

УДК 530.18

АНАЛІЗ ПРОСТОРОВО-ЧАСОВОЇ ХАОТИЧНОЇ ДИНАМІКИ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНИХ СИСТЕМ З НАЯВНОЮ СТРУКТУРНО-ЕВОЛЮЦІЙНОЮ ПЕРЕБУДОВОЮ

Човнюк Ю. В.¹, Чередніченко П. П.¹, Остапущенко О. П.¹, Кравченко І. М.¹

¹Київський національний університет будівництва і архітектури

Анотація: У роботі проведено математичне моделювання процесу перемежування у просторово-часовій хаотичній динаміці дискретно-континуальних систем з наявною структурно-еволюційною перебудовою. Зазвичай рух окремо взятої частинки речовини у деякому полі хвильового пакету моделюють диференціальним рівнянням другого порядку з регулярною (невипадковою) правою частиною. У дослідженні встановлені умови, за яких рух частинки стає стохастичним, й вона починає прискорюватися. Зі зростанням швидкості частинки час, за який вона пролітає шлях певної довжини, зменшується. Це означає, що ступінь адіабатичності збурення збільшується, і спід чекати появи межі хаосу завдяки слабкому впливу хвильового поля на динаміку частинки з високою енергією. Можливо також очікувати, що у цьому випадку хаос повинен бути дуже слабким відносно регулярної компоненти руху. Крім того, хаотична компонента руху повинна мати важкі часові та просторові масштаби на фоні високочастотного регулярного руху. У теорії турбулентності подібний характер руху прийнято називати перемежуванням.

Зазвичай під перемежуванням розуміють просторово-часову хаотичну динаміку системи з досить чітко вираженою просторово-часовою структурою. У роботі процес перемежування досліджений для дисипативних систем. У околі стійкою граничного циклу динаміка (дискретно-континуальної) системи визначається, в основному, тим спектром, котрий має цикл. Показано, що за наявності у циклу лише одного періоду, фур'є-спектр системи у околі циклу має вид, близький до δ -функції, з максимумом на частоті циклу. Якщо існує дуже слабкий хаос у околі циклу, спектр даної системи також близький до δ -видного. Часову еволюцію можна наочно подати як безсистемно “зшиті” довгі ділянки регулярних осциляцій. Існування досить великих ділянок регулярного руху вже означає наявність значного ступеня динамічної регулярності. Аналогічно виглядає й просторове перемежування при русі суцільного середовища.

Встановлено, що явище перемежування пов'язане з властивістю мультифрактальності, тобто, з неоднорідним розподілом сингулярних або фрактальних властивостей у просторі й у часі.

У роботі вивчене явище гамільтонівського перемежування у задачі про рух частинки у полі хвильового пакету. Характер явища, яке описане, універсальний і притаманний багатьом, на перший погляд, ніяк не зв'язаним задачам. Гамільтонівське перемежування охоплює значний клас різноманітних фізико-математичних задач, зокрема й таких, що розглянуті у даному дослідженні, у котрих зміна фази обернено пропорційна довільному (будь-якому) ступеню дії. Існує низка додаткових можливостей для виникнення слабого хаосу.

Ключові слова: перемежування, просторово-часова еволюція, хаотична динаміка, дискретно-континуальні системи, структурно-еволюційна перебудова.

ANALYSIS OF SPATIAL-TEMPORAL CHAOTIC DYNAMICS OF DISCRETE-CONTINUOUS SYSTEMS WITH STRUCTURAL- EVOLUTIONARY RESTRUCTURING

Yu. Chovnyuk¹, P. Cherednichenko¹, O. Ostapushchenko¹, I. Kravchenko¹

¹Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine

Abstract: The paper presents mathematical modeling of the alternation process in the spatiotemporal chaotic dynamics of discrete-continuous systems with existing structural-evolutionary restructuring. Usually, the motion of a single particle of matter in a certain wave packet field is modeled by a second-order differential equation with a regular (non-random) right-hand side. The study establishes the conditions under which the motion of a particle becomes stochastic and it begins to accelerate. As the

particle's speed increases, the time it takes to travel a certain distance decreases. This means that the degree of adiabaticity of the perturbation increases, and the emergence of a chaos boundary can be expected due to the weak influence of the wave field on the dynamics of a high-energy particle. It can also be expected that in this case, chaos should be very weak in relation to the regular component of motion. In addition, the chaotic component of motion should have heavy temporal and spatial scales against the background of high-frequency regular motion. In turbulence theory, this type of motion is commonly referred to as intermittent motion.

Alternation is usually understood as the spatially and temporally chaotic dynamics of a system with a fairly well-defined spatial and temporal structure. In this work, the process of alternation is investigated for dissipative systems. In the vicinity of a stable limit cycle, the dynamics of a (discrete-continuous) system is mainly determined by the spectrum of the cycle. It is shown that if the cycle has only one period, the Fourier spectrum of the system in the vicinity of the cycle has a form close to the delta-function, with a maximum at the cycle frequency. If there is very weak chaos in the vicinity of the cycle, the spectrum of this system is also close to the delta-form. The temporal evolution can be clearly represented as randomly "stitched" long sections of regular oscillations. The existence of sufficiently large sections of regular motion already implies a significant degree of dynamic regularity. The spatial alternation in the motion of a continuous medium looks similar.

It has been established that the phenomenon of alternation is associated with the property of multifractality, i.e., with the inhomogeneous distribution of singular or fractal properties in space and time.

This paper studies the phenomenon of Hamiltonian alternation in the problem of particle motion in a wave packet field. The nature of the phenomenon described is universal and inherent in many problems that, at first glance, appear to be unrelated. Hamiltonian alternation covers a significant class of diverse physical and mathematical problems, including those considered in this study, in which the phase change is inversely proportional to an arbitrary (any) degree of action. There are a number of additional possibilities for the emergence of weak chaos.

Keywords: intermittent, spatio-temporal evolution, chaotic dynamics, discrete-continuous systems, structural-evolutionary restructuring.

1 ВСТУП

При русі часточок у випадкових полях, наприклад, при перемішуванні, вібраційному ущільненні бетонних/будівельних сумішей, швидкість часточок може у середньому зростати. Такий спосіб був запропонований Е. Фермі для пояснення походження швидких космічних часточок [6]. Пізніше Улам запропонував для аналізу доволі просту модель, у якій частинка рухається між двома стінками, одна з котрих періодично коливається [7], – саме так будується типова модель віброущільнення бетонних сумішей при об'ємному/поверхневому їх формуванні (за наявності/відсутності привантаження). Чисельний та аналітичний аналізи моделі Улама, проведені у роботах [4,8], показали, що в цій моделі існує хаотична динаміка й стохастичне прискорення часточок. У подальшому ці дослідження були продовжені у багатьох роботах [3,11].

Зазвичай, під перемежуванням розуміють просторово-часову хаотичну динаміку системи з достатньо чітко вираженою просторово-часовою структурою. Простіше за все уявити собі картину перемежування у дисипативних системах. У околі стійкого граничного циклу динаміка системи визначається, в основному, тим спектром, котрий має цикл. Якщо, наприклад, цикл має тільки один період, тоді фур'є-спектр системи у околі циклу має вид, близький до δ -функції, з максимумом на частоті циклу. У тому випадку, коли має місце дуже слабкий хаос у околі циклу, спектр системи також близький до δ -видного. Часову еволюцію можна наочно подати як без усякого порядку “зшиті” довгі ділянки регулярних осциляцій. Існування досить великих ділянок регулярного руху вже означає наявність значного ступеня динамічної регулярності. Аналогічно виглядає й просторове перемежування при русі суцільного середовища. Властивість перемежування виявляється пов'язаною з властивістю мультифрактальності процесу, тобто з неоднорідним розподілом сингулярних чи фрактальних властивостей у просторі й у часі.

Та ж сама картина руху, дуже близького до регулярного, але з дуже слабо вираженою хаотичною динамікою можлива й у гамільтонівських системах. У даному дослідженні вивчене явище гамільтонівського перемежування у задачі про рух частинки у полі хвильового пакету. Слід зазначити, що характер явища, яке тут описане, доволі універсальний й притаманний багатьом на перший погляд ніяк незв'язаним задачам.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Основні підходи до дослідження процесів перемежування, які відбуваються у різноманітних системах, наведені у роботах [1-5,8]. Автори вказаних робіт детально та всебічно дослідили причини виникнення хаосу. Зокрема, було встановлено, що він виникає внаслідок специфічної локальної нестійкості відносно як завгодно малих збурень орбіт системи. Він проявляє себе у певних областях фазового простору, а також у певних областях значень параметрів системи. Однак найбільш привабливим у хаосі є його властивість бути непереборним у типових фізико-механічних ситуаціях. Мається на увазі наступне. При досить загальних умовах завжди існують області у фазовому просторі й у просторі значень параметрів, у котрих динаміка системи стохастична. Ці області можуть бути скільки завгодно малими, проте вони непереборні при будь-яких скінченних значеннях параметрів й фіксованій конструкції динамічної системи (тобто виді її гамільтона). Доведено, що така ситуація виникає саме при дифузії Арнольда, яка є універсальним необмеженим транспортом частинок по каналам стохастичного павутиння у системах з числом ступенів вільності руху, більшим двох. Слід зазначити, що перехід від систем, у яких зовсім відсутня хаотична динаміка, до систем з хаосом супроводжується появою малих областей – зародків хаосу. У

гамільтонівських системах такими зародками є стохастичні прошарки й стохастичне павутиння. Вони саме й реалізують слабкий хаос у системах й одночасно призводять до деякого розбиття фазового простору. Внаслідок цього топологічні властивості фазового простору виявляються тісно переплетеними з умовами та формою областей – зародків хаосу.

На думку авторів даного дослідження, моделювання процесу перемежування у просторово-часовій хаотичній динаміці дискретно-континуальних систем з наявною структурно-еволюційною перебудовою є актуальною задачею, котра вимагає подальшого вивчення, а наявні у відповідній літературі результати слід вдосконалювати, уточнювати й коригувати, оскільки рівень, досягнутий у цій царині, недостатній.

3 ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Мета роботи полягає у обґрунтуванні фізико-механічної моделі процесу перемежування у просторово-часовій хаотичній динаміці дискретно-континуальних систем з наявною структурно-еволюційною перебудовою. Для дослідження мети роботи будуть використані підходи та методи, розвинені у роботах [1,4,8].

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо початку деякі якісні міркування, котрі пояснюють, як у задачах про прискорення часточок (суміші, середовища та ін.) з'являється межа/границя хаотичної динаміки. Нехай часточка рухається у деякому полі хвильового пакету:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \cos(k_n x - \omega_n t), \quad (1)$$

де F_n – амплітуда n -ої гармоніки хвильового пакету, m – маса часточки, k_n – хвильовий вектор n -ої гармоніки, t – час, ω_n – її кругова частота, x – переміщення часточки, яке є функцією часу, тобто $x = x(t)$. Крім того, у (1) для хвильового пакету введені наступні параметри:

$$\Delta\omega = 2\pi/T, \quad (2)$$

T – період коливань, $\Delta\omega$ – характерна відстань між частотами ω_n , а також:

$$\Delta k = 2\pi/L, \quad (3)$$

де Δk – характерна відстань між хвильовими числами k_n хвильового пакету, L – просторовий період.

Хоча права частина (1) і є регулярною (невипадковою), все ж, при деяких умовах, котрі будуть з'ясовані нижче, рух частинки стає стохастичним, й вона починає прискорюватись. Зі зростанням швидкості часточки час, за який вона пролітає шлях довжиною L , скорочується. Це, по суті, означає, що ступінь адіабатичності збурення збільшується, й слід чекати появи границі/межі хаосу завдяки слабкій дії (впливу) хвильового поля на динаміку частинки, що має високу енергію власного руху. Можна також очікувати, що у цьому випадку хаос повинен бути дуже слабким відносно регулярної компоненти руху. Крім того, хаотична компонента руху повинна мати більші часові та просторові масштаби на фоні високочастотного регулярного руху.



Просторово-часова хаотична динаміка системи з досить чітко вираженою просторово-часовою структурою, тобто з перемежуванням, характерна й для руху у гамільтонівських системах, де на близький до регулярного рух накладається слабо виражена хаотична динаміка. Саме у подальшому вивчається гамільтонівське перемежування у задачі про рух частинки у полі хвильового пакету.

Разом з тим, характер явища, яке описується, досить універсальний й притаманний багатьом, на перший погляд, ніяк не зв'язаним задачам [8].

Будемо вважати, що хвильовий пакет у (1) дуже широкий, тобто до його складу входить велике число гармонік, й усі вони у ньому мають суттєво відмінні від нуля амплітуди F_n . Цю властивість можна формально виразити, поклавши:

$$F_n \approx F_0 \quad (4)$$

для усіх n . Поклавши також:

$$\omega_n = \omega_0 + n \cdot \Delta\omega, \quad k_n \approx k_0 + n \cdot \Delta k, \quad (5)$$

та вводячи групову швидкість пакету:

$$v_g = \Delta\omega / \Delta k, \quad (6)$$

можна чітко виділити два граничних випадки: $v > v_g$ та $v < v_g$. Далі будемо розглядати перший з них, оскільки досліджуване тут явище перемежування виникає при великих швидкостях часточок. За умови $v \approx v_g$ з (5) випливає, що можна покласти $\omega_n \approx \omega_0$ для усіх n . Використовуючи цю обставину й формули (4) і (5), замість (1) матимемо наступне рівняння:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} \cdot F_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(k_0 x - \omega_0 t + n \cdot \Delta k \cdot x) = F_0 \cdot \cos \theta \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n \cdot \Delta k \cdot x), \quad (7)$$

де позначена фаза:

$$\theta = k_0 \cdot x - \omega_0 \cdot t. \quad (8)$$

Використовуючи співвідношення:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(n \cdot \Delta k \cdot x) = L \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nL), \quad (9)$$

а також позначення (3), перепишемо рівняння (7) у вигляді наступного:

$$\dot{v} = \frac{F_0 \cdot L \cdot \cos \theta}{m} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nL); \quad v = \dot{x}. \quad (10)$$

Саме ця форма запису розкриває фізико-механічний зміст вихідної задачі за зроблених вище припущень (4), (5) та $v \approx v_g$. Якщо тільки не має місце рівність $x = x_n$, де

$$x_n = Ln = 2\pi n / \Delta k, \quad (11)$$

тоді $\dot{v} = 0$, тобто $v = const$, і рух частинки є вільним. У момент часу, коли координата частинки досягає значення, кратне n , частинка отримує вплив зовнішньої сили – поштовх. Поштовхи відбуваються у моменти часу ..., t_n , t_{n+1} , ..., котрі згідно (11) повинні знаходитись з умови:



$$\dots; x(t_n) = Ln; x(t_{n+1}) = L(n \pm 1); \dots, \quad (12)$$

де знак \pm залежить від того, куди спрямована швидкість частинки після n -го поштовху. З (12), зокрема, знаходимо інтервал часу між двома послідовними «зіткненнями»

$$\Delta t_n = |x(t_{n+1}) - x(t_n)| / |v_{n+1}| = L / |v_{n+1}|, \quad (13)$$

де v_{n+1} – швидкість частинки після n -го поштовху. Побудуємо відображення, яке зв'язує координату та швидкість частинки між двома послідовними зіткненнями.

Введемо нову змінну:

$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v \cdot |v|, \quad (14)$$

модуль котрої дорівнює енергії частинки. З (14) можна виразити швидкість v :

$$v = (2 \cdot |W| / m)^{1/2} \cdot \text{sign} W. \quad (15)$$

Використовуючи визначення (11) та властивості δ -функцій П.Дірака, знаходимо з (10) та (14):

$$\dot{W} = F_0 \cdot L \cdot \cos \theta \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_n). \quad (16)$$

Диференціювання виразу (8) для θ дає із урахуванням формули (15):

$$\dot{\theta} = k_0 \cdot v - \omega_0 = k_0 \cdot (2 \cdot |W| / m)^{1/2} \cdot \text{sign} W - \omega_0. \quad (17)$$

Система рівнянь (16), (17) відносно нових змінних (W, θ) є замкненою. Крім того, ці змінні є канонічно спряженою парою, оскільки має місце співвідношення:

$$\frac{\partial \dot{W}}{\partial W} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} = 0. \quad (18)$$

Для того, щоб побудувати відображення у площині (W, θ) , слід звернути увагу на те, що послідовність моментів часу $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$, у котрі на частинку діє поштовх, є монотонно зростаючою, тобто має місце нерівність: $t_n > t_k$, якщо $n > k$. Однак послідовність координат $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, у котрих діють поштовхи, не є монотонною, оскільки напрям швидкості частинки може змінюватись від поштовха до поштовха. Це, зокрема, відображене у (13).

Позначимо:

$$W_n = W(t_n - 0), \quad \theta_n = \theta(t_n - 0). \quad (19)$$

Згідно з рівняннями руху (16), (17) при переході через поштовх змінна θ є неперервною, тобто:

$$\theta(t_n - 0) = \theta(t_n + 0), \quad (20)$$

а змінна W знаходиться під впливом поштовху. Враховуючи властивість (20), маємо з (16), (17)



$$\begin{cases} W(t_n + 0) - W(t_n - 0) = F_0 \cdot L \cdot \cos \theta_n, \\ \theta(t_n + 0) - \theta(t_n - 0) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

На інтервалі часу $(t_n + 0, t_n - 0)$ величина W не змінюється і, відповідно:

$$\begin{cases} W(t_{n+1} - 0) = W_{n+1} = W(t_n + 0) = W(t_n - 0) + F_0 \cdot L \cdot \cos \theta_n = \\ = W_n + F_0 \cdot L \cdot \cos \theta_n. \end{cases} \quad (22)$$

З тієї ж причини на тому ж інтервалі $\dot{\theta}$ є константа й з (21) випливає, що:

$$\theta(t_{n+1} - 0) = \theta_{n+1} = \theta(t_n + 0) + \dot{\theta}(t_n + 0) \cdot \Delta t_n, \quad (23)$$

де Δt_n визначається формулою (13). З (22) та (23) випливає низка формул, які

визначають \hat{L} -відображення:

$$\hat{L}: \begin{cases} W_{n+1} = W_n + F_0 \cdot L \cdot \cos \theta_n \\ \theta_{n+1} = k_0 \cdot L \cdot \text{sign} W_{n+1} - \omega_0 \cdot L \cdot \left(\frac{m}{2 \cdot |W_{n+1}|} \right)^{1/2} \cdot (\text{mod } 2\pi). \end{cases} \quad (24)$$

Формули (24) зручно подати іншим чином, вводячи нові нормовані величини:

$$u = 2W / (m\omega_0^2 \cdot L^2), \quad y = \theta / 2\pi - 1/4. \quad (25)$$

Це дає:

$$\hat{L}: \begin{cases} u_{n+1} = u_n + Q \cdot \sin(2\pi y_n), \\ y_{n+1} = y_n - \frac{1}{2\pi \cdot |u_{n+1}|^{1/2}} + \tilde{y} \cdot \text{sign} u_{n+1} \pmod{1}, \end{cases} \quad (26)$$

Де $\tilde{y} = k_0 \cdot L / (2\pi)$ – постійний зсув фази та:

$$Q = 2F_0 / (m \cdot \omega_0^2 \cdot L). \quad (27)$$

Величина Q має зміст відношення зміни енергії частинки за одне зіткнення $(mv \cdot \delta v \approx F_0 \cdot L)$ до енергії частинки за рахунок високочастотних осциляцій $(\approx m\omega_0^2 L^2)$.

Про досить малих значеннях енергії $|u|$ зміни фази від поштовха до поштовха великі й траєкторія частинки стає стохастичною. Умови виникнення хаосу можна наближено подати у вигляді :

$$K = \left| \frac{\delta y_{n+1}}{\delta y_n} - 1 \right| = \frac{Q}{2|u|^{3/2}} \cdot |\cos(2\pi y)| \geq 1. \quad (28)$$

Фазовий портрет системи при $Q \ll 1$ наведений на рис.1. Острівки стійкості, у котрих траєкторії регулярні, обумовлені множителем $\cos(2\pi y)$ у (28), завдяки якому нерівність не виконується для деякої області значень y .

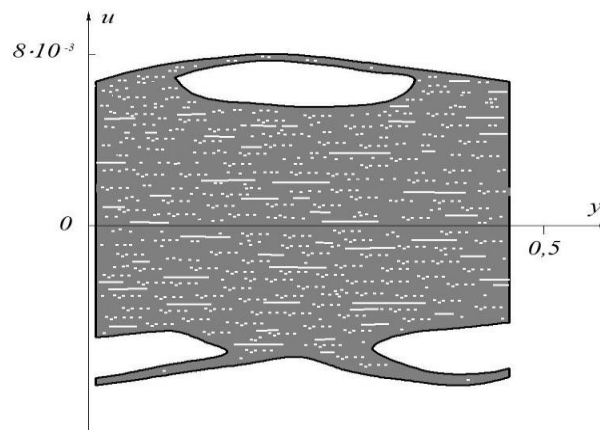


Рис.1. Фазова площина \hat{L} -відображення при $Q = 10^{-3}$, $\bar{y} = 0$.

Головна особливість \hat{L} -відображення (26), яка відрізняє його від стандартних відображень типу Чірікова-Тейлора [1,2], полягає в тому, що у рівнянні для зміни фази y змінна u , яка відіграє роль дії, стоїть у знаменнику, а не у чисельнику. При $Q \approx 1$, якщо первісно енергія була малою ($|u| \ll 1$), тоді її зміни $\delta u \approx Q$ також малі, й протягом тривалого часу величина $|u|$ може залишатись малою. Однак при $Q \gg 1$ ця картина суттєво змінюється. Вже за один поштовх маємо $|u| \approx Q$, навіть якщо початкове значення $|u| \ll 1$. Це одразу дає:

$$\delta y = |y_{n+1} - y_n| \approx \frac{1}{(2\pi \cdot Q^{1/2})} \ll 1. \quad (29)$$

Умова (29) означає дуже повільну, адіабатичну зміну фази y від одного поштовху до іншого. Розглянемо область значень $|u| \gg Q \gg 1$. У цій області зміна за один крок відображення буде:

$$|\delta u| \approx Q \ll |u|. \quad (30)$$

Умови (29) та (30) дозволяють з великою точністю апроксимувати \hat{L} -відображення (26) диференціальними рівняннями:

$$\begin{cases} \frac{du(n)}{du} = Q \sin(2\pi \cdot y(n)), \\ \frac{dy(n)}{du} = -\frac{1}{2\pi \cdot |u(n)|^{1/2}} + \tilde{y}. \end{cases} \quad (31)$$

Система (31) має регулярний, не випадковий розв'язок:

$$u^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot [1 + \cos(2\pi y)] + C \quad (u > 0), \quad (32)$$

який визначає інваріантну криву, де C – довільна постійна, й для простоти покладено $\tilde{y} = 0$. Однак рівняння (32) не описує реальну ситуацію, оскільки існують моменти часу, де вихідна система (31) втрачає зміст. За великих значень Q зміна фази y за один крок мала згідно (29). Так само повільно змінюються $\sin(2\pi y)$ та величина u у \hat{L} -

відображенні (26). Процес повільних змін u та y описується кривою (32), на котрій лежать точки траєкторії (u, y) . Так відбувається до тих пір, $\sin(2\pi y)$ не стає близьким до нуля. Зміна його знаку призводить до стрибкоподібної зміни на величину:

$$\delta u = |u_{n+1} - u_n| = Q \cdot |\sin(2\pi y_n)|. \quad (33)$$

За рахунок цього тонкого ефекту і відбувається слабка стохатизація динаміки частинки. Число кроків u_0 , через яке відбувається неадіабатична зміна фази y , легко оцінити з формули (29):

$$u_0 = 2\pi \cdot Q^{1/2} \gg 1. \quad (34)$$

Загальна картина такого руху чітко видна з рис.2. Фазова площина покривається, в основному, великими групами точок, число котрих порядку $2n_0$. Кожна група лежить на кривій (32) з деяким значенням константи C . При переході різниці $|u_{n+1} - u_n|$ через нуль рівняння (31) втрачають можливість бути застосованими. Однак далі вони знову стають такими, хоча розв'язком їх є крива (32), але вже з іншою константою C . Ці місця, де відбуваються пересканування траєкторії частинки на іншу криву з сім'ї кривих (32), чітко видні на рис 2 поблизу осі $0y$ при $u=0$. По суті, саме так можна зображати процес гамільтонівського перемежування на фазовій площині.

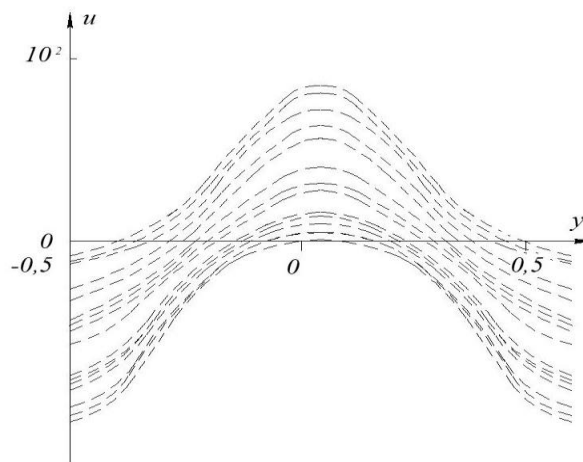


Рис.2. Фазова площина \hat{L} -відображення при $Q = 10$, $\bar{y} = 0$ відповідає випадку гамільтонівського перемежування

Сім'я кривих

$$u = u(y, C) \quad (35)$$

покриває фазову площину, і траєкторія системи являє собою ансамбль кривих (35), які «зшиті» при різних, випадково змінних значеннях константи C . Тепер можна поставити питання про граничне значення C_0 , тобто про те значення, котре визначає останню інваріантну криву на рис.2 зверху, яка є границею області стохастичної динаміки, що лежить знизу.

Чисельний аналіз показує, що:

$$C_0 \approx 0,5 \cdot Q^{1/3}. \quad (36)$$

Взагалі кажучи, границя області стохастичності може бути апроксимована кривою:

$$u = \frac{1}{4} \cdot Q^2 \cdot \{1 + \cos(2\pi y + \delta_0) + Q^{-2/3}\}^2, \quad (37)$$

де зсув фази $\delta_0 \rightarrow 0$ при $Q \rightarrow \infty$. Зазначимо, що при $Q \ll 1$ формула (37) досить точно описує границю стохастичності, яка може бути отримана з (27). Тому можна очікувати, що вона має більш універсальний характер, ніж це передбачалось при її виведенні.

Явище, розглянуте й описане вище, відноситься до розряду явищ стохастичної динаміки в умовах перемежування, а також слід зазначити, що саме воно призводить до прискорення частинки, хоча цей процес є значно більш повільним, ніж при малих значеннях Q . Енергія, яка досягається в результаті прискорення, може бути доволі значною по величині. З (37) впливає наступна оцінка:

$$u_{\max} \approx Q^2 \quad (38)$$

Дійсно, процес прискорення внаслідок стохастичного перемежування дуже чутливий до деталей механізму порушення адиабатичності. Оцінка (38) не є граничною, а описана картина перемежування – єдиною.

Розглянемо випадок, коли $\tilde{y} \neq 0$. Будемо також вважати, що $0 < \tilde{y} < 1$. Тоді з (31) впливає існування двох нових особливих точок з координатами:

$$\left(y_1 = 0, u_1 = 1/(4\pi^2 \cdot \tilde{y}^2) \right), \left(y_2 = \frac{1}{2}, u_2 = 1/(4\pi^2 \cdot \tilde{y}^2) \right). \quad (39)$$

Перша з них – гіперболічна, друга – еліптична. Якщо точка (y_1, u_1) не попадає у область стохастичності, тоді фазовий портрет системи аналогічний тому, який зображений на рис.2. Однак, якщо гіперболічна точка розміщена доволі низько, що залежить від величини \tilde{y} , тоді виникає відгалуження тонкого стохастичного каналу вповодж вусів сепаратрис, які проходять через точку (y_1, u_1) (рис.3). Утворена область хаотичної динаміки призводить до можливості значно більш сильних прискорень, ніж ті, що впливають з оцінки (38). Так, наприклад, на рис.3 вже за малої відмінності \tilde{y} від нуля ($\tilde{y} = 0,007$) ($u_{\max} \approx Q^3$). Висока чутливість прискорення до зміни параметра \tilde{y} супроводжується також різкими біфуркаційними змінами характеру перемежування. Тепер у цьому процесі приймають участь дві сім'ї регулярних траєкторій – траєкторій вже описаного типу та траєкторій вповодж сепаратрис.

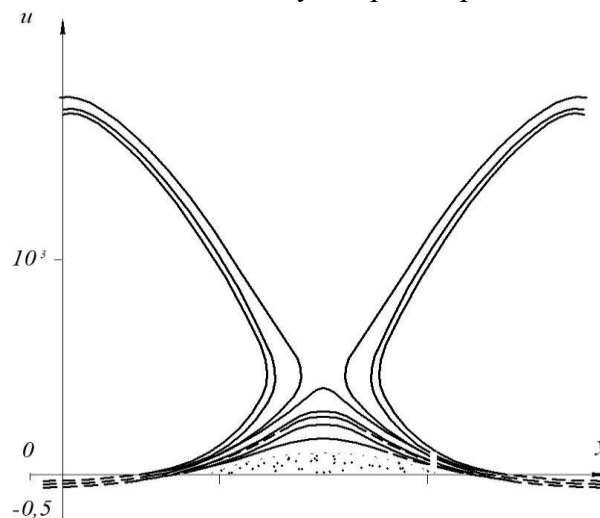
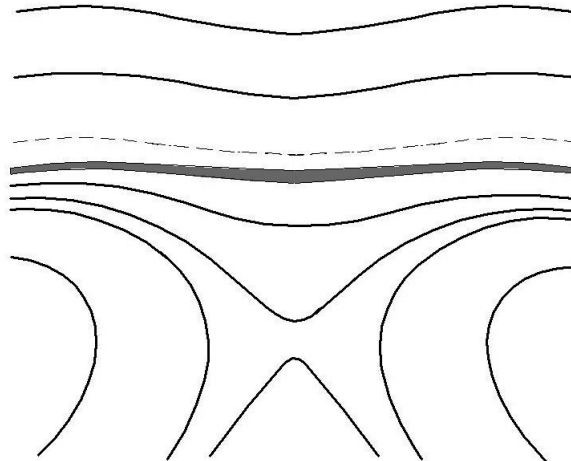


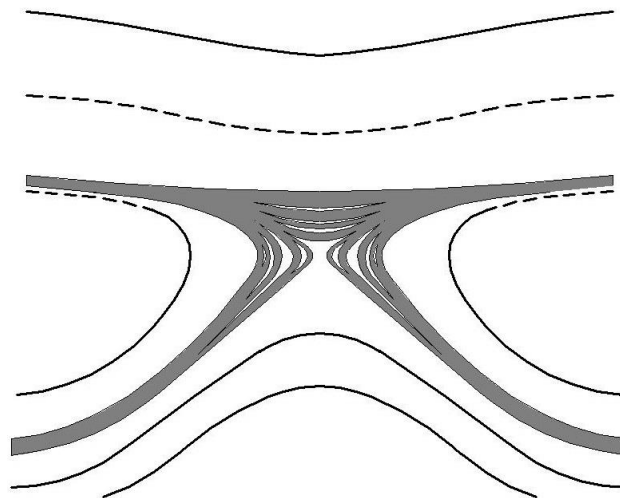
Рис.3. . Фазова площина \hat{L} -відображення при $Q = 10$, $\bar{y} = 0,007$ демонструє значні зміни картини перемежування

Приклад, розглянутий вище, показує, зокрема, що границя хаосу, визначена в [1] для стандартного відображення, не є універсальною величиною. Точно так само не є універсальним зв'язок між числом обертань останньої інваріантної кривої із золотим перерізом. Це є очевидним, виходячи з отриманих вище формул (32) та (37). Більш того, руйнування останньої інваріантної кривої може бути пов'язане не з переходом до т.з. глобального хаосу [1,2], а із з'єднанням всього лише двох стохастичних областей (рис.4). Руйнування інваріантної кривої біля межі хаосу пов'язане з «влипанням» сідла у область стохастичної динаміки.



А

Рис.4а. Фазовий портрет для випадку $Q = 10$ та $\tilde{y} = 0,003$



б

Рис.4б. Фазовий портрет для випадку $Q = 10$ та $\tilde{y} = 0,008$ (б)

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

У результаті проведеного дослідження було обґрунтовано фізико-механічну модель процесу перемешування в умовах просторово-часової хаотичної динаміки дискретно-континуальних систем, що супроводжується структурно-еволюційною перебудовою. Встановлено ключові властивості цього процесу на фазовій площині, зокрема виявлено особливості формування гамільтонівського перемешування. Показано, що часова еволюція перемешування характеризується неупорядкованим поєднанням тривалих інтервалів регулярних осциляцій, що свідчить про наявність

прихованої динамічної впорядкованості в системі. Аналогічні закономірності спостерігаються і в просторовому перемезуванні при русі суцільного середовища, що тісно пов'язано з явищем мультифрактальності та нерівномірним розподілом сингулярних властивостей у просторі й часі. Водночас встановлено, що гамільтонівське перемезування охоплює широкий спектр фізико-механічних задач, не обмежуючись випадками простої залежності зміни фази від ступеня дії, що визначає необхідність подальшого розвитку та уточнення підходів до дослідження даного явища.

6 ВИСНОВКИ

1. Обґрунтована фізико-механічна модель процесу перемезування у просторово-часовій хаотичній динаміці дискретно-континуальних систем з наявною структурно-еволюційною перебудовою.

2. Встановлені основні властивості процесу перемезування на фазовій площині й особливості утворення гамільтонівського перемезування.

3. Часова еволюція процесу перемезування зводиться до неупорядкованого «зшивання» довгих ділянок регулярних осциляцій. Саме існування таких ділянок свідчить про наявність значною мірою динамічної регулярності. Аналогічним чином виглядає й просторове перемезування при русі суцільного середовища. Цей процес суттєво пов'язаний з властивістю мультифрактальності, тобто з неоднорідним розподілом сингулярних чи фрактальних властивостей у просторі й у часі.

4. Гамільтонівське перемезування охоплює великий клас різних фізико-механічних задач. Це можуть бути, зокрема, не тільки ті задачі, у котрих зміна фази обернено пропорційна будь-якому ступеню дії. Тому дослідження у цій області вимагають подальших вдосконалень.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори не мають будь-яких фінансових чи нефінансових інтересів щодо матеріалів, представлених у цій статті, які слід розкривати.

Література

1. Zaslavsky G.M., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Chernikov A.A. Weak chaos and Quasi-Regular Patterns. – М.: Nauka Publishers, 1991. 240 p.
2. Zaslavsky G.M., Sagdeev R.Z. Nonlinear Physics. – N.Y.: Harwood, 1988. 368 p.
3. Lichtenberg A.J., Leiberman M.A. Regular and stochastic motion. – N.Y.: Springer-Verlag, 1983. 420 p.
4. Zaslavsky G.M. Stochasticity of dynamical systems. – М.: Nauka Publishers, 1984. 340 p.
5. Chernikov A.A., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Zaslavsky G.M. Weak chaos and structures. Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys. 1989. Vol.8.
6. Fermi E. //Phys. Rev. 1949. V.75. P. 1169.
7. Ulam S. //Proc.4th Berkeley Symp. on Math. and Prob. – Los Angeles: Berkeley, 1961. Vol.3. P.315.
8. Zaslavsky G.M., Sagdeev R.Z. Introduction to nonlinear physics. – М.: Nauka Publisher, 1988. 290 p.
9. Paladin G., Vulpiani A. //Phys. Rep. 1987. V.156. P. 148.
10. Stanley H.E., Meakin P. // Nature. 1988.V.335. P. 405.
11. Chirkov B.V. //Phys. Rep. 1979. V.52. P. 263.

References

1. Zaslavsky G.M., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Chernikov A.A. Weak chaos and Quasi-Regular Patterns. – М.: Nauka Publishers, 1991. 240 p.
2. Zaslavsky G.M., Sagdeev R.Z. Nonlinear Physics. – N.Y.: Harwood, 1988. 368 p.

3. Lichtenberg A.J., Lieberman M.A. Regular and stochastic motion. – N.Y.: Springer-Verlag, 1983. 420 p.
4. Zaslavsky G.M. Stochasticity of dynamical systems. – M.: Nauka Publishers, 1984. 340 p.
5. Chernikov A.A., Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Zaslavsky G.M. Weak chaos and structures. Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys. 1989. Vol.8.
6. Fermi E. //Phys. Rev. 1949. V.75. P. 1169.
7. Ulam S. //Proc.4th Berkeley Symp. on Math. and Prob. – Los Angeles: Berkeley, 1961. Vol.3. P.315.
8. Zaslavsky G.M., Sagdeev R.Z. Introduction to nonlinear physics. – M.: Nauka Publisher, 1988. 290 p.
9. Paladin G., Vulpiani A. //Phys. Rep. 1987. V.156. P. 148.
10. Stanley H.E., Meakin P. // Nature. 1988.V.335. P. 405.
11. Chirkov B.V. //Phys. Rep. 1979. V.52. P. 263

Стаття надійшла до редакції 06.11.2025

Стаття прийнята до друку 28.12.2025

Дата публікації статті 26.03.2026

Човнюк Юрій Васильович

Київський національний університет будівництва та архітектури,
к.т.н., доцент
проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна 03037
ychovnyuk@ukr.net
ORCID: 0000-0002-0608-0203

Чередніченко Петро Петрович

Київський національний університет будівництва та архітектури,
к.т.н., доцент
проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна 03037
petro_che@ukr.net
ORCID: 0000-0001-7161-661X

Остапушенко Ольга Павлівна

Київський національний університет будівництва та архітектури,
к.т.н., доцент
проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна 03037
olga_ost_17@ukr.net
ORCID 0000-0001-8114-349X

Кравченко Ігор Миколайович

Київський національний університет будівництва та архітектури,
асистент
проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна 03037
kim-ua@i.ua
ORCID: 0000-0001-7077-1546

Для посилань:

Човнюк Ю. В., Чередніченко П. П., Остапушенко О. П., Кравченко І. М. Аналіз просторово-часової хаотичної динаміки дискретно-континуальних систем з наявною структурно-еволюційною перебудовою. Механіка та математичні методи, 2026. Т. VIII. № 1. С. 95–107.

For references:

Yu. Chovnyuk, P. Cherednichenko, O. Ostapushchenko, I. Kravchenko (2026). Analysis of spatial-temporal chaotic dynamics of discrete-continuous systems with structural-evolutionary restructuring. Mechanics and Mathematical Methods. VIII (1). 95–107.

Аналіз просторово-часової хаотичної динаміки дискретно-континуальних систем з наявною структурно-еволюційною перебудовою © 2026 by Човнюк Ю. В., Чередніченко П. П., Остапушенко О. П., Кравченко І. М. is licensed under [CC BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)