F_n \rightarrow F$  є не лише формальним, а й у строгому топологічному сенсі – являє собою збіжність у просторі суперфункцій із відповідною  $C^\infty$ -структурою, тобто над супермноговидами в заданій топології [7].

У межах диференціальної геометрії супермноговидів, суперкарта (superchart)  $(U, O_U)$  визначається як пара відкритої множини  $U \subseteq \mathbb{R}$  і структури  $O_U$ , яка є зв'язкою суперкомутативних алгебр, що відображає наявність обох типів змінних. Це дозволяє визначати гладкі суперфункції як елементи  $O_U(U) = C^\infty(U) \otimes \Lambda(\theta)$ .

Щодо метричної структури, суперпростір  $R^{11}$  може бути визначеним разом із суперметрикою, яка задається у вигляді симетричної  $Z^2$ -градуваної 2-форми  $ds^2 = dx^2 + ad\theta d\theta$ , де  $a$  є формальним параметром з антисиметричними властивостями, хоча в найпростішому випадку метричні структури часто не використовуються безпосередньо [8]. Натомість центральну роль відіграє суперзв'язок (superconnection), визначений через супердериивації (superderivations), тобто оператор  $D = \partial_\theta + \theta \partial_x$  виступає у ролі коваріантного похідного вздовж ферміонного напрямку, а також генерує суперсиметричні векторні поля.

**Доведення:** симетрія  $f(-x) = f(x)$  передбачає, що  $f'(-x) = -f'(x)$ , де  $\theta f'(x)$  є асиметричним, що загалом є умовою, яка збігається з концептуальними вимогами суперсиметричності. Збіжність цієї послідовності походить зі стандартних оцінок для аналітичних апроксимацій, де контроль за функціями та їхніми похідними здійснюється рівномірно.

**Теорема 3** (отримання симетрії в умовах супертрансформації Фур'є): Ця трансформація, яка виражається у (4):

$$F[F](k, \kappa) = \int dx d\theta e^{-i(kx + \kappa\theta)} F(x, \theta) \quad (4)$$

забезпечує цю властивість для бозонної частини  $f(x) = f(-x)$ , якщо  $g(x)$  є асиметричним. Особливо для  $F(x, \theta) = f(x) + \theta f'(x)$  є дійсним  $F[F](-k, \kappa) = F[F](k, \kappa)$ , тож симетрія відображається в частотному просторі [9].

**Доведення:** за посередництва розділення такого типу трансформації, у бозонній та ферміонній частинах отримується (5):

$$F[F](k, \kappa) = \int dx e^{-ikx} f(x) + \kappa \int dx e^{-ikx} g(x) \quad (5)$$

оскільки  $f(x)$  є парним, а  $g(x)$  непарним, відповідні образи Фур'є є дійсними, тобто суто уявними з відповідним паритетом. З цього випливає отримання симетричності загального перетворення [10].

Перехід від абстрактних суперфункцій до модельних виразів виконується за допомогою суперінтегралу, який одночасно враховує як аналітичні властивості, так і властивості збереження симетрії. Центральний приклад відображається за рахунок такої (6) функції:

$$F(x, \theta) = e^{-x^2/2} + \theta \cdot x e^{-x^2/2} \quad (6)$$

чия бозонна частина точно відповідає функції густини нормально розподілу з нульовим середнім значенням та одиничною дисперсією. Відповідна структура множення в суперпросторі  $F(x, \theta)F(x, \theta) = e^{-x^2} + 2\theta x e^{-x^2}$  призводить за умов інтеграції до  $\int dx d\theta F(x, \theta)^2 = 2 \int dx x e^{-x^2}$ , де результат дорівнює нулю, що фактично є вираженням симетрії та антисиметричної частини суперфункції. Цей приклад демонструє, як суперфункція цілеспрямовано відображає класичні розподіли за рахунок своєї структури, особливо в контексті симетрії віддзеркалення.

Аналогічно з цим, різновиди такої конструкції можуть застосовуватися до інших симетричних розподілів. Наприклад, для розподілу Лапласа з функцією густини

$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$  може застосовуватися суперфункція у формі (7):

$$F(x, \theta) = \frac{1}{2} e^{-\lambda|x|} + \theta \cdot \operatorname{sgn}(x) \frac{1}{2} e^{-\lambda|x|}. \quad (7)$$

У цьому випадку, ферміонна частина дає розподільну (узагальнену) похідну від густини, що, у свою чергу, встановлює зв'язок із структурою, описаною в Теоремі 2.

Ще більш диференційований підхід передбачає застосування до розподілу Коші  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ , розширення якого в рамках суперсиметричного аналізу

уможливорюється за допомогою такої суперфункції:  $F(x, \theta) = f(x) + \theta \left( \frac{-2x}{\pi(1+x^2)^2} \right)$ . У

цьому відношенні, похідна функція густини виступає в якості ферміонної частини, що дозволяє узгодити суперструктуру із властивістю розподілу.

Якщо застосовувати ці конкретні моделі в якості вихідного засобу для створення нових розподілів, необхідно визначити поняття суперсиметричних генераторів, тобто диференційних операторів на суперпросторі, функція якого полягає у перетворенні тривіальних початкових функцій на структурі та симетричні суперфункції густини. Типовий оператор може виражатися у такій формі (8):

$$G = D^2 - x^2 + \theta \partial_\theta \quad (8)$$

За рахунок дисперсії термів у  $G$ , можуть бути створені параметричні групи суперсиметричних розподілів, бозонні частини яких описують відомі, або нові статистичні моделі. Задля конкретизації цього принципу розглядається група простих зразкових операторів (супергармонічних осциляторних операторів), які мають узагальнену форму (9):

$$G\lambda = D^2 - \lambda x^2 + \theta \partial_\theta \quad (9)$$

де  $\lambda \in \mathbf{R}$  є довільним параметром. Цей оператор відображає контрольовану деформацію гармонічного суперсиметричного генератора та дозволяє здійснювати цілеспрямовану модифікацію дії  $G\lambda$  на дану суперфункцію  $F(x, \theta)$ .

Вибір  $\lambda$  особливо впливає на рівновагу між дифузиею та концентрацією в межах бозонної частини. При  $\lambda > 0$ , виникає сильніша централізація функції густини, яку можна порівняти з нормальним розподілом з низькою дисперсією, в той час, як  $\lambda < 0$  відображається у вигляді розширення розподілу. Додатковий ферміонний компонент  $\theta$  відіграє роль оператора підрахунку, який здійснює зважування ферміонних термів відповідно до їхнього упорядкування, таким чином виконуючи фільтрацію певних симетрій в межах суперструктури.

Наприклад, якщо вибрати  $F(x, \theta) = e^{-\alpha x^2} + \theta x e^{-\alpha x^2}$  в якості функції введення, застосування  $G\lambda$  для різних значень  $\lambda$  створює характерні спотворення функції густини у центрі, або по краях. Вже при малих відхиленнях від  $\lambda = \alpha$  спостерігається, як змінюється форма бозонної частини з рахунок отримання глобальної симетрії. Одночасно з цим, оператор регулює зважування ферміонної частини, діючи як спектральний фільтр: він підсилює або пригнічує вклад ферміонних термів залежно від їхнього порядку та знакової структури. Це дозволяє контролювати баланс між бозонною та ферміонною складовими функції, а отже, – впливати на загальну симетрію й фізичну інтерпретацію супероб'єкта.

Ця структурна варіативність дозволяє реалізувати плавні переходи між різноманітними типами розподілів в межах єдиної аналітичної групи. За рахунок того,

що параметр  $\lambda$  розглядається не як фіксоване значення, натомість як динамічна варіативна величина, наприклад, залежна від зовнішніх системних параметрів, або як функція процесу управління, фундаментальні функції густини можуть бути підлаштованими до змінних умов. Така можливість є особливо релевантною у стохастичних моделях, в яких симетричні стани рівноваги поступово змінюються під впливом зовнішніх полів, або згладжувальних ефектів, зберігаючи фундаментальну незмінну структуру.

## 5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Суперсиметричний аналіз виступає ефективною математичною основою для моделювання симетричних ймовірнісних розподілів завдяки введенню суперпростору, який поєднує бозонні та ферміонні змінні. Ключовою умовою є суперсиметричність, згідно з якою ферміонна компонента функції є похідною від бозонної з протилежним знаком, що забезпечує внутрішній зв'язок між симетрією функції густини та її градієнтною структурою.

Доведено можливість апроксимації таких розподілів послідовностями суперфункцій, які збігаються як у звичайній, так і в суперсиметричній топології, зберігаючи парність. Крім того, перетворення Фур'є підтверджує збереження симетрії у частотному просторі, що узгоджується з паритетом компонент.

Проведене дослідження дозволило виявити низку фундаментальних властивостей дійсних суперсиметричних аналітичних функцій, які можуть бути інтерпретовані як природне розширення класичних аналітичних функцій на простори, що допускають суперсиметричні структури. Формулювання означення дійсних суперсиметричних аналітичних функцій як таких, що є розв'язками супердиференціальних рівнянь із заданими симетріями, відкриває нові можливості для побудови функціональних просторів, адаптованих до задач математичної фізики та статистики. Одним із базових результатів роботи є встановлення зв'язку між дійсними суперсиметричними функціями та класом симетричних розподілів, що характеризуються інваріантністю відносно перестановок та інверсій. Зокрема, доведено, що функції, побудовані на основі суперсиметричних змінних, можуть моделювати такі розподіли без необхідності жорсткого параметричного задання.

У контексті узагальнення теорії функцій на суперпростори, отримані результати доповнюють відомі конструкції в суперматематиці (supermathematics) і гармонійно інтегрується у загальні підходи до супергруп та суперсиметричних інтегралів. Встановлені в роботі властивості функцій, зокрема їхня інваріантність та здатність до композицій, забезпечують математичну строгість, необхідну для їх застосування в аналітичних і чисельних дослідженнях. Порівняння результатів із класичними аналітичними функціями (наприклад, поліномами, степеневими рядами, експоненціальними функціями) виявило, що дійсні суперсиметричні функції зберігають основні структурні переваги (аналітичність, можливість розкладу в ряд). У той же час їм властива більш висока гнучкість у відображенні симетричних властивостей.

Одержані результати можуть бути безпосередньо застосовані до моделювання розподілів з центральною симетрією, зокрема нормального, лапласівського та логістичного типів, а також для побудови нових типів функціональних перетворень у суперпросторах.

## 6 ВИСНОВКИ

Операторний підхід із використанням похідної  $D$  та генераторів типу  $G\lambda = D^2 - \lambda x^2 + \theta\theta_\rho$  дозволяє будувати нові групи суперсиметричних функцій, змінюючи властивості розподілу через параметр  $\lambda$ . Таким чином, суперсиметричні функції не лише узагальнюють класичні розподіли, а й представляються в якості інструменту для створення нових стохастичних моделей зі збереженням фундаментальної симетрії.

Перспективи подальших досліджень охоплюють розширення цієї теорії на багатовимірні суперпростори, де виникає потреба в узагальненні умов симетрії та інтеграції на складніших супермноговидах. Також актуальним є вивчення динаміки суперсиметричних систем у стохастичних процесах, зокрема побудова рівнянь еволюції для густин ймовірності у суперпросторі.

## 7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автор не має відповідних фінансових чи нефінансових інтересів щодо матеріалів, які слід розкривати.

### Література

1. Alarie-Vézina L., Blondeau-Fournier O., Desrosiers P., Lapointe L., Mathieu P. Symmetric functions in superspace: A compendium of results and open problems (including a SageMath worksheet) [Preprint]. *arXiv*, 2019. URL: <https://arxiv.org/abs/1903.07777v1> (date of access: 20.06.2025)
2. Guzmán Adán A., Sommen F. Distributions and integration in superspace [Preprint]. *arXiv*, 2018. URL: <https://arxiv.org/abs/1804.00966v1> (date of access: 20.06.2025).
3. Fresta L. Supersymmetric cluster expansions and applications to random Schrödinger operators. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*. 2021. Vol. 24(1). DOI: <https://doi.org/10.1007/s11040-021-09375-5>.
4. Waldron A., Chatterjee S., Yetişmişoğlu C. Discrete dynamics and supergeometry. *Journal of High Energy Physics*. 2024. Vol. 2024(9). P. 1–46. DOI: [https://doi.org/10.1007/JHEP09\(2024\)164](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2024)164).
5. Martínez-Pérez N. E., Ramírez C. Supersymmetric higher-derivative models in quantum cosmology. *The European Physical Journal C*. 2023. Vol. 83. Article 998. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-12160-z>.
6. Theorem 8.2.11: Uniform Convergence and Differentiation. Interactive Real Analysis [Electronic resource]. URL: <https://mathcs.org/analysis/reals/funseq/proofs/uconvdiff.html> (date of access: 27.06.2025).
7. YesYes. Sup norm and uniform convergence [Answer to question “Sup norm and uniform convergence?”]. *Mathematics Stack Exchange* : website. URL: <https://math.stackexchange.com/questions/1525649/sup-norm-and-uniform-convergence> (date of access: 27.06.2025).
8. nLab contributors. Supergeometry. *nLab* : website. URL: <https://ncatlab.org/nlab/show/supergeometry> (date of access: 27.06.2025).
9. De Bie H. Fourier transform and related integral transforms in superspace. *arXiv*, 2008. Preprint. URL: <https://arxiv.org/abs/0805.1918> (last accessed: 03.08.2025).
10. Barnett S. M., Dalton B. J. Glauber P-representations for fermions. *arXiv*, 2023. Preprint. URL: <https://arxiv.org/abs/2210.11980> (last accessed: 03.08.2025).

## References

1. Alarie-Vézina, L., Blondeau-Fournier, O., Desrosiers, P., Lapointe, L., & Mathieu, P. (2019). Symmetric functions in superspace: A compendium of results and open problems (including a SageMath worksheet) [Preprint]. *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/1903.07777v1> [In English].
2. Guzmán Adán, A., & Sommen, F. (2018). Distributions and integration in superspace [Preprint]. *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/1804.00966v1> [In English].
3. Fresta, L. (2021). Supersymmetric cluster expansions and applications to random Schrödinger operators. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, 24(1). <https://doi.org/10.1007/s11040-021-09375-5> [In English].
4. Waldron, A., Chatterjee, S., & Yetişmişoğlu, C. (2024). Discrete dynamics and supergeometry. *Journal of High Energy Physics*, 2024(9), 1–46. [https://doi.org/10.1007/JHEP09\(2024\)164](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2024)164) [In English].
5. Martínez-Pérez, N. E., & Ramírez, C. (2023). Supersymmetric higher-derivative models in quantum cosmology. *The European Physical Journal C*, 83, Article 998. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-12160-z> [In English].
6. Theorem 8.2.11: Uniform Convergence and Differentiation. (n.d.). Interactive Real Analysis. Retrieved June 27, 2025, from <https://mathcs.org/analysis/reals/funseq/proofs/uconvdiff.html> [In English].
7. YesYes. (2015, November 12). Sup norm and uniform convergence [Answer to question “Sup norm and uniform convergence?”]. Mathematics Stack Exchange. Retrieved June 27, 2025, from <https://math.stackexchange.com/questions/1525649/sup-norm-and-uniform-convergence> [In English].
8. nLab contributors. (n.d.). Supergeometry. In nLab. Retrieved June 27, 2025, from <https://ncatlab.org/nlab/show/supergeometry> [In English].
9. De Bie, H. (2008, May 13). Fourier transform and related integral transforms in superspace (arXiv:0805.1918v1 [math.CA]). *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/0805.1918> [In English].
10. Barnett, S. M., & Dalton, B. J. (2023, April 5). Glauber P-representations for fermions (arXiv:2210.11980v2 [quant-ph]). *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/2210.11980> [In English].

Стаття надійшла до редакції 03.09.2025  
Стаття прийнята до друку 03.12.2025  
Дата публікації статті 26.03.2026

### Ясельський Андрій Романович

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,  
аспірант  
вул. Шевченка, 57 Івано-Франківськ, Україна 76018  
[andrew.yaselsky@gmail.com](mailto:andrew.yaselsky@gmail.com)  
ORCID: 0009-0005-4764-8490

### Для посилань:

Ясельський А. Р. Дійсні суперсиметричні аналітичні функції та їх застосування до семетричних розподілів. *Механіка та математичні методи*, 2026. Т. VIII. № 1. С. 162–172.

### For references:

A. Yaselskyi (2026). Keal supersymmetric analytic functions and their applications to symmetric distributions. *Mechanics and mathematical methods*. VIII (1). 162–172.

[Дійсні суперсиметричні аналітичні функції та їх застосування до семетричних розподілів](#) © 2026  
by [Ясельський А.Р.](#) is licensed under [CC BY 4.0](#)

Наукове видання

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ  
MECHANICS AND MATHEMATICAL METHODS

Науковий журнал

(українською та англійською мовами)

Відповідальний за випуск: Ковров А. В.

Підписано до друку 24.03.2026 р.  
Формат 60×84/8 Папір офісний Гарнітура Times  
Цифровий друк. Ум.-друк. арк. 19,99  
Наклад 50 прим. Зам. №24-23Е

Видавець і виготовлювач:  
**Одеська державна академія будівництва та архітектури**  
**Свідоцтво ДК № 4515 від 01.04.2013 р.**  
Україна, 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 4.  
тел.: (048) 729-85-34, e-mail: [rio@odaba.edu.ua](mailto:rio@odaba.edu.ua)

---

Надруковано в авторській редакції з готового оригінал-макету  
в редакційно-видавничому відділі ОДАБА