

УДК 531.381

ЕВОЛЮЦІЯ РУХУ ГІРОСТАТА З РУХОМОЮ МАСОЮ ПІД ДІЄЮ КЕРУЮЧОГО МОМЕНТУ

Лещенко Д. Д.¹, Козаченко Т. О.¹, Лукашева Ю. М.¹

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: Задача дослідження руху твердого тіла відносно нерухомої точки належить до фундаментальних проблем класичної механіки і впродовж тривалого часу залишається предметом інтенсивних теоретичних та прикладних досліджень. Дослідження руху супутників навколо центра мас важливо для створення систем управління орієнтацією, стабілізації руху і для розв'язування практичних задач космонавтики. Космічний корабель або супутник в своєму русі відносно центра мас зазнає вплив моментів сил різної фізичної природи. До них належать як зовнішні збурення, так і внутрішні моменти, зумовлені перерозподілом мас усередині конструкції. Зокрема, істотний вплив мають ротори, маховики, гіроскопічні пристрої, що формують додатковий кінетичний момент, а також переміщення членів екіпажу у випадку пілотованого апарату, що призводить до зміни характеристик системи. Ці рухи можуть бути також зумовлені наявністю рідини в порожнинах, розташованих в тілі (наприклад, рідкого палива або окислювача в баках ракет).

Розглядається керований рух в середовищі з опором динамічно симетричного твердого тіла відносно центра мас, коли тіло містить порожнину з рідиною великої в'язкості та в'язкопружний елемент. Така постановка задачі дозволяє врахувати комплексний вплив дисипативних чинників і внутрішніх переміщень маси на еволюцію руху системи. У результаті проведених досліджень отримано як кількісні, так і якісні характеристики керованого руху динамічно симетричного тіла з рухомою масою. Розв'язок рівняння для кута нутації представлено в аналітичному вигляді, а також визначено залежність між осьовою та екваторіальною компонентами вектора кутової швидкості гіростата. Проведено чисельне інтегрування системи рівнянь руху твердого тіла. Графічні зображення розв'язків представлені та обговорені. Стаття може розглядатися як розвиток попередніх задач про рух твердого тіла під дією малих моментів (порожнини, яка заповнена рідиною великої в'язкості, рухомої маси, сталих моментів в зв'язаних з тілом осях). Стаття вносить вклад в розв'язання задач руху космічних кораблів і руху членів екіпажів відносно цих тіл. Одержані результати важливі при управлінні за допомогою рухомих мас та для рухів обертових снарядів.

Ключові слова: гіростат, порожнина, в'язка рідина, рухома маса.

EVOLUTION OF MOTION OF A GYROSTAT WITH A MOVING MASS UNDER THE ACTION OF A CONTROL MOMENT

D. Leshchenko¹, T. Kozachenko¹, Yu. Lukasheva¹

¹Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: The problem of studying the motion of a rigid body relative to a fixed point is one of the fundamental problems of classical mechanics and has long been the subject of intensive theoretical and applied research. The study of motion of satellites about its center of mass is important for the creation of orientation control systems, motion stabilization, and for solving practical problems in cosmonautics. A spacecraft or satellite in its motion relative to the center of mass is influenced by moments of forces of different physical nature. These include both external disturbances and internal moments caused by the redistribution of mass within the structure. In particular, rotors, flywheels, and gyroscopic devices that generate additional kinetic momentum have a significant impact, as does the movement of crew members in the case of a manned spacecraft, which leads to a change in the



characteristics of the system. These movements can also be caused by the presence of liquid in cavities located in the body (for example, liquid fuel or oxidizer in rocket tanks).

Controlled motion of a dynamically symmetric rigid body relative to the center of mass is considered when the body contains a cavity with a high-viscosity liquid and a viscoelastic element. This formulation of the problem allows us to take into account the complex influence of dissipative factors and internal mass displacements on the evolution of the system's motion. As a result of the research, both quantitative and qualitative characteristics of the controlled motion of a dynamically symmetric body with a moving mass were obtained. The solution of the equation for the nutation angle is presented in analytical form, and the dependence between the axial and equatorial components of the angular velocity vector of the gyroscope is determined. Numerical integration of the system of equations of motion of a rigid body is performed. Graphical representations of the solutions are presented and discussed. The article can be considered as a development of previous problems on the motion of a rigid body under the action of small moments (a cavity filled with a highly viscous fluid, a moving mass, constant moments in the axes connected to the body). The article contributes to solving problems of spacecraft motion and the motion of crew members relative to these bodies. The results obtained are important for control using moving masses and for the motion of rotating projectiles.

Keywords: rigid body, cavity, viscous fluid, movable mass.

1 ВСТУП

Проблеми динаміки твердих тіл із порожнинами, заповненими рідиною, належать до класичних задач механіки, оскільки поєднують у собі складну взаємодію обертального руху твердого тіла та внутрішніх гідродинамічних процесів. Дослідження таких систем має тривалу історію та пов'язане з розвитком теорії гіроскопів, механіки супутників і задач стійкості обертання. Наявність рідини в порожнині істотно впливає на характер руху, зумовлюючи внутрішню дисипацію енергії, та виникнення додаткових збурюючих моментів, що ускладнює математичний опис і потребує застосування спеціальних аналітичних і асимптотичних методів дослідження.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Значна кількість наукових праць присвячена дослідженню різноманітних аспектів динаміки космічних апаратів із внутрішніми рухомими масами, зокрема питанням стійкості обертання, демпфування коливань, керування кутовим рухом та впливу дисипативних факторів. Проте проблема сумісного врахування внутрішніх рухомих елементів і порожнини з в'язкою рідиною залишається актуальною, особливо в умовах тривалої експлуатації космічних систем, де навіть малі збурення можуть істотно впливати на еволюцію руху.

У роботі [1] досліджено сумісний вплив рідини великої в'язкості в порожнині твердого тіла та рухомої маси, з'єднаної з тілом пружним зв'язком із в'язким тертям або квадратичною дисипацією, на рух динамічно симетричного тіла. У праці [2] вивчено рух у середовищі з опором близького до динамічно сферичного твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною, при малих числах Рейнольдса. У статті [3] розглядається можливість демпфування нутаційних коливань за допомогою в'язкої рідини, яка заповнює порожнини в роторі або в рамках гіроскопа.

Огляд досліджень, присвячених обертанню твердого тіла з рухомими внутрішніми масами, наведено в роботах [4–10]. Зокрема, у монографії [5] проаналізовано вплив внутрішньої пружності та дисипації на рух супутника відносно центра мас. У [7] методом усереднення отримано наближений розв'язок задачі про рух у середовищі з опором близького до динамічно сферичного твердого тіла з в'язкопружним елементом. У роботі [8] досліджено рух динамічно симетричного твердого тіла з рухомою масою, з'єднаною з тілом пружним зв'язком, за наявності в'язкого тертя. В [9] за допомогою метода усереднення одержано наближений розв'язок задачі про рух динамічно симетричного твердого тіла з в'язкопружним елементом під дією постійного моменту в зв'язаних з тілом осях. В статті [10] проведено асимптотичне розв'язування системи рівнянь Ейлера з додатковими збурюючими моментами сил для близького до динамічно сферичного твердого тіла з в'язкопружним елементом при наявності в'язкого тертя.

Окремі випадки інтегрування рівнянь руху твердого тіла в середовищі з опором розглянуто в роботах [11–13]. У [14] досліджено збурений рух космічного апарата, що обертається, на круговій орбіті під дією малого аеродинамічного моменту, пропорційного кутовій швидкості тіла. В [15] одержані умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опором

В роботі [16] проаналізовано сукупний вплив в'язкої рідини та рухомої маси на обертальний рух тіла. Показано, що за наявності внутрішнього розсіювання енергії рух системи з часом наближається до стаціонарного обертання навколо осі найбільшого моменту інерції.

У праці [17] досліджено обертальний рух супутника з порожниною, заповненою в'язкою рідиною, під дією збурюючих моментів. За умови обмежених значень числа Рейнольдса вводиться малий параметр, що дає змогу застосовувати асимптотичні



методи дослідження. В роботі [18] представлені аналітичні та чисельні результати для твердих тіл з в'язкою рідиною.

Таким чином, аналіз наведених праць свідчить про значний інтерес до проблеми динаміки твердих тіл із внутрішніми рухомими елементами та рідиною в порожнинах. Перерозподіл мас усередині апарата може використовуватися як засіб керування орієнтацією, однак водночас створює додаткові динамічні ефекти, які потребують детального теоретичного аналізу.

Розглянемо обертальний рух динамічно симетричного тіла відносно центра мас за наявності порожнини, заповненою в'язкою рідиною, а також рухомої маси, з'єднаної в'язкопружним демпфером з точкою на осі симетрії (в недеформованому стані) [1]. Крім того, в моделі враховується дія керуючого моменту, який відображає ефекти внутрішньої дисипації та впливає на характер еволюції обертального руху системи.

Наближена система рівнянь руху тіла в проєкціях на головні центральні осі інерції має вигляд [1]

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= \gamma C(A - C)pr^2 + \frac{\beta P}{\nu A^2} C(A - C)pr^2 + Lqr + Spr^4, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= \gamma C(A - C)qr^2 + \frac{\beta P}{\nu A^2} C(A - C)qr^2 - Lpr + Sqr^4, \\ C\dot{r} &= \gamma A(C - A)r(p^2 + q^2) + \frac{\beta P}{\nu A} (C - A)r(p^2 + q^2) - AC^{-1}Sr^3(p^2 + q^2). \end{aligned} \quad (1)$$

де p, q, r – проєкції абсолютної кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ на головні центральні осі інерції, $\mathbf{J} = \text{diag}(A, A, C)$ – тензор інерції незбуреного тіла, γ – додатний коефіцієнт керування, β – густина рідини. Тензор $\|P_{ij}\|$ залежить від форми порожнини та має вигляд $P_{ij} = P\delta_{ij}$, де δ_{ij} – символ Кронекера, $P > 0$ скалярний коефіцієнт, у випадку сферичної порожнини радіуса b значення $P = 8\pi b^7 / 525$ [1, 2], ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості рідини ($\nu = 1 / \text{Re} \gg 1$). Припускається, що число Рейнольдса є достатньо малим: $\text{Re} \ll 1$ [1, 2], а отже $\nu^{-1} \ll 1$. Будемо вважати, що безрозмірний параметр $\nu^{-1} \sim \varepsilon$.

Коефіцієнти L, S характеризують збурюючі моменти сил, зумовлені наявністю в'язкопружного елемента, і визначаються через параметри механічної системи таким чином [1]:

$$\begin{aligned} L &= m\rho^2 \Omega^{-2} A^{-3} C (A^2 p^2 + A^2 q^2 + C^2 r^2), \\ S &= m\rho^2 \lambda \Omega^{-4} C^3 (A - C) A^{-4} \end{aligned} \quad (2)$$

де m – маса рухомої точки, ρ – відстань від центра мас недеформованої системи до точки кріплення, яка знаходиться, за припущенням, на осі динамічної симетрії цього тіла. Сталі $\Omega^2 = c/m$, $\lambda = \delta/m$ визначають частоту коливань і швидкість їх згасання відповідно; c – жорсткість (коефіцієнт пружності), δ – коефіцієнт в'язкості демпфера. Зробимо деякі припущення щодо коефіцієнтів Ω, λ [1]:

$$\Omega^2 \gg \lambda \omega \gg \omega^2 \quad (3)$$

Нерівності (3) дозволяють знехтувати ділянками вільних коливань рухів маси, які обумовлені початковими відхиленнями внаслідок їх швидкого згасання, та врахувати вимушені квазістаціонарні рухи, викликані обертанням тіла. Згідно до умови (3) $\Omega^{-2}, \lambda \Omega^{-4}$ є малими параметрами, такими що $\Omega^{-2} \sim \varepsilon, \lambda \Omega^{-4} \sim \varepsilon$.



3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Доведемо існування першого інтеграла системи (1). Для цього помножимо кожне з трьох рівнянь системи (1) відповідно на Ap , Aq , Cr та просумуємо отримані співвідношення. У результаті маємо, що похідна від кінетичного моменту дорівнює нулю, а отже, кінетичний момент є сталим:

$$G^2 = A^2(p^2 + q^2) + C^2r^2 = \text{const} \quad (4)$$

Перший інтеграл (4) виражає сталість у розглянутому наближенні модуля вектора кінетичного моменту твердого тіла із затверділою рідиною відносно точки O .

Обчислюючи похідну за часом від кінетичної енергії $H = 0.5[A^2(p^2 + q^2) + C^2r^2]$, з урахуванням рівнянь (1), отримуємо:

$$\dot{H} = r^2(p^2 + q^2)(A - C)^2 \left[-\gamma - r^2 m \rho^2 \lambda \Omega^{-4} C^2 A^{-4} - \frac{\beta P}{v A^2} \right] < 0 \quad (5)$$

Похідна від'ємна, отже кінетична енергія зменшується (спадає). За умови виконання (4) та (5), введемо кути θ , φ , що визначають орієнтацію вектора кінетичного моменту відносно твердого тіла згідно з рівностями:

$$Ap = G \sin \theta \cos \varphi, \quad Aq = G \sin \theta \sin \varphi, \quad Cr = G \cos \theta, \quad (6)$$

де θ – кут нутації, φ – кут власного обертання.

Перейдемо в рівняннях (1) до змінних θ , φ , враховуючи сталість G . Розв'язуючи отримані рівняння відносно похідних $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, отримаємо:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2}(\chi + \alpha \cos^2 \theta) \sin 2\theta, \quad \dot{\varphi} = \xi \cos \theta, \quad (7)$$

де

$$\alpha = S \frac{G^4}{AC^4}, \quad \chi = (A - C) \frac{G^2}{AC} \left(\gamma + \frac{\beta P}{v A^2} \right), \quad \xi = \frac{G}{AC} (C - A - L) \quad (8)$$

Величини α , χ , ξ мають розмірності кутової швидкості і залишаються постійними під час руху. Інтегруючи перше рівняння (7) за початкових умов $\theta(t) = \theta_0$ отримаємо:

$$\left(1 + \frac{\chi}{\alpha} \sec^2 \theta\right) (tg^2 \theta)^{\chi/\alpha} = \left(1 + \sec^2 \theta_0\right) (tg^2 \theta_0)^{\chi/\alpha} \exp\left[2\chi\left(1 + \frac{\chi}{\alpha}\right)t\right] \quad (9)$$

Вираз (9) визначає в неявній формі залежність кута нутації θ від t . Знак величини χ залежить від різниці $(A - C)$. Система (7) розв'язана чисельно за допомогою математичного пакета Maple.

Застосуємо ще один підхід до розв'язку системи (1).

При припущеннях $\Omega^{-2} \ll \varepsilon$, $\lambda \Omega^{-4} \sim \varepsilon$, $v^{-1} \sim \varepsilon$, $\gamma \sim \varepsilon$, будемо вважати $\varepsilon = 0$, тоді система (1) інтегрується. В цьому випадку, при $r_0 \neq 0$, змінні p , q здійснюють гармонічні коливання, частота яких $|(C - A)r_0|$ залежить від r_0 . Розв'язок системи (1) при цих припущеннях має вигляд [19]

$$p = a \cos \varphi, \quad q = a \sin \varphi, \quad r = r_0. \quad (10)$$

Застосуємо (10) як формули перетворення до змінних a, r , де $a^2 = p^2 + q^2$, $a > 0$, $\varphi = r(C - A)A^{-1}t$. Диференціюючи $a^2 = p^2 + q^2$ маємо, що $\dot{a} = \dot{p} \cos \varphi + \dot{q} \sin \varphi$. Підставимо в цей вираз \dot{p} і \dot{q} з перших двох рівнянь (1), одержані рівняння для a і r мають вигляд (крапка – похідна по часу t):

$$\dot{a} = A^{-1}C\mu r^2 a + A^{-1}S r^4 a, \quad \dot{r} = -C^{-1}A\mu r a^2 - AC^{-2}S r^3 a^2, \quad (11)$$

де $\mu = (A - C) \left(\gamma + \frac{\beta P}{v A^2} \right)$.

Здійснивши низку алгебраїчних перетворень та виконавши заміну змінних $x = a^2$, $y = r^2$, приведемо рівняння (11) до еквівалентної системи вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2xyA^{-1}C(\mu + C^{-1}Sy), \\ \dot{y} &= -2xyAC^{-1}(\mu + C^{-1}Sy). \end{aligned} \quad (12)$$

Перше рівняння системи (12) розділим на друге, отримаємо рівняння, розв'язок якого вказує на залежність між змінними x та y :

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{C^2}{A^2} \Rightarrow x = \frac{C^2}{A^2}(y_0 - y) + x_0, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (13)$$

Отриманий розв'язок має лінійний характер і однозначно задається початковими умовами та співвідношенням C^2/A^2 .

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

В математичному пакеті Maple, з застосуванням метода Рунге-Кутти-Фельберга п'ятого порядку точності, знайдено чисельний розв'язок систем (7) і (12) за початкових умов $\theta(0) = \pi/4$, $\varphi(0) = 0$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ та при певних значеннях параметрів $\rho = 1$; $m = 1$; $\lambda = 9$, $\Omega = 3$, $P_0 = 0.48$, $v = 1000$, $\rho = 1260$, $\gamma = 0.01$; 0.625 ; екваторіального $A = 1$; 1.2 ; 1.5 ; та осьового $C = 1$; 1.2 ; 1.5 ; моментів інерції.

Графічне зображення зміни кута нутації при вказаних параметрах представлено на рис. 1, 2. На рис. 3, 4 зображено графіки зміни величин $x = a^2$ і $y = r^2$ квадратів екваторіальної та осьової компонент кутової швидкості твердого тіла у випадку $A > C$ при вказаних параметрах.

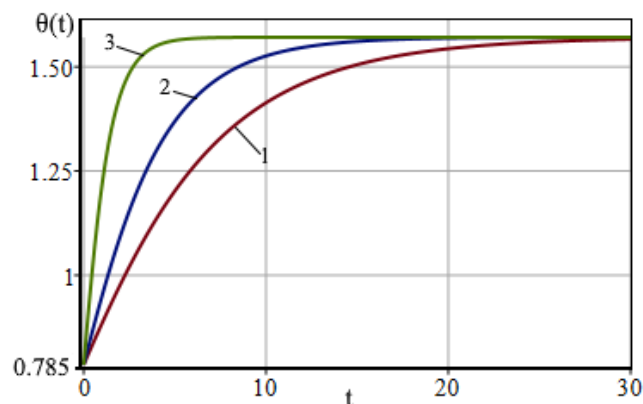


Рис. 1. Графіки кута нутації θ : 1 - $C = 1$, $A = 1.2$, $\gamma = 0.01$;
 2 - $C = 1$, $A = 1.5$, $\gamma = 0.01$; 3 - $C = 1$, $A = 1.5$, $\gamma = 0.625$.

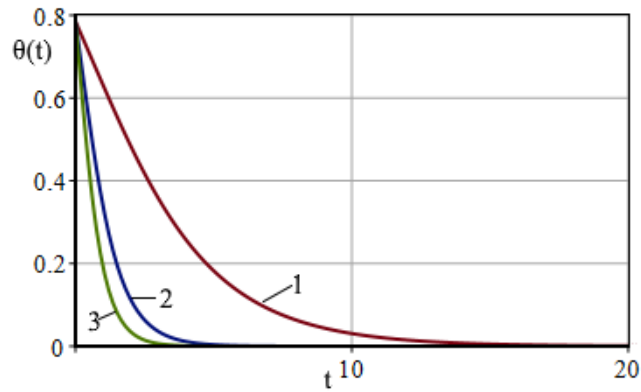


Рис. 2. Графіки кута нутації θ : 1 - $C=1.2$, $A=1$, $\gamma=0.01$;
2 - $C=1.5$, $A=1$, $\gamma=0.01$; 3 - $C=1.5$, $A=1$, $\gamma=0.625$.

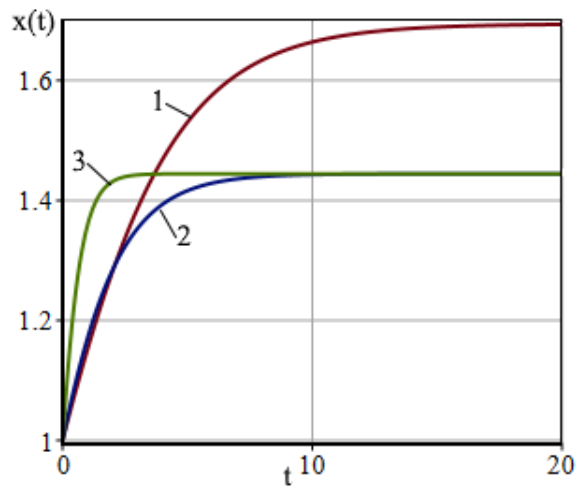


Рис. 3. Графіки змінної x : 1 - $C=1$, $A=1.2$, $\gamma=0.01$;
2 - $C=1$, $A=1.5$, $\gamma=0.01$; 3 - $C=1$, $A=1.5$, $\gamma=0.625$.

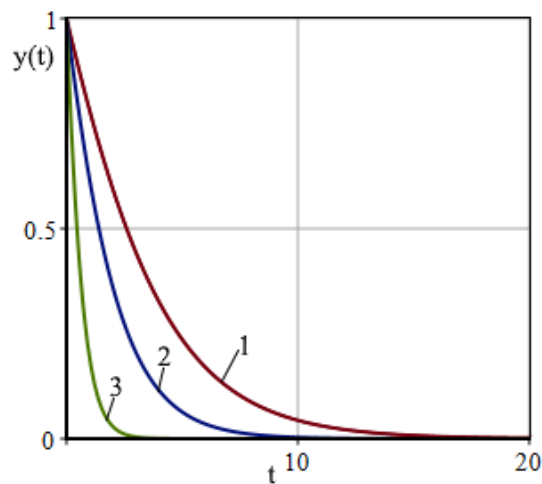


Рис. 4. Графіки змінної y : 1 - $C=1$, $A=1.2$, $\gamma=0.01$;
2 - $C=1$, $A=1.5$, $\gamma=0.01$; 3 - $C=1$, $A=1.5$, $\gamma=0.625$.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

З наведених графіків (рис. 1, 2) еволюції кута нутації θ випливає, що динаміка кута нутації істотно залежить від співвідношення моментів інерції A , C та величини керуючого параметра γ , що визначає як асимптотичну поведінку системи, так і темп затухання. У випадку витягнутого тіла ($A > C$) кут нутації θ монотонно зростає та асимптотично прямує до значення $\pi/2$. Натомість для сплюсненого тіла ($A < C$) спостерігається затухаючий характер руху, за якого кут θ зменшується та наближається до нульового значення, що свідчить про стабілізацію обертання вздовж осі найбільшого моменту інерції.

Зауважимо, що в виразах (7) і (9) для θ фактично на зміну кута нутації впливає χ , значення якого залежить від параметрів A , C , γ . У випадку $A > C$ коефіцієнт $\chi > 0$, а при $A < C$: $\chi < 0$. Збільшення значення коефіцієнта γ призводить до збільшення величини χ , що в свою чергу призводить до більш швидкого зростання (рис. 1) або більш швидкого згасання (рис. 2) кута нутації.

Згідно до рис. 3 екваторіальна складова кутової швидкості $x = a^2$ прагне до граничних значень, значення яких залежить від співвідношення між моментами інерції тіла A/C . При збільшенні A/C граничне значення x зменшується. Водночас характер її часової еволюції істотно залежить від коефіцієнта γ , зі збільшенням γ спостерігається більш інтенсивне зростання екваторіальної складової та прискорене встановлення усталеного режиму руху.

Як бачимо з рис. 4 осьова компонента кутової швидкості $y = r^2$ спадає асимптотично наближаючись до нуля. Характер спадання залежить від співвідношення A/C та величини γ . Збільшення цих величини призводить до того, що проміжок часу, за який осьова компонента кутової швидкості прагне до нуля, зменшується.

6 ВИСНОВКИ

Проведене аналітичне та чисельне дослідження руху гіростата з рухомою масою, яка з'єднана з тілом в'язкопружним демпфером, з урахуванням керуючого параметра показало вплив співвідношення головних моментів інерції на характер еволюції основних кінематичних характеристик системи. Встановлено, що залежно від геометрії тіла реалізуються принципово різні режими руху: для витягнутого тіла відбувається монотонне зростання кута нутації з подальшим встановленням поперечного режиму обертання, тоді як для сплюсненого тіла система асимптотично стабілізується вздовж осі найбільшого моменту інерції.

Показано, що швидкість переходу до усталеного стану визначається параметром, який поєднує вплив моментів інерції та керуючого коефіцієнта. Зі збільшенням цього параметра суттєво прискорюється як процес зростання, так і згасання нутаційних рухів, що свідчить про інтенсифікацію дисипативних процесів у системі.

Аналіз кутових швидкостей у випадку витягнутого тіла підтвердив узгодженість отриманої моделі з фізичною природою руху: екваторіальна складова прямує до скінченних граничних значень, тоді як осьова компонента асимптотично зменшується до нуля, забезпечуючи перехід системи до стабільної конфігурації обертання. Таким чином, запропонована модель описує релаксаційні процеси в динаміці твердого тіла та може бути використана для аналізу рухів зі слабкими збуреннями й керуванням. Така модель дає змогу прогнозувати часові характеристики встановлення усталеного режиму руху та оцінювати вплив геометричних параметрів тіла на стабільність обертання, що є важливим для задач керування та підвищення надійності технічних систем.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

Література

1. Leshchenko D. D., Sallam S. N. Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*, 1992. 28(8). P. 524–528.
2. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Еволюція обертань сфероїда з порожниною, заповненою в'язкою рідиною в середовищі з опором. *Праці ПІММ НАН України*, 2021. Том 35. № 2. С. 152-160.
3. Ivashchenko V. P. Motion of a gyroscope with a cavity filled with a viscous liquid. *Soviet Applied Mechanics*, 1978. 14(8). P. 872–876.
4. He L., Sheng T., Kumar K. D., Zhao Y., Ran D., Chen X. Attitude maneuver of a satellite using moving masses. *Acta Astronautica*, 2020. 176. P. 464–475.
5. Thomson W. T. *Introduction to Space Dynamics*. New York: Dower, 1986, 317p.
6. Jansses F. L. and Van der Ha J. C. Stability of spinning satellite under axial thrust, internal mass motion, and damping. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2015. 38 (4). P. 761-771.
7. Leshchenko D., Rachinskaya A. Evolution of rotational motions in a resistive medium of a nearly dynamically spherical rigid body with a movable mass. *Праці ПІММ НАН України*, 2024. Том 38. № 1. С. 44-53.
8. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи твердого тіла з рухомою масою в середовищі з опором. *Механіка та математичні методи*, 2023. Т. 5. № 2. С. 16–24.
9. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи близького до динамічно сферичного твердого тіла з рухомою масою під дією постійних моментів в зв'язаних з тілом осях. *Механіка та математичні методи*, 2024. Т. 6. № 2. С. 18–30.
10. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи гіростата з рухомою масою в середовищі з опором. *Механіка та математичні методи*, 2025. Т. VII. № 2. С. 19–27.
11. Magnus K. *Kreisel. Theorie and Anwendungen*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1971.
12. Кошляков В. Н. *Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы*. Наука, 1985. 288с.
13. Routh E. J. *Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part II*. New York: Dover Publications, 1955. 484 p.
14. Inarrea M., Lanchares V. Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006. 41(1). P. 86–100.
15. Kononov Yu. M. Stability of a uniform rotation of an asymmetric rigid body in a resisting medium under a constant moment. *International Applied Mechanics*, 2021. 57(4). P. 432–439.
16. Amer, W.S., Farag, A.M. & Abady, I.M. Asymptotic analysis and numerical solutions for the rigid body containing a viscous liquid in cavity in the presence of gyrostatic moment. *Archive of Applied Mechanics*, 2021. 91. P. 3889–3902.
17. Galal, A.A., Amer, T.S., El-Kafly, H., Amer, W.S. The asymptotic solutions of the governing system of a charged symmetric body under the influence of external torques. *Results in Physics*, 2020. 18. 103160.
18. Disser, K., Galdi, G.P., Mazzone, G., Zunino, P. Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous liquid. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2016. 221. P. 487–526.
19. Landau L. D. and Lifshitz E. M. *Mechanics. Volume 1 of Course of Theoretical Physics*. Boston, Johannesburg, Melbourne, New Delhi, Singapore: Butterworth-Heinemann, 2000.

References

1. Leshchenko, D. D., Sallam, S. N. (1992). Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*. 28(8). 524–528.



2. Leshchenko, D. D., Kozachenko, T. O. (2021). Evolution of rotations of a spheroid with cavity containing a viscous fluid in a resistive medium. *Proceeding of IAMM NAS of Ukraine*. 35 (2). 152-160. [in Ukrainian]
3. Ivashchenko, B. P. (1978). Motion of a gyroscope with a cavity filled with a viscous liquid. *Soviet Applied Mechanics*. 14. 872–876.
4. He, L., Sheng, T., Kumar, K. D., Zhao Y., Ran D., Chen X. (2020). Attitude maneuver of a satellite using moving masses. *Acta Astronautica*. 176. 464–475.
5. Thomson, W.T. (1986). *Introduction to Space Dynamics*. New York: Dower.
6. Jansses, F. L. and Van der Ha, J. C. (2015). Stability of spinning satellite under axial thrust, internal mass motion, and damping. *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 38(4). 761-771.
7. Leshchenko, D. D. & Rachinskaya, A. L. (2024). Evolution of motions in a resistive medium of a body with a movable mass. *Proceeding of IAMM NAS of Ukraine*. 38 (1). 44-53.
8. Leshchenko, D., Kozachenko, T. (2023). Perturbed motions of a rigid body with a movable mass in a resistive medium. *Mechanics and Mathematical methods*. 5 (2). 16–24. [in Ukrainian]
9. Leshchenko, D., Kozachenko, T. (2025). Perturbed motions of a rigid body with a movable mass under the action of constant torque. *Mechanics and Mathematical Methods*. 7 (1). 6–14. [in Ukrainian]
10. Leshchenko, D., Kozachenko, T. (2025). Perturbed motions of a gyrostat with a movable mass in a resistive medium. *Mechanics and Mathematical methods*. VII (2). 19–27. [in Ukrainian]
11. Magnus, K. (1971). *Kreisel. Theorie and Anwendungen*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
12. Koshlyakov, V. N. (1985). *Zadachi dinamiki tverdogo tela i prikladnoj teorii giroskopov: Analiticheskie metody [Problems in Dynamics of Solid Bodies and in Applied Gyroscope Theory: Analytical Methods]*. Nauka.
13. Routh, E. J. (1955). *Dynamics of a System of Rigid Bodies. Part II*. New York: Dover Publications.
14. Inarrea, M., Lanchares, V. (2006). Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 41(1). 86–100.
15. Kononov, Yu. M. (2021). Stability of a uniform rotation of an asymmetric rigid body in a resisting medium under a constant moment. *International Applied Mechanics*. 57(4). 432–439.
16. Amer, W.S., Farag, A.M. & Abady, I.M. (2021). Asymptotic analysis and numerical solutions for the rigid body containing a viscous liquid in cavity in the presence of gyrostatic moment. *Archive of Applied Mechanics*. 91. 3889–3902.
17. Galal, A.A., Amer, T.S., El-Kafly, H., Amer, W.S. (2020). The asymptotic solutions of the governing system of a charged symmetric body under the influence of external torques. *Results in Physics*. 18. 103160.
18. Disser, K., Galdi, G.P., Mazzone, G., Zunino, P. (2016). Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous liquid. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 221. 487–526.
19. Landau, L. D., and Lifshitz, E. M. (2000). *Mechanics. Volume 1 of Course of Theoretical Physics*. Boston, Johannesburg, Melbourne, New Delhi, Singapore: Butterworth-Heinemann.

Стаття надійшла до редакції 15.01.2026

Стаття прийнята до друку 20.02.2026

Дата публікації статті 26.03.2026

Лещенко Дмитро Давидович

Одеська державна академія будівництва та архітектури,

д.ф.-м.н., професор

вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029

leshchenko_d@ukr.net

ORCID: 0000-0003-2436-221X



Козаченко Тетяна Олександрівна

Одеська державна академія будівництва та архітектури,
к.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029
kushpil.t.a@gmail.com
ORCID: 0000-0001-9034-3776

Лукашева Юліанна Миколаївна

Одеська державна академія будівництва та архітектури,
к.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна 65029
lukasheva@ogasa.org.ua
ORCID:0009-0004-8032-8053

Для посилань:

Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О., Лукашева Ю. М. Еволюція руху гіростата з рухомою масою під дією керуючого моменту. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. № 1. С. 17–27.

For references:

D. Leshchenko, T. Kozachenko, Yu. Lukasheva (2026). Evolution of motion of a gyrostata with a moving mass under the action of a control moment. Mechanics and Mathematical methods. VIII (1). 17–27.

Еволюція руху гіростата з рухомою масою під дією керуючого моменту © 2026 by Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О., Лукашева Ю. М. is licensed under CC BY 4.0