УДК 512.816.1+517.53+519.21

ДІЙСНІ СУПЕРСИМЕТРИЧНІ АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО СИМЕТРИЧНИХ РОЗПОДІЛІВ

Ясельський А. Р.[1]
[1]*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника*

Анотація: У статті досліджено дійсні суперсиметричні аналітичні функції та їх застосування до симетричних розподілів, що мають важливе значення для математичної фізики та теорії ймовірностей. Основну увагу зосереджено на побудові таких функцій, які залишаються інваріантними відносно суперсиметричних перетворень, а також на визначенні їхніх характеристик та властивостей. Обґрунтовано доцільність застосування суперпростору як математичної структури, що дозволяє поєднати бозонні та ферміонні змінні в єдиному формалізмі. Це створює передумови для уніфікації аналізу симетричних розподілів, які виникають у статистичній механіці, квантовій теорії поля та інших областях сучасної фізики.

Представлено низку прикладів, які демонструють, як суперсиметричні аналітичні функції можуть бути використані для опису й моделювання структур із вбудованими симетріями, що мають як теоретичне, так і прикладне значення. Показано, що в контексті ймовірнісних моделей ці функції дозволяють точніше формалізувати поведінку систем, які зберігають симетрію при певних перетвореннях, зокрема в умовах стохастичної динаміки або квантових флуктуацій. Окрема увага приділяється аналізу умов аналітичності дійсних суперсиметричних функцій, побудованих у рамках узагальненого супермножинного аналізу, та визначенню їх взаємозв’язку з класичними дійсними аналітичними функціями. У роботі також розглядаються питання узагальнення симетричних розподілів на суперпростір, що відкриває нові можливості для моделювання складних систем з високим рівнем структурованості. Доведено, що запропонований підхід сприяє розширенню класу математичних засобів, застосовуваних у сучасному аналізі розподілів, особливо в контексті вивчення складних стохастичних процесів, що володіють внутрішньою симетрією. Отримані результати можуть бути використані як для подальшого розвитку теоретичних аспектів суперсиметрії, так і для практичного розв’язання задач математичної фізики, пов’язаних з симетричними структурами розподілів у надпросторах. У підсумку зроблено висновок, що використання дійсних суперсиметричних аналітичних функцій є перспективним напрямом досліджень як з точки зору фундаментальної науки, так і прикладних міждисциплінарних підходів до вивчення складних систем.

Ключові слова: суперпростір, функція густини, супергармонічний осцилятор, топологія, бозонна та ферміонна компоненти.

REAL SUPERSYMMETRIC ANALYTIC FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS TO SYMMETRIC DISTRIBUTIONS

A. Yaselskyi[1]
[1]*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University*

Abstract: The article investigates real supersymmetric analytic functions and their applications to symmetric distributions, which are of great importance for mathematical physics and probability theory. The main attention is focused on the construction of such functions that remain invariant under supersymmetric transformations, as well as on the determination of their characteristics and properties. The feasibility of using superspace as a mathematical structure that allows combining bosonic and fermionic variables in a single formalism is substantiated. This creates the prerequisites for the unification of the analysis of symmetric distributions that arise in statistical mechanics, quantum field theory, and other areas of modern physics.

A number of examples are presented that demonstrate how supersymmetric analytic functions

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-1-162-172

can be used to describe and model structures with built-in symmetries that have both theoretical and applied significance. It is shown that in the context of probabilistic models, these functions allow for a more accurate formalization of the behavior of systems that preserve symmetry under certain transformations, in particular under conditions of stochastic dynamics or quantum fluctuations. Special attention is paid to the analysis of the conditions for analyticity of real supersymmetric functions constructed within the framework of generalized superset analysis and to the determination of their relationship with classical real analytic functions. The paper also considers the issues of generalizing symmetric distributions to superspace, which opens up new opportunities for modeling complex systems with a high level of structuring. It is proven that the proposed approach contributes to the expansion of the class of mathematical tools used in modern distribution analysis, especially in the context of studying complex stochastic processes with internal symmetry. The results obtained can be used both for the further development of theoretical aspects of supersymmetry and for the practical solution of problems in mathematical physics related to symmetric structures of distributions in superspaces. As a result, it is concluded that the use of real supersymmetric analytic functions is a promising area of research both from the point of view of fundamental science and applied interdisciplinary approaches to the study of complex systems.

Keywords: superspace, density function, superharmonic oscillator, topology, bosonic and fermionic components.

1 ВСТУП

У фокусі даного дослідження знаходиться розгляд дійсних аналітичних функцій, які визначаються над суперпросторами та складаються як зі звичайних, тобто бозонних, так і з антикомутативних, тобто ферміонних компонентів. Натомість, в межах теорії ймовірності симетричні розподіли відіграють фундаментаьну роль, оскільки вони моделюють процеси в фізичних, біологічних та економічних системах. Як правило, вони аналітично описуються завдяки функціям густини, які є незмінними відносно центральної точки, тобто відповідають $f(x) = f(-x)$.

Задля точного визначення того, наскільки дійсні суперсиметричні аналітичні функції є підхожими для апроксимації, або навіть для створення симетричних ймовірнісних розподілів, необхідно провести огляд фундаментальних концепцій суперсиметричного аналізу. Початковим фундаментальним елементом виступає суперпростір $R^{(1|1)}$, який складається з однієї дійсної, тобто комутативної змінної $x \in R^x$, та антикомутативної змінної Грассмана, що по суті є розширенням класичного однорозмірного простору з «ферміонним направленням». Функції у цьому просторі, тобто суперфункції, виражаються як $F(x,\theta) = f(x) + \theta g(x),$ де f та g відповідають типовим дійсним деференційованим функціям. Змінна θ задовольняє умову $\theta^2 = 0$, що передбачає лінійну структуру у суперпросторі.

Центральну роль у суперсиметричному аналізі відіграє суперсиметричний розподіл $D = \partial_\theta + \theta\partial_x,$ застосування якого на $F(x,\theta)$ включає не тільки диференціювання відповідно до θ, а також одночасно відображає дію оператора ∂_x у зміненій формі. Таким чином, цей розподіл імплікує відношення $D^2 = \partial_x$, що відображає структурний зв'язок між ферміонною та бозонною компонентами.

Дійсна структура суперсиметричних функцій має також передбачати додаткові умови стосовно f та g, щоб $F(x,\theta)$ можна було розглядати як дійсну функцію у розширеному просторі. У багатьох застосуваннях це є настільки ж необхідним, як і умова, що $f(x)$ та $g(x)$ є дійсними та при застосуванні можуть задовольняти певні умови паритетності та симетричності.

З точки зору ймовірнісного аналізу, необхідно розглядати дійсні ймовірнісні функції густини $f(x)$, які задовольняють умову $f(x) = f(-x)$. Класичним прикладом виступають нормальний розподіл $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, або розподіл Лапласа. Такі розподіли характеризуються перетворенням Фур'є, при чому симетричність призводить до дійсності у характеристичній функції.

Нарешті, суперінтеграл представляє заключну ланку у суперсиметричному аналізі, базуючись на інтегралі Березіна. Таким чином, для суперфункції $F(x,\theta)$ інтеграл по θ визначається як $\int d\theta F(x,\theta) = g(x)$, де зберігається лише θ-лінійна частина. В результаті, комбінація суперінтеграції з дією оператора D уможливлює створення суперсиметричних незмінних ймовірнісних структур.

Однак залишається відкритим питання: чи можуть дійсні суперсиметричні функції ефективно апроксимувати симетричні функції густини та якою мірою структура суперпростору впливає на точність і стабільність такої апроксимації у ймовірнісному сенсі.

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-1-162-172

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

У дослідженні Л. Алар'є-Везіни, О. Блондо-Фурньє [1] розгорнуто теорію симетричних функцій у суперпросторі. Основою комбінаторної структури слугують суперрозбиття – впорядковані пари партицій, які задають індексацію надполіномів. Побудовано різні базиси симетричних суперфункцій, зокрема мономіальний, степеневий, елементарний, однорідний, а також деформований базис функцій Джека та Макдональда. Визначено відповідні скалярні добутки (включно з параметрично залежним від α, q і t), ядро Коші та автоморфізм ω, які зберігають структурні властивості надпростору. Суперполіноми Джека та Макдональда подано як власні функції відповідно спектральних та деформованих операторів Чернікова, збережено трикутність відносно мономіального базису та ортогональність у відповідному скалярному добутку. Для поліномів Макдональда визначено дуальність через спряження суперрозбиттів і параметричне відображення $(q,t) \leftrightarrow (t-1, q-1)$.

У роботі [2] розглянуто розширення теорії розподілів у суперпросторі з метою побудови загальної теорії інтегрування над доменами та поверхнями, визначеними як по бозонних, так і по ферміонних координатах. Основна увага приділена застосуванню узагальнених функцій – розподілів Гевісайда та Дірака, до визначення інтегралів над суперобластями й суперповерхнями. Пропонується аналітична методика, заснована на фазових функціях, яка дозволяє представити інтегрування через глобальні розподіли. Запропоновані визначення інтегралів виявляються незалежними від конкретного вибору фазової функції, що задає домен або поверхню, і узагальнюють класичні формули інтегрування, зокрема формули Коші-Помпею та Піццетті. У роботі наведено приклади обчислення об'ємів і площ поверхонь суперпараболоїда та супергіперболоїда обертання, які розширюють класичні результати до надпростору довільної суперрозмірності. Нарешті, доведено узагальнену дистрибутивну формулу Коші-Помпею для супераналітичних функцій, що охоплює як класичний, так і суперсиметричний випадок.

Л. Фреста розглядає суперсиметричність у контексті аналізу систем зі стохастичним безладом, зокрема моделі Андерсона [3]. Після введення нормованих ґрассманових алгебр та суперфункцій формулюються три основні твердження, що є фундаментальними для подальших оцінок. Представлено інтегрування по ґрассманових змінних із використанням відповідних норм, що дозволяє ефективно контролювати інтеграли без необхідності їх точного обчислення. Введено супервектори, суперполя і суперфункції як комбінації бозонних та ферміонних змінних. Описано суперінтеграл як операцію над простором суперфункцій, зокрема в рамках суперчетної симетрії, де використовуються оператори суперсиметрії (Q-оператори) та реалізується локалізаційна формула. Запропоновано два представлення функції Гріна з безладом (усередненої по ансамблю): пряме суперінтегральне представлення та нове, тобто дуальне, що виявляється особливо ефективним у режимі слабкого безладу. Обидва підходи базуються на суперформулі Планшереля і перетворенні Фур'є на ґрассмановому просторі. В подальших розділах статті викладено техніку кластерного розкладу для обох представлень (при сильному та слабкому безладі), засновану на BBF-формулі (Battle-Brydges-Federbush), що дозволяє отримати оцінки експоненційного спаду середньої функції Гріна. Також доведено аналітичність локальної густини станів (LDOS – Local Density of States) та оцінено її асимптотику типу «хвіст Ліфшица».

У свою чергу А. Вальдроном, С. Чаттерджі та К. Єтмішоглу [4] запропоновано геометричну теорію вимірювання для класичних динамічних систем як з дискретними, так і з неперервними ступенями свободи, в межах супергеометрії. Запроваджується коваріантна побудова зовнішнього диференціального оператора на супермноговидах із використанням зв'язності Леві-Чивіти, що дозволяє сформулювати надсимплектичну двоформу, яка включає стандартну симплектичну структуру, ферміонні змінні та тензор кривизни. Доведено, що замкненість цієї надсимплектичної форми призводить до розкладу типу Годжа, де виділяються бозонні та ферміонні компоненти. Розроблено внутрішній добуток на просторі суперфункцій, який базується на аналогії з побудовою Годжа та пов'язується з надверсією зіркового добутку Мояля. Визначено супероб'ємну форму за допомогою Березинового інтегралу, що включає канонічно визначене вертикальне поле об'єму Θ(Ω), і з її допомогою сформульовано позитивно визначений внутрішній добуток. Побудовано ймовірнісний конус, елементи якого є зірочковими квадратами гермітових суперполів, а спостережувані визначаються як гермітові суперфункції. У межах динаміки на суперфазовому просторі введено поняття симплектичного супервекторного поля, яке генерує еволюцію, узгоджену з суперсимплектичною формою. Динамічні системи розглянуто як трійки (M, Ω, L), де L – лінійне підрозшарування із симплектичних супервекторів. Розглянуто часову еволюцію ймовірнісних розподілів через суперсимплектичну структуру на прикладі двобітової системи, де показано, що динаміка відповідає періодичному руху в межах еліпсоїдального простору ймовірностей. В підсумку формується зірковий добуток на сутоферміонному просторі R0|m, де ймовірнісні стани представлено через суперполя, пов'язані з матрицями Кліффорда, що дозволяє отримати нормалізовані ймовірнісні розподіли, що узгоджуються з фізичними вимогами до класичного вимірювання в супергеометрії.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Формальна постановка задачі апроксимації симетричних функцій густини в контексті суперсиметричного аналізу формулюється наступним чином. Нехай задано функцію $f(x)\in C^{\omega}(\mathrm{R})$, яка задовольняє умову симетрії $f(x)=f(-x)$, та пов'язану з нею суперфункцію $F(x,\theta)=f(x)+\theta g(x)$, де $g(x)=-f'(x)$, що забезпечує суперсиметричну умову $DF=0$, де оператор $D=\partial_{\theta}+\theta\partial_{x}$.

Задача апроксимації полягає у знаходженні послідовності суперфункцій $F_n(x,\theta)=f_n(x)+\theta g_n(x)$, яка задовольняє наступні умови:

− $f_n(x)\in C^{\omega}(\mathrm{R}), f_n(x)=f_n(-x)$ – кожна апроксимуюча функція є парною та аналітичною;

− $g_n(x)=-f_n'(x)$, отже $DF_n=0$ – забезпечується суперсиметричність кожного члена послідовності;

− збіжність $f_n\to f$ в просторі $C^1_{loc}(\mathrm{R})$ або в аналітичній нормі $C^{\omega}(K)$ на компактних множинах $K\subset R$, тобто:
$\sup_{x\in K}|f_n(x)-f(x)|\to 0, \sup_{x\in K}|g_n(x)+f'(x)|\to 0$;

− відповідна збіжність суперфункцій у змішаній топології: $F_n\to F$ у $C^1(K)\oplus\theta C^0(K)$ або $C^{\omega}(K,\Lambda_1)$, де Λ_1 є породженим градуйованим алгебраїчним простором над θ, а $C^{\omega}(K,\Lambda_1)$ – простором аналітичних суперфункцій на K з ферміонним розширенням.

Метою є побудова таких послідовностей $\{F_n\}$, які реалізують точне симетричне наближення даної густини $f(x)$ не лише у бозонному напрямку, але й у повному суперпросторі $R^{1|1}$, з урахуванням структурних вимог суперсиметрії.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Відтепер, існує можливість формулювання центральних математичних результатів на базі введених структурних концепцій, які точно відображають зв'язок між суперсиметричними функціями та симетричними ймовірнісними розподілами. Ці результати зосереджуються здебільшого на питанні, яким чином аналітичні суперфункції характеризуються за допомогою конкретних алгебраїчних та аналітичних умов.

Теорема 1 (Характеристика дійсних суперсиметричних аналітичних функцій): Функція $F(x,\theta)=f(x)+\theta g(x)$ в межах суперпростору R^{11} є тільки тоді дійсною та суперсиметрично-аналітичною, коли $f(x)\in C^{\omega}(\mathrm{R}), g(x)=\pm f'(x)$, а F задовольняє умову $DF=0$ з урахуванням дії суперсиметричного оператора D [5].

Доведення: Умова $DF=0$ виконується при безпосередньому застосуванні суперпохідної (1):

$$DF=\partial_\theta f(x)+\theta\partial_x f(x)+\partial_\theta(\theta g(x))+\theta\partial_x(\theta g(x))=g(x)+\theta f'(x) \tag{1}$$

що є тільки тоді рівною нулю, коли $g(x)=-f'(x)g(x)=-f'(x)g(x)=-f'(x)$.

Оскільки в θ-розкладі немає вільного доданку (для θ^0) і коефіцієнт при θ також має зникати, обидва доданки повинні дорівнювати нулю. Зворотний напрям доведення є очевидним, оскільки якщо $g(x)=-f'(x)g(x)=-f'(x)g(x)=-f'(x)$, то DF=0.

Теорема 2 (Апроксимація симетричних розподілів за допомогою суперфункцій): Якщо $f(x)$ є симетричною ймовірнісною функцією густини, де $f(x)=f(-x)$, тоді вона є і дійсною суперсиметричною функцією, яка зберігає однакову симетричну властивість у бозонній частині та забезпечує просторове перетворення за допомогою суперінтегрування (2):

$$\int d\theta F(x,\theta)=f'(x) \tag{2}$$

Для підхожих класів симетричних функцій густини існують послідовності $F_n(x,\theta)=f_n(x)+\theta f_n'(x)$, де $f_n\to f$ є рівномірним на певній області (наприклад, на компактній множині в R). Це означає, що $\sup_x|f_n(x)-f(x)|\to 0$ при n→∞. Тоді похідні $f_n'\to f'$ також збігаються рівномірно (за умови, що f_n гладкі і збігаються рівномірно разом зі своїми похідними, тобто $f_n\in C^1$ і збігаються в C^1-нормі) [6].

Таким чином дійсне формулювання (3), згідно з яким:

$$F_n(x,\theta)=f_n(x)+\theta f_n'(x)\to f(x)+\theta f'(x)=F(x,\theta) \tag{3}$$

що виступає в ролі як поточкової збіжності для кожної пари (x,θ), так і збіжності у супремум-топології, тобто $\sup_{x,\theta}|F_n(x,\theta)-F(x,\theta)|\to 0$, тож $F_n\to F$ є не лише формальним, а й у строгому топологічному сенсі – являє собою збіжність у просторі суперфункцій із відповідною C^{∞}-структурою, тобто над супермноговидами в заданій топології [7].

У межах диференціальної геометрії супермноговидів, суперкарта (superchart) (U,O_U) визначається як пара відкритої множини $U\subseteq\mathrm{R}$ і структури O_U, яка є зв'язкою суперкомутативних алгебр, що відображає наявність обох типів змінних. Це дозволяє визначати гладкі суперфункції як елементи $O_U(U)=C^{\infty}(U)\otimes\Lambda(\theta)$.

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-1-162-172

Щодо метричної структури, суперпростір $R^{1|1}$ може бути визначеним разом із суперметрикою, яка задається у вигляді симетричної Z^2-градуйованої 2-форми $ds^2 = dx^2 + ad\theta d\theta$, де a є формальним параметром з антисиметричними властивостями, хоча в найпростішому випадку метричні структури часто не використовуються безпосередньо [8]. Натомість центральну роль відіграє суперзв'язок (superconnection), визначений через супердеривації (superderivations), тобто оператор $D = \partial_\theta + \theta\partial x$ виступає у ролі коваріантного похідного вздовж ферміонного напряму, а також генерує суперсиметричні векторні поля.

Доведення: симетрія $\mathrm{f}(-x) = f(x)$ передбачає, що $f'(-x) = -f(x)$, де $\theta f'(x)$ є асиметричним, що загалом є умовою, яка збігається з концептуальними вимогами суперсиметричності. Збіжність цієї послідовності походить зі стандартних оцінок для аналітичних апроксимацій, де контроль за функціями та їхніми похідними здійснюється рівномірно.

Теорема 3 (отримання симетрії в умовах супертрансформації Фур'є): Ця трансформація, яка виражається у (4):

$$F\left[F\right](k,\kappa) = \int dx d\theta e^{-i(kx+\kappa\theta)} F(x,\theta) \tag{4}$$

забезпечує цю властивість для бозонної частини $f(x) = f(-x)$, якщо $g(x)$ є асиметричним. Особливо для $F(x,\theta) = f(x) + \theta f'(x)$ є дійсним $F\left[F\right](-k,\kappa) = F\left[F\right](k,\kappa)$, тож симетрія відображається в частотному просторі [9].

Доведення: за посередництва розділення такого типу трансформації, у бозонній та ферміонній частинах отримується (5):

$$F\left[F\right](k,\kappa) = \int dx e^{-ikx} f(x) + \kappa \int dx e^{-ikx} g(x) \tag{5}$$

оскільки $f(x)$ є парним, а $g(x)$ непарним, відповідні образи Фур'є є дійсними, тобто суто уявними з відповідним паритетом. З цього випливає отримання симетричності загального перетворення [10].

Перехід від абстрактних суперфункцій до модельних виразів виконується за допомогою суперінтегралу, який одночасно враховує як аналітичні властивості, так і властивості збереження симетрії. Центральний приклад відображається за рахунок такої (6) функції:

$$F(x,\theta) = e^{-x^2/2} + \theta \cdot x e^{-x^2/2} \tag{6}$$

чия бозонна частина точно відповідає функції густини нормально розподілу з нульовим середнім значенням та одиничною дисперсією. Відповідна структура множення в суперпросторі $F(x,\theta)F(x,\theta) = e^{-x^2} + 2\theta x e^{-x^2}$ призводить за умов інтеграції до $\int dx d\theta F(x,\theta)^2 = 2\int dx x e^{-x^2}$,де результат дорівнює нулю, що фактично є вираженням симетрії та антисиметричної частини суперфункції. Цей приклад демонструє, як суперфункція цілеспрямовано відображає класичні розподіли за рахунок своєї структури, особливо в контексті симетрії віддзеркалення.

Аналогічно з цим, різновиди такої конструкції можуть застосовуватися до інших симетричних розподілів. Наприклад, для розподілу Лапласа з функцією густини $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ може застосовуватися суперфункція у формі (7):

https://doi.org/10.31650/2618-0650-2026-8-1-162-172

$$F(x,\theta)=\frac{1}{2}e^{-|x|}+\theta\cdot\operatorname{sgn}(x)\frac{1}{2}e^{-|x|}. \quad (7)$$

У цьому випадку, ферміонна частина дає розподільну (узагальнену) похідну від густини, що, у свою чергу, встановлює зв'язок із структурою, описаною в Теоремі 2.

Ще більш диференційований підхід передбачає застосування до розподілу Коші $f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$, розширення якого в рамках суперсиметричного аналізу уможливлюється за допомогою такої суперфункції: $F(x,\theta)=f(x)+\theta\left(\frac{-2x}{\pi\left(1+x^2\right)^2}\right)$. У цьому відношенні, похідна функція густини виступає в якості ферміонної частини, що дозволяє узгодити суперструктуру із властивістю розподілу.

Якщо застосовувати ці конкретні моделі в якості вихідного засобу для створення нових розподілів, необхідно визначити поняття суперсиметричних генераторів, тобто диференційних операторів на суперпросторі, функція якого полягає у перетворенні тривіальних початкових функцій на структурі та симетричні суперфункції густини. Типовий оператор може виражатися у такій формі (8):

$$G=D^2-x^2+\theta\partial_\theta \quad (8)$$

За рахунок дисперсії термів у G, можуть бути створені параметричні групи суперсиметричних розподілів, бозонні частини яких описують відомі, або нові статистичні моделі. Задля конкретизації цього принципу розглядається група простих зразкових операторів (супергармонічних осциляторних операторів), які мають узагальнену форму (9):

$$G\lambda=D^2-\lambda x^2+\theta\partial_\theta \quad (9)$$

де $\lambda\in\mathrm{R}$ є довільним параметром. Цей оператор відображає контрольовану деформацію гармонічного суперсиметричного генератора та дозволяє здійснювати цілеспрямовану модифікацію дії $G\lambda$ на дану суперфункцію $F(x,\theta)$.

Вибір λ особливо впливає на рівновагу між дифузією та концентрацією в межах бозонної частини. При $\lambda>0$, виникає сильніша централізація функції густини, яку можна порівняти з нормальним розподілом з низькою дисперсією, в той час, як $\lambda<0$ відображається у вигляді розширення розподілу. Додатковий ферміонний компонент $\theta\partial$ відіграє роль оператора підрахунку, який здійснює зважування ферміонних термів відповідно до їхнього упорядкування, таким чином виконуючи фільтрацію певних симетрій в межах суперструктури.

Наприклад, якщо вибрати $F(x,\theta)=e^{-\alpha x^2}+\theta x e^{-\alpha x^2}$ в якості функції введення, застосування $G\lambda$ для різних значень λ створює характерні спотворення функції густини у центрі, або по краях. Вже при малих відхиленнях від $\lambda=\alpha$ спостерігається, як змінюється форма бозонної частини з рахунок отримання глобальної симетрії. Одночасно з цим, оператор регулює зважування ферміонної частини, діючи як спектральний фільтр: він підсилює або пригнічує вклад ферміонних термів залежно від їхнього порядку та знакової структури. Це дозволяє контролювати баланс між бозонною та ферміонною складовими функції, а отже, – впливати на загальну симетрію й фізичну інтерпретацію супероб'єкта.

Ця структурна варіативність дозволяє реалізувати плавні переходи між різноманітними типами розподілів в межах єдиної аналітичної групи. За рахунок того, що параметр λ розглядається не як фіксоване значення, натомість як динамічна варіативна величина, наприклад, залежна від зовнішніх системних параметрів, або як функція процесу управління, фундаментальні функції густини можуть бути підлаштованими до змінних умов. Така можливість є особливо релевантною у стохастичних моделях, в яких симетричні стани рівноваги поступово змінюються під впливом зовнішніх полей, або згладжувальних ефектів, зберігаючи фундаментальну незмінну структуру.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Суперсиметричний аналіз виступає ефективною математичною основою для моделювання симетричних ймовірнісних розподілів завдяки введенню суперпростору, який поєднує бозонні та ферміонні змінні. Ключовою умовою є суперсиметричність, згідно з якою ферміонна компонента функції є похідною від бозонної з протилежним знаком, що забезпечує внутрішній зв'язок між симетрією функції густини та її градієнтною структурою.

Доведено можливість апроксимації таких розподілів послідовностями суперфункцій, які збігаються як у звичайній, так і в суперсиметричній топології, зберігаючи парність. Крім того, перетворення Фур'є підтверджує збереження симетрії у частотному просторі, що узгоджується з паритетом компонент.

Проведене дослідження дозволило виявити низку фундаментальних властивостей дійсних суперсиметричних аналітичних функцій, які можуть бути інтерпретовані як природне розширення класичних аналітичних функцій на простори, що допускають суперсиметричні структури. Формулювання означення дійсних суперсиметричних аналітичних функцій як таких, що є розв'язками супердиференціальних рівнянь із заданими симетріями, відкриває нові можливості для побудови функціональних просторів, адаптованих до задач математичної фізики та статистики. Одним із базових результатів роботи є встановлення зв'язку між дійсними суперсиметричними функціями та класом симетричних розподілів, що характеризуються інваріантністю відносно перестановок та інверсій. Зокрема, доведено, що функції, побудовані на основі суперсиметричних змінних, можуть моделювати такі розподіли без необхідності жорсткого параметричного задання.

У контексті узагальнення теорії функцій на суперпростори, отримані результати доповнюють відомі конструкції в суперматематиці (supermathematics) і гармонійно інтегрується у загальні підходи до супергруп та суперсиметричних інтегралів. Встановлені в роботі властивості функцій, зокрема їхня інваріантність та здатність до композицій, забезпечують математичну строгість, необхідну для їх застосування в аналітичних і чисельних дослідженнях. Порівняння результатів із класичними аналітичними функціями (наприклад, поліномами, степеневими рядами, експоненціальними функціями) виявило, що дійсні суперсиметричні функції зберігають основні структурні переваги (аналітичність, можливість розкладу в ряд). У той же час їм властива більш висока гнучкістьу відображенні симетричних властивостей.

Одержані результати можуть бути безпосередньо застосовані до моделювання розподілів з центральною симетрією, зокрема нормального, лапласівського та логістичного типів, а також для побудови нових типів функціональних перетворень у суперпросторах.

6 ВИСНОВКИ

Операторний підхід із використанням похідної D та генераторів типу $G\lambda = D^2 - \lambda x^2 + \theta\partial_\theta$ дозволяє будувати нові групи суперсиметричних функцій, змінюючи властивості розподілу через параметр λ. Таким чином, суперсиметричні функції не лише узагальнюють класичні розподіли, а й представляються в якості інструменту для створення нових стохастичних моделей зі збереженням фундаментальної симетрії.

Перспективи подальших досліджень охоплюють розширення цієї теорії на багатовимірні суперпростори, де виникає потреба в узагальненні умов симетрії та інтеграції на складніших супермноговидах. Також актуальним є вивчення динаміки суперсиметричних систем у стохастичних процесах, зокрема побудова рівнянь еволюції для густин ймовірності у суперпросторі.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів щодо матеріалів, які слід розкривати.

Література

1. Alarie-Vézina L., Blondeau-Fournier O., Desrosiers P., Lapointe L., Mathieu P. Symmetric functions in superspace: A compendium of results and open problems (including a SageMath worksheet) [Preprint]. *arXiv*, 2019. URL: https://arxiv.org/abs/1903.07777v1 (date of access: 20.06.2025)
2. Guzmán Adán A., Sommen F. Distributions and integration in superspace [Preprint]. *arXiv*, 2018. URL: https://arxiv.org/abs/1804.00966v1 (date of access: 20.06.2025).
3. Fresta L. Supersymmetric cluster expansions and applications to random Schrödinger operators. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*. 2021. Vol. 24(1). DOI: https://doi.org/10.1007/s11040-021-09375-5.
4. Waldron A., Chatterjee S., Yetişmişoğlu C. Discrete dynamics and supergeometry. *Journal of High Energy Physics*. 2024. Vol. 2024(9). P. 1–46. DOI: https://doi.org/10.1007/JHEP09(2024)164.
5. Martínez-Pérez N. E., Ramírez C. Supersymmetric higher-derivative models in quantum cosmology. *The European Physical Journal C*. 2023. Vol. 83. Article 998. DOI: https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-12160-z.
6. Theorem 8.2.11: Uniform Convergence and Differentiation. Interactive Real Analysis [Electronic resource]. URL: https://mathcs.org/analysis/reals/funseq/proofs/uconvdiff.html (date of access: 27.06.2025).
7. YesYes. Sup norm and uniform convergence [Answer to question “Sup norm and uniform convergence?”]. *Mathematics Stack Exchange* : website. URL: https://math.stackexchange.com/questions/1525649/sup-norm-and-uniform-convergence (date of access: 27.06.2025).
8. nLab contributors. Supergeometry. *nLab* : website. URL: https://ncatlab.org/nlab/show/supergeometry (date of access: 27.06.2025).
9. De Bie H. Fourier transform and related integral transforms in superspace. *arXiv*, 2008. Preprint. URL: https://arxiv.org/abs/0805.1918 (last accessed: 03.08.2025).
10. Barnett S. M., Dalton B. J. Glauber P-representations for fermions. arXiv, 2023. Preprint. URL: https://arxiv.org/abs/2210.11980 (last accessed: 03.08.2025).

References

1. Alarie-Vézina, L., Blondeau-Fournier, O., Desrosiers, P., Lapointe, L., & Mathieu, P. (2019). Symmetric functions in superspace: A compendium of results and open problems (including a SageMath worksheet) [Preprint]. *arXiv*. https://arxiv.org/abs/1903.07777v1 [In English].
2. Guzmán Adán, A., & Sommen, F. (2018). Distributions and integration in superspace [Preprint]. arXiv. https://arxiv.org/abs/1804.00966v1 [In English].
3. Fresta, L. (2021). Supersymmetric cluster expansions and applications to random Schrödinger operators. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, 24(1). https://doi.org/10.1007/s11040-021-09375-5 [In English].
4. Waldron, A., Chatterjee, S., & Yetişmişoğlu, C. (2024). Discrete dynamics and supergeometry. *Journal of High Energy Physics*, 2024(9), 1–46. https://doi.org/10.1007/JHEP09(2024)164 [In English].
5. Martínez-Pérez, N. E., & Ramírez, C. (2023). Supersymmetric higher-derivative models in quantum cosmology. *The European Physical Journal C*, 83, Article 998. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-12160-z [In English].
6. Theorem 8.2.11: Uniform Convergence and Differentiation. (n.d.). Interactive Real Analysis. Retrieved June 27, 2025, from https://mathcs.org/analysis/reals/funseq/proofs/uconvdiff.html [In English].
7. YesYes. (2015, November 12). Sup norm and uniform convergence [Answer to question “Sup norm and uniform convergence?”]. Mathematics Stack Exchange. Retrieved June 27, 2025, from https://math.stackexchange.com/questions/1525649/sup-norm-and-uniform-convergence [In English].
8. nLab contributors. (n.d.). Supergeometry. In nLab. Retrieved June 27, 2025, from https://ncatlab.org/nlab/show/supergeometry [In English].
9. De Bie, H. (2008, May 13). Fourier transform and related integral transforms in superspace (arXiv:0805.1918v1 [math.CA]). *arXiv*. https://arxiv.org/abs/0805.1918 [In English].
10. Barnett, S. M., & Dalton, B. J. (2023, April 5). Glauber P-representations for fermions (arXiv:2210.11980v2 [quant-ph]). *arXiv*. https://arxiv.org/abs/2210.11980 [In English].

Стаття надійшла до редакції 03.09.2025
Стаття прийнята до друку 03.12.2025
Дата публікації статті 26.03.2026

Ясельський Андрій Романович
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
аспірант
вул. Шевченка, 57 Івано-Франківськ, Україна 76018
andrew.yaselsky@gmail.com
ORCID: 0009–0005–4764–8490

Для посилань:
Ясельський А. Р. Дійсні суперсиметричні аналітичні функції та їх застосування до семетричних розподілів . Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. № 1. С. 162–172.

For references:
A. Yaselskyi (2026). Keal supersymmetric analytic functions and their applications to symmetric distributions . Mechanics and mathematical methods. VIII (1). 162–172.