УДК 530.145:519.21

АНАЛІЗ МУЛЬТИМНОЖИННОЇ РОЗМІРНОСТІ В НЕЧІТКИХ ГРАФАХ ДІЛЬНИКІВ НУЛЯ, ПОВ'ЯЗАНИХ З КОМУТАТИВНИМИ КІЛЬЦЯМИ

Стахів Р. Ю.[1]
[1]*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника*

Анотація: У статті проведено ґрунтовний аналіз концепції мультимножинної розмірності у нечітких графах дільників нуля, що моделюють внутрішню структуру комутативних кілець. Розглянуто як класичні підходи до побудови графів дільників нуля, так і сучасні модифікації, що враховують як мультиплікативну, так і адитивну структуру кілець. Введено формальні означення мультимножинної розмірності у нечітких графах, побудованих на основі функцій нечіткої належності, що дозволяють відображати ступінь зв'язку між дільниками нуля у дробовій формі. Наведено приклади обчислення мультимножинної розмірності для конкретних класів кілець, зокрема для кільця залишків за модулем добутку простих чисел, що демонструє залежність цього інваріанта від фундаментальних алгебраїчних характеристик. Показано, що мультимножинна розмірність може бути використана як кількісна характеристика складності нечіткого графа дільників нуля та як засіб для класифікації кілець за топологічними властивостями їхніх графових моделей.

Особливу увагу приділено аналізу наявних підходів у світовій літературі, зокрема роботам, присвяченим стисненим графам дільників нуля та нечітким зірковим або двочастковим структурам для кілець із простими параметрами. На цій основі обґрунтовано доцільність узагальнення метрик мультимножинної розмірності для більш складних алгебраїчних об'єктів, зокрема для модульних структур, фактор-модулів та нескінченних ланцюгів підмодулів.

У роботі окреслено перспективи застосування отриманих результатів у дослідженнях не лише комутативних, а й некомутативних кілець, що відкриває можливості для формування універсальної методики опису внутрішніх взаємозв'язків елементів алгебраїчних систем за допомогою нечітких графових моделей. Результати можуть бути використані у подальших теоретичних дослідженнях з алгебри, комбінаторики та теорії нечітких структур, а також слугувати підґрунтям для практичних застосувань у криптографії, теорії кодів та інших галузях, де важлива характеристика складності алгебраїчних структур.

З огляду на отримані результати, робота відкриває перспективи для дослідження взаємозв'язків між нечіткими графами дільників нуля та іншими графовими інваріантами комутативних і некомутативних кілець, що може стати підґрунтям для побудови більш загальних моделей аналізу алгебраїчних структур у суміжних галузях, таких як криптографія, теорія інформації та топологічна алгебра.

Ключові слова: функція належності, нечітка множина, розкладання, нечітка матриця, ідеал кільця.

ANALYSIS OF MULTISET DIMENSION IN FUZZY ZERO-DIVISOR GRAPHS ASSOCIATED WITH COMMUTATIVE RINGS

R. Stakhiv[1]
[1]*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University*

Abstract: The article provides a thorough analysis of the concept of multiset dimension in fuzzy graphs of zero divisors that model the internal structure of commutative rings. Both classical approaches to constructing zero divisor graphs and modern modifications that take into account both the multiplicative and additive structures of rings are considered. Formal definitions of multi-set dimension in fuzzy graphs constructed on the basis of fuzzy membership functions are introduced,

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-1-151-161

allowing the degree of connection between zero divisors to be represented in fractional form. Examples of calculating multi-set dimension for specific classes of rings are given, in particular for the ring of residues modulo the product of prime numbers, which demonstrates the dependence of this invariant on fundamental algebraic characteristics. It is shown that multiset dimension can be used as a quantitative characteristic of the complexity of a fuzzy graph of zero divisors and as a means for classifying rings according to the topological properties of their graph models.

Particular attention is paid to the analysis of existing approaches in the world literature, in particular to works devoted to compressed graphs of zero divisors and fuzzy star or bipartite structures for rings with simple parameters. On this basis, the feasibility of generalizing multi-set dimension metrics for more complex algebraic objects, in particular for modular structures, factor modules, and infinite chains of submodules, is justified.

The paper outlines the prospects for applying the obtained results in the study of not only commutative but also noncommutative rings, which opens up opportunities for the formation of a universal methodology for describing the internal relationships between elements of algebraic systems using fuzzy graph models. The results can be used in further theoretical research in algebra, combinatorics, and fuzzy structure theory, as well as serve as a basis for practical applications in cryptography, code theory, and other fields where the complexity of algebraic structures is important.

Given the results obtained, the work opens up prospects for studying the relationships between fuzzy graphs of zero divisors and other graph invariants of commutative and noncommutative rings, which may become the basis for constructing more general models for analyzing algebraic structures in related fields such as cryptography, information theory, and topological algebra.

Keywords: membership function, fuzzy set, decomposition, fuzzy matrix, ring ideal.

1 ВСТУП

В межах структури комутативних кілець дільники нуля відіграють центральну роль, оскільки вони відображають інформацію про внутрішній розклад і взаємодію елементів всередині алгебраїчної структури. Елемент x певного комутативного кільця R є тоді дільником нуля, коли він принаймні має один ненульовий елемент y, тобто щоб було дійсним $xy=0$:

$$Z(R)=\left\{x\in R\exists y=0:xy=0\right\} \tag{1}$$

Аналіз множини всіх дільників нуля забезпечує розуміння основоположних властивостей кілець, особливо у контексті концепції ідеальних структур та розкладання на множники.

Задля забезпечення наочності комплексних взаємовідношень між дільниками нуля, у межах поточного дослідження вводяться нечіткі графи у ролі моделі. На відміну від класичних графів, нечіткі графи уможливлюють поступове зважування залежностей між парами дільників нуля, таким чином математично фіксуючи концептуальну нечіткість цих взаємовідношень. Іншими словами, якщо у класичного графа між вершинами (дільниками нуля) або є зв’язок, або його немає, нечіткий граф ж дозволяє сказати, що зв’язок між двома вершинами може бути частковим, тобто з певним «ступенем» сили. Наприклад, що два елементи пов’язані на 70%, або що їхній зв’язок сильніший чи слабший. Цей ступінь зв’язку виражається числом від 0 до 1, і це є «зважуванням» залежності.

Основною задачею поточної роботи є введення мультимножинної розмірності в якості ключової складової, яка чисельно визначає складність взаємозв’язку у таких нечітких графах. За допомогою цієї величини вимірюється необхідна кількість характерних референтних елементів для виявлення різниці між усіма вершинами на базі чітких патернів їхніх взаємозв’язків з цими елементами. Самі референтні елементи являють собою спеціально вибрані вершини у графі, які виконують роль опорних точок, з якими порівнюються всі інші вершини.

Отже, головним питанням, яке досліджуватиметься у цій роботі, полягає у тому, як взаємозалежать мультимножинна розмірність нечіткого графа дільника нуля та алгебраїчна структура комутативного кільця, яке лежить в основі цього графа.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАННИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Дослідження структури комутативних кілець за допомогою графових моделей має глибокі теоретичні витоки й постійно розвивається завдяки внеску низки науковців, які послідовно розширюють класичні підходи та формулюють нові концепції. Так, у роботі А. Черрабі, Х. Ессануні, Е. Джаббурі та А. Уадфеля [4] запропоновано новий напрямок у вивченні графів дільників нуля, де вершинами виступають ненульові дільники нуля кільця R. Цей підхід логічно продовжує класичні праці Д. Андерсона та А. Бадаві [3], у яких основна увага зосереджувалася на побудові графа дільників нуля, де зв’язки між вершинами встановлюються за умови, що добуток відповідних елементів дорівнює нулю. На відміну від цих традиційних конструкцій, А. Черрабі разом зі співавторами розширюють поняття зв’язності, вводячи критерій сполучення вершин не лише через нульовий добуток, а й через належність суми відповідних елементів множині дільників нуля. Це нововведення дозволяє водночас враховувати як мультиплікативну, так і адитивну структуру кільця, що відкриває ширші можливості для аналізу внутрішньої організації кільцевих елементів.

Для ілюстрації відмінностей між класичним та розширеним варіантами графа

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-1-151-161

автори демонструють приклади для конкретних кілець, зокрема Z_6 і $\mathrm{Z}_2 \times \mathrm{Z}_4$, показуючи, як змінюється індукований підграф загального графа кільця. Особливу увагу у цьому контексті приділено метричним характеристикам: доведено, що новий тип графа завжди є зв’язним, має діаметр не більший за два, а принаймні за трьох вершинах обхват дорівнює трьом, що засвідчує гарантовану наявність трикутників у його структурі. Також встановлено умови, за яких розширений граф збігається з класичними варіантами, зокрема для скінченних комутативних кілець повнота графа виявляється тісно пов’язаною з локальністю чи з будовою кільця як добутку тіл, а для кілець цілих чисел за модулем – із простими степенями або добутками двох простих чисел. Серед інших важливих аспектів варто відзначити розгляд зіркоподібної підструктури, що виникає завдяки наявності вершин, з’єднаних з усіма іншими, а також аналіз гіпотріангульованості як наслідку існування трикутників і квадратів у топології графа.

Інший напрямок розвитку цієї теми пов’язаний з нечіткими графами дільників нуля. Так, А. Куппан та Дж. Раві Санкар [7] запропонували концепцію нечіткої вершинної та нечіткої реберної множини для кільця залишків по модулю n. У їхній роботі наведено побудову графа для випадків, коли *n* набуває вигляду *2p,3p,5p,7p2p, 3p, 5p, 7p* або *pq*, де *p* і *q* – прості числа. Для кожного з цих сценаріїв автори строго доводять, що відповідна нечітка структура набуває форми або зірки, або повного двочасткового графа в нечіткій інтерпретації. Ключовим тут є поділ вершин на дві нечіткі підмножини, де зв’язки задаються множинами нечітких ребер з вагами, що визначаються простими дільниками. Такий підхід дозволяє моделювати ступінь участі кожного елемента через дробові значення належності, зокрема шляхом виокремлення підмножин кратних простому числу. Як наслідок, для структур виду Z_{2p} утворюється нечіткий зірковий граф, тоді як для $\mathrm{Z}_{3p},\mathrm{Z}_{5p},\mathrm{Z}_{7p}\, i\, \mathrm{Z}_{pq}$ – нечіткі повні двочасткові графи з кількістю вершин, що визначається простими параметрами.

У цьому контексті доречно згадати також дослідження Д. Должана [5], який акцентує увагу на метричній розмірності графів дільників нуля для матричних напівкілець, побудованих над комутативними повністю антинегативними напівкільцями. Автор розробляє комбінаційний підхід для знаходження точної формули метричної розмірності графа $\Gamma\left(M_n\left(B\right)\right)$, де B – булеве напівкільце. Використовуючи множини $T_{I,J}$, що задають матриці з визначеними нульовими рядками та стовпцями, Д. Должан демонструє, що всі такі матриці мають однакове сусідство у графі та становлять класи близнюків. Застосування принципу включень-виключень дозволяє точно підрахувати кількість унікальних шаблонів матриць і довести, що будь-яка розв’язуюча множина повинна містити всі, крім щонайбільше одного представника кожного класу близнюків. Важливим результатом цього підходу є формулювання узагальненої комбінаційної формули для метричної розмірності для довільного n з можливістю перенесення висновків на загальний випадок скінченних комутативних повністю антинегативних напівкілець.

Особливе місце у сучасних дослідженнях посідає також поняття мультимножинної розмірності, яке розвивають Н. Алі, Х. М. А. Сідіккі, М. І. Куреші та інші [2; 1]. Зокрема, Н. Алі з колегами досліджують властивості стиснених графів дільників нуля (Compressed Zero-Divisor Graphs, CZDG), які відрізняються від класичних тим, що враховують еквівалентність елементів кільця за їх ангіляторами. Такий підхід дозволяє значно зменшити кількість вершин без втрати інформації про структуру дільників нуля, що спрощує аналіз та класифікацію кілець за допомогою інваріантів CZDG. У цих роботах наведено умови для визначення розмірності CZDG, наведено приклади для скінченних локальних кілець, кілець цілих чисел по модулю p2, циклічних кілець і кілець многочленів, що підкреслює універсальність застосування цього поняття. Водночас у подальших дослідженнях автори [1; 10] розширюють цю концепцію на нечіткі графи дільників нуля, де мультимножинна розмірність розглядається як засіб глибшого опису внутрішньої топології зв'язків у нечітких структурах.

Отже, наявний аналіз літературних джерел засвідчує як сталість інтересу до вивчення графів дільників нуля, так і послідовний розвиток нових підходів – від класичних конструкцій І. Бека та Д. Ф. Андерсона до сучасних досліджень мультимножинної розмірності в нечітких та стиснених графах. Це створює обґрунтоване підґрунтя для постановки задачі подальшого дослідження, яке спрямоване на комплексний аналіз мультимножинної розмірності в нечітких графах дільників нуля для ширшого класу комутативних кілець, а також на пошук універсальних інваріантів, здатних описати структурну складність таких графів і встановити нові зв'язки між властивостями кілець та їх графових моделей.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Комутативне кільце $(R,+,\cdot)$ являє собою алгебраїчну структуру, яка утворює Абелеву (комутативну) групу $(R,+)$, в якій операція множення є асоціативною, містячи одиничний елемент $1\neq 01$. Ідеал $I\subseteq R$ являє собою адитивну підгрупу, яка замкнена відносно множення на будь-який елемент кільця (2):

$$\forall r\in R,\forall a\in I: ra\in I\,, \tag{2}$$

причому елемент $x\in R$ є тільки тоді дільником нуля, коли діє умова $\exists y\in R, y=0, xy=0$, в результаті чого випливає (3):

$$\forall x,y\in R, xy=0\rightarrow x\in Z(R)\text{або } y\in Z(R). \tag{3}$$

Для більшої наочності концепції дільників нуля наведено приклади декількох комутативних кілець:

– кільце залишкового класу Z_n: $Z(\mathrm{Z}_n)=\{k\in \mathrm{Z}_n|\ \gcd(k,n)=1, k=0\}$, де, у наприклад Z_{12} такі числа виступають в ролі дільників нуля: 2,3,4,6,8,9,10;
– фактор-кільце $\mathrm{Z}_{[x]}/(x^2)$, яке містить усі елементні форми $a+bx$, де $x^2=0$; таким чином кожне bx являє собою дільник нуля;
– просте локальне кільце з головним ідеалом, тобто те, яке має чіткий максимальний ідеал, тобто Z_{pk} де p є простим числом.

Основними властивостями таких кілець виступають: той факт, що в результаті прямого добутку двох кілець діє (4):

$$Z(R_1\times R_2)=(Z(R_1)\times R_2)\cup(R_1\times Z(R_2)); \tag{4}$$

та той факт, що у фактор-кільці дільник нуля зберігається, якщо ідеал, за яким здійснюється розкладення, сам є дільником нуля. Множина дільників нуля $Z(R)$ як правило не утворює жодного ідеалу, оскільки вона зазвичай не є замкненою відносно додавання.

Виходячи з $Z(R)$, будується граф, який формально може бути описаний за допомогою (5):

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-1-151-161

$$G_f\left(Z\left(R\right)\right)=\left(V,E,\mu\right),\tag{5}$$

де $V=Z\left(R\right)$, $\{0\}$ відповідає множині вершин, E є множиною ребер, а $\mu:V\times V\to\left[0,1\right]$ є функцією належності, яка призначає ступінь нечіткості кожній парі вершин. Множина вершин створюється з усіх ненульових дільників нуля. Як вже було зазначено у вступі, два різних дільників нуля $x,y\in V$ об'єднуються за рахунок ребер, сили яких розглядаються не просто в якості бінарної характеристики, а оцінюються з точки зору нечіткості за посередництва функції належності μ між 0 та 1, тобто $\mu:V\times V\to\left[0,1\right]$.

Для двох елементів x,y застосовується (6):

$$\mu\left(x,y\right)=\begin{cases}1\dfrac{|x|+|y|}{|R|}, & якщо\, xy=0;\\ 0, & в\, іншому\, випадку.\end{cases}\tag{6}$$

Тут, $|x|$ є належною нормою, або оцінкою, яка відображає відносний розмір у кільцевій структурі. Це визначення передбачає, що належність $\mu\left(x,y\right)$ кількісно визначатиме ступінь взаємодії між елементами, тобто чим "меншими" є залучені елементи, тим сильніше може зважуватися їхнє відношення в графі.

Таким чином, формально повна структура нечіткого графа може виражатися таким (7) чином:

$$G_f\left(Z\left(R\right)\right)=\left(V,E,\mu\right),\mu:V\times V\to\left[0,1\right]\tag{7}$$

Отже, після побудови формальної моделі нечіткого графа дільників нуля на основі множини $Z\left(R\right)$, далі доцільно зосередитися на кількісній характеристиці складності такої структури, що здійснюється за допомогою мультимножинної розмірності в якості числового показника, що дозволяє оцінити мінімальну кількість опорних вершин, необхідних для повного розрізнення всіх вершин графа на основі унікальних шаблонів їхніх нечітких взаємозв'язків.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Враховуючи, що для нечіткого графа дільників нуля $G=\left(V,E,\mu\right)$ виконується (8):

$$\dim_M\left(G\right):=\min\{k\exists W=\left\{w_1,\ldots,w_k\right\}\subseteq V,\forall u\in V:r\left(u|W\right)-\text{попарно}\tag{8}$$

де ідентифікатор нечіткості (профільний вектор) визначається як

$$r\left(u|W\right)=\left(\mu\left(u,w_1\right),\ldots,\mu\left(u,w_k\right)\right),$$

він збирає нечіткі відношення між вершинами u до всіх елементів W [1].

В якості прикладу необхідно розглянути малий граф з 3 вершинами $V=\left\{v_1,v_2,v_3\right\}$ та даною нечіткою матрицею належності

$$\mu\left(v_i,v_j\right)=\begin{cases}1-6i+j, & якщо\, i=j;\\ 0, & якщо\, i=j.\end{cases}$$

Якщо обрати $W=\{v_1,v_2\}$, тоді профільні вектори відповідають:

$$\begin{cases} r(v_1|W)=(0,\mu(v_1,v_2)), \\ r(v_2|W)=(\mu(v_2,v_1),0), \\ r(v_3|W)=(\mu(v_3,v_1),\mu(v_3,v_2)). \end{cases}.$$

випадку виявлення, що ці вектори є попарно різними, з'являється можливість перевірки того, чи є W чинною ідентифікаційною множиною. Якщо так, тоді $\dim_M(G)\le 2$. Визначення мінімальної мультимножинної регресії графа здійснюється за рахунок покрокової ідентифікації підхожої підмножини $W\subseteq V$, яка робить кожну вершину однозначно відмінною за їхніми профільними векторами [10].

Загалом, процес включає такі покрокові процедури:

– створення нечіткої матриці $M:M=\left[\mu(v_i,v_j)\right]_{i,j}$, яка містить відповідний кожній парі вершин (v_i,v_j) ступінь належності;

– пошук кандидатів для опорної вершини $W:W=\{w_1,\dots,w_k\}\subseteq V$, де k покроково збільшується. При цьому мета полягає у тому, що знайти найменше можливе k;

– обчислення профільних векторів для кожної вершини $v_i\in V$ відносно $W:r(v_i|W)=(\mu(v_i,w_1),\dots,\mu(v_i,w_k))$;

– перевірка розрізненості: $r(v_i|W)=r(v_j\,|\,W),\forall i=j$. Якщо така множина W знаходиться, виконується $\dim_M(G)=k$.

На прикладі тривершинного графа, матриця суміжності (9) якого зображена нижче:

$$V=\{v_1,v_2,v_3\},M=\begin{bmatrix} 0 & \mu(v_2,v_1) & \mu(v_3,v_1) \\ \mu(v_1,v_2) & 0 & \mu(v_3,v_2) \\ \mu(v_1,v_3) & \mu(v_2,v_3) & 0 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

якщо обирається $W=\{v1,v2\}$, тоді для кожної вершини $vi:r(vi|W)=(\mu(vi,v1),\mu(vi,v2))$.

В результаті умова набуває такої (10) форми:

$$r(v_1|W)=r(v_2|W)=r(v_3|W)=r(v_1|W). \tag{10}$$

Якщо розглядати топологічну складність графу у контексті цієї розмірності, то здебільшого, розмір, структура ідеалів та можливі розкладення на прямі множники найсильніше впливають на неї. Наприклад, по мірі збільшення кільця R, множина дільників нуля стає як правило також більш обширною. У зв'язку з цим може збільшуватися кількість вершин у графі, що розширює кількість потенційних пар вершин і таким чином з'єднувальну різноманітність профільних векторів. У багатьох випадках, це сприяє підвищенню необхідної чисельності опорних вершин задля точного забезпечення однозначності.

З точки зору розкладання на прямі множники, якщо кільце R представляється в якості добутку $R=R_1\times R_2$, тоді для множини дільників нуля виконується (11):

$$Z(R)=(Z(R_1)\times R_2)\cup(R_1\times Z(R_2)). \tag{11}$$

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-1-151-161

Вихідна структура графа при цьому може інтерпретуватися як роз'єднане сполучення графів множників, з чого випливає адитивне відношення (12):

$$\dim_M\left(G_f\left(Z\left(R_1\times R_2\right)\right)\right)=\dim_M\left(G_f\left(Z\left(R_1\right)\right)\right)+\dim_M\left(G_f\left(Z\left(R_2\right)\right)\right). \tag{12}$$

При цьому варто враховувати тенденції, які є різними у випадку застосування окремих варіативностей графів:

– для простих фактор-кілець як Z_{p^k}, множина дільників нуля зазвичай є "просто" структурованою, що сприяє меншій розмірності;
– у випадку добуткових кілець як наприклад $\mathrm{Z}_6\cong \mathrm{Z}_2\times\mathrm{Z}_3$, діє адитивне збільшення, згідно з яким мультимножинна розмірність виходить із суми розмірностей часткових кілець;
– щодо кілець із "розгалуженою" структурою ідеалів, тобто тих, де наявні модулярні кільця з декількома простими множниками, вони можуть значно збільшувати кількість відмінних відношень між дільниками нуля. Іншими словами, чим більше простих множників має кільце (розгалужена структура), тим більше різних комбінацій нульових і ненульових частин існує. Це створює багато різних пар елементів, які перемножуються і дають нуль, тобто багато різних відношень.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Задля доведення практичної цінності наведених вище теоретичних надбань необхідно зразково продемонструвати процес визначення мультимножинної розмірності на конкретних комутативних кільцях.

Приклад 1: Z_{12}, в якому для кожної пари (x,y) визначається проста фукція нечіткості (13):

$$\mu(x,y)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}(|x|+|y|), & \textit{якщо } xy=0;\\ 0, & \textit{в іншому випадку}.\end{cases} \tag{13}$$

Тоді матриця нечіткості M для підмножини $\{2,6,8\}$ частково відповідає такому (14) формулюванню:

$$M=\begin{bmatrix}0 & \mu(6,2) & \mu(8,2)\\ \mu(2,6) & 0 & \mu(8,6)\\ \mu(2,8) & \mu(6,8) & 0\end{bmatrix}. \tag{14}$$

Якщо обирається $W=\{2,6\}$, результати для $v_i\in\{2,6,8\}$ відповідають (15):

$$r(v|W)=\left(\mu(v_i,2)i,\mu(v_i,6)\right). \tag{15}$$

У підсумку проводиться перевірка, чи є ці вектори попарно відмінними. Якщо так, $|W|=2$ є достатнім.

Приклад 2: фактор-кільце $\mathrm{Z}_{[x]}/\left(x^2\right)$, де можлива функція нечіткості наведена у (16):

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-1-151-161

$$\mu(u,v)=\begin{cases} 2/1, & якщо\, uv=0, \\ 0, & u=v; \\ немає\ зв'язку & в\, іншому\, випадку. \end{cases} \tag{16}$$

Якщо обрати 3 елемента $u_1 = x, u_2 = 1+x, u_3 = 2+3x$ та визначити $W=\{x\}$, тоді виконується (17):

$$r(u_i \mid W)=(\mu(u_i,x)). \tag{17}$$

В результаті показано, що для певних ui можуть виникати однакові профільні значення, що означає необхідність наступного референтного елемента.

Приклад 3: добуткове кільце $Z_2 \times Z_4$, де дільники нуля відповідають $Z(Z_2 \times Z_4)=(Z(Z_2)\times Z_4)\cup(Z_2 \times Z(Z_4))$.

Оскільки Z_2 в якості дільника нуля має тільки 0, Z_4 має $\{2\}$ в якості нього, випливає (18):

$$Z(R)=\{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,2)\}, \tag{18}$$

де функція нечіткості (19):

$$\mu((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\begin{cases} 0.7, & якщо\,(x_1,y_1)=0\, або\,(x_2,y_2)=0; \\ 0, & в\, іншому\, випадку. \end{cases} \tag{19}$$

Матриця нечіткості та профільні вектори результують (20) з цього аналогічним чином:

$$M=[\mu(v_i,v_j)], r(v \mid W)=(\mu(v_i,w_1),\ldots,\mu(v_i,w_k)). \tag{20}$$

Проте, незважаючи на чітко сформульоване теоретичне підґрунтя щодо мультимножинної розмірності, ефективно застосовуване на практиці, воно має декілька природних обмежень, які вимагають подальшого опрацювання.

Описане у поточному дослідженні адитивне розкладання є лише безпосередньо тоді дійсним, коли структура кільця насправді являє собою пряме добуткове кільце. Для загальний модулів, які характеризуються лише прямим розкладанням суми, або описуються завдяки інших видів рокзладання, як наприклад просте, ця адитивність не є гарантованою.

Крім того, викладений матеріал перш за все зосереджувався на застосуванні до скінченних (finite) комутативних кілець. Проте у випадку нескінченних (infinite), до яких наприклад входять $Z, Q[x]$ або поліноміальні дроби, які передбачають нескінченні множини вершин, виникає ситуація, коли не існує жодної скінченної множини W, яка б усе ще дозволяла однозначно розрізняти кожну вершину. Це особливо ймовірно, якщо граф дільників нуля має нескінченну кількість компонент або нескінченну щільність.

6 ВИСНОВКИ

Отже, проведені обчислення у прикладних випадках демонструють, що мультимножинна розмірність стоїть у прямій залежності від фундаментальних параметрів кілець. Таким чином, чітко структуровані кільця характеризують як правило невеликою розмірністю, в той час, як розгалужені, або ті, що складаються з розкладань множників, здебільшого корелюють із вищою комплексністю.

Для подальших досліджень, основним питанням виступає можливість застосування теоретичних надбань до загальних модульних структур, де досліджується взаємодія підмодулів, фактор-модулів або нескінченних модульних ланцюгів. До того ж, є сенс розширення представленої методики до некомунітативних кілець.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автор не має відповідних фінансових чи нефінансових інтересів щодо матеріалів, які слід розкривати.

Література

1. Ali, N., Siddiqui, H. M. A., Qureshi, M. I., Abdalla, M. E. M., Abd EL-Gawaad, N. S., Tolasa, F. T. On study of multiset dimension in fuzzy zero divisor graphs associated with commutative rings. *International Journal of Computational Intelligence Systems*. 2024. Vol. 17. Article 298. DOI: https://doi.org/10.1007/s44196-024-00706-2
2. Ali, N., Siddiqui, H. M. A., Qureshi, M. I., Abdallah, S. A. O., Almahri, A., Asad, J., Akgül, A. Exploring ring structures: Multiset dimension analysis in compressed zero-divisor graphs. *Symmetry*. 2024. Vol. 16. No. 7. Article 930. DOI: https://doi.org/10.3390/sym16070930
3. Anderson D. F., Badawi A. The total graph of a commutative ring. *Journal of Algebra*. 2008. Vol. 320. P. 2706–2719.
4. Cherrabi A., Essannouni H., Jabbouri E., Ouadfel A. On a new extension of the zero-divisor graph. *arXiv* : website. 2019. URL: https://arxiv.org/abs/1806.11442v2 (last accessed: 06.07.2025).
5. Dolžan D. The metric dimension of the zero-divisor graph of a matrix semiring. *arXiv* : website. 2021. URL: https://arxiv.org/abs/2111.07717v1 (last accessed: 06.07.2025).
6. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V. Algebras, rings and modules. Vol. 1. Mathematics and its applications. Kluwer Academic Publishers, 2005. 450 p.
7. Kuppan A., Ravi Sankar J. Fuzzy zero divisor graph in a commutative ring. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*. 2021. Vol. 11. Special Issue. P. 42–50. URL: https://jaem.isikun.edu.tr/web/images/articles/vol.11-Special_Issue/05.pdf (last accessed: 27.06.2025).
8. Lucas T. G. The diameter of zero divisor graph. *Journal of Algebra*. 2006. Vol. 301. P. 174–193.
9. Ravi Sankar J., Meena S. Changing and unchanging the domination number of a commutative ring. *International Journal of Algebra*. 2012. Vol. 6. № 27. P. 1343–1352.
10. Simanjuntak, R., Siagian, P., Vetrík, T. The multiset dimension of graphs. *arXiv* : website. 2019. URL: https://arxiv.org/abs/1711.00225v2 (last accessed: 06.07.2025).

References

1. Ali, N., Siddiqui, H. M. A., Qureshi, M. I., Abdalla, M. E. M., Abd EL-Gawaad, N. S., & Tolasa, F. T. (2024). On study of multiset dimension in fuzzy zero divisor graphs associated with commutative rings. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 17, Article 298. https://doi.org/10.1007/s44196-024-00706-2 [In English].
2. Ali, N., Siddiqui, H. M. A., Qureshi, M. I., Abdallah, S. A. O., Almahri, A., Asad, J., & Akgül, A. (2024). Exploring ring structures: Multiset dimension analysis in compressed zero-divisor graphs. *Symmetry*, 16(7), Article 930. https://doi.org/10.3390/sym16070930 [In English].
3. Anderson, D. F., & Badawi, A. (2008). The total graph of a commutative ring. *Journal of Algebra*, 320, 2706–2719. [In English].

4. Cherrabi, A., Essannouni, H., Jabbouri, E., & Ouadfel, A. (2019). On a new extension of the zero-divisor graph. *arXiv*. Retrieved from https://arxiv.org/abs/1806.11442v2 (last accessed: 06.07.2025) [In English].
5. Dolžan, D. (2021). The metric dimension of the zero-divisor graph of a matrix semiring. *arXiv*. Retrieved from https://arxiv.org/abs/2111.07717v1 (last accessed: 06.07.2025) [In English].
6. Hazewinkel, M., Gubareni, N., & Kirichenko, V. V. (2005). *Algebras, rings and modules* (Vol. 1). Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers. [In English].
7. Kuppan, A., & Ravi Sankar, J. (2021). Fuzzy zero divisor graph in a commutative ring. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 11(Special Issue), 42–50. Retrieved from https://jaem.isikun.edu.tr/web/images/articles/vol.11-Special_Issue/05.pdf (last accessed: 27.06.2025) [In English].
8. Lucas, T. G. (2006). The diameter of zero divisor graph. *Journal of Algebra*, 301, 174–193. [In English].
9. Ravi Sankar, J., & Meena, S. (2012). Changing and unchanging the domination number of a commutative ring. *International Journal of Algebra*, 6(27), 1343–1352. [In English].
10. Simanjuntak, R., Siagian, P., & Vetrík, T. (2019). The multiset dimension of graphs. *arXiv*. Retrieved from https://arxiv.org/abs/1711.00225v2 (last accessed: 06.07.2025) [In English].

Стаття надійшла до редакції 03.09.2025
Стаття прийнята до друку 03.12.2025
Дата публікації статті 26.03.2026

Стахів Ростислав Юрійович
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
аспірант
вул. Шевченка, 57 Івано-Франківськ, Україна 76018
rost.stakhiv@gmail.com
ORCID: 0009-0002-5044-1229

Для посилань:
Стахів Р. Ю. Аналіз мультимножинної розмірності в нечітких графах дільників нуля, повязаних з комутативними кільцями . Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. № 1. С. 151–161.

For references:
R. Stakhiv (2026). Analysis of multiset dimension in fuzzy zero-divisor graphs associated with commutative rings. Mechanics and mathematical methods. VIII (1). 151–161.